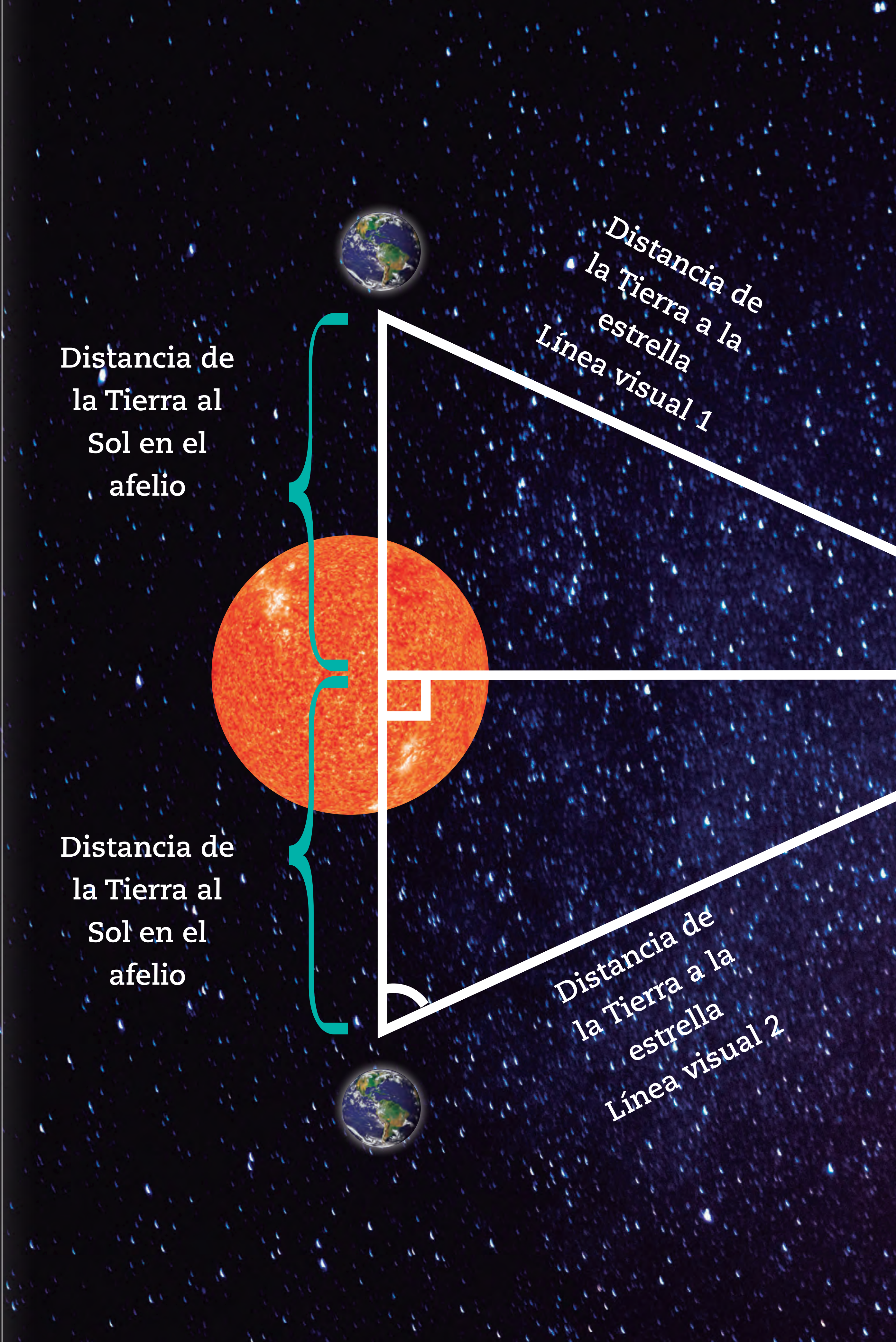
Matemáticas

Tercer grado.

TELEsecundaria

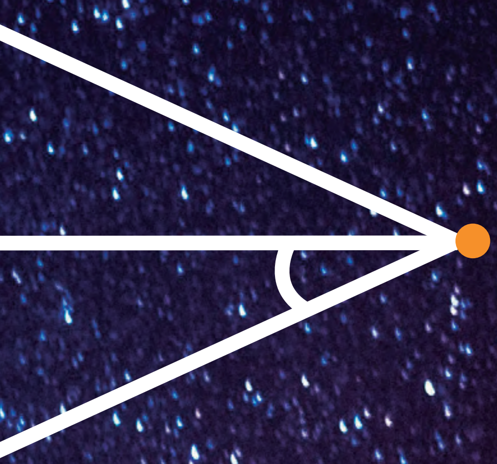

Distancia de la Tierra al Sol en el afelio
Distancia de la Tierra al Sol en el afelio
Distancia de la Tierra a la estrella
Línea visual 1
Distancia de la Tierra a la estrella
Línea visual 2

Bloque 3

La trigonometría en el Universo

Todos nos hemos maravillado al ver, en alguna noche despejada, el cielo lleno de estrellas. Es maravilloso pensar en la inmensidad del Universo y en la posibilidad de conocer la distancia a la que se encuentran esas estrellas.

¿Sabías que existe un método para saberlo? Se le conoce como *paralaje estelar* y consiste en establecer relaciones entre algunas distancias que ya se conocen y un objeto fijo en dos momentos diferentes, además se hace uso de las razones trigonométricas que estudiarás en este bloque.



20. Mínimo común múltiplo y máximo común divisor 2

Para empezar

Sesión 1

Christian Goldbach (1690 – 1764). Conjetura de Goldbach: "Todo número par mayor que 2 puede escribirse como suma de dos números primos".

El conjunto de los números enteros tiene sorprendentes regularidades y continúa siendo un reto para los matemáticos. Por ejemplo, uno de los problemas aún sin resolver es el de la conjetura de Goldbach.

¿Será cierto que la suma de tres números enteros consecutivos siempre es un múltiplo de 3? Esta pregunta puede ser contestada mediante el uso del álgebra y de un concepto ya estudiado en la secuencia 10: el máximo común divisor (MCD).

Recordarás que tres números consecutivos pueden representarse de manera general así: a, $a + 1$ y $a + 2$. La suma de esos tres números se expresa: $a + (a + 1) + (a + 2) = a + a + 1 + a + 2 = 3a + 3$.

La expresión $3a + 3$ es un binomio y sus dos términos tienen un factor común. ¿Lo puedes identificar? Una vez identificado, se puede encontrar la expresión algebraica equivalente en forma factorizada como $3(a + 1)$. ¿Qué nos dice esta expresión? Que independientemente del valor de a, siempre será múltiplo de 3, puesto que lo contiene como factor.

En esta secuencia profundizarás tus conocimientos sobre el mcm y el MCD en el conjunto de los números enteros y los podrás generalizar al utilizar el álgebra.

Manos a la obra

Factores, divisores y lenguaje algebraico

1. Trabajen en pareja. Escriban expresiones equivalentes a cada monomio de manera que sean el producto de dos factores. Anótenlas en cada celda.

Monomios	Expresiones algebraicas equivalentes como producto de dos factores			
$6x^2$	$3(2x^2)$			
$12ab^2$	$2a(6b^2)$			
$8x^2y^3$	$2xy(xy^2)$			

a) ¿Cómo pueden verificar que las expresiones factorizadas que escribieron en cada fila de la tabla son equivalentes entre sí? ______________________________

b) ¿Hay otras expresiones factorizadas que sean equivalentes a cada monomio? En caso afirmativo, anoten otro ejemplo en su cuaderno.

2. ¿Cuáles son todos los factores comunes de cada binomio y trinomio? Anótenlos en la celda correspondiente. Observen el ejemplo.

$4x^3 + 2x^2$	$12xy^2 - 3y^2$	$8a^2b^2 - ab^2$	$3x^2 - 6xy$	$3x^2 - 6xy + 9y$
$1, 2, x, 2x, x^2, 2x^2$				

3. Con sus compañeros, y con apoyo del maestro, comparen sus resultados, identifiquen los errores y corrijan si es necesario. Después, lean y comenten la siguiente información.

Un factor común de dos o más números o expresiones algebraicas es cualquier número o expresión que es factor de todos los números o términos que componen la expresión algebraica, ya sea binomio, trinomio o polinomio. Por ejemplo, un factor común de los números 12 y 18 es el 3, pero no es el único. De esta forma, un factor común de las expresiones $3a^2b^3$ y $6ab^2$ es ab.

El mayor factor común de dos o más números o monomios es su Máximo Común Divisor (MCD) y se obtiene con el producto de sus factores comunes con menor exponente. En el caso de 12 y 18 es 6, mientras que, en el caso de $3a^2b^3$ y $6ab^2$ es $3ab^2$.

4. En la actividad 2 encontraron todos los factores comunes de cada expresión algebraica. Identifiquen ahora el MCD de cada una de esas expresiones y anótenlos en su cuaderno.

5. Clasifiquen las siguientes expresiones algebraicas. Anoten una M si es monomio, B si es binomio, T cuando sea trinomio y P si es polinomio.

☐ $3x^2 + 2x - 1$	☐ $2x^3y^2z$	☐ $5x^4y + 2x^3y^2 - x^2y^3 + xy^4$	☐ $6x^3y^2z$
☐ $5x^2 + 10x$	☐ $ax^2 + bx + c$	☐ $a^3b + a^2b^2 - ab^3 + 1$	☐ xy

6. Ahora, contesten lo siguiente.

a) La expresión xy es un factor de $2x^3y^2z$. Encuentren el otro factor que multiplicado por xy dé como producto $2x^3y^2z$. Esto es $xy(\qquad) = 2x^3y^2$.

b) Consideren las expresiones $2x^3y^2z$ y $6x^3y^2z$. Escriban una expresión que sea factor común de ambas. _______________ Escriban el mayor factor común de las dos expresiones anteriores, es decir, el MCD. _______________

7. Marquen con una ✓ las expresiones equivalentes a las de los incisos a) y b).

a) $5x^2 + 10x$ ☐ $x(5x + 10)$ ☐ $x(x + 10)$ ☐ $5x(x + 10)$ ☐ $5x(x + 2)$

b) $2x^3 + 4x^2 - 6x$ ☐ $2(x^3 + 2x^2 - 3x)$ ☐ $x(x^3 + x^2 - x)$ ☐ $2x(x^2 + 2x - 3)$

c) De las expresiones equivalentes que marcaron, encierren la que contiene como factor común el MCD.

8. Subrayen las expresiones de los incisos en los cuales, al factorizar, se extrajo el MCD.

a) $2a^3b^2 + 4a^2b = a^2b(2ab + 4)$

b) $3x^2y^4 - 6x^3y^2 = 3x^2y(y^3 - 2xy)$

c) $5m^3n^4 + 10m^2n^2 = 5(m^3n^4 + 2m^2n^2)$

d) $8p^5q^3 - 4p^3q^5 = 4p^3q^3(2p^2 - q^2)$

9. Con sus compañeros, y con apoyo del maestro, comparen sus respuestas y comenten cómo las obtuvieron.

Sesión 2

Algunas propiedades de los números

1. Trabajen en equipo. Analicen las preguntas y hagan lo que se indica.

¿Será cierto que la suma de dos números impares siempre es un número par? _______

En su cuaderno, prueben con algunos ejemplos y escriban las respuestas a los incisos.

a) Representen algebraicamente en su cuaderno lo que se pide.

- Un número impar.
- Otro número impar diferente del anterior.
- La suma de esos números impares reduciendo términos semejantes.
- La suma que escribieron, ¿tiene algún factor común? ¿Cuál o cuáles?
- Una expresión factorizada de la suma de dos números impares.

b) ¿Cuál es la conclusión que se obtiene de la expresión anterior?

2. Completen la tabla y después hagan lo que se indica. Hay dos columnas resueltas.

Números de dos cifras diferentes	27			97		
Mismos números con las cifras invertidas	72			79		
Diferencia entre ambos números	45			18		

a) Verifiquen que, en todos los casos, la diferencia entre ambos números es divisible entre 9.

b) Completen el proceso siguiente para mostrar que la propiedad anterior se cumple siempre.

- Representación algebraica de un número de dos cifras: $10a + b$.
- Representación algebraica del mismo número con las cifras invertidas. ______
______
- Diferencia entre ambos números: $(10a + b) - ($ $) =$ ______
- La expresión obtenida, ¿tiene algún factor común? ______
¿Cuál o cuáles? ______
______
- Expresión factorizada de la diferencia. ______

c) En su cuaderno, anoten la conclusión que se obtiene de la expresión factorizada.

3. Contesten en su cuaderno: ¿será cierto que cualquier número de dos cifras, en el que la cifra de las decenas es igual a la cifra de las unidades, uno de sus factores es 11?

a) Si su respuesta es no, anoten un ejemplo que lo muestre.

b) Si su respuesta es sí, muéstrenlo algebraicamente haciendo lo que se indica.

- Representen algebraicamente un número de dos cifras en el que la cifra de las decenas sea igual a la de las unidades donde uno de los dos factores es 11.
- Simplifiquen la expresión anterior.
- Anoten la conclusión que obtuvieron de la expresión anterior.

Dato interesante
En 1742, el matemático Christian Goldbach envió una carta al también matemático Leonhard Euler, en la que afirmaba, sin demostrarlo, que: "Todo número par mayor que 2 es la suma de dos números primos". Por ejemplo, 30 = 23 + 7. Hasta ahora, dicha afirmación no ha podido ser demostrada.

4. Relacionen ambas columnas con una línea.

Múltiplo de 5	a^4b^4
Factor común de $(3a + a)$	$3a + 2$
MCD de $a^5 b^4$ y $a^4 b^4$	$5a$
Múltiplo de 3 más dos	a

5. Con tus compañeros, y con apoyo del maestro, comparen sus respuestas, identifiquen los errores y corrijan. Luego, lean y comenten lo siguiente.

Un número par se representa de manera general como $2n$, puesto que, independientemente del valor entero de n, el número $2n$, siempre será múltiplo de 2.

Un número impar se representa, de manera general, como $2n + 1$, puesto que, si a un número par se le suma 1, se obtiene un número impar.

Para terminar

El factor común de una expresión algebraica

1. Trabajen en equipo. Resuelvan los siguientes problemas en su cuaderno.
Anoten las medidas de los lados del rectángulo para que el área sea la que se indica. Usen expresiones algebraicas.

Área $= 3x^2 + 6x$

a) Verifiquen que, al multiplicar largo por ancho, obtienen el área.
b) Luego, asignen un valor a x y obtengan el valor del área y del perímetro.

2. Anoten las medidas de los lados del rectángulo para que el perímetro sea el que se indica. Usen expresiones algebraicas.

Perímetro $= 8x + 12$

a) Verifiquen que, al sumar las medidas de los cuatro lados, obtienen el perímetro.
b) Después, asignen un valor a x y obtengan el valor del área y del perímetro de este rectángulo.

3. En grupo, comparen sus respuestas y comenten de qué manera determinaron las medidas de las dimensiones de los rectángulos.

4. En su cuaderno, expresen como producto de dos factores el número 168, luego, usen cada pareja de factores para elaborar una tabla basada en el ejemplo de la izquierda.

Sumandos	84 y 2
Suma	86
Producto	168

a) Con la suma y el producto de la primera columna se puede formular la ecuación $x^2 + 86x + 168 = 0$.
- ¿Cuál es la forma factorizada de esta ecuación? ______________
- ¿Cuáles son las soluciones de la ecuación?

$x_1 =$ ______________ $x_2 =$ ______________

b) En su cuaderno, formulen otra ecuación de segundo grado con la suma y el producto de alguna de las columnas y procedan de manera similar al inciso a).

5. Comparen los resultados de la tabla con los de sus compañeros. Con apoyo de su maestro, comenten en grupo cuáles son las factorizaciones de las ecuaciones que plantearon y sus soluciones, así como en qué casos hubo respuestas diferentes que son correctas.

6. Inventen una división en la que el divisor sea 12 y el residuo 5. Después, comparen sus respuestas en grupo y contesten las preguntas de la siguiente página en su cuaderno.

a) ¿Cuántas y cuáles divisiones pueden inventar que cumplan con las condiciones mencionadas?

b) Marquen con una ✓ la expresión general que permite encontrar el dividendo de la operación que inventaron.

☐ $12n + 5$ ☐ $12n - 5$ ☐ $5n + 12$ ☐ $5n - 12$

c) ¿Cuál de los términos de la división está representado por n?

7. El producto de dos números es 2 688. Escriban en su cuaderno, ¿cuál es el producto del doble del primer número por el triple del segundo número? Justifiquen su respuesta.

8. Respondan lo siguiente: ¿será cierto que si se suma un número más su doble, más su triple, más su cuádruple, el resultado es un número que termina en cero? ____________
Justifiquen su respuesta. ____

9. Consideren tres números enteros consecutivos cualesquiera y hagan en su cuaderno lo que se indica.

a) Representen algebraicamente los tres números.

b) Eleven al cuadrado el número de en medio.

c) Obtengan el producto del primer número por el tercero.

d) Al cuadrado del número de en medio, réstenle el producto del primero por el tercero. ¿Cuál es el resultado?

e) Describan la propiedad anterior.

10. Con apoyo de sus compañeros y del maestro, comparen sus resultados, identifiquen los errores y corrijan.

Dato interesante
En matemáticas aún falta mucho por descubrir, por ejemplo, la conjetura de Collatz que dice: "Dado cualquier número natural, se aplica una de estas dos sencillas reglas: si es par, se divide entre dos; si es impar, se multiplica por 3 y se le suma 1. Al número restante se le aplican las mismas reglas, y así hasta terminar. Los últimos números terminarán irremediablemente en 4, 2 y el final en 1". ¿Por qué ocurre esto?

11. Como hemos visto, la suma de tres números enteros consecutivos es múltiplo de 3. Comenten y respondan en su cuaderno: ¿será múltiplo de 4 la suma de cuatro números consecutivos?, y ¿múltiplo de 5 la suma de cinco números consecutivos? ¿Qué condición debe cumplir n para que la suma de n números consecutivos sea múltiplo de n?

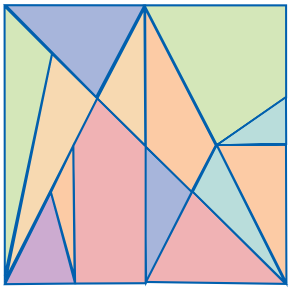
12. Observen el recurso audiovisual *Factor común de una expresión algebraica* para analizar otras expresiones algebraicas en que se aplican el mcm y el MCD.

13. Utilicen el recurso informático *Aplicaciones del mcm y del MCD* para resolver situaciones en las que se aplican el mcm y el MCD.

21. Figuras geométricas y equivalencia de expresiones de segundo grado 3

Sesión 1

Para empezar



Stomachion, rompecabezas geométrico.

El Stomachion es el rompecabezas geométrico más antiguo que se conoce; está integrado por 14 piezas que, juntas, forman un cuadrado. Fue diseñado por Arquímedes (*ca.* 287-212 a. n. e.), filósofo, físico y matemático que vivió en la antigua Grecia. El Stomachion también recibe el nombre de Loculus de Arquímedes, quien lo creó con la finalidad de investigar diversas formas de construir un cuadrado a partir de los diferentes reacomodos que se pueden dar a sus piezas. Recientemente se encontraron 536 formas diferentes de acomodar las piezas para armarlo. ¿Reconoces las figuras geométricas que lo forman? ¿Recuerdas cómo se expresa la fórmula para calcular el área de cada una? ¿Cambiará el área del cuadrado si se acomodan las piezas de diferente forma? ¿Cambiará el área de cada figura que forma parte del rompecabezas al colocarlas en diferente posición? ¿Cuál es el área total del cuadrado? Si representáramos con literales las medidas de las figuras que forman el rompecabezas, ¿cuántas expresiones algebraicas equivalentes podríamos obtener para representar el área del cuadrado?

En esta secuencia aplicarás los conocimientos adquiridos en secuencias anteriores para determinar si dos o más expresiones algebraicas cuadráticas son equivalentes.

Manos a la obra

Expresiones cuadráticas equivalentes

1. Trabajen en pareja. Escriban una expresión cuadrática equivalente a cada una de las anteriores, pero que esté factorizada, es decir, que esté expresada como el producto de dos factores. Luego, anoten cómo encontraron los dos factores de cada una de las expresiones.

Polinomio	Factorización	Cómo encontrar los factores que permiten obtener el polinomio
a) $x^2 + 2xy + y^2$		
b) $x^2 + ax + bx + ab$		

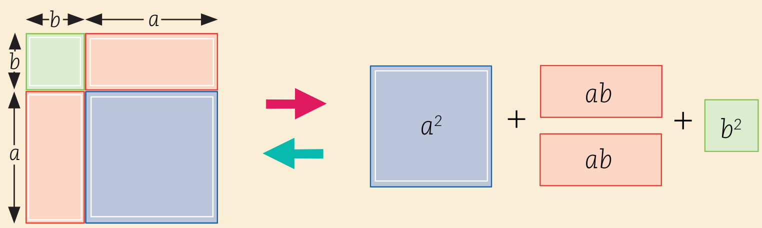
2. Completen la siguiente tabla según se indica.

Expresión 1	Signo = o ≠	Expresión 2	Justificación
a) $(x + y)^2$		$x^2 + y^2$	
b) $x^2 + ax + bx + ab$		$x^2 + (a + b)x + ab$	
c) $(x + a)(x + b)$		$x^2 + 2x(ab) + (a + b)$	
d) $x^2 + 2xy + y^2$		$x + xy + x + xy$	

3. Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Comenten qué hicieron para comprobar si sus expresiones eran o no equivalentes.

4. Enseguida, con apoyo del maestro, realicen una lectura comentada del siguiente recuadro.

En un trinomio de la forma
$a^2 + 2ab + b^2$
se observa que:
Los términos primero y tercero, a^2 y b^2 son cuadrados.
El segundo término corresponde al doble del producto de sus raíces.
Por lo tanto, para descomponer en dos factores el trinomio, se extrae la raíz cuadrada a los términos elevados al cuadrado y se obtienen los dos factores cuyo producto será el trinomio dado.

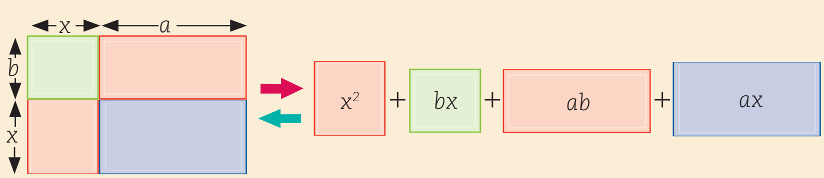


$$a^2 + 2ab + b^2$$

$$\sqrt{a^2} \qquad \sqrt{b^2}$$

$$(a+b)(a+b) = (a+b)^2$$

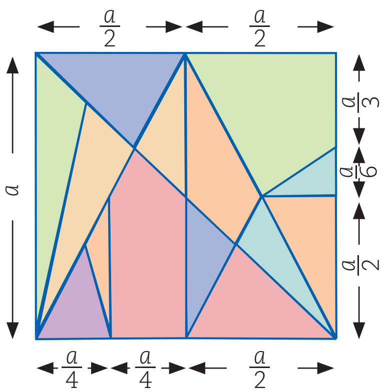
En un trinomio de la forma
$x^2 + (a + b)\,x + ab$
se observa que:
El trinomio sólo tiene un término elevado al cuadrado.
El tercer término es el producto de dos números diferentes.
El segundo término resulta de sumar los dos números diferentes y multiplicarlos por la raíz del primer término.



Para factorizarlo, se extrae la raíz cuadrada del término elevado al cuadrado y se buscan dos números que, al multiplicarse, den el término independiente del trinomio y que al sumarse se obtenga el coeficiente del término lineal.

Sesión 2

El rompecabezas de Arquímedes

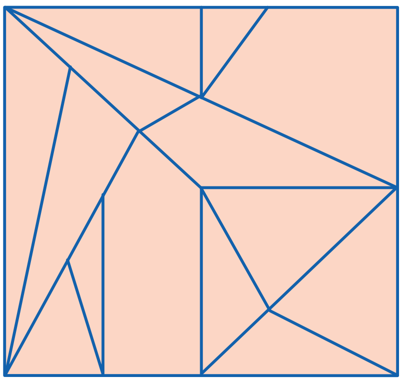


1. Trabajen en equipo. Con la información anotada en el rompecabezas que se muestra a la izquierda, y considerando que todas sus piezas forman un cuadrado, realicen lo que se pide en su cuaderno.

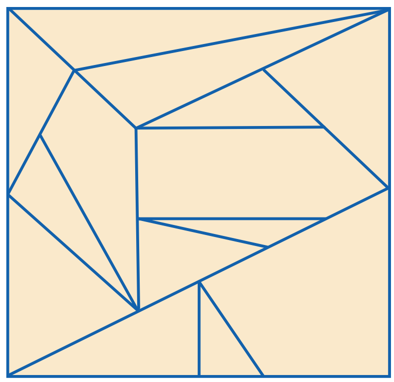
a) Escriban tres expresiones equivalentes que representen el área que ocupa todo el rompecabezas.

b) Respondan, ¿cómo comprobaron que son equivalentes las expresiones anteriores?

2. Recorten el rompecabezas de la página 279 y armen las dos figuras que se muestran enseguida.



Rompecabezas 1



Rompecabezas 2

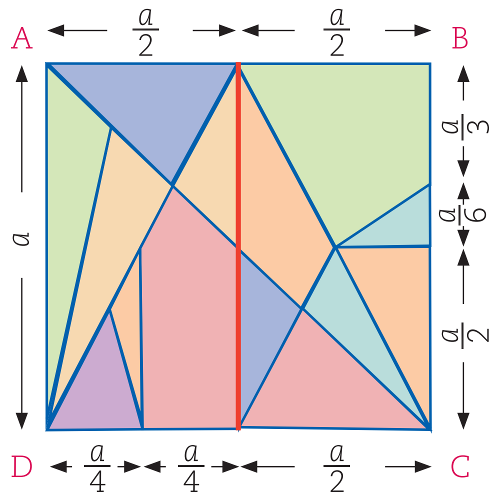
3. Escriban debajo de cada rompecabezas la expresión algebraica que identifique la medida de los lados de sus figuras en función de la longitud del cuadrado que forman.

4. Anoten una expresión que represente el área de cada rompecabezas y, en su cuaderno, hagan lo que consideren necesario para verificar si las dos expresiones son equivalentes.

Área del rompecabezas 1	Área del rompecabezas 2

5. Comparen sus respuestas con las de sus compañeros de grupo. Si hay diferencias, analicen a qué se deben y con ayuda de su maestro lleguen a conclusiones.

6. Observen que la distribución de las piezas del rompecabezas, mostrado a la derecha, permite ver el cuadrado dividido perfectamente en dos rectángulos delimitados por el segmento vertical rojo.



a) Anoten una expresión algebraica que represente el área de cada rectángulo.

Rectángulo	Área
Izquierdo	
Derecho	

b) ¿Son iguales las áreas de los dos rectángulos? ____________________

Justifiquen su respuesta. ____________________

____

7. Ahora identifiquen con la letra *Y* la diagonal que se ha trazado en el cuadrado. Los triángulos ABC y ADC son congruentes, por tanto, las medidas de sus lados correspondientes son iguales. Escriban las expresiones que corresponden a los tres lados de cada triángulo y comprueben que esto es verdad, dando un valor cualquiera a la literal.

Triángulo ABC		Triángulo ADC	Comprobación
AB	=	CD	
BC	=	AD	
AC	=	AC	

8. Con algún color, tracen la otra diagonal del cuadrado e identifíquenla con la letra Z y escriban una expresión que represente su longitud. Puesto que las diagonales de un cuadrado tienen la misma longitud, igualen las expresiones que las representan y comprueben que son equivalentes las expresiones anotadas.

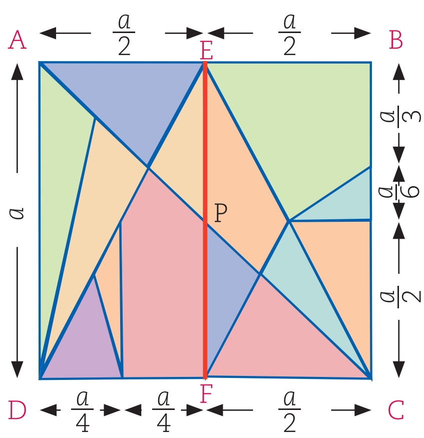
Diagonal Y		Diagonal Z	Comprobación
	=		
	=		

9. Comparen sus respuestas con las de sus compañeros de grupo. Si hay diferencias, analicen a qué se deben y, con ayuda de su maestro, lleguen a conclusiones.

Para terminar

La genialidad de Arquímedes

1. Trabaja individualmente. Las piezas del Stomachion o Loculus de Arquímedes tienen relaciones que pueden resultar sorprendentes e interesantes. Con base en la información del rompecabezas de la izquierda, y considerando que éste es un cuadrado, realiza lo que se pide.



a) El punto P divide la diagonal del cuadrado en dos segmentos iguales. ¿Qué expresión algebraica representa la longitud de los segmentos AP y PC? ____________________

b) Los triángulos APE y FPC son congruentes porque sus lados correspondientes tienen la misma medida. Escribe las expresiones que representan la longitud de los segmentos correspondientes y realiza las transformaciones necesarias para comprobar que son equivalentes.

Triángulo APE		Triángulo FPC	Comprobación
AP	=	PC	
AE	=	FC	
EP	=	PF	

2. De acuerdo con la imagen del rompecabezas, responde en tu cuaderno.

a) ¿Cuál es la expresión algebraica que representa la longitud del segmento EC?

b) ¿Qué expresión representa la longitud del segmento ED?

c) ¿Consideras que estas dos longitudes son iguales? ¿Cómo demostrarías que tu respuesta es correcta?

d) Los triángulos ADE y CBE son congruentes por el criterio LLL. Escribe una expresión que represente el área de ADE. Y una que represente el área de CBE.

____

e) Iguala ambas expresiones y haz las operaciones necesarias para demostrar que las dos expresiones que anotaste son equivalentes.

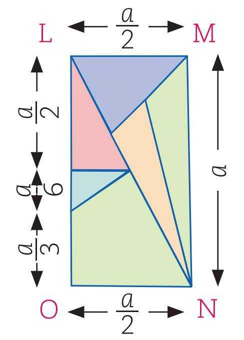
3. Con algunas piezas del Stomachion se formó el rectángulo que se muestra en la siguiente página. Con base en éste, responde lo siguiente en tu cuaderno.

a) Anota tres expresiones equivalentes que representen el área del rectángulo LMNO.

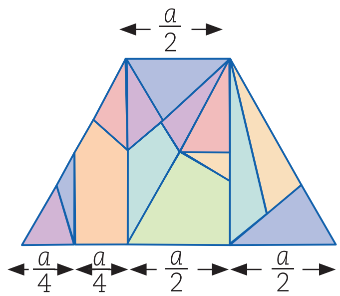
b) Calcula el área de los triángulos LMN y LON. ¿Tienen la misma área? Justifica tu respuesta.

4. Completa las frases siguientes:

Los triángulos LON y LMN son congruentes por el criterio __________, ya que el segmento LN es congruente con ________ por ser ________________; el segmento LM es congruente con el segmento ________________ por ser ________________ y el segmento LO es congruente con el segmento __________ por ser ______________________________.

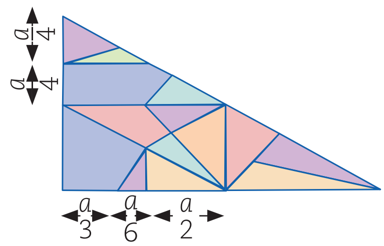


5. Determina la altura del trapecio isósceles de acuerdo con la información que se da en el Stomachion de la actividad 1, página 204, y escribe dos expresiones algebraicas equivalentes que representen su área. Explica de qué manera puedes comprobar que las expresiones que anotaste representan lo mismo.



Expresión 1	=	Expresión 2	Comprobación

6. El triángulo rectángulo que aparece enseguida está formado por las 14 piezas del Stomachion. Calcula los datos que hacen falta y anótalos en la imagen.



7. Escribe dos expresiones algebraicas que representen su área y realiza las transformaciones necesarias para comprobar que son equivalentes.

Expresión 1	=	Expresión 2	Comprobación

Dato interesante
El cubo tridimensional más famoso es el de Rubik, cuyas caras tienen un color diferente cada una. Su mecanismo permite girar cada cara de manera independiente y así combinar los seis colores. El reto consiste en regresar las piezas hasta que todas las caras queden de un solo color.

8. Revisen sus respuestas con sus compañeros de grupo. Analicen las expresiones anotadas y verifiquen que sean equivalentes. Corrijan si es necesario.

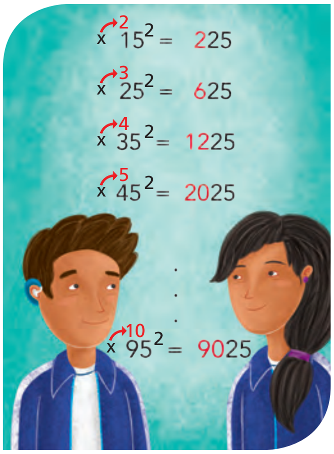
9. Observen el recurso audiovisual *De la geometría al álgebra en los antiguos griegos* para que conozcan cómo usaron en la antigüedad las literales para representar medidas generales.

10. Utilicen el recurso informático *Expresiones algebraicas cuadráticas* para practicar el uso de expresiones equivalentes y su comprobación.

22. Ecuaciones cuadráticas 3

Sesión 1

Para empezar



¿Conoces el "truco" para encontrar rápidamente el resultado de multiplicar por sí mismo un número de dos cifras terminado en 5? Por ejemplo, 15 x 15, 25 x 25, 35 x 35. Consiste en multiplicar la cifra de las decenas por su sucesor y al resultado ponerle un 25 a la derecha. En el primer caso, sería 1 x 2 = 2, seguido de 25, con lo cual se obtiene 225. Prueba con las otras multiplicaciones y verás que siempre resulta. Lo importante es encontrar la explicación de por qué funciona el "truco" y cómo el lenguaje algebraico resulta útil. Propón una manera de explicarlo. Aquí verás que no hay truco, sino la aplicación de lo que sabes de álgebra hasta ahora. En esta secuencia analizarás la relación entre este "truco" y el álgebra, aprenderás a resolver ecuaciones cuadráticas por medio de la fórmula general y continuarás con el uso del lenguaje algebraico para resolver problemas.

Manos a la obra

El procedimiento de completar el cuadrado

1. Trabajen en equipo. Analicen el "truco" que se comentó en la sección "Para empezar". Observen que (15) (15) = $15^2 = (10 + 5)^2$. Esta última expresión puede escribirse como el producto de dos binomios iguales, y este producto es equivalente a un trinomio.

a) ¿Cómo se obtiene el primer término de ese trinomio? ______________________

b) ¿El segundo término? ______________ Y ¿el tercer término? ________________

Este trinomio se conoce como *trinomio cuadrado perfecto*. De acuerdo con lo anterior:

$$\underbrace{(10 + 5)^2}_{\text{Binomio al cuadrado}} = \overbrace{10^2 + 2(10)(5) + 5^2}^{\text{Trinomio cuadrado perfecto}}$$

Si en el segundo miembro se extrae el 10 como factor común de los dos primeros términos del trinomio, se obtiene:

$$\overbrace{10\,[10 + (2)(5)]}^{\text{Factorización}} + 5^2 = 10(10 + 10) + 5^2 =$$

$$(10)(20) + 5^2 = \underbrace{(1)(2)(100)}_{\text{Producto de las cifras de las decenas de los dos factores por cien}} + 25$$

Se observa que para obtener el resultado se multiplican las cifras de las decenas de 10 y 20, y al producto se le agregan los dos ceros de las unidades de esos números, que es lo mismo que multiplicar por 100 y, por último, a este producto se le suma el cuadrado de 5, que es 25. Por tanto, se tiene:

$$(1)(2)(100) + 25 = 200 + 25 = 225$$

De manera general, tenemos que el binomio al cuadrado es $(10a + 5)^2$, donde a es cualquier número positivo del 1 al 9. Al desarrollarlo se tiene:

$$\overbrace{(10a + 5)^2}^{\text{Binomio al cuadrado}} = \overbrace{100a^2 + 2(10a)5 + 5^2}^{\text{Trinomio cuadrado perfecto}} = \underbrace{100a^2 + 100a}_{\text{Términos con factor común}} + 5^2 = \overbrace{100\underbrace{a(a + 1)}_{\text{Números consecutivos}}}^{\text{Factorización}} + 5^2$$

2. Prueben este procedimiento para calcular el producto de las siguientes operaciones:

a) 25 x 25 =

b) 95 x 95 =

3. Analicen el siguiente enunciado: *El triple del cuadrado de un número menos cuatro veces el mismo número es igual a 15.*

a) En la tabla, expresen algebraicamente lo que se pide a partir del problema.

Un número cualquiera	El triple del cuadrado del número	El triple del cuadrado del número menos cuatro veces el mismo número	Ecuación: el triple del cuadrado de un número menos cuatro veces el mismo número es igual a 15	Ecuación en su forma canónica (igualada a cero)

b) Analicen la ecuación que formularon y apliquen el método de factorización para resolverla. Comenten cuáles son algunas de las dificultades que tienen al aplicar ese método y expliquen por qué. ______________________________

____

c) Encuentren al menos un número que cumpla con lo que plantea el enunciado y anótenlo aquí. ______________________________

4. Lean y analicen con apoyo de su maestro el procedimiento de la siguiente página para completar y obtener un trinomio cuadrado perfecto.

Una ecuación cuadrática siempre tiene dos raíces que pueden ser valores distintos o iguales. Por ejemplo, la ecuación $x^2 - 5x + 6 = 0$ tiene *dos raíces diferentes*: $x_1 = 2$ y $x_2 = 3$.
En cambio, la ecuación cuadrática $x^2 + 2x + 1 = 0$ tiene *dos raíces iguales*, lo cual puede verse si se expresa como producto de dos factores:

$$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)(x + 1) = 0.$$

Entonces, si se habla de los valores de las soluciones de esta ecuación, podría pensarse en $x = -1$ (una solución); pero si se habla de raíces, se tienen $x_1 = -1$ y $x_2 = -1$, y en este caso los valores de las raíces son iguales, es decir, la ecuación tiene *dos raíces iguales* o *raíz doble*.

Cuando se tienen ecuaciones cuadráticas de la forma: $x^2 + bx = 0$, $x^2 + bx + c = 0$, $ax^2 + bx = 0$ o $ax^2 + bx + c = 0$ es posible resolverlas utilizando el método para completar el trinomio cuadrado perfecto: $x^2 + 2xy + y^2$ en el primer miembro de la ecuación y, así, luego factorizar y resolver.

Si la ecuación es $x^2 + bx + c = 0$, entonces se puede expresar como: $x^2 + bx = -c$.
En el primer miembro de la ecuación anterior hay dos términos que corresponderán a los dos primeros términos del trinomio cuadrado perfecto: x^2 es el primer término al cuadrado y falta encontrar y^2. Así, $2y = b$, y al despejar y, se obtiene $y = \frac{b}{2}$ y, por lo tanto, $y^2 = \frac{b^2}{4}$. De este modo se obtiene el trinomio $x^2 + bx + \frac{b^2}{4}$, que es equivalente al binomio al cuadrado $\left(x + \frac{b}{2}\right)^2$. Al sustituir en la ecuación original, se agrega $\frac{b^2}{4}$ en ambos miembros para mantener la igualdad $x^2 + bx + \frac{b^2}{4} = \frac{b^2}{4} - c$.

Al factorizar el trinomio, queda: $\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{4} - c$, y al obtener la raíz cuadrada para encontrar

las soluciones, se tiene: $\sqrt{\left(x + \frac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$ de donde $x + \frac{b}{2} = \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$

Al despejar: $x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$, se tienen dos raíces:

$$x_1 = -\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - c} \qquad x_2 = -\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$$

Si la ecuación cuadrática es de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, con el valor de a distinto de 0 y 1, esencialmente el procedimiento es el mismo que el anterior, sólo que primero se deben dividir los términos de la ecuación cuadrática entre el coeficiente a de x^2.

5. Con sus compañeros, y con apoyo de su maestro, usen el procedimiento para completar en su cuaderno el trinomio cuadrado perfecto que corresponde al enunciado de la actividad 3 y poder usar el método de factorización para encontrar sus soluciones.

6. Completen el trinomio cuadrado perfecto para resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas.

a) $2x^2 + 5x = -2$ **b)** $4x^2 - 11x - 3 = 0$

Uso de la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas

Sesión 2

1. Trabajen en equipo. Consideren el enunciado: *El triple del cuadrado de un número entero menos cuatro veces el mismo número es igual a 15*. Ahora, completen la siguiente tabla.

Ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$	Coeficientes		
	a	b	c
$3x^2 - 4x - 15 = 0$			

2. Lean la siguiente información y utilicen la fórmula para encontrar las soluciones de la ecuación que representan el enunciado.

Una ecuación cuadrática de cualquier tipo se puede resolver usando la *fórmula general*: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Para usarla, se requiere que la ecuación cuadrática esté expresada en su forma canónica: $ax^2 + bx + c = 0$

Y así identificar fácilmente los valores de los coeficientes a, b y c.
En la fórmula general se sustituyen a, b y c por los valores respectivos para realizar las operaciones indicadas y obtener las soluciones de acuerdo con los valores de las raíces, que son:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Posteriormente, se comprueba que son soluciones de la ecuación original.

Utilicen la fórmula general para encontrar las soluciones de la ecuación $3x^2 - 4x - 15 = 0$.

Dato interesante
La obra *De numeris datis* es el primer texto escrito, dedicado al álgebra, publicado en Europa Occidental en el siglo XIII. Su autoría se atribuye al matemático Jordanus Nemorarius.

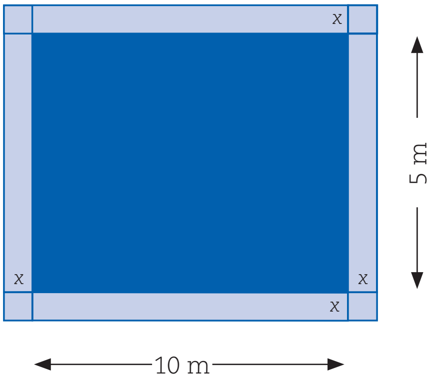
Fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas	
Primera solución	**Segunda solución**
$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

a) ¿Qué representan las soluciones en el contexto del problema? ____________________

____

3. Con sus compañeros, y con el apoyo de su maestro, comparen lo que escribieron en la tabla y traten de justificar cada uno de los pasos que hicieron. En su cuaderno, verifiquen que la solución con número negativo también satisface la ecuación.

4. Analicen el proceso para resolver el siguiente problema mediante la fórmula general. *La parte interna de una alberca rectangular mide 10 m de largo por 5 m de ancho. La alberca está rodeada por un andador de forma rectangular cuya área es de 16 m², como se muestra en la imagen de abajo*. ¿Cuánto mide el ancho del andador? ____________________



La superficie más oscura representa el agua de la alberca y la más clara, el andador.

a) Formulen una ecuación que permita resolver el problema y escríbanla en seguida. ____________________

b) Con apoyo del maestro, comparen las ecuaciones que formularon y vean si es la misma ecuación o si son equivalentes. Es importante que expliquen qué pensaron para formularla.

c) En la ecuación que formularon, identifiquen los valores de a, b y c, y anótenlos.

a = ____________ b = ____________ c = ____________

d) Sustituyan en la fórmula los valores correspondientes y simplifiquen la expresión obtenida.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} =$$

e) Anoten las soluciones de la ecuación con base en los resultados que se obtienen en cada raíz cuadrada. x_1 = ____________ x_2 = ____________

f) Anoten la solución del problema. ______________________________

5. Con apoyo del maestro, comparen sus resultados, identifiquen los errores y corrijan. Verifiquen que la solución del problema de la actividad 4 es correcta y comenten por qué una de las raíces no puede ser solución del problema.

6. En su cuaderno, usen la fórmula general para resolver las siguientes ecuaciones. Comprueben sus respuestas.

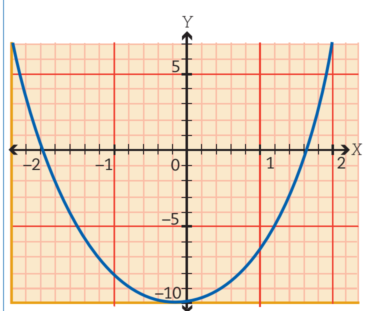
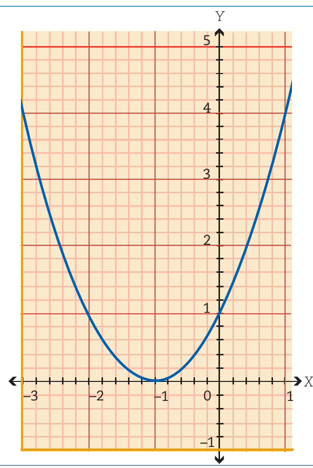
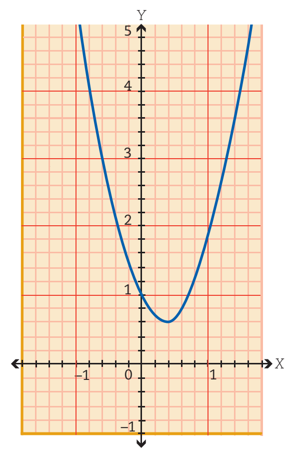
a) $4x^2 + 5x - 6 = 0$ **b)** $3x^2 + x - 10 = 0$ **c)** $3x^2 - 10x = 25$ **d)** $7x^2 - 16x + 9 = 0$

7. Observen el recurso audiovisual *Fórmula general* para analizar la manera de resolver ecuaciones cuadráticas por medio de esta fórmula y también para observar cómo se usa el método para completar un trinomio cuadrado perfecto.

Discriminante de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$

Sesión 3

1. Trabajen en equipo. Consideren la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ y completen la tabla. Después contesten las preguntas.

	Ecuación 1 $3x^2 + x - 10 = 0$	Ecuación 2 $x^2 + 2x + 1 = 0$	Ecuación 3 $3x^2 - 2x + 1 = 0$
Valor de $b^2 - 4ac$			
Representación gráfica			
¿En cuántos puntos corta la parábola al eje X? ¿Cuál es el valor de x?			

a) En su cuaderno, describan la relación que hay entre el valor numérico de $b^2 - 4ac$ y el tipo de valores que son las soluciones que tiene la ecuación.

b) Con base en lo que concluyeron en el inciso anterior, anoten sobre la línea el tipo de valores de las soluciones que tiene cada ecuación, sin resolverlas.

- $4x^2 - 3x + 1 = 0$ ________________
- $2x^2 - 3x - 1 = 0$ ________________
- $x^2 + 6x + 9 = 0$ ________________

2. Revisen y comparen sus respuestas con las de sus compañeros de grupo.

3. Lean y analicen junto con su maestro el siguiente texto.

La expresión $b^2 - 4ac$ se llama *discriminante* de la ecuación de segundo grado y permite determinar la cantidad de soluciones de una ecuación antes de resolverla. Como podrás observar, el discriminante, el cual se abreviará como D, es parte de la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado, que se expresa así: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Si el discriminante es un número positivo, $D > 0$, la ecuación tiene dos raíces distintas que son números racionales o irracionales.

Si el discriminante es cero, $D = 0$, la raíz cuadrada valdrá cero y la ecuación tiene dos raíces iguales, que son un número racional o irracional.

Si el discriminante es un número negativo, $D < 0$, la ecuación no tiene raíces en los números racionales o irracionales.

4. En su cuaderno, determinen si existen las raíces de las siguientes ecuaciones en los números racionales o irracionales.

a) $2x^2 - 3x = -1$ **b)** $2x^2 + 5 = -3x$ **c)** $9x^2 + 6x + 1 = 0$ **d)** $4x^2 - 12x + 9 = 0$

e) En una de las ecuaciones anteriores, el discriminante es igual a cero ($D = 0$). ¿Cuál es esa ecuación? ________________________________

f) Verifiquen que en la ecuación que escribieron la solución es $\frac{-b}{2a}$ y expliquen por qué sucede esto. ________________________________

g) Inventen tres ecuaciones de segundo grado que cumplan con las condiciones dadas en la tabla y complétenla.

Ecuación	Discriminante	Soluciones
	$D > 0$	
	$D = 0$	
	$D < 0$	

5. Unan con una línea la ecuación cuadrática de la columna A, con el valor del discriminante que aparece en la columna B.

A	B
$3x^2 + 14x - 5 = 0$	$D = 0$
$4x^2 - 28x = -49$	$D < 0$
$2x^2 + 4x + 3 = 0$	$D > 0$

6. Con sus compañeros, y con apoyo del maestro, comparen sus respuestas. En particular, analicen las del inciso g) de la actividad 4 y comenten cómo hicieron para formular las ecuaciones que se piden. Recuerden que la factorización permite formular ecuaciones.

¿Cuál procedimiento conviene?

Sesión 4

1. Trabajen en equipo. En muchos casos, antes de resolver una ecuación es necesario simplificarla y ordenarla para obtener la forma canónica: $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$. En su cuaderno, expresen cada una de las siguientes ecuaciones en su forma general.
a) $(2x + 3)^2 = 2(6x + 4)$ **b)** $8(2 - x)^2 = 2(8 - x)^2$ **c)** $3x(x - 2) - (x - 6) = 4(x - 3) + 10$

2. Una vez que las ecuaciones anteriores están en su forma canónica, analicen el siguiente esquema y úsenlo para encontrar las raíces de cada ecuación. Si la ecuación está incompleta, no es necesario recurrir al esquema.

$ax^2 + bx + c = 0$

¿Se puede descomponer en factores fácilmente?

↓	↓
Sí	*No*
Se descompone en factores	*Se identifican los valores de a, b y c*
↓	↓
Se iguala a cero cada factor	*Se calcula* $D = b^2 - 4ac$
↓	↓
Se despeja x en cada factor y se obtienen las raíces	*Se usa la fórmula general y se obtienen las raíces*
↓	↓

¿La ecuación se satisface con las raíces obtenidas?

↓	↓
Sí	*No*
Se escribe la solución	*Se revisa el proceso para identificar errores*

3. Las raíces de las ecuaciones de segundo grado tienen una propiedad interesante que puede servir para saber si son correctas. Se expresa de la siguiente manera:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \qquad\qquad x_1(x_2) = \frac{c}{a}$$

a) Usen la propiedad anterior para verificar que las raíces obtenidas en la actividad 1 son correctas.

b) Consideren la ecuación $6x^2 - 19x + 10 = 0$ y marquen con una ✓ sus soluciones correctas.

☐ $x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = \frac{2}{5}$ ☐ $x_1 = -\frac{2}{3}, x_2 = \frac{5}{2}$ ☐ $x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = \frac{5}{2}$ ☐ $x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = -\frac{5}{2}$

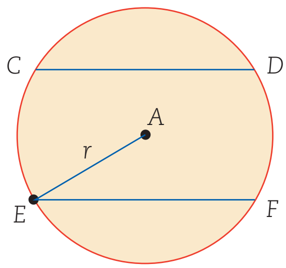
c) Consideren las soluciones $x_1 = \frac{1}{6}, x_2 = \frac{4}{3}$ y marquen con una ✓ la ecuación a la que corresponde.

☐ $4x^2 - 27x + 18 = 0$ ☐ $18x^2 - 27x + 4 = 0$ ☐ $27x^2 - 18x + 4 = 0$

d) Relacionen cada ecuación de la columna A con las soluciones de la columna B que le corresponden.

A	B
$2x^2 - 3x - 5 = 0$	$x_1 = \frac{5}{2}, x_2 = -4$
$2x^2 + 3x - 20 = 0$	$x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = -\frac{3}{2}$
$4x^2 + 8x + 3 = 0$	$x_1 = \frac{5}{2}, x_2 = -1$

4. Consideren la figura que se muestra a la izquierda, analicen la información y den respuesta a los incisos.



- Los segmentos CD y EF son cuerdas que están a la misma distancia del centro de la circunferencia.
- La distancia entre las dos cuerdas es de 12 cm.
- Cada cuerda mide 6 cm más que el radio.

a) ¿Cómo se expresa algebraicamente la medida de cada cuerda? ____________

b) Agreguen en la figura las líneas que faltan para formar un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide $2r$.

c) Escriban la ecuación que permite conocer el valor de r. ____________

d) Simplifiquen la ecuación y usen el procedimiento que consideren adecuado para encontrar el conjunto solución.

e) ¿Cuánto mide el radio? ____________

f) ¿Cuánto mide cada cuerda? ____________

5. Con sus compañeros, y con apoyo del maestro, comparen sus resultados, identifiquen los errores y corrijan lo que sea necesario. En particular, comenten en qué tipo de ecuaciones conviene usar la factorización y cuándo hay que usar la fórmula cuadrática.

6. Observen el recurso audiovisual *Discriminante de la fórmula general* para distinguir el número de raíces que tiene una ecuación cuadrática en los números racionales o irracionales, considerando el valor del discriminante: $b^2 - 4ac$.

Tipos de problemas y tipos de ecuaciones

Sesión 5

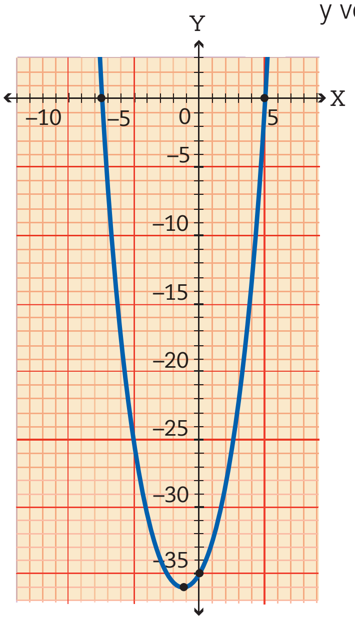
1. Trabajen en equipo. A lo largo de la secundaria han aprendido a usar ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones y ecuaciones cuadráticas. Analicen cada uno de los siguientes problemas y usen sus conocimientos para resolverlos en su cuaderno.
   a) Al sumar dos números se obtiene 184. Al dividir el número mayor entre el menor, el cociente es 2 y el residuo 7. ¿Cuáles son los números? ______
   b) En un museo de la Ciudad de México, el costo regular de la entrada es de \$80; los estudiantes con credencial pagan la mitad. Un grupo de 20 personas pagó en total \$1 080, ¿cuántos eran estudiantes? ______
   c) Un terreno rectangular mide el doble de largo que de ancho. Al aumentar 6 m de ancho y 40 m de largo, el área del terreno se duplicó. Calculen las medidas que se piden.

Medidas originales del terreno			Medidas aumentadas del terreno		
Ancho	Largo	Área	Ancho	Largo	Área

2. Con sus compañeros, y con ayuda del maestro, comparen sus respuestas, identifiquen los errores y corrijan. En particular, comenten qué tipo de ecuaciones utilizaron, si usaron diferentes ecuaciones para el mismo problema, o si no usaron ninguna.

3. Consideren la ecuación $x^2 + (x + 1)^2 + (x + 2)^2 = 110$. Pongan una ✓ a los problemas que pueden resolverse con esta ecuación.
   a) La suma de los cuadrados de tres números consecutivos es igual a 110. ¿Cuáles son los números? ☐
   b) El producto de los cuadrados de tres números consecutivos es igual a 110. ¿Cuáles son los números? ☐
   c) Las tres cifras que forman un número son números consecutivos. La suma de los cuadrados de dichas cifras es igual a 110. ¿Cuáles son los números? ☐
   d) La suma de los cuadrados de tres números pares consecutivos es igual a 110. ¿Cuáles son los números? ☐

4. Simplifiquen la ecuación y resuélvanla en su cuaderno con el procedimiento que les parezca adecuado. Anoten la solución junto a los problemas que marcaron con una ✓ y verifiquen que cumple con las condiciones del enunciado.



5. Con sus compañeros, y con apoyo del maestro, comparen lo que hicieron en la actividad 3. Si hay diferencias, averigüen a qué se deben y corrijan. Expliquen por qué sí o por qué no, la ecuación permite resolver cada problema. ¿Cuáles son las soluciones del problema de la actividad 3, inciso a)? ¿Cuál es la solución del problema de la actividad 3, inciso c)?

6. Analicen la siguiente gráfica y contesten.

a) ¿Cuáles son las raíces de la ecuación asociada a la gráfica?

x_1 = ____________________

x_2 = ____________________

b) Escriban la ecuación en forma factorizada. ____________________

c) Escriban la ecuación en forma general. ____________________

Sesión 6

Para terminar

¿Ecuación o función?

1. Trabajen en equipo. Analicen los siguientes problemas y hagan lo que se indica.

Problema 1	Problema 2
Se dispone de 16 m de tela de alambre para hacer un gallinero de forma rectangular. ¿Cuánto debe medir cada lado para obtener la mayor área posible?	Un gallinero rectangular mide 16 m de perímetro y 15 m² de área. ¿Cuáles son las medidas de sus lados?

a) Si el perímetro del gallinero mide 16 m, ¿cuánto suman el largo y el ancho?

Problema 1 = ____________ Problema 2 = ____________

b) Si la suma del largo y el ancho es ________ , y el largo está en función del ancho representado por *a*, ¿cómo se expresa el largo en función del ancho? ______

c) En el problema 1, supongan que el ancho mide 1 m, ¿cuánto mediría el largo? ________ ¿Cuál sería el área del gallinero en este caso? ________

d) Completen los procedimientos para resolver los problemas 1 y 2.

Problema 1

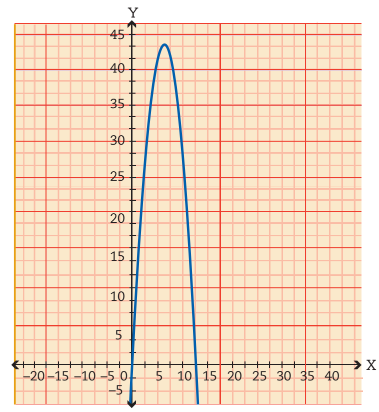
a	$8 - a$	Área ($8a - a^2$)
1	7	
Solución del problema:		

Problema 2

Ancho	Largo	Área
Valor numérico del área:		
Ecuación:		
Raíces de la ecuación:		
Solución del problema:		

2. Analicen la representación gráfica de la función $y = a(8 - a)$ que corresponde al problema 1 y, con base en ella, contesten las preguntas.
   a) ¿Cuál es el punto máximo que alcanza la gráfica? ________
   b) Verifiquen que el punto máximo de la parábola responde a la pregunta que se plantea en el problema 1.
   c) Ubiquen los puntos que representan las soluciones del problema 2 y anótenlos en el recuadro correspondiente.

Problema 1



3. Consideren un problema 3 y un problema 4, similares a los problemas 1 y 2 de la actividad 1. En el problema 3, en vez de 16 m de tela de alambre, consideren 20 m. En el problema 4, en vez de 15 m² de área, consideren 24 m².
   Resuelvan en su cuaderno, realicen la gráfica correspondiente y respondan las preguntas.
   Problema 3: ¿cuánto debe medir cada lado para obtener el área máxima?
   Ancho: ________________ Largo: ________________
   Problema 4: ¿cuáles deben ser las medidas para que el área sea 24 m²?
   Ancho: ________________ Largo: ________________

4. Escriban en su cuaderno las diferencias entre una función y una ecuación.

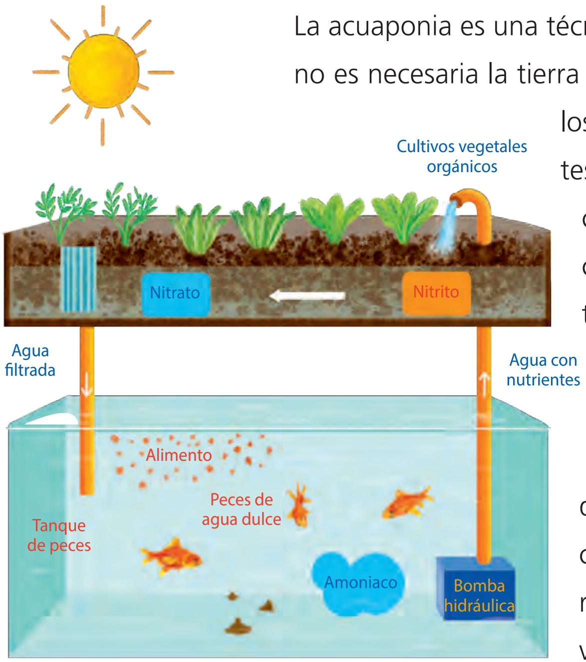
5. Con sus compañeros y con apoyo del maestro, comparen sus respuestas, identifiquen los errores y corrijan. Comenten sobre las diferencias entre una función y una ecuación y completen lo anotado en su cuaderno.

6. Utilicen el recurso informático *Fórmula general* para resolver ecuaciones cuadráticas.

23. Funciones 3

Para empezar

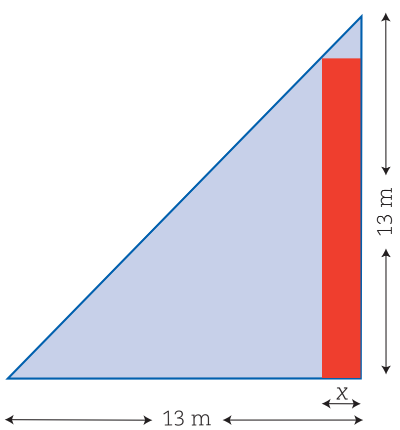
Sesión 1



La acuaponia es una técnica de producción sustentable de peces y hortalizas en la que no es necesaria la tierra para el cultivo. Se caracteriza porque las plantas se nutren de los desechos de los peces y, una vez que absorben esos nutrientes, el agua regresa limpia al estanque donde los peces viven y crecen. El principio fundamental de este sistema se basa en el ciclo del nitrógeno y en la convivencia de peces, plantas y bacterias. Los peces, con sus desechos, generan amoniaco, compuesto tóxico que las bacterias transforman en nitratos. Las plantas los consumen y actúan como un filtro biológico que limpia el agua para que regrese a los peces. ¿Cómo creen que afecta lo que comen los peces a su desarrollo?, ¿afectará al crecimiento de las plantas que se siembran? En esta secuencia resolverás problemas que implican el análisis de la relación de variación cuadrática para modelar fenómenos vinculados a la acuaponia. Además, te ayudará a conocer las propiedades y características de las gráficas asociadas a una función cuadrática y trabajarás con su representación algebraica.

Manos a la obra

Cálculo del área para un proyecto de acuaponia



1. Trabajen en pareja. En una telesecundaria hay un terreno con forma de triángulo rectángulo isósceles donde se quiere instalar un proyecto de acuaponia. Se dedicará una parte rectangular a la construcción de un estanque para los peces y el resto se dejará para las plantas que se cultiven. Dos lados del rectángulo deben estar sobre los catetos del triángulo, y el otro vértice sobre la hipotenusa, como se muestra en la figura.

a) Si varía el tamaño de la base x del rectángulo, cambia el tamaño de la superficie que se quiere dedicar al estanque. Completen la tabla de la siguiente página para mostrar los diferentes valores de x y el área correspondiente. Pueden utilizar calculadora.

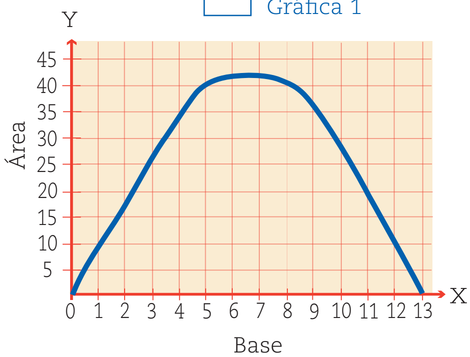
Base $x(m)$	1	2	3	4	4.75						$\frac{25}{2}$	
Área (m^2)				36								

b) ¿Cuántos rectángulos diferentes, cuya área sea de 42 m², se pueden construir? ____________

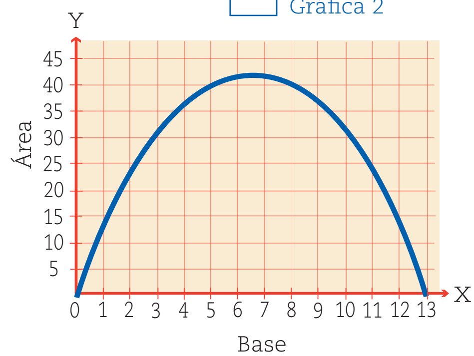
c) ¿Cuál es la medida de la base de estos rectángulos? ____________

d) Si se quiere construir un estanque cuya área sea de 30 m², ¿de cuántas maneras diferentes se puede hacer? ____________ ¿Cuál de las siguientes gráficas modela mejor la función entre la base del rectángulo y su área? Márcala con una ✓.

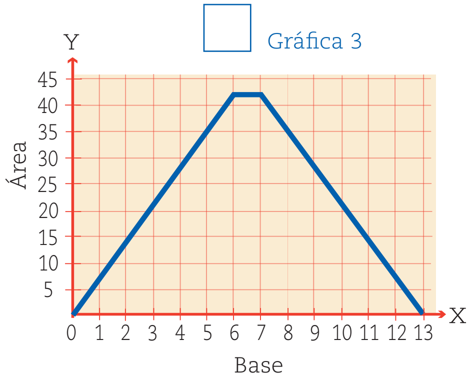
☐ Gráfica 1



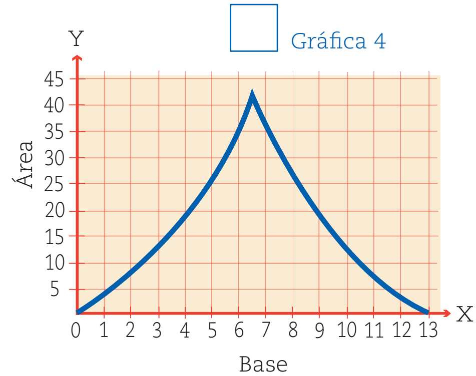
☐ Gráfica 2



☐ Gráfica 3



☐ Gráfica 4



e) Comenten con otra pareja por qué razones eligieron esa gráfica y por qué descartaron las otras tres.

f) Si x corresponde a la base, representen la altura del rectángulo algebraicamente en función de x.

____

g) Si designan con la literal y el área de la superficie dedicada al estanque y con la literal x la medida de la base, escriban la representación algebraica que modela la función. ____________

2. Cuatro alumnos escribieron la representación algebraica de la función, ¿quién tiene la razón? Subrayen cuál o cuáles expresiones son correctas.

a) Alicia: $y = x\,(13 - x)$

b) Bernardo: $y = x^2 - 13$

c) Carlos: $y = -x^2 + 13x$

d) Diana: $y = -x^2 + 13$

3. Si se quiere que el estanque ocupe la máxima superficie posible, ¿cuáles tienen que ser las dimensiones del rectángulo? ____________________ ¿Hay una sola manera de hacerlo? __________________ Argumenten su respuesta. __________________

____

4. En grupo y con ayuda de su maestro, argumenten cuál de las gráficas representa la función que describe el problema y comprueben con la representación algebraica y tabular que esto es correcto.

5. Observen el recurso audiovisual *Maximización de áreas en un proyecto de acuaponia* para conocer más acerca del aprovechamiento del área destinada a un proyecto de este tipo.

Sesión 2

Optimización del peso de los peces

1. Trabajen en pareja. Un grupo de telesecundaria decide participar en un proyecto de acuaponia. En un proyecto así es importante la alimentación de los peces para su crecimiento. Quien asesora al grupo recomendó darles una taza de alimento diario y un suplemento alimenticio que ayudaría al crecimiento tanto de los peces como de las plantas, pero advirtió que exceder ciertas cantidades podría ser dañino para los peces.

   Decidieron experimentar varias opciones para probar el suplemento. Cuando no alimentaron a los peces con el suplemento, notaron que éstos aumentaron su peso alrededor de 6 g por semana. Cuando agregaron 1 cucharada del suplemento, los peces también ganaban peso. En cambio, cuando se vertieron 6 cucharadas de suplemento, los peces perdían peso.

   Descubrieron que la ganancia de peso promedio de los peces variaba en función de las cucharadas de suplemento alimenticio, y que esta ganancia se podría modelar con la siguiente función cuadrática:

$$y = -3\,(x - 2.5)^2 + 24$$

Donde x es la cantidad de cucharadas de suplemento que se agregaban al alimento.

a) Completen la siguiente tabla de acuerdo con la función dada. Usen calculadora. Después realicen lo que se les indica.

x	Cucharadas de suplemento	0	1	2	3	4	5	6
y	Peso que ganaron los peces en una semana (en gramos)							

b) Comparen con otra pareja los valores que obtuvieron en la tabla.

c) ¿Qué conviene más para el crecimiento de los peces?, ¿verter 2 o 4 cucharadas de suplemento en el estanque? ______________________________

d) En promedio, ¿cuánto peso perdieron los peces al verter 6 cucharadas de suplemento? ______________________________

e) ¿Con cuántas cucharadas se tiene el mismo resultado (aumento de peso) que si no se vertiera suplemento alimenticio? ______________________________

f) ¿Cuántas cucharadas de suplemento alimenticio se tienen que agregar para obtener el mismo resultado que con tres? ______________________________

g) ¿Cuántos gramos aumentarían los peces si se agregara $\frac{1}{2}$ cucharada? __________

h) Comenten cuántas cucharadas pondrían ustedes para obtener el máximo aumento de peso y por qué.

2. Grafiquen la función de la actividad anterior que modela la ganancia de peso de los peces cuando varía la cantidad de suplemento alimenticio. Luego, contesten las preguntas de los incisos.

Dato interesante

Las técnicas de cultivo basadas en la interacción entre plantas y peces han sido utilizadas desde hace mucho tiempo. Los pueblos del valle de México aplicaban estos principios para cultivar hortalizas y maíz en las chinampas aprovechando los nutrientes de los peces que habitaban los canales. Esta técnica se sigue empleando en Xochimilco.

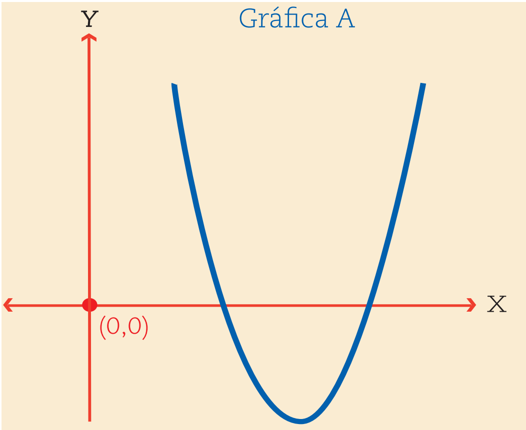
a) ¿Con qué cantidad de suplemento no hay ganancia ni pérdida de peso? ______________________________

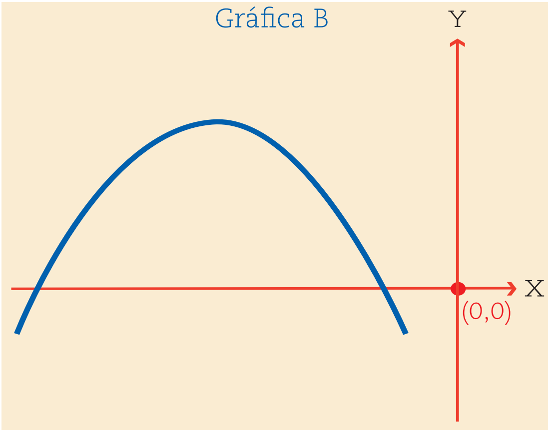
¿Cómo obtuvieron esta cantidad? ______________________________

b) ¿Cuántos gramos forman la ganancia máxima que se puede obtener a partir de este alimento y este suplemento alimenticio? ______________________________ g

c) ¿Qué punto representa la mayor ganancia de peso en función del número de cucharadas? P (________, ________). A este punto se le llama *vértice de la parábola*.

3. En la siguiente página, hagan lo que se pide para cada una de las dos parábolas.





a) Encuentren el vértice.

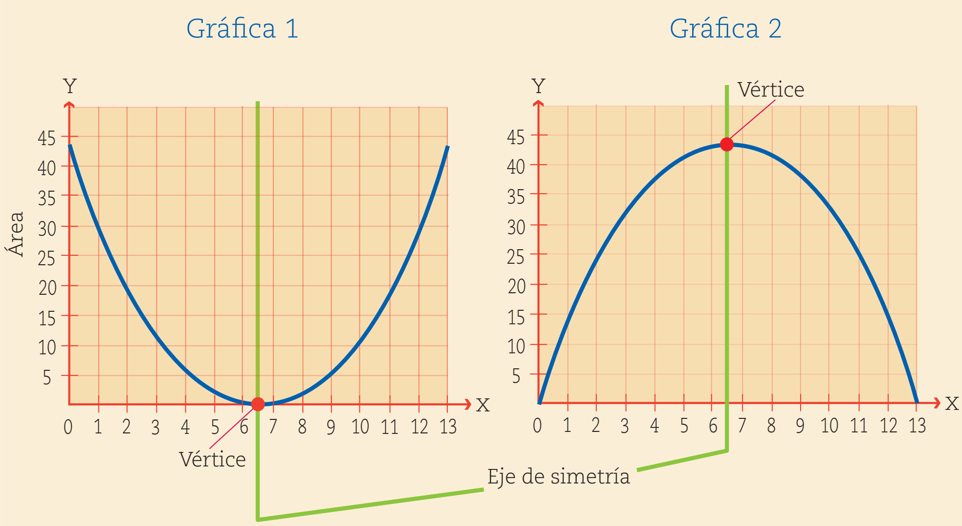
b) Tracen una recta paralela al eje Y que pase por el vértice.

c) ¿Qué características tiene esta recta con respecto a la parábola? ________________

d) Copien en una hoja aparte cada parábola y dóblenla por la recta que trazaron, ¿qué observan? ____

4. Comenten con el resto de sus compañeros y con el maestro las características de las parábolas que tienen un eje de simetría.

Cuando se trabaja con funciones, lo importante es analizar la relación que hay entre la variable dependiente y la independiente. Las gráficas de las funciones sirven para visualizar y analizar algunas de estas relaciones. Por ejemplo, dependiendo de la orientación de la parábola, ésta puede tener un punto mínimo (gráfica 1) o un punto máximo (gráfica 2). En las funciones cuadráticas, a estos puntos se les llama *vértices* de la parábola. En el caso de la construcción del estanque, nos interesó saber cuál era el punto máximo o vértice de la parábola, pues este punto representa la medida de la base del rectángulo donde se obtiene la máxima área. Asimismo, el vértice representa la mayor ganancia de peso promedio en función del número de cucharadas de suplemento alimenticio que se les da a los peces.



Además, las parábolas se pueden representar algebraicamente como

$$y = ax^2 + bx + c$$

y tienen un eje de simetría que es la recta paralela al eje Y que interseca a la parábola en el vértice.

5. El agua dulce disponible está disminuyendo a un ritmo alarmante. La agricutura utiliza casi 70% del total mundial de este recurso. El ahorro y mejor aprovechamiento del agua es uno de los principales retos para el desarrollo sostenible. La acuaponia puede reducir el consumo de agua hasta en 90% en comparación con la agricultura tradicional. Para conocer más sobre el tema, visita la página de internet http://www.fao.org/fao-stories/article/es/c/1113809/

Ganancia de peso en el cultivo de las lechugas

Sesión 3

1. Trabajen en pareja. Lean la información y contesten las preguntas.

Como en un sistema acuapónico también interesan el crecimiento y el desarrollo de las plantas, se analizó cuál era el peso promedio en kilogramos de cada lechuga al cosecharlas en función de las cucharadas del suplemento alimenticio que se echó a los peces junto con su comida. La función que modela el experimento está representada por:

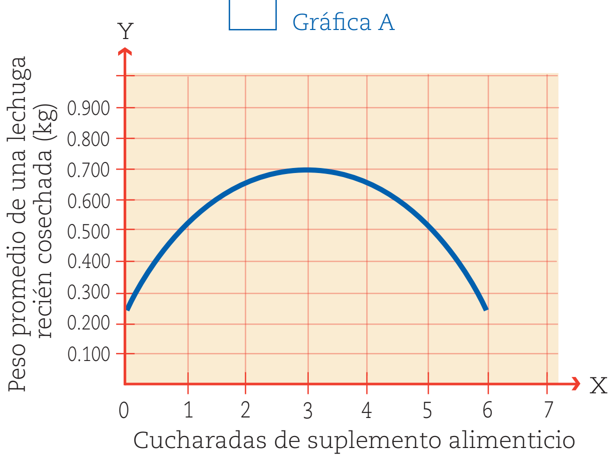
$$y = -0.05(x - 3.5)^2 + 0.8$$

a) Completen la tabla para diferentes valores de *x*. Utilicen calculadora.

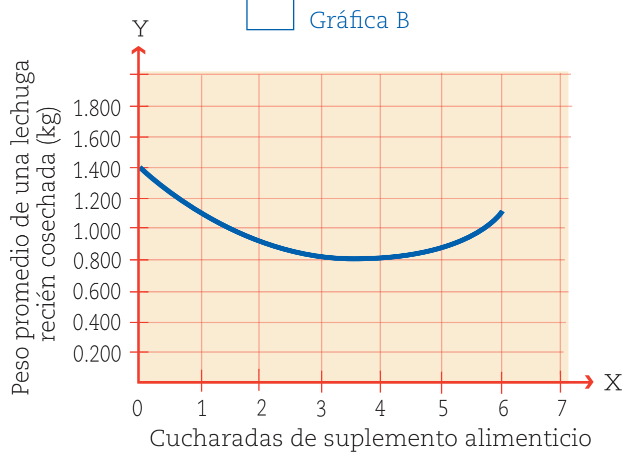
x	Cucharadas de suplemento	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	5	6
y	Peso promedio de una lechuga recién cosechada (en kg)								

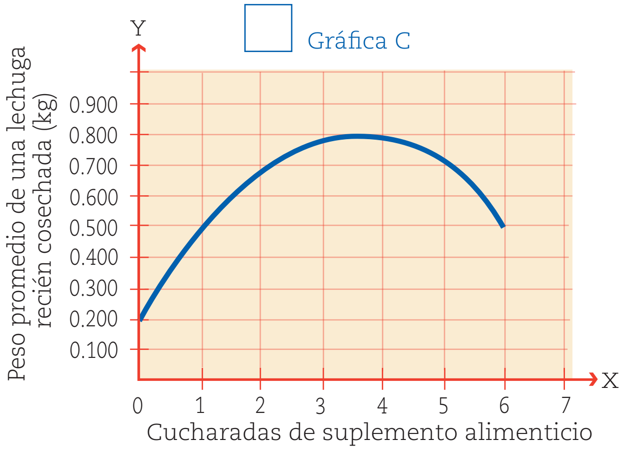
b) Seleccionen con una ✓ la parábola que representa la función dada.

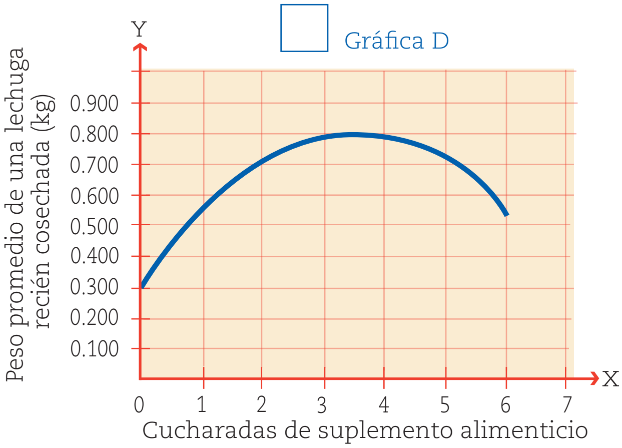
☐ Gráfica A



☐ Gráfica B







c) ¿A qué altura corta la gráfica que eligieron el eje de las Y? ____________

d) ¿En qué punto está el vértice de la parábola? V(__________, __________)

e) Desarrollen la representación algebraica de la función cuadrática $y = -0.05(x - 3.5)^2 + 0.8$ para llevarla a la forma $y = ax^2 + bx + c$.

¿Cuánto vale c? ____________

f) ¿Cuál es el peso máximo que puede alcanzar una lechuga? ____________

¿Con cuántas cucharadas de suplemento alimenticio se obtiene este resultado?

____

Dato interesante

La lechuga orejona es un alimento de poco aporte calórico, pues contiene mucha agua. Por otro lado, es rica en vitaminas A y C, así como en minerales, pues contiene fósforo, hierro, calcio y potasio.

2. Revisen los resultados que obtuvieron en la actividad 1 de la sesión 2. Si consideran el número de cucharadas de suplemento alimenticio que da la mayor ganancia de peso promedio de los peces, entonces, ¿cuál es el peso que obtendrían por cada lechuga? ____________

3. En grupo, y con la ayuda de su maestro, discutan cuántas cucharadas pondrían ustedes para tener el mayor crecimiento tanto de peces como de plantas. Argumenten y escriban en su cuaderno sus respuestas.

Sesión 4

Para terminar

La mayor ganancia por la venta de las lechugas

Trabaja individualmente las siguientes actividades.

1. En una pequeña empresa de acuaponia se consideraron los gastos, las características y la cantidad de lechugas que se produjeron para determinar cuál sería el mejor precio de venta de cada pieza de lechuga para así obtener la máxima ganancia posible.

Determinaron que la ganancia, según el precio que pongan a la pieza de lechuga, estará determinada por la siguiente función

$$G = -0.4(p - 25.5)^2 + 36.5$$

Donde p es el precio de la pieza de lechuga y G, la ganancia obtenida por su venta dada en miles de pesos.

Dato interesante
La trucha es un pez común en los estanques de acuaponia. Se caracteriza por tener poco contenido, ya que sólo 3% es grasa corporal, de la cual la mayor parte es omega 3. Además, es rica en vitaminas B3 y D.

a) Completa la tabla para diferentes valores de p. Utiliza calculadora. Después, responde las preguntas.

p	Precio de la pieza de lechuga								
G	Ganancia obtenida por su venta								

b) ¿A qué precio se tiene que vender cada lechuga para obtener la ganancia máxima?

___

c) Y, ¿cuál es la ganancia máxima que se obtiene con la venta? ___

d) ¿Qué precios no generarían ni ganancias ni pérdidas? ___

2. Usa la información que obtuviste en la actividad anterior para graficar los valores de la función $G = -0.4(p - 25.5)^2 + 36.5$ y contesta las siguientes preguntas.

a) ¿Se perdería más dinero al vender la lechuga a $40 o a $15? ___ Argumenta tus respuestas.

___

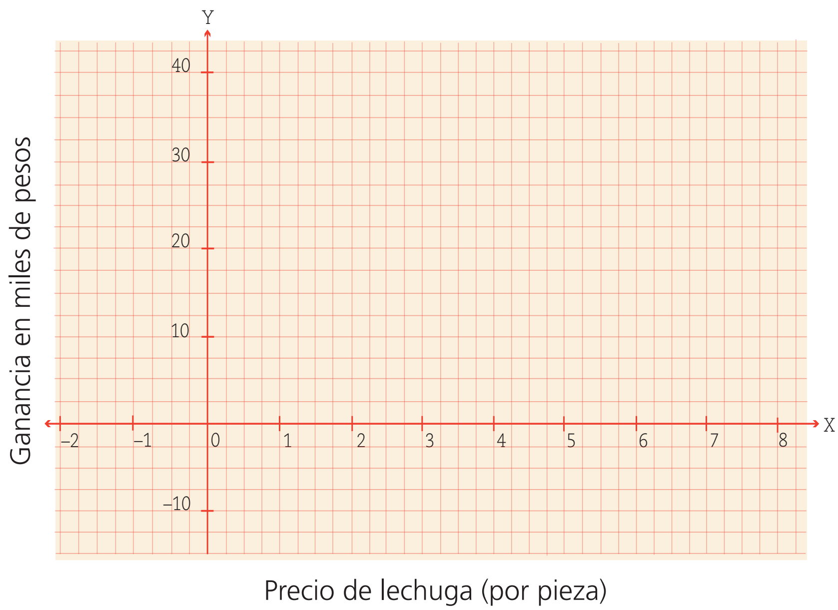
___

b) Aproximadamente, ¿cuánto se perdería en cada caso?

___

c) ¿A qué precio se tendría que vender cada lechuga para ganar $20 000 ___

___



d) Comenten por qué vender más caras las lechugas no siempre implica mayor ganancia. ______________________________

3. Discute con el resto del grupo por qué venderlas a menos de \$16 o a más de \$35 produce pérdidas. ______________________________

- ¿Qué pasa cuando son muy baratas? ______________________________
- ¿Sucede lo mismo cuando son muy caras? ______________________________

4. La cantidad de cucharadas de suplemento alimenticio también afecta la cantidad de nitratos que se encuentran en el agua. La función cuadrática que mejor modela la situación está dada por:

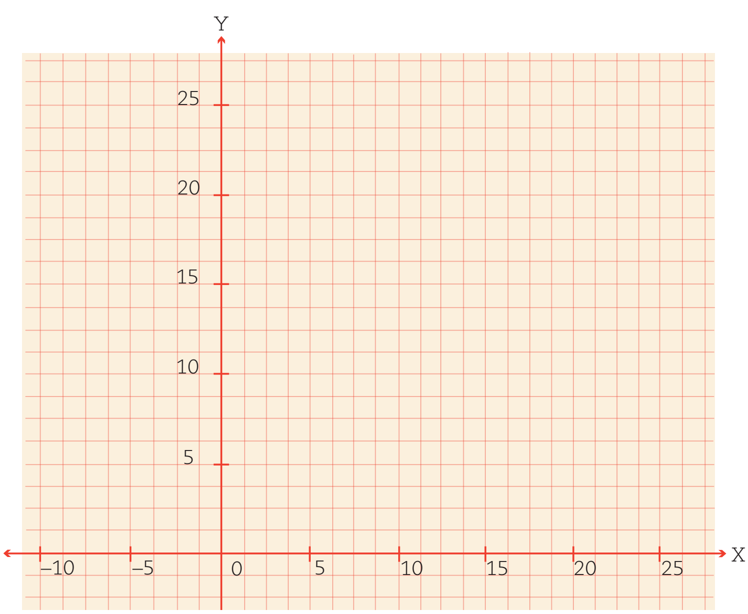
$$N = 2.25s^2 - 9s + 11$$

Donde N es la cantidad de nitratos (mg/L) y s es el número de cucharadas de suplemento que se agregan.

a) Completen la tabla para diferente número de cucharadas de suplemento, valores de s. Utilicen calculadora.

s	Número de cucharadas	0	1						
G	Cantidad de nitratos en el agua (mg/L)								

b) ¿Cuántos mg/L de nitratos hay cuando no se agrega suplemento alimenticio? ______________________________



c) Grafica los valores de la función $N = 2.25s^2 - 9s + 11$.

d) ¿La gráfica de la parábola abre hacia abajo o hacia arriba? ______________________________

e) ¿Tiene un punto máximo o un punto mínimo? ____________

f) Encuentra el vértice de la parábola V (________, ________)

g) ¿Cuántas cucharadas se necesitan para obtener el mínimo de nitrato en el agua? ______________________________

5. Comenta con tus compañeros y con el maestro la importancia de la simetría y el vértice de las parábolas. ¿Qué información puede aportar para entender las relaciones dadas por una función cuadrática y las situaciones que representan?

6. En tu cuaderno dibuja un plano cartesiano y apóyate en él para contestar las siguientes preguntas y argumentar tus respuestas.

   a) ¿Es posible trazar una parábola que tenga el vértice en el origen y que pase por los puntos (5, –3) y (–4, –3)? __________

   b) ¿Cuántas parábolas que pasen por los puntos (5, 0) y (10, 0) se pueden trazar? __________

   c) ¿Por qué no es posible trazar una parábola que pase por los puntos (5, 0) y (10, 0) y que su vértice esté en el punto (8, 3)? __________

   d) ¿Cuáles pueden ser las coordenadas del vértice de una parábola que pasa por los puntos (–12, 7) y (18, 7)? __________

   Pregunta a tus compañeros si alguien obtuvo un vértice diferente al que encontraste, en caso de que haya distintos, ¿por qué es esto posible? __________

   e) Da la coordenada donde interseca la parábola al eje X si su vértice está en el punto (–3, 4) y la otra intersección con el eje es (4, 0). Explica cómo encontraste la coordenada solicitada __________

7. De manera grupal y con apoyo de su maestro, comparen sus respuestas anteriores y corrijan si es necesario.

8. Comenten las diferencias entre las variaciones lineales y cuadráticas que trabajaron en las secuencias 5, 12 y ésta.

9. Con la pesca, un mundo sin hambre es posible. Sólo en 2016 se produjeron 171 millones de toneladas de pescado que contribuyeron a la alimentación y al empleo de millones de personas. Entérate de estos beneficios en "El estado mundial de la pesca y la acuicultura", disponible en https://bit.ly/3bTu89Y

10. Observen el recurso audiovisual *Modelación de fenómenos con funciones cuadráticas* y analicen la variedad de situaciones que se pueden modelar a partir de este tipo de funciones.

11. Utilicen el recurso informático *Elementos y características de una función cuadrática*, donde resolverán problemas que implican conocer sus propiedades y características para expresarlas algebraicamente.

24. Polígonos semejantes 3

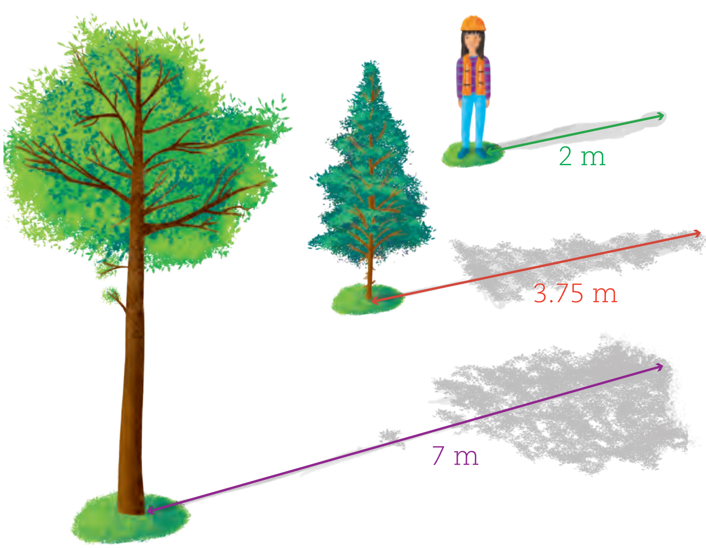
Sesión 1

Para empezar

La silvicultura nos enseña cómo cuidar los recursos forestales, pues se enfoca en la conservación, el cultivo y el aprovechamiento racional de los bosques y las selvas.

A lo largo de la historia, la humanidad se ha servido de los recursos naturales de los bosques y los ha explotado para su beneficio y subsistencia. En este proceso ha aprendido a conservarlos y regenerarlos; sin embargo, no siempre ha tenido éxito. En México y en el mundo se han cortado más árboles de los que se han sembrado y estamos en una etapa crítica de sobreexplotación de los bosques y las selvas, pues no se les ha permitido recuperarse. La ciencia y la ingeniería forestal se han preocupado, entre otras cosas, por encontrar métodos para medir, calcular y estimar las dimensiones de los árboles y los bosques para saber su estado de salud, edad y las condiciones óptimas para cuidarlos y aprovecharlos. ¿Para qué creen que sirve calcular la altura o el diámetro de los árboles? ¿Cómo creen que se pueda medir una distancia muy grande y lejana? ¿Cuál será el uso del conocimiento de los triángulos y de la semejanza para hacer este tipo de mediciones o estimaciones? Cuando se trata de distancias o longitudes de objetos, no siempre es posible realizar las mediciones o la estimación de distancias de manera directa, por lo que se buscan métodos indirectos para hacerlo.

En esta secuencia estudiarás cómo calcular distancias desconocidas o inaccesibles usando la semejanza de triángulos.



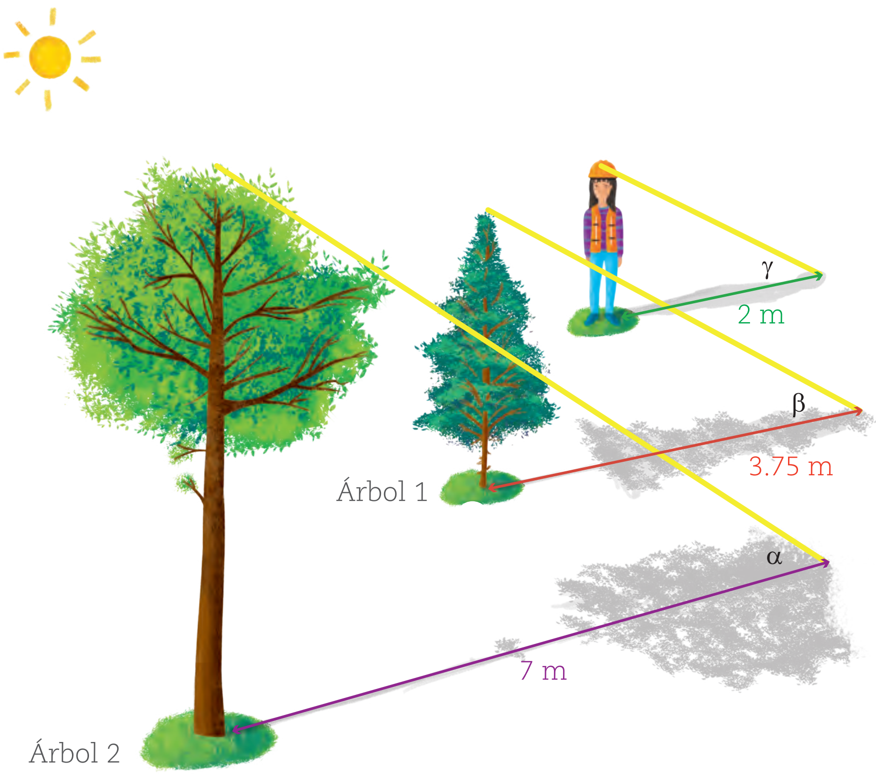
Manos a la obra

¿Qué altura tiene el árbol?

1. Trabajen en pareja. Observen el dibujo para contestar las preguntas de los incisos. A la misma hora del día, Josefina y dos árboles proyectan las sombras indicadas.

a) ¿Qué medida tiene el ángulo que forma cada árbol con su sombra? __________
Y, ¿el ángulo que forma Josefina con la sombra que proyecta en el suelo? __________

b) Los rayos del sol llegan paralelos a la Tierra. Observen la siguiente imagen. ¿Cómo son entre sí los ángulos α, β y γ que se forman con los rayos del sol y las sombras? Justifiquen su respuesta. __________



c) ¿Por qué los tres triángulos imaginarios que se forman son semejantes? __________

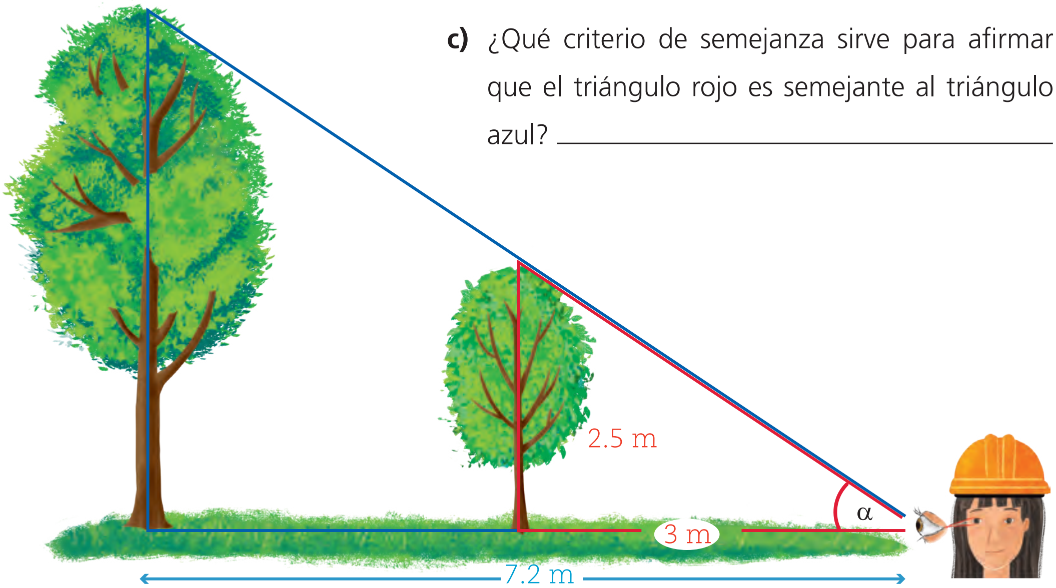
d) Si Josefina mide 1.60 m, ¿qué altura tiene cada uno de los árboles?

- Medida de la altura del árbol 1: __________ m
- Medida de la altura del árbol 2: __________ m

2. Como no siempre hay sombras bien definidas o algunos árboles tapan a otros, Josefina utiliza el siguiente método para medir otros dos árboles: recostada en el suelo, alinea con la vista los puntos más altos de los dos árboles. Uno de ellos lo puede medir de manera directa, pues no es muy alto, pero el otro no.

a) Ubica en la imagen los ángulos rectos. ¿Cómo sabes que miden 90°? __________

b) El ángulo α, ¿a qué triángulos pertenece? __________



c) ¿Qué criterio de semejanza sirve para afirmar que el triángulo rojo es semejante al triángulo azul? ____________________

d) Indica qué lados del triángulo rojo son correspondientes con los lados del triángulo azul. ____________________

e) ¿Cuál es la razón de semejanza del triángulo rojo con respecto al triángulo azul?

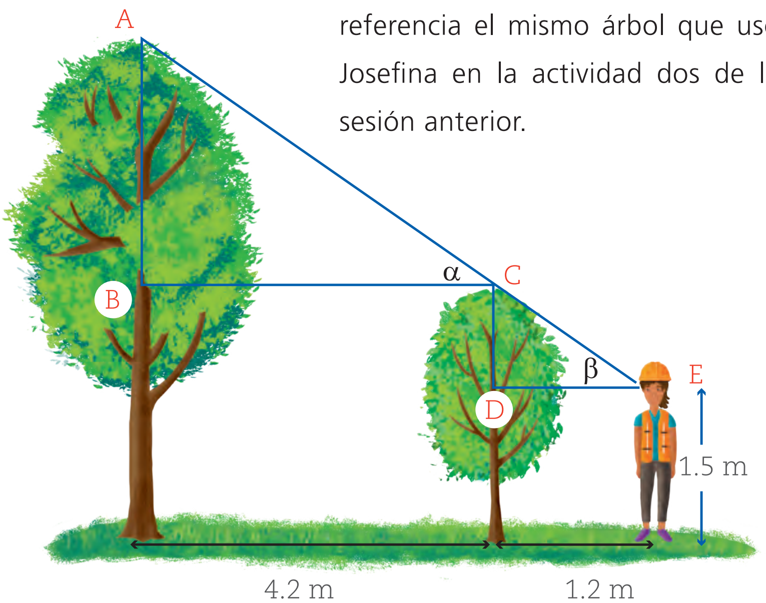
____

f) Sabiendo que ambos triángulos son semejantes, calcula la altura del árbol más alto. ____________________

Sesión 2

Más alturas

1. Trabajen en pareja. Para medir el mismo árbol que Josefina, Lucía prefiere usar el siguiente método. Como se ve en la imagen, ella no se tumba en el piso, pero sí usa como referencia el mismo árbol que usó Josefina en la actividad dos de la sesión anterior.



Dato interesante
La tercera parte del territorio nacional son bosques y selvas. Sin embargo, el Inegi reporta que de 1985 a 2014 se perdió una tercera parte de los bosques primarios y las selvas, lo cual equivale a casi 245 000 km², extensión similar a la superficie de Sinaloa y Sonora juntos. En nuestro país, en promedio, se pierden casi 2 500 km² de áreas verdes por año.

Respondan con base en la imagen de la página anterior.

a) El lado AB es paralelo al lado __________ y BC es paralelo al lado__________.

b) ¿Cómo son entre sí los ángulos α y β? ______________________________

¿Por qué? ____

____

c) Argumenten por qué los triángulos ABC y CDE son semejantes. __________

____

d) Si sabes que la distancia desde la altura de los ojos de Lucía al suelo es de 1.5 m, y la altura del árbol pequeño es 2.5 m, ¿cuánto mide el lado CD? __________

e) ¿Cuál es la razón de semejanza? ______________________________

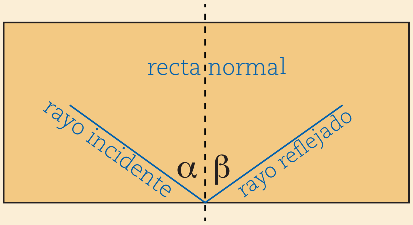
f) ¿Cuánto mide el lado AB? ______________________________

g) ¿Qué le falta hacer a Lucía para encontrar la altura total del árbol?__________

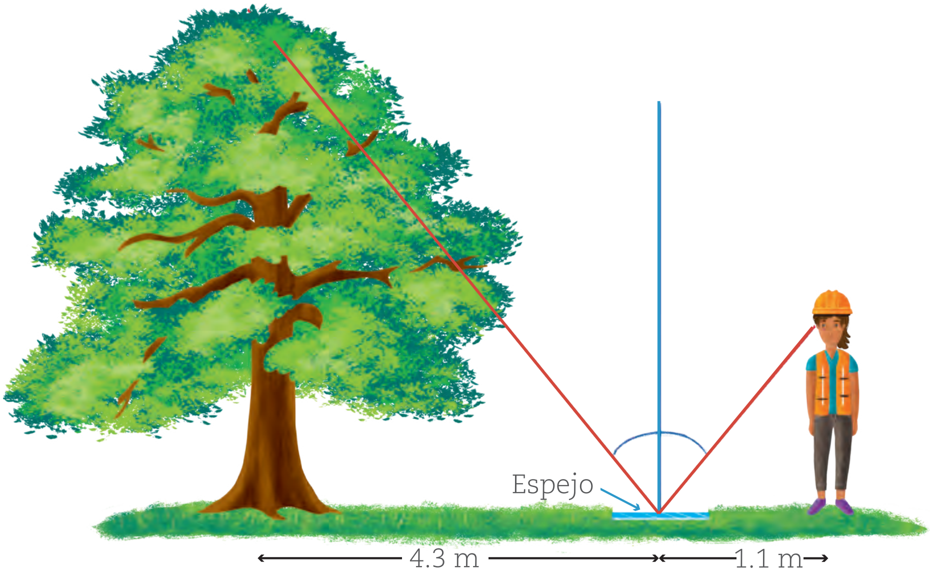
____

2. Lean y analicen la información que se presenta a continuación y, luego, resuelvan la situación que se plantea en la actividad 3.

La reflexión de la luz ocurre cuando los rayos de luz llegan a una superficie totalmente reflejante, chocan con ella y se regresan formando un ángulo igual al ángulo con el que llegaron. Por ejemplo, si un rayo de luz llega a una superficie plana reflejante, como puede ser un espejo, será reflejado con un ángulo β igual al ángulo de incidencia α. Ambos ángulos se miden respecto a la recta normal que, en este caso, es perpendicular al espejo en el punto de incidencia.



3. Ahora Lucía, para medir otro árbol, coloca en el piso un espejo, de manera que puede ver el extremo más alto del árbol reflejado en él, como se muestra en la figura. Con base en ella, contesten las preguntas.



> **Dato interesante**
> En Oaxaca está el árbol más ancho del mundo: un ahuehuete conocido como el Árbol del Tule; su tronco tiene un diámetro de 14 m y, para rodearlo, se necesitan cerca de 30 personas con las manos entrelazadas. Su altura es de 42 m.

a) ¿Cómo son los ángulos que se forman con el reflejo del árbol y el punto de visión de Lucía? ____________________

b) Localicen los ángulos rectos en los triángulos que se forman.

c) ¿Por qué los triángulos formados son semejantes? ________

____

d) ¿Cuál es la altura del árbol? Recuerda que la distancia desde la altura de los ojos de Lucía hasta el suelo es de 1.5 m.

____

4. Comenta con el resto de tus compañeros cuál de los métodos usados por Lucía y Josefina usarían ustedes para medir la altura de un árbol, edificio o cualquier objeto alto que les sea inaccesible. Argumenten por qué lo harían de ese modo y escríbanlo en su cuaderno. Den un ejemplo.

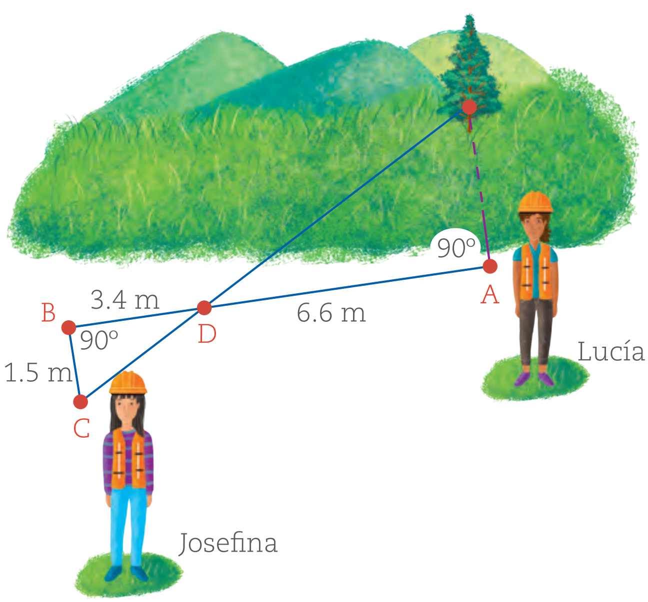
5. Tener bosques sanos y productivos de manera sostenible es indispensable para generar bienestar y mejorar la salud de las personas y del planeta. El uso adecuado de los recursos forestales permitirá que sigamos obteniendo de éstos los alimentos, las medicinas y los biocombustibles que necesitamos, además de tener un medio ambiente cada vez más sano. Conoce más sobre el tema en el video: https://bit.ly/3gOUI6M

Sesión 3

¿Qué tan lejos está?

1. Analiza la siguiente situación y después contesta las preguntas.

Lucía y Josefina quieren saber a qué distancia de ellas está un árbol que se encuentra al otro lado del pastizal. Para esto, colocan las siguientes estacas como referencia.



- Lucía pone una vara en el suelo, alineada con ella y el árbol, y clava una estaca (punto A).
- Desde ese punto, Josefina camina 10 m en dirección perpendicular a la vara del piso, y coloca otra estaca (punto B).
- Luego, camina 1.5 m de manera perpendicular al segmento AB, y coloca una tercera estaca (punto C).
- Josefina le pide a Lucía que clave una estaca alineada entre el árbol y ella sobre el segmento AB (punto D).

a) Argumenta por qué los triángulos que se forman son semejantes. ______________

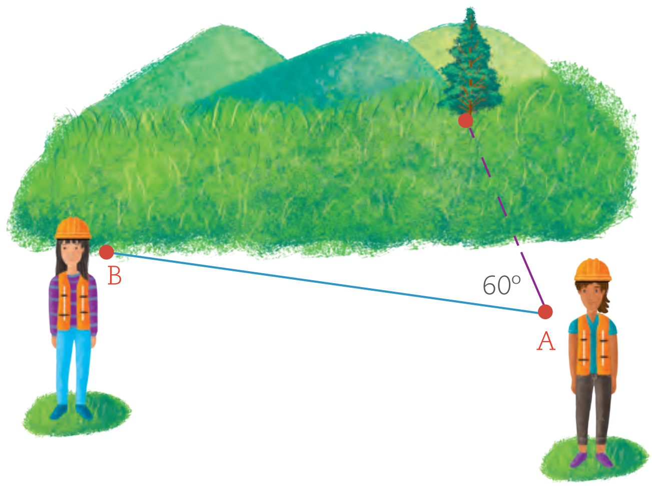
____

b) ¿Qué distancia hay del punto A hasta el árbol? ______________________

2. Trabajen en pareja. En la siguiente imagen, tracen una construcción que ayude a medir la distancia que hay entre Lucía y el árbol, considerando que Josefina no caminó en dirección perpendicular con la vara, sino formando un ángulo de 60°. Expliquen qué se tiene que cumplir para que los triángulos que tracen sean semejantes.

____

____

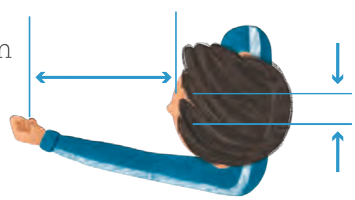


3. En grupo, comenten y escriban en su cuaderno sus conclusiones acerca de lo que tendrían que hacer Lucía y Josefina si quisieran calcular la distancia más corta de la orilla del pastizal al árbol.

4. Trabajen en equipo. Van a estimar distancias usando el pulgar, para lo cual deben hacer lo que se indica a continuación.

- Definan al medidor, quien extenderá su brazo y levantará el pulgar justo a la altura de los ojos, de manera que esté en el centro de la cara. Un compañero debe verificar esto y medir con una cinta métrica. Otro anotará las siguientes distancias:

Distancia del pulgar al ojo: ______ cm



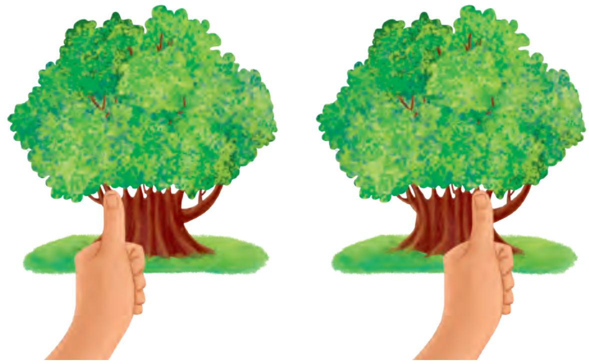
Distancia entre los ojos: ______ cm

- Calcula la razón que hay entre estas dos distancias

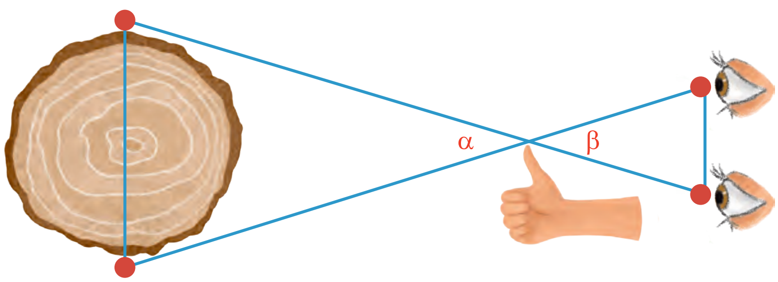
$$\frac{\textit{distancia del pulgar al ojo}}{\textit{distancia entre los ojos}} = \_\_\_\_$$

- Con el brazo estirado, el medidor debe utilizar como referencia el dedo pulgar para ubicar dos puntos de un objeto que se encuentre distante, mirando primero con un ojo y después con el otro. Al hacer esto, se crean dos ejes o líneas visuales y parece que el objeto se mueve.

Dato interesante
Las secuoyas son los árboles más altos del mundo, llegan a medir hasta 115 m de altura y el diámetro del tronco puede ser de hasta 7 m. En California, EUA, existe un bosque con este tipo de árboles.



- De esta manera, se forman dos triángulos, como se observa en la ilustración.



5. Con base en lo anterior, respondan las siguientes preguntas.

a) ¿Cómo son las medidas de los ángulos α y β entre sí? ____________________

¿Por qué? ____________________

b) ¿Cómo es la distancia del pulgar al ojo izquierdo, comparada con la distancia del pulgar al ojo derecho? ____________________

¿Por qué? ____________________

c) El triángulo que se forma con los vértices del pulgar y los dos extremos del tronco, ¿es isósceles? __________ ¿Por qué? ____________________

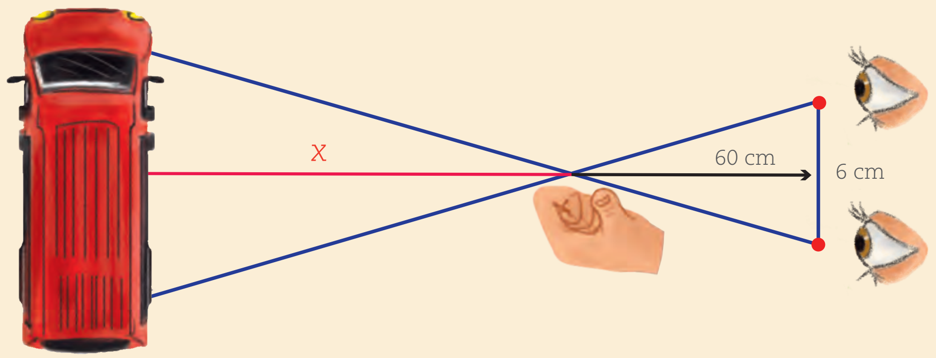
d) ¿Para qué sirve obtener la razón: $\frac{\textit{distancia del pulgar al ojo}}{\textit{distancia entre los ojos}} = \_\_\_\_$?

e) Si el diámetro del tronco es de 1 m, ¿qué distancia hay del pulgar al centro del tronco? ____________________

6. En grupo y con apoyo del maestro, lean la siguiente información.

Este método, llamado *paralaje*, es útil para estimar distancias, pero no es muy preciso, salvo que se conozca el ancho o la longitud de los objetos que se están observando. Además, depende de la distancia a la que te encuentres del objeto, y no siempre es posible que los ejes que se forman con los ojos y el pulgar coincidan con los extremos del objeto. Sin embargo, este principio sirve para entender cómo se calculan distancias inaccesibles, como la que hay entre la Tierra y los objetos estelares.

Por otra parte, en el ejemplo se puede hacer una estimación de que la camioneta mide aproximadamente 5 m, y entonces determinar que lo que abarca la visión de la camioneta es 4.5 m.



Como los triángulos son semejantes, para encontrar la distancia x se utiliza la razón:

$$\frac{\text{distancia del pulgar al ojo}}{\text{distancia entre los ojos}} = \frac{60}{6} = \frac{x}{4.5} = \frac{\text{distancia del pulgar al objeto}}{\text{longitud estimada de la camioneta}}$$

De donde, si despejamos:

$$\frac{60}{6} = \frac{x}{4.5}$$

$$(10)\ (4.5) = x$$

La distancia entre el pulgar y la camioneta es de 45 m, aproximadamente.

7. Observen el recurso audiovisual *Estimación de distancias usando el pulgar* para analizar aspectos importantes que se deben considerar para calcular distancias.

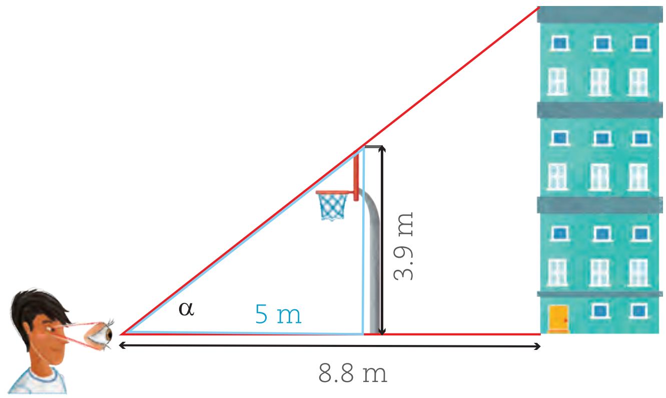
8. Salgan al patio y usen el método del pulgar para calcular distancias. Pueden usar como referencia el ancho de la puerta, la distancia que hay entre los marcos de una ventana, la distancia entre un hombre y otro. Comenten qué podrían usar como referencia y si conocen cuánto miden dichos objetos o distancias que usen como referencia.

Para terminar

¡A calcular medidas!

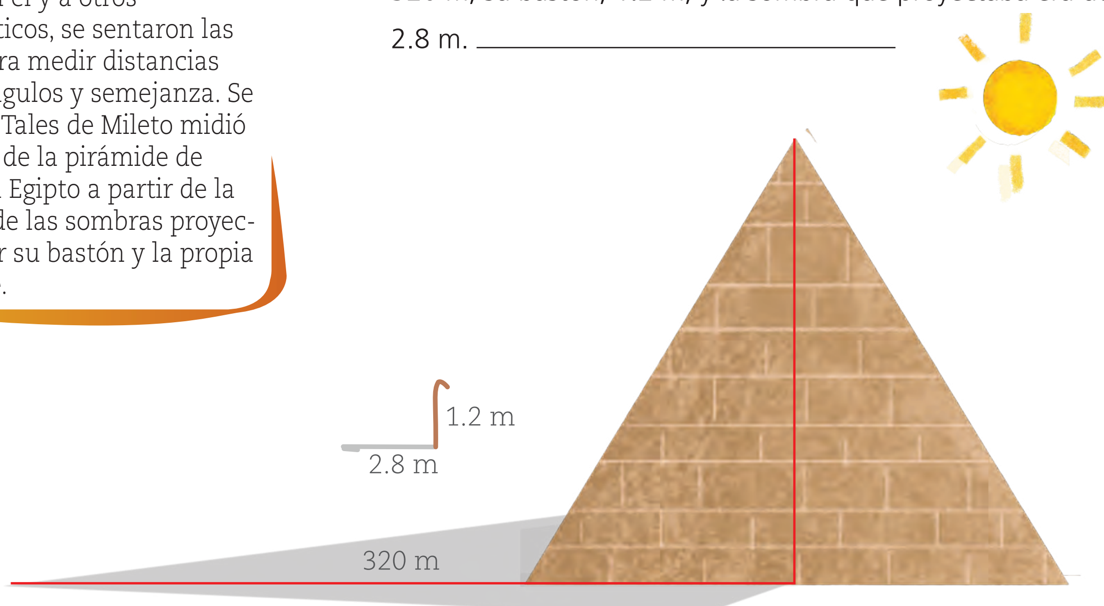
1. Es importante que todas las actividades de esta sesión las integres a tu carpeta de evidencias. Analiza las situaciones que se presentan y realiza lo que se pide.

   Los alumnos de una telesecundaria midieron la altura de un edificio que se localiza cerca de la escuela. Para hacerlo, emplearon el mismo método que Josefina en la actividad 2 de la sesión 1 y, como referencia, la canasta de basquetbol. Observa la imagen y calcula la altura del edificio.

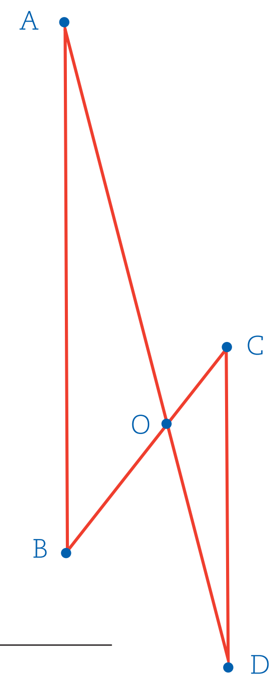


Dato interesante
Hace cerca de 2 600 años, Tales de Mileto hizo grandes aportaciones a la geometría y al razonamiento deductivo. Gracias a él y a otros matemáticos, se sentaron las bases para medir distancias con triángulos y semejanza. Se dice que Tales de Mileto midió la altura de la pirámide de Keops en Egipto a partir de la medida de las sombras proyectadas por su bastón y la propia pirámide.

2. Encuentra la altura de la pirámide de Keops o Gran Pirámide, en Egipto, con la información que se da. Puedes suponer que ésta fue la situación en que se encontró Tales de Mileto cuando, a cierta hora del día, la sombra de la pirámide medía 320 m, su bastón, 1.2 m, y la sombra que proyectaba era de 2.8 m. ______________________



3. Sin conocer nada sobre la medida de los lados, muestra que los triángulos AOB y DOC son semejantes. Considera que el segmento AB es paralelo al segmento DC.



a) Los ángulos OCD = OBA porque ______________________________
____
____.

