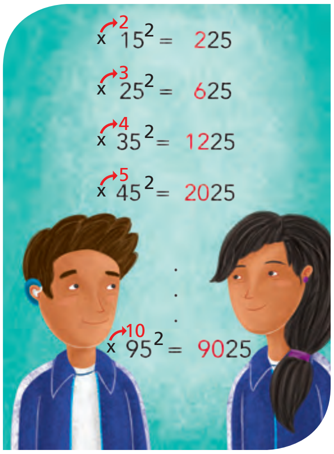
22. Ecuaciones cuadráticas 3

Sesión 1

Para empezar



¿Conoces el "truco" para encontrar rápidamente el resultado de multiplicar por sí mismo un número de dos cifras terminado en 5? Por ejemplo, 15 x 15, 25 x 25, 35 x 35. Consiste en multiplicar la cifra de las decenas por su sucesor y al resultado ponerle un 25 a la derecha. En el primer caso, sería 1 x 2 = 2, seguido de 25, con lo cual se obtiene 225. Prueba con las otras multiplicaciones y verás que siempre resulta. Lo importante es encontrar la explicación de por qué funciona el "truco" y cómo el lenguaje algebraico resulta útil. Propón una manera de explicarlo. Aquí verás que no hay truco, sino la aplicación de lo que sabes de álgebra hasta ahora. En esta secuencia analizarás la relación entre este "truco" y el álgebra, aprenderás a resolver ecuaciones cuadráticas por medio de la fórmula general y continuarás con el uso del lenguaje algebraico para resolver problemas.

Manos a la obra

El procedimiento de completar el cuadrado

1. Trabajen en equipo. Analicen el "truco" que se comentó en la sección "Para empezar". Observen que $(15)(15) = 15^2 = (10 + 5)^2$. Esta última expresión puede escribirse como el producto de dos binomios iguales, y este producto es equivalente a un trinomio.

a) ¿Cómo se obtiene el primer término de ese trinomio? _______________

b) ¿El segundo término? _______________ Y ¿el tercer término? _______________

Este trinomio se conoce como *trinomio cuadrado perfecto*. De acuerdo con lo anterior:

$$\underbrace{(10 + 5)^2}_{\text{Binomio al cuadrado}} = \overbrace{10^2 + 2(10)(5) + 5^2}^{\text{Trinomio cuadrado perfecto}}$$

Si en el segundo miembro se extrae el 10 como factor común de los dos primeros términos del trinomio, se obtiene:

$$\overbrace{10\,[10 + (2)(5)]}^{\text{Factorización}} + 5^2 = 10(10 + 10) + 5^2 =$$

$$(10)(20) + 5^2 = \underbrace{(1)(2)(100)}_{\text{Producto de las cifras de las decenas de los dos factores por cien}} + 25$$

Se observa que para obtener el resultado se multiplican las cifras de las decenas de 10 y 20, y al producto se le agregan los dos ceros de las unidades de esos números, que es lo mismo que multiplicar por 100 y, por último, a este producto se le suma el cuadrado de 5, que es 25. Por tanto, se tiene:

$$(1)(2)(100) + 25 = 200 + 25 = 225$$

De manera general, tenemos que el binomio al cuadrado es $(10a + 5)^2$, donde a es cualquier número positivo del 1 al 9. Al desarrollarlo se tiene:

$$\overbrace{(10a + 5)^2}^{\text{Binomio al cuadrado}} = \overbrace{100a^2 + 2(10a)5 + 5^2}^{\text{Trinomio cuadrado perfecto}} = \underbrace{100a^2 + 100a}_{\text{Términos con factor común}} + 5^2 = \overbrace{100\underbrace{a(a + 1)}_{\text{Números consecutivos}}}^{\text{Factorización}} + 5^2$$

2. Prueben este procedimiento para calcular el producto de las siguientes operaciones:

a) 25 x 25 =

b) 95 x 95 =

3. Analicen el siguiente enunciado: *El triple del cuadrado de un número menos cuatro veces el mismo número es igual a 15.*

a) En la tabla, expresen algebraicamente lo que se pide a partir del problema.

