20. Mínimo común múltiplo y máximo común divisor 2

Sesión 1

Para empezar

Christian Goldbach (1690 – 1764). Conjetura de Goldbach: “Todo número par mayor que 2 puede escribirse como suma de dos números primos”.

El conjunto de los números enteros tiene sorprendentes regularidades y continúa siendo un reto para los matemáticos. Por ejemplo, uno de los problemas aún sin resolver es el de la conjetura de Goldbach.

¿Será cierto que la suma de tres números enteros consecutivos siempre es un múltiplo de 3? Esta pregunta puede ser contestada mediante el uso del álgebra y de un concepto ya estudiado en la secuencia 10: el máximo común divisor (MCD).

Recordarás que tres números consecutivos pueden representarse de manera general así: a, $a + 1$ y $a + 2$. La suma de esos tres números se expresa: $a + (a + 1) + (a + 2) = a + a + 1 + a + 2 = 3a + 3$.

La expresión $3a + 3$ es un binomio y sus dos términos tienen un factor común. ¿Lo puedes identificar? Una vez identificado, se puede encontrar la expresión algebraica equivalente en forma factorizada como $3(a + 1)$. ¿Qué nos dice esta expresión? Que independientemente del valor de a, siempre será múltiplo de 3, puesto que lo contiene como factor.

En esta secuencia profundizarás tus conocimientos sobre el mcm y el MCD en el conjunto de los números enteros y los podrás generalizar al utilizar el álgebra.

Manos a la obra

Factores, divisores y lenguaje algebraico

1. Trabajen en pareja. Escriban expresiones equivalentes a cada monomio de manera que sean el producto de dos factores. Anótenlas en cada celda.

Monomios	Expresiones algebraicas equivalentes como producto de dos factores			
$6x^2$	$3(2x^2)$			
$12ab^2$	$2a(6b^2)$			
$8x^2y^3$	$2xy(xy^2)$			

a) ¿Cómo pueden verificar que las expresiones factorizadas que escribieron en cada fila de la tabla son equivalentes entre sí? ____________________

b) ¿Hay otras expresiones factorizadas que sean equivalentes a cada monomio? En caso afirmativo, anoten otro ejemplo en su cuaderno.

2. ¿Cuáles son todos los factores comunes de cada binomio y trinomio? Anótenlos en la celda correspondiente. Observen el ejemplo.

$4x^3 + 2x^2$	$12xy^2 - 3y^2$	$8a^2 b^2 - ab^2$	$3x^2 - 6xy$	$3x^2 - 6xy + 9y$
1, 2, x, $2x$, x^2, $2x^2$				

3. Con sus compañeros, y con apoyo del maestro, comparen sus resultados, identifiquen los errores y corrijan si es necesario. Después, lean y comenten la siguiente información.

Un factor común de dos o más números o expresiones algebraicas es cualquier número o expresión que es factor de todos los números o términos que componen la expresión algebraica, ya sea binomio, trinomio o polinomio. Por ejemplo, un factor común de los números 12 y 18 es el 3, pero no es el único. De esta forma, un factor común de las expresiones $3a^2 b^3$ y $6ab^2$ es ab.

El mayor factor común de dos o más números o monomios es su Máximo Común Divisor (MCD) y se obtiene con el producto de sus factores comunes con menor exponente. En el caso de 12 y 18 es 6, mientras que, en el caso de $3a^2 b^3$ y $6ab^2$ es $3ab^2$.

4. En la actividad 2 encontraron todos los factores comunes de cada expresión algebraica. Identifiquen ahora el MCD de cada una de esas expresiones y anótenlos en su cuaderno.

5. Clasifiquen las siguientes expresiones algebraicas. Anoten una M si es monomio, B si es binomio, T cuando sea trinomio y P si es polinomio.

☐ $3x^2 + 2x - 1$	☐ $2x^3y^2z$	☐ $5x^4y + 2x^3y^2 - x^2y^3 + xy^4$	☐ $6x^3y^2z$
☐ $5x^2 + 10x$	☐ $ax^2 + bx + c$	☐ $a^3b + a^2b^2 - ab^3 + 1$	☐ xy

6. Ahora, contesten lo siguiente.

a) La expresión xy es un factor de $2x^3y^2z$. Encuentren el otro factor que multiplicado por xy dé como producto $2x^3y^2z$. Esto es $xy(\qquad) = 2x^3y^2$.

b) Consideren las expresiones $2x^3y^2z$ y $6x^3y^2z$. Escriban una expresión que sea factor común de ambas. ____________________ Escriban el mayor factor común de las dos expresiones anteriores, es decir, el MCD. ____________________

7. Marquen con una ✓ las expresiones equivalentes a las de los incisos a) y b).

a) $5x^2 + 10x$ ☐ $x(5x + 10)$ ☐ $x(x + 10)$ ☐ $5x(x + 10)$ ☐ $5x(x + 2)$

b) $2x^3 + 4x^2 - 6x$ ☐ $2(x^3 + 2x^2 - 3x)$ ☐ $x(x^3 + x^2 - x)$ ☐ $2x(x^2 + 2x - 3)$

c) De las expresiones equivalentes que marcaron, encierren la que contiene como factor común el MCD.

8. Subrayen las expresiones de los incisos en los cuales, al factorizar, se extrajo el MCD.

a) $2a^3b^2 + 4a^2b = a^2b(2ab + 4)$

b) $3x^2y^4 - 6x^3y^2 = 3x^2y(y^3 - 2xy)$

c) $5m^3n^4 + 10m^2n^2 = 5(m^3n^4 + 2m^2n^2)$

d) $8p^5q^3 - 4p^3q^5 = 4p^3q^3(2p^2 - q^2)$

9. Con sus compañeros, y con apoyo del maestro, comparen sus respuestas y comenten cómo las obtuvieron.

Sesión 2

Algunas propiedades de los números

1. Trabajen en equipo. Analicen las preguntas y hagan lo que se indica.

¿Será cierto que la suma de dos números impares siempre es un número par? ________

En su cuaderno, prueben con algunos ejemplos y escriban las respuestas a los incisos.

a) Representen algebraicamente en su cuaderno lo que se pide.

- Un número impar.
- Otro número impar diferente del anterior.
- La suma de esos números impares reduciendo términos semejantes.
- La suma que escribieron, ¿tiene algún factor común? ¿Cuál o cuáles?
- Una expresión factorizada de la suma de dos números impares.

b) ¿Cuál es la conclusión que se obtiene de la expresión anterior?

2. Completen la tabla y después hagan lo que se indica. Hay dos columnas resueltas.

Números de dos cifras diferentes	27			97		
Mismos números con las cifras invertidas	72			79		
Diferencia entre ambos números	45			18		