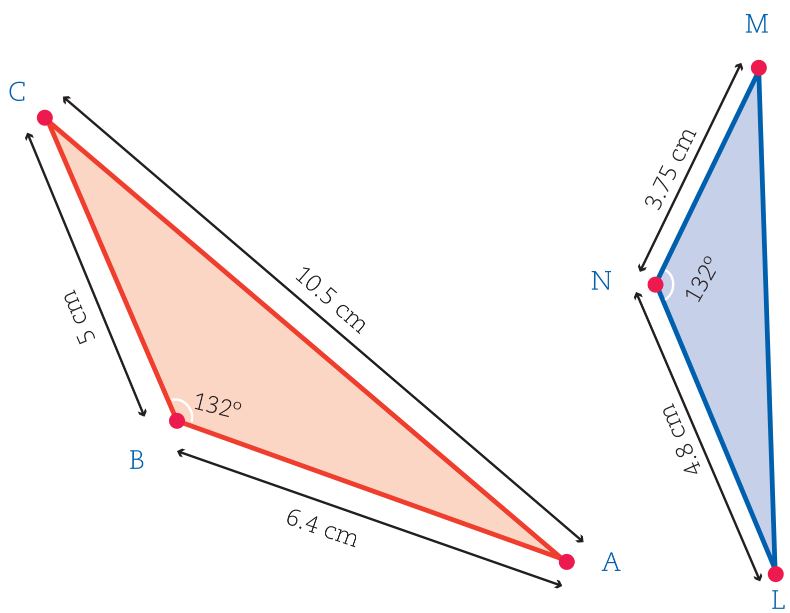
b) ¿Cómo son los ángulos BAO y CDO entre sí?
____

c) Con base en esto, ¿qué criterio de semejanza se puede usar para afirmar que los triángulos AOB y DOC son semejantes?
____

d) Si el lado AB mide 6 cm y la razón de semejanza del triángulo DOC es $\frac{2}{3}$ respecto al triángulo AOB, ¿cuánto mide el lado CD?
____

4. Observa la imagen y contesta.

a) ¿Por qué los siguientes triángulos son semejantes? ______________________________
____



Dato interesante
Tres siglos antes de nuestra era nació Eratóstenes de Siena, en Egipto, quien calculó la circunferencia de la Tierra basándose en la sombra que proyectaba un objeto en dos lugares diferentes, Siena y Alejandría. Para una época en que no se tenía la tecnología que ahora existe, su cálculo fue bastante preciso al señalar que medía 40 000 km, aproximadamente.

b) El lado BA es correspondiente con el lado ______________________________.

c) ¿Cuál es la razón de semejanza que hay entre los triángulos? ______________

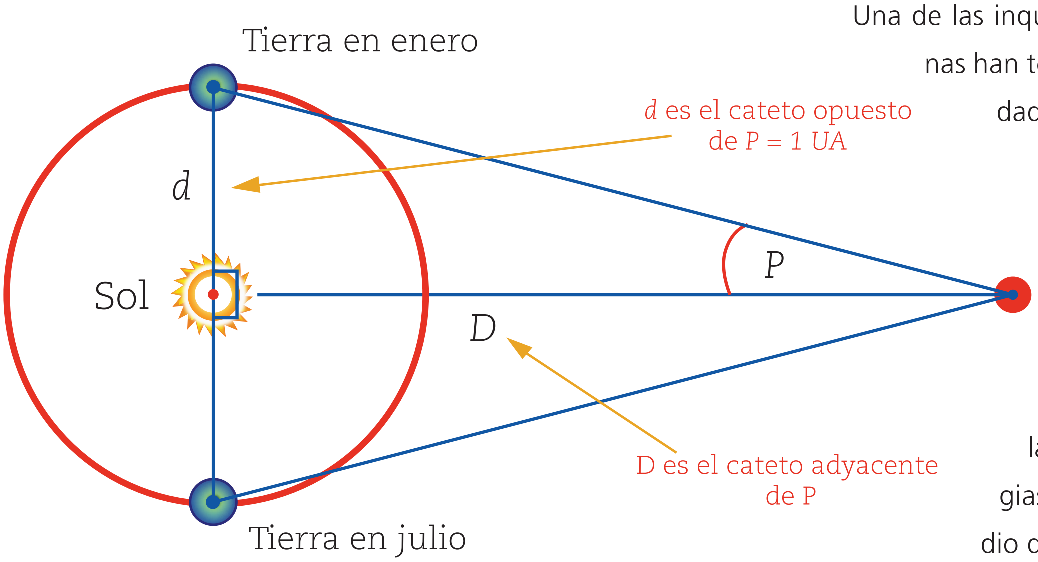
d) Calcula la medida del lado ML. ______________________________

5. Usen el recurso informático *Cálculos de distancias usando la semejanza de triángulos* para encontrar distancias o longitudes no conocidas.

25. Razones trigonométricas 3

Sesión 1

Para empezar



$$\tan(p) = \frac{\text{cateto opuesto} = d = 1\ UA}{\text{cateto adyacente} = D}$$

$$D = \frac{1\ UA}{\tan(p)}$$

Una de las inquietudes que las personas han tenido desde la antigüedad es conocer la distancia entre dos lugares u objetos alejados entre sí, en el mar o, incluso más allá de la Tierra, como el Sol o la Luna. Esta inquietud propició la búsqueda de estrategias de medición, el estudio de la semejanza y de los triángulos, en particular de los triángulos rectángulos. Entre los primeros aportes en este sentido está el cálculo que Aristarco, astrónomo y matemático griego del siglo IV a. n. e., elaboró de las distancias aproximadas de la Tierra al Sol y de la Tierra a la Luna. Eratóstenes utilizó la semejanza para calcular la circunferencia de la Tierra y, más adelante, Hiparco construyó una tabla de cuerdas que es considerada la primera tabla trigonométrica. Apoyado en ésta, mostró la relación entre los lados y los ángulos de un triángulo. Actualmente, además de estos conocimientos, se utilizan complejos instrumentos y herramientas que permiten obtener mayor precisión en las mediciones y los cálculos.

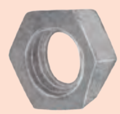
En las secuencias 7 y 18 aprendiste que los cocientes entre las medidas de los lados de un triángulo rectángulo dan lugar a las razones trigonométricas, y éstas son útiles para calcular la medida de algunas longitudes o distancias.

En esta secuencia aprenderás a usar las razones trigonométricas para calcular indirectamente alturas que no es posible medir de manera directa.

Manos a la obra

Cálculo de alturas

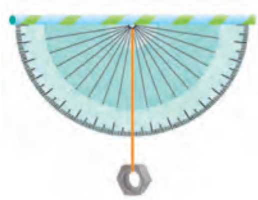
1. Trabajen en equipo. En esta actividad construirán un instrumento que les servirá para medir ángulos. Consigan el siguiente material:

• Hilo resistente 	• Un transportador 
• Pegamento blanco 	• Una tuerca 
• Popote de cartón 	

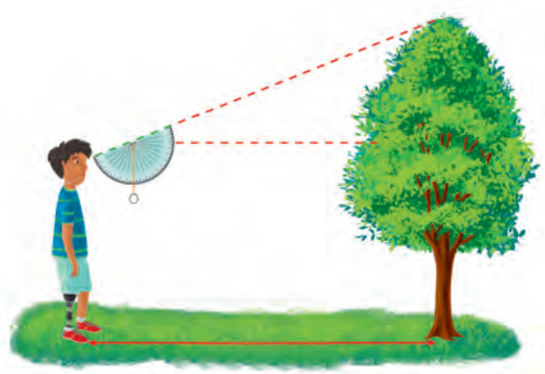
Dato interesante

El teodolito es un instrumento de medición mecánico-óptico y visual. En ingeniería se emplea para medir distancias, desniveles y ángulos. El primer teodolito fue construido en 1787 por Jesse Ramsden (1735-1800). Abajo se muestra la evolución del diseño de los teodolitos. La fotografía de la derecha es de uno actual.

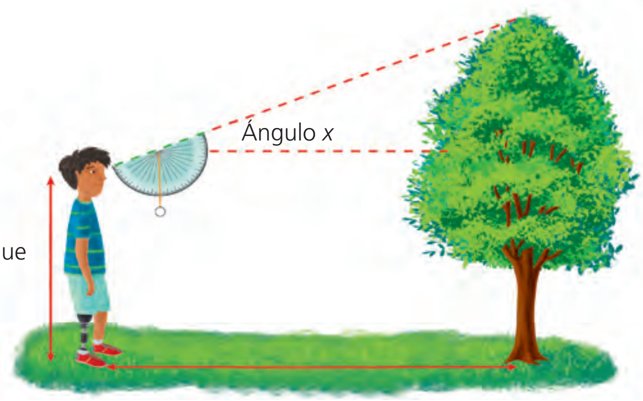
Usen el hilo para colgar la tuerca en el centro del lado recto del transportador. Luego peguen el popote de tal manera que pase por las marcas del 0° y 180°.



2. Elijan una altura para medirla con el instrumento que elaboraron. Puede ser un objeto o un lugar, como el asta bandera, el aro de la cancha de basquetbol, un árbol, el edificio de la escuela, la torre de una iglesia. Uno de ustedes se coloca a cierta distancia de lo que vayan a medir y, usando el popote como mira, localizará la punta superior del objeto elegido.



a) Tomen las medidas que se indican en el siguiente esquema y anótenlas. Con base en el ángulo que marca el hilo, calculen el valor del ángulo *x*.



Dato interesante
El 1° de julio de 1999 nació el programa de construcción, operación y custodia de las astas banderas y banderas monumentales. Una acción de este programa es la colocación de banderas de enorme tamaño en diferentes sitios del país para reforzar el sentido patriótico de los mexicanos. En la ciudad de Piedras Negras, Coahuila, está una bandera monumental cuya asta mide 125 m de altura.

b) Analicen los datos y determinen un plan para calcular la altura que están investigando. En la página 180 encontrarán una tabla de valores de las razones trigonométricas. ¿Cuánto mide la altura que están investigando? ____________________

3. Elijan otras dos alturas para medir. Coloquen su teodolito como se observa en la figura anterior. Hagan los diagramas y cálculos correspondientes en su cuaderno.

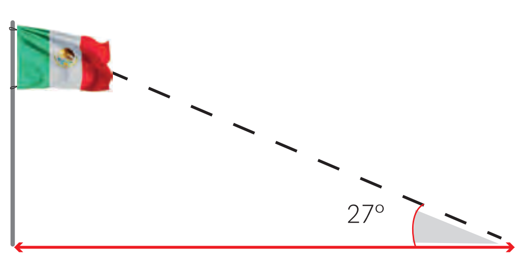
4. Comparen sus trabajos con los de otros compañeros. Comenten cómo usaron la tabla de valores de las razones trigonométricas. Si varios eligieron el mismo objeto y llegaron a resultados diferentes, comenten por qué y, si es necesario, corrijan.

Sesión 2

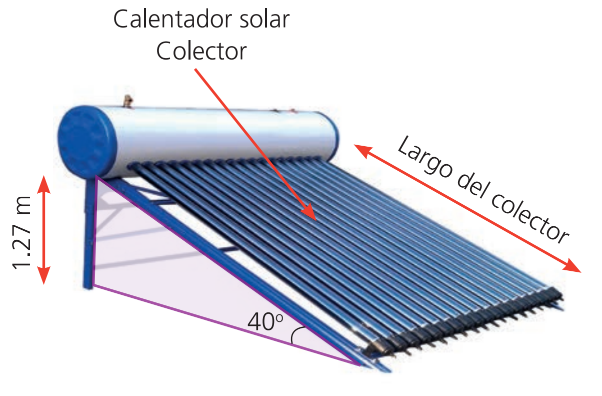
¿Cuál es la altura del asta bandera?

1. En pareja, calculen la distancia que se indica. En todos los casos, el triángulo que se considera es rectángulo. En el recuadro de la derecha, realicen sus cálculos.

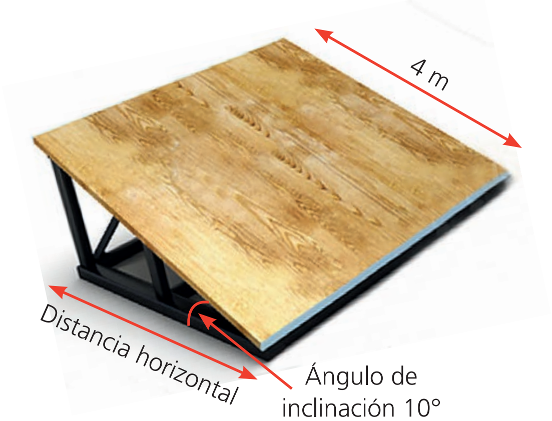
a) ¿Cuánto mide la altura del asta bandera? ____________________



b) ¿Cuánto mide el largo del calentador solar? ____________________

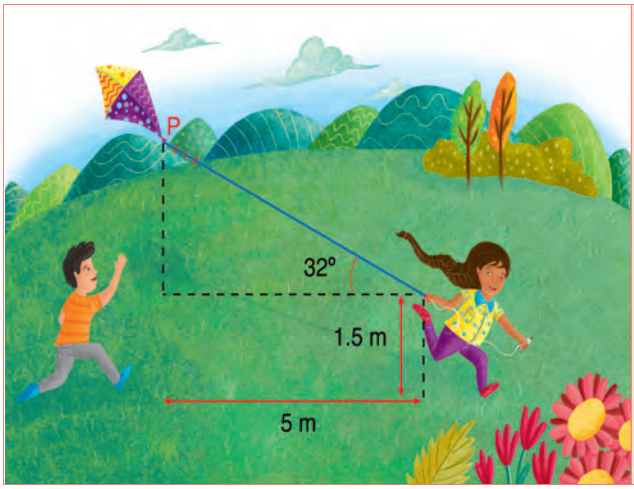


c) ¿Cuánto mide la distancia horizontal de la rampa? ____________________



d) En el triángulo isósceles ABC se marca la altura correspondiente al lado AC. El ángulo A mide 34° y el lado AC mide 6 m, ¿cuánto mide la altura del triángulo ABC? ____________________

e) ¿Cuánto mide el hilo que sostiene al papalote?________________ ¿A qué altura está el punto P? ____



2. Inventen un problema similar a los anteriores donde tengan que usar una razón trigonométrica para calcular una distancia, y resuélvanlo.

3. Comparen sus resultados y procedimientos con dos compañeros y, con ayuda de su maestro, si llegaron a resultados diferentes, analicen por qué; en caso necesario, corrijan. No olviden considerar que sus resultados pueden diferir en la parte decimal, según hayan considerado dos o más cifras decimales.

Sesión 3

¿Cuánto mide el ángulo?

1. Trabajen en pareja. En la secuencia 7 se dijo que la inclinación a la que debe colocarse un calentador solar depende de la latitud del lugar y del largo del calentador. Recuerden que el colector es la parte de los tubos del calentador solar.

Calentador solar

Con base en los siguientes datos, calculen la medida del ángulo.

Zacatecas se localiza a 23° latitud norte. En dicho territorio se recomienda que un colector solar como el de la imagen se coloque a una altura que sea $\frac{6}{10}$ del largo del colector.

a) ¿Cuánto mide el ángulo de inclinación? ____________________

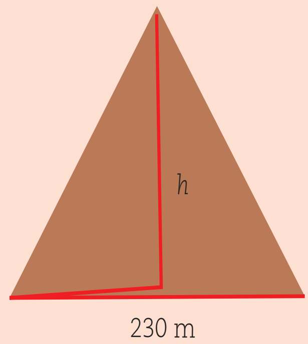
b) ¿Cómo lo calcularon? ____________________

____

2. Comparen sus resultados y procedimientos con los de otros compañeros. En particular, comenten cómo usaron la tabla de las razones trigonométricas para calcular el ángulo de inclinación.

3. Resuelvan los siguientes problemas.

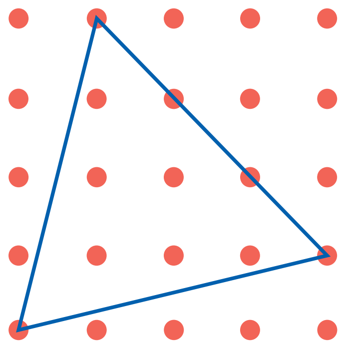
a) ¿Cuánto mide el ángulo de inclinación de las paredes laterales de la pirámide de Keops si su altura es, aproximadamente, de 139 m, y su base es un cuadrado de 230 m de lado? ____________________



b) Una buena inclinación para los techos de dos aguas es de 40°. En el siguiente esquema, ¿cuánto debe medir la altura *x* para lograr esta inclinación?

Dato interesante
En varios países los techos de dos aguas son comunes, ya que protegen las casas al evitar que se acumule la nieve y con ello minimizar el riesgo de un derrumbe.

c) Recordarás que una recomendación para colocar una escalera de mano es que la distancia entre ella y la pared sea, como mínimo, $\frac{1}{4}$ de la longitud de la escalera. Si se coloca de esta manera, ¿cuál es la medida del ángulo que la escalera forma con el piso? ______________________________



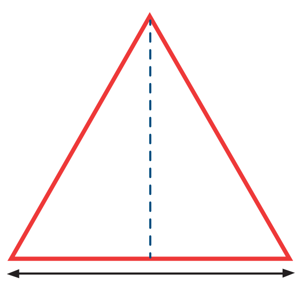
4. En un triángulo equilátero, sus tres ángulos miden 60°. Analicen si el triángulo es equilátero con base en la medida de sus ángulos; calculen y anoten la medida de cada ángulo interior (no se permite usar transportador).

5. Comparen resultados y procedimientos con otros compañeros. Si llegaron a resultados diferentes, analicen por qué y, en caso necesario, corrijan.

6. Usen el recurso informático *Cálculo de distancias y ángulos* para que analicen y usen las razones trigonométricas en este tema.

Sesión 4

Ángulos notables y relaciones interesantes

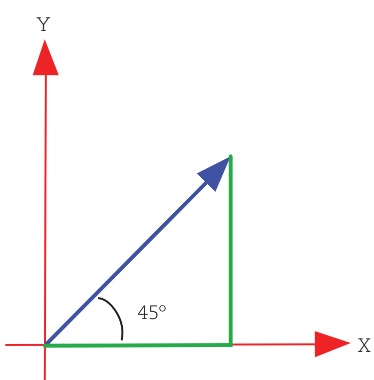


2 unidades

1. Trabajen en pareja. Hagan y respondan lo que se indica.

a) Para calcular el seno, el coseno y la tangente de los ángulos de 30° y 60°, es útil un triángulo equilátero cuyos lados midan dos unidades y al cual se le ha trazado una altura. Hagan los cálculos necesarios y completen la siguiente tabla:

Ángulo	Seno	Coseno	Tangente
30°			
60°			



1 unidad

b) En el plano cartesiano de la izquierda se ha marcado un triángulo rectángulo isósceles, cuyos lados iguales miden una unidad. Hagan los cálculos necesarios y completen la tabla.

	Seno	Coseno	Tangente
45°			

2. Completen la siguiente tabla. En caso de que la afirmación sea verdadera, den un argumento de por qué lo es a partir de los conceptos, las definiciones y las propiedades que han estudiado. En caso de que sea falsa, basta con que den un ejemplo que contradiga la afirmación (contraejemplo).

Afirmación	¿Es falsa o verdadera?	Argumento o contraejemplo
a) El seno de un ángulo es igual al coseno de su ángulo complementario.		
b) El seno de un ángulo puede tener cualquier valor.		
c) El coseno de un ángulo puede tener cualquier valor.		
d) La tangente de un ángulo puede tener cualquier valor.		
e) Si se divide el seno de un ángulo entre el coseno del mismo ángulo, se obtiene el valor de su tangente.		
f) Si se elevan al cuadrado el seno y el coseno de un ángulo y se suman ambos resultados, siempre se obtiene 1.		

3. Comparen y analicen sus respuestas y argumentos con los de otros compañeros, con apoyo del maestro.

Para terminar

Sesión 5

¿Crece o decrece?

1. Trabajen en pareja. Hagan o respondan lo que se indica.

a) Analicen la tabla de valores de las razones trigonométricas de la página 266 y completen la siguiente tabla.

	Seno	Coseno	Tangente
Valor mínimo			
Valor máximo			

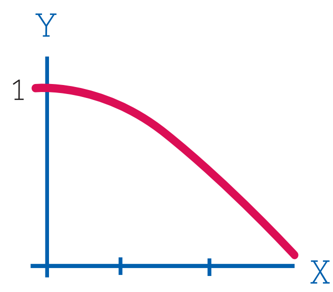
b) A partir de las definiciones del seno, el coseno y la tangente de un ángulo, en la sesión 3 de la secuencia 18, argumenten por qué esas razones trigonométricas tienen esos valores mínimo y máximo y completen las siguientes afirmaciones.

- El valor mínimo del seno de un ángulo es ________ porque ____________ ______________________________ y el valor máximo es ____________ porque ____.
- El valor mínimo del coseno de un ángulo es ____________ porque ____ y el valor máximo es ____________ porque ____.
- El valor mínimo de la tangente de un ángulo es ____________ porque ____ y el valor máximo es ____________ porque ____.

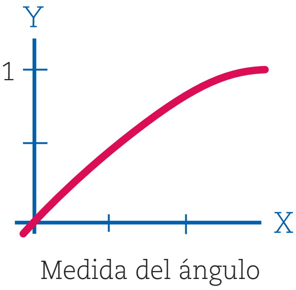
c) Consideren los valores de 0° a 90° del seno, el coseno y la tangente y anoten si esos valores crecen o decrecen.

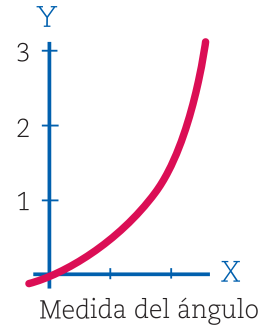
	Seno	Coseno	Tangente
De 0° a 90°, ¿crece o decrece?			

d) En las siguientes gráficas se ha considerado la medida del ángulo en el eje X y los valores del seno, el coseno y la tangente de los ángulos en el eje Y. Anoten a cada gráfica si corresponde al seno, al coseno o a la tangente de un ángulo.



Medida del ángulo





e) Completen la siguiente tabla.

Afirmación	¿Es falsa o verdadera?	Argumento o contraejemplo
El seno de 30° es igual a la mitad del seno de 60°.		
El coseno de 10° es igual al doble del coseno de 5°.		
La tangente de 60° es igual al triple de la tangente de 20°.		

f) En su cuaderno, respondan las siguientes preguntas y argumenten sus respuestas.

- ¿El seno de un ángulo es proporcional a la medida del ángulo?
- ¿El coseno de un ángulo es proporcional a la medida del ángulo?
- ¿La tangente de un ángulo es proporcional a la medida del ángulo?

2. Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Si dieron respuestas diferentes, analicen los argumentos con ayuda de su maestro.

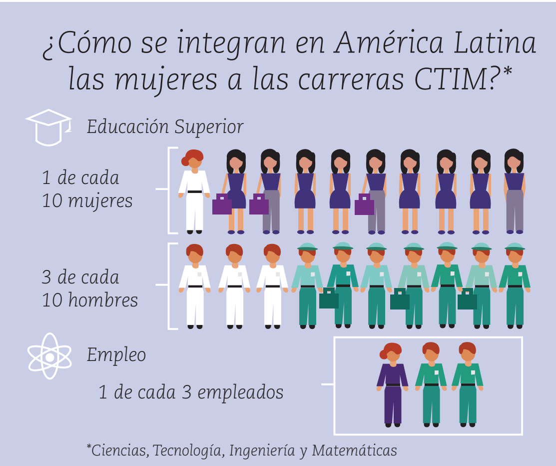
3. Observen el recurso audiovisual *Maravillas de la trigonometría* para conocer la manera en que Eratóstenes calculó la circunferencia de la Tierra.

Dato interesante
Casi 150 años después de Eratóstenes, Posidonio (135-51 a. n. e.), creó un método para calcular la circunferencia de la Tierra y obtuvo una medida menor que la obtenida por su antecesor. Ptolomeo (100-170), otro matemático y astrónomo griego, adoptó ese valor y probablemente en él se basó Cristóbal Colón (*ca*. 1451-1506) para emprender su viaje a las Indias Orientales por el océano Atlántico.

26. Tendencia central y dispersión de dos conjuntos de datos 2

Sesión 1

Para empezar



Fuente: Texto y gráficas elaborados con base en el documento publicado por el IFT, “La educación de las niñas y jóvenes mujeres en CTIM”.

Un ejemplo de la aplicación actual de la estadística es la infografía que muestra la proporción de mujeres y hombres estudiantes en una carrera de Ciencias, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas (CTIM), así como la proporción de empleos que corresponden a esas profesiones en América Latina. ¿De qué manera crees que se recopilaron los datos? ¿Qué les pudieron preguntar a las personas interrogadas para obtenerlos? ¿Se incluye en la infografía el dato del número de personas que contestó las preguntas?

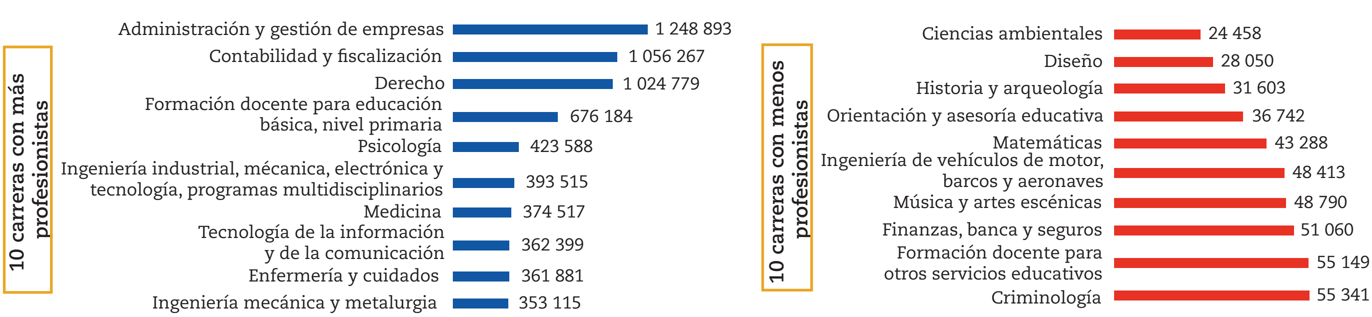
En esta secuencia aplicarás tus conocimientos de medidas de tendencia central, rango y desviación media para comparar la tendencia y distribución de dos conjuntos de datos estadísticos que corresponden a una misma situación o para comparar la tendencia y distribución de datos estadísticos que corresponden a dos aspectos diferentes de la misma situación.

Manos a la obra

Número de profesionistas por carrera

1. Lee e interpreta las gráficas para hacer lo que se indica en los incisos.

Promedio general de profesionistas por carrera: 237 105



Fuente: IMCO, A. C., “Compara carreras 2019”.

a) Describe en tu cuaderno qué información presenta cada gráfica y de qué manera está representada.

b) ¿Cuál es la carrera con menos profesionistas? ______________________ ¿Cuántos profesionistas hay en esta carrera? ______________________

c) ¿Cuál es la carrera con más profesionistas? ______________________ ¿Cuántos profesionistas hay en esta carrera? ______________________

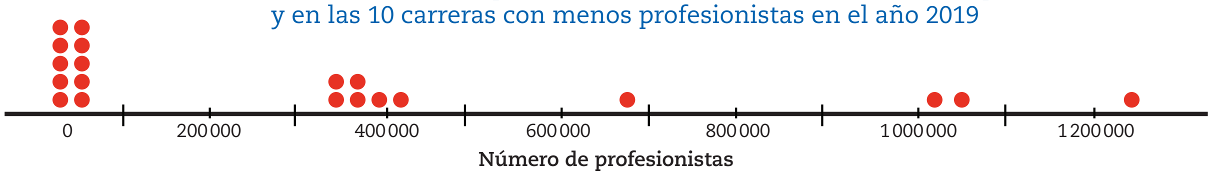
d) ¿Cuál es el promedio general de profesionistas por carrera? __________ ¿Entre qué números de profesionistas y de carreras se ubica el promedio general de profesionistas por carrera? __________

e) Entre los 10 datos que presenta cada gráfica, ¿en cuál de los conjuntos se observa mayor variación? __________ ¿Por qué? ______________________

f) Si tuvieras que elegir una carrera entre las 20 antes mencionadas, ¿cuál escogerías?, ¿por qué? ______________________

2. Si los datos que presentan las dos gráficas anteriores se reúnen y reorganizan en una sola gráfica, ¿cuáles de las siguientes gráficas representan correctamente la situación?, ¿por qué?

Distribución del número total de profesionistas en las 10 carreras con más profesionistas y en las 10 carreras con menos profesionistas en el año 2019



☐ Sí corresponde ☐ No corresponde ¿Por qué? ______________________

Número de profesionistas en las 10 carreras con más profesionistas y en las 10 carreras con menos profesionistas

☐ Sí corresponde

☐ No corresponde

¿Por qué? ______________________

Distribución del número de profesionistas en las 10 carreras con más profesionistas y 10 carreras con menos profesionistas en el año 2019

☐ Sí corresponde

☐ No corresponde

¿Por qué? ______________________

a) ¿Cuál es el rango en la distribución del número de profesionistas por carrera? ______________________________

b) ¿Hay algún dato atípico? ______ En caso afirmativo, ¿cuál es? ______________
En caso negativo, ¿por qué? ______________________________

c) Ubica el valor del promedio general de profesionistas por carrera (media aritmética) en la gráfica o gráficas que elegiste como correctas. Traza una línea de color rojo para destacarlo.

d) ¿Cuál es el número típico de profesionistas por carrera? Expliquen por qué creen que su respuesta es correcta. ______________________________

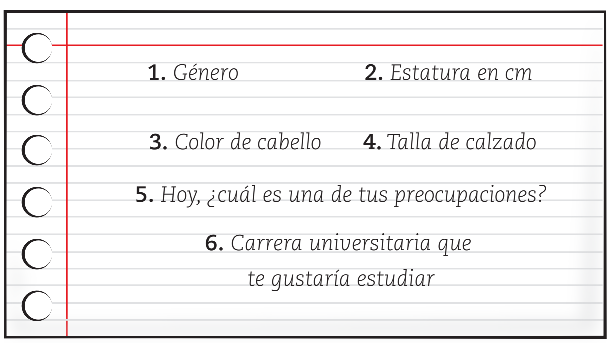
e) ¿Es posible obtener el valor de la desviación media del promedio general de profesionistas por carrera? ________ Justifica tu respuesta. ______________________________

3. Con ayuda de tu maestro, compara tus respuestas de las actividades con las de tus compañeros de grupo. En caso necesario, corrige los errores.

Glosario
Base de datos es un conjunto de información almacenada y organizada sobre diversas materias con la finalidad de acceder a ella con rapidez y precisión.

4. Comenten con sus compañeros y maestro de qué manera creen que se hayan obtenido los datos: encuesta, censo o consulta de las **bases de datos** de una institución, y por qué. ¿Qué preguntas habrán planteado para recopilar los datos? ¿Se conoce cuántas personas participaron en el estudio? Si consideran otra carrera (una que no esté en la encuesta), ¿cuántos profesionistas creen que tendría? Expliquen por qué creen que su respuesta es correcta.

5. Trabajen en equipo. Preparen tarjetas iguales a la que se muestra a la izquierda para realizar una encuesta a sus compañeros de grupo o de la telesecundaria, según el número de estudiantes que haya.



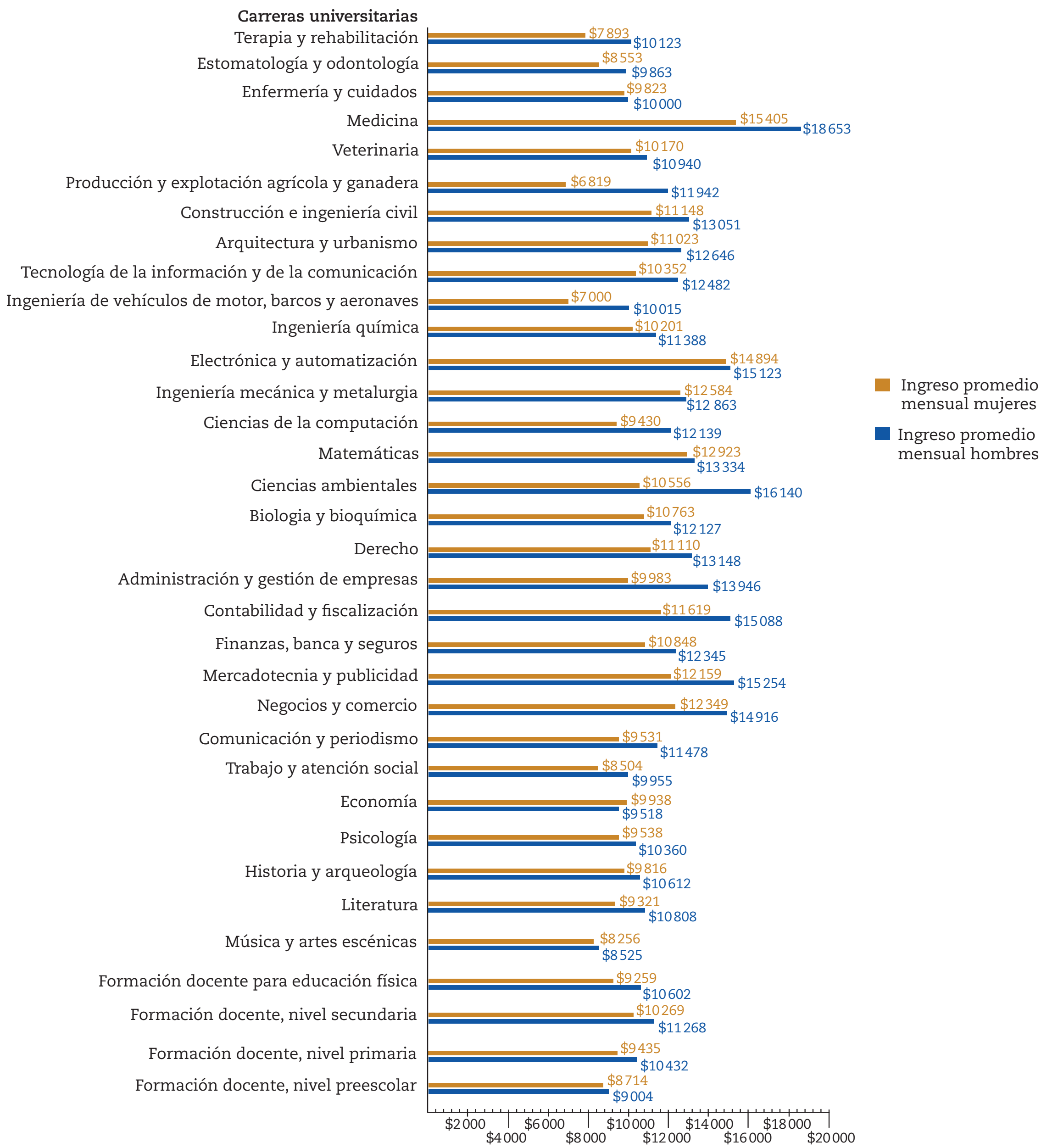
Si lo consideran adecuado, incluyan alguna pregunta que les permita obtener datos sobre otro aspecto que les interese conocer relacionado con sus compañeros, grupo, escuela o comunidad.

6. Entreguen una tarjeta a cada compañero para que la completen. Posteriormente, con las respuestas registradas, formen una base de datos. Pueden elaborarla en su cuaderno o en una computadora. Los datos que obtengan los usarán en la sesión 3.

Ingreso mensual promedio de un profesionista

1. Trabajen en equipo. Lean e interpreten la información de la siguiente gráfica; luego, realicen en su cuaderno lo que se les indica.

Ingreso promedio mensual de acuerdo con la carrera universitaria por género



Ingreso promedio mensual por género en pesos

Fuente: Instituto Mexicano para la Competitividad. Centro de Investigaciones en Política Pública.

a) Describan qué información presenta la gráfica anterior.

b) ¿Cuántos ingresos mensuales promedio son igual que $10 000 o más? ¿Cómo pueden saberlo?

c) ¿El ingreso mensual promedio de mujeres y hombres de cuántas carreras universitarias diferentes se registraron en total?

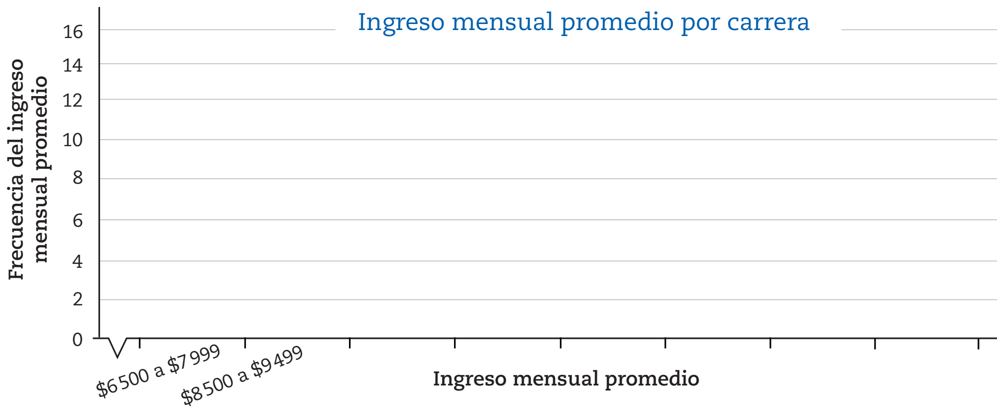
d) ¿Cuál es la carrera mejor pagada para las mujeres?

e) ¿En qué carrera o carreras pagan más a una mujer que a un hombre?

2. Utilicen el recurso informático *Estadísticas en la hoja de cálculo* para obtener la media aritmética, la mediana, la moda y la desviación media de conjuntos de datos.

3. Para continuar con el análisis de la información de la gráfica de la actividad 1, algunos de ustedes consideren los ingresos mensuales promedio por carrera universitaria de las mujeres y otros consideren los de los hombres.

a) Reorganicen los datos y elaboren el histograma o polígono de frecuencias de los ingresos mensuales promedio para hombres o para mujeres, según les corresponda.



b) Completen la tabla de abajo con los valores de las medidas estadísticas del conjunto de datos que les corresponde (ingreso mensual promedio de hombres o de mujeres). Si disponen de una calculadora u hoja de cálculo electrónica, pueden utilizarla para realizar los cálculos necesarios.

c) Ubiquen los valores de la mediana, media aritmética y desviación media en la gráfica y usen una línea vertical que interseque el eje horizontal para marcar el valor de cada medida del conjunto de datos. Luego, describan en su cuaderno la distribución de los conjuntos de datos que observan. Por ejemplo, ¿qué se observa sobre los valores del número de datos que quedan en cada lado del valor de la mediana? ¿Hay algún ingreso mensual promedio atípico?

Conjuntos de datos	
Mediana	
Rango	
Media aritmética	
Desviación media	

4. Con ayuda de su maestro, comparen sus respuestas de las actividades con las de sus compañeros. En caso necesario, corrijan los errores.

a) Ahora, completen el párrafo con los valores que obtuvieron en la actividad anterior:

Al analizar la información presentada en la gráfica de Ingreso mensual promedio de acuerdo con la carrera universitaria por género, se observa que el mínimo ingreso mensual promedio de las mujeres profesionistas es de ______________ y el máximo es de __________, lo que representa un rango de ____________. En el caso del mínimo ingreso mensual promedio de los hombres, se tiene que éste es de _______ y el máximo es ________________, lo que representa una diferencia de________________.

Al ordenar los ingresos mensuales promedio de los hombres, el valor del ingreso mensual promedio que está en el centro es ____________, mientras que, en el conjunto de los ingresos mensuales promedio de las mujeres, la mediana es ________________.

El promedio general del ingreso mensual promedio de una mujer profesionista es de __________ con una variación media de ____________, mientras que el promedio general del ingreso mensual promedio de un hombre profesionista es de ____________ y la desviación media entre los ingresos mensuales promedio es _____________.

Se puede afirmar que los ingresos mensuales promedio de ________________ (los hombres / las mujeres) tienen ____________ (mayor / menor) variación que los ingresos mensuales promedio de _________________ (los hombres / las mujeres).

b) Consideren el análisis de la situación y respondan en su cuaderno: ¿cuál es el ingreso mensual promedio típico? Pueden usar un intervalo de ingresos para responder esto. Luego, expliquen por qué creen que su respuesta es correcta.

c) Si se consideran los ingresos mensuales promedio tanto de los hombres como de las mujeres de una carrera universitaria que no esté incluida en el estudio o encuesta, ¿qué cantidades creen que tendrían? Expliquen por qué creen que su respuesta es correcta.

5. Elaboren un periódico mural que muestre los datos relevantes sobre el ingreso promedio mensual por carrera universitaria. Si es posible, investiguen e incluyan cuántos profesionistas, artesanos, técnicos, agricultores, pescadores o de otras actividades hay en su comunidad y qué ingreso mensual promedio tienen.

6. Comenten con su grupo y maestro cuál o cuáles carreras universitarias les interesan y cuáles no sabían que existían. Si les es posible, consulten el estudio cualitativo “La educación de las niñas y jóvenes mujeres en Ciencias, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas (CTIM)”, disponible en https://bit.ly/3fkH2ik

Para terminar

¿Qué nos preocupa hoy en día?

1. Trabajen en pareja. Consideren la información que muestran la gráfica y la tabla de distribuciones de frecuencias relativas de las respuestas diferentes que dieron 24 691 jóvenes a la pregunta "¿Cuáles son tus preocupaciones hoy en día?", de la "Encuesta de Tendencias Juveniles. Ciudad de