Un número cualquiera	El triple del cuadrado del número	El triple del cuadrado del número menos cuatro veces el mismo número	Ecuación: el triple del cuadrado de un número menos cuatro veces el mismo número es igual a 15	Ecuación en su forma canónica (igualada a cero)

b) Analicen la ecuación que formularon y apliquen el método de factorización para resolverla. Comenten cuáles son algunas de las dificultades que tienen al aplicar ese método y expliquen por qué. ______________________________

____

c) Encuentren al menos un número que cumpla con lo que plantea el enunciado y anótenlo aquí. ______________________________

4. Lean y analicen con apoyo de su maestro el procedimiento de la siguiente página para completar y obtener un trinomio cuadrado perfecto.

Una ecuación cuadrática siempre tiene dos raíces que pueden ser valores distintos o iguales. Por ejemplo, la ecuación $x^2 - 5x + 6 = 0$ tiene *dos raíces diferentes*: $x_1 = 2$ y $x_2 = 3$.
En cambio, la ecuación cuadrática $x^2 + 2x + 1 = 0$ tiene *dos raíces iguales*, lo cual puede verse si se expresa como producto de dos factores:

$$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)\,(x + 1) = 0.$$

Entonces, si se habla de los valores de las soluciones de esta ecuación, podría pensarse en $x = -1$ (una solución); pero si se habla de raíces, se tienen $x_1 = -1$ y $x_2 = -1$, y en este caso los valores de las raíces son iguales, es decir, la ecuación tiene *dos raíces iguales* o *raíz doble*.

Cuando se tienen ecuaciones cuadráticas de la forma: $x^2 + bx = 0$, $x^2 + bx + c = 0$, $ax^2 + bx = 0$ o $ax^2 + bx + c = 0$ es posible resolverlas utilizando el método para completar el trinomio cuadrado perfecto: $x^2 + 2xy + y^2$ en el primer miembro de la ecuación y, así, luego factorizar y resolver.

Si la ecuación es $x^2 + bx + c = 0$, entonces se puede expresar como: $x^2 + bx = -c$.
En el primer miembro de la ecuación anterior hay dos términos que corresponderán a los dos primeros términos del trinomio cuadrado perfecto: x^2 es el primer término al cuadrado y falta encontrar y^2. Así, $2y = b$, y al despejar y, se obtiene $y = \frac{b}{2}$ y, por lo tanto, $y^2 = \frac{b^2}{4}$. De este modo se obtiene el trinomio $x^2 + bx + \frac{b^2}{4}$, que es equivalente al binomio al cuadrado $\left(x + \frac{b}{2}\right)^2$. Al sustituir en la ecuación original, se agrega $\frac{b^2}{4}$ en ambos miembros para mantener la igualdad $x^2 + bx + \frac{b^2}{4} = \frac{b^2}{4} - c$.

Al factorizar el trinomio, queda: $\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{4} - c$, y al obtener la raíz cuadrada para encontrar las soluciones, se tiene: $\sqrt{\left(x + \frac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$ de donde $x + \frac{b}{2} = \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$

Al despejar: $x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$, se tienen dos raíces:

$$x_1 = -\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - c} \qquad\qquad x_2 = -\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$$

Si la ecuación cuadrática es de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, con el valor de a distinto de 0 y 1, esencialmente el procedimiento es el mismo que el anterior, sólo que primero se deben dividir los términos de la ecuación cuadrática entre el coeficiente a de x^2.

5. Con sus compañeros, y con apoyo de su maestro, usen el procedimiento para completar en su cuaderno el trinomio cuadrado perfecto que corresponde al enunciado de la actividad 3 y poder usar el método de factorización para encontrar sus soluciones.

6. Completen el trinomio cuadrado perfecto para resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas.

a) $2x^2 + 5x = -2$ **b)** $4x^2 - 11x - 3 = 0$

Uso de la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas

Sesión 2

1. Trabajen en equipo. Consideren el enunciado: *El triple del cuadrado de un número entero menos cuatro veces el mismo número es igual a 15*. Ahora, completen la siguiente tabla.

Ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$	**Coeficientes**		
	a	b	c
$3x^2 - 4x - 15 = 0$			

2. Lean la siguiente información y utilicen la fórmula para encontrar las soluciones de la ecuación que representan el enunciado.

Una ecuación cuadrática de cualquier tipo se puede resolver usando la *fórmula general*: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Para usarla, se requiere que la ecuación cuadrática esté expresada en su forma canónica: $ax^2 + bx + c = 0$

Y así identificar fácilmente los valores de los coeficientes a, b y c.
En la fórmula general se sustituyen a, b y c por los valores respectivos para realizar las operaciones indicadas y obtener las soluciones de acuerdo con los valores de las raíces, que son:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Posteriormente, se comprueba que son soluciones de la ecuación original.