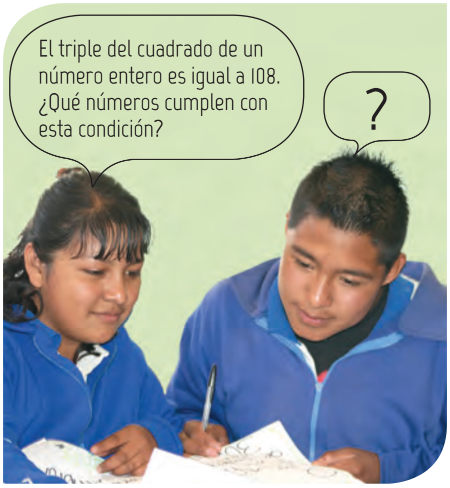
13. Ecuaciones cuadráticas 2

Sesión 1

Para empezar



Uno de los grandes retos para los matemáticos a lo largo de la historia fue el desarrollo del lenguaje algebraico, considerado como un conjunto de conceptos, expresiones y símbolos que permiten estudiar el conocimiento existente y descubrir uno nuevo. El lenguaje algebraico se inició con los griegos y se le atribuye a Diofanto, en el siglo III, el haber utilizado por primera vez una literal para representar una incógnita en una ecuación. Los griegos se enfocaron en el estudio de la geometría, pero desconocían los números negativos y el cero, por lo que no lograron un mayor avance en el conocimiento algebraico.

Después de los griegos, fueron los matemáticos indios y árabes quienes hicieron aportes importantes al desarrollo del lenguaje algebraico, por ejemplo, el uso de los números negativos y la invención del sistema decimal, que hasta la fecha es la base de nuestro sistema de numeración. Las contribuciones de los matemáticos indios fueron recogidas en una obra del matemático árabe Al-Juarismi (*ca*. 850 n.e.), de cuyo nombre derivan las palabras álgebra y algoritmo.

Fue hasta el siglo XVI cuando aparecieron los primeros ejemplos de álgebra simbólica, en la obra del matemático francés Francisco Vieta (1540-1603).

En esta secuencia aprenderás a distinguir varios tipos de ecuaciones de segundo grado, los casos que se presentan respecto a las soluciones o raíces, y conocerás otros procedimientos para resolver las ecuaciones que te permitirán solucionar problemas de manera más eficiente.

Glosario
Ca. es la abreviatura del término latino *circa*, significa "aproximadamente", se usa cuando no se tienen fechas exactas.

Manos a la obra

Ecuaciones de la forma $ax^2 + c = 0$

1. Resuelve la siguiente situación, al completar el procedimiento que se indica.

El triple del cuadrado de un número entero es igual a 108. ¿Qué números cumplen con esta condición?

____

a) Representa algebraicamente:

- Un número entero cualquiera: ______________
- El cuadrado de un número cualquiera: ______________
- El triple del cuadrado de un número cualquiera: ______________

b) De acuerdo con la situación planteada, la expresión anterior es igual a 108. Escribe la ecuación que representa esta igualdad.____________________________

c) Comparen con sus compañeros de grupo la ecuación que formularon para ver si es la misma. Si no lo es, expliquen a qué se debe y, con ayuda del maestro, decidan quiénes y por qué tienen la razón.

d) Trabajen en equipo. Comenten lo que conviene hacer para resolver la ecuación.

¿Cuáles son las raíces de la ecuación? x_1 = ________________ x_2 = ________________

Verifiquen, en su cuaderno, si ambas raíces satisfacen la ecuación y comenten si éstas son solución del problema y por qué. ____________________________

2. Desarrollen un procedimiento similar al de la actividad 1 para resolver, en su cuaderno, el siguiente problema. Usen 3.14 como valor de π. Después de resolver, contesten las preguntas.

El área de un círculo es 153.86 cm^2. ¿Cuánto mide el radio del círculo? ________________

a) En este caso hay dos expresiones algebraicas equivalentes que representan el área del círculo, ¿cuáles son esas expresiones? ____________________________

b) ¿Cuál es la ecuación que permite resolver el problema? ________________________

c) ¿Cuáles son las raíces de la ecuación? r_1 = ________________ r_2 = ________________

d) Expliquen por qué sólo una de las raíces puede ser solución del problema: ________________

____

e) ¿Cuánto mide el radio del círculo? ____________________________

3. Con base en el siguiente problema, anoten lo que se pide en la tabla: *El largo de un terreno rectangular mide el triple que el ancho y su área es igual a 588 m^2. ¿Cuáles son las medidas del terreno?*

Ancho = ________________________ Largo = ________________________

Para obtener las raíces de la ecuación pueden usar el método de ensayo y error que utilizaron en la secuencia 4.

Representación algebraica de…			Área conocida	Ecuación	Raíces
ancho	largo	área			x_1 = x_2 =

4. En grupo y con la ayuda de su maestro, lean y comenten lo siguiente:

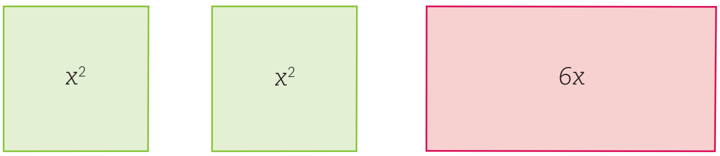
La forma general de las ecuaciones de segundo grado es $ax^2 + bx + c = 0$, que es un trinomio de segundo grado, donde $a \neq 0$, lo que significa que el valor de a no puede ser cero. Cuando a una ecuación de segundo grado le falta alguno de los términos bx o c, se dice que es una *ecuación incompleta*.

Una ecuación cuadrática, como $2x^2 = 50$, no tiene el segundo término (llamado término lineal). Para resolverla, primero se divide entre 2 cada miembro, en este caso resulta $x^2 = 25$. Después, se extrae la raíz cuadrada de ambos miembros y se obtienen las raíces: $x_1 = 5$, $x_2 = -5$

5. De acuerdo con lo anterior, comenten por qué a una ecuación de segundo grado incompleta no puede faltarle el término ax^2.

Sesión 2 Ecuaciones de la forma $ax^2 + bx = 0$

1. Trabajen en equipo. Completen lo que se pide para resolver el siguiente problema: *Se tienen dos cuadrados iguales, de área x^2 cada uno. La suma de las áreas de estos dos cuadrados es igual a un rectángulo de área 6x. ¿Cuánto mide el lado del cuadrado?*



a) ¿Cuál es la expresión algebraica que representa la suma de las áreas de los dos cuadrados? ______________________

____

b) ¿Cuál es la ecuación que relaciona el área de los dos cuadrados con el área del rectángulo?

____

c) Comparen la ecuación que escribieron con las de otros equipos. Si no es la misma, averigüen a qué se debe y quién tiene razón. ______________________

d) Busquen un número que satisfaga la ecuación. Anótenlo aquí: x_1 = ______________________

e) Anoten en la tabla las medidas que se piden y verifiquen que cumplen con las condiciones del problema.

Lado de un cuadrado	Área de un cuadrado	Área de los dos cuadrados	Ancho del rectángulo	Largo del rectángulo	Área del rectángulo

2. En grupo, comenten la manera en que encontraron las medidas para completar la tabla anterior. Luego, lean y comenten la siguiente información para responder lo que se pide.

A las ecuaciones cuadráticas de la forma $ax^2 + bx = 0$ como $2x^2 = 6x$, que es equivalente a $2x^2 - 6x = 0$ les falta el término c, llamado término independiente.

Un procedimiento para resolver estas ecuaciones, distinto al de ensayo y error, consiste en expresar el primer miembro de la ecuación como un producto de dos factores, es decir, hay que factorizar el primer miembro.

- El primer factor es 2x ya que 2 es el MCD de 2 y 6, mientras que x es el MCD de x^2 y x. Aquí 2x es el MCD de los términos del primer miembro de la ecuación.
- El segundo factor se obtiene al dividir cada término del primer miembro entre el MCD, que es 2x, de donde queda $2x(x - 3) = 0$. Esta ecuación es equivalente a la expresión original. Cuando el producto de dos números es igual a cero, es porque uno de los dos factores es cero. A esto se le conoce como *propiedad del cero en la multiplicación* o *propiedad de producto cero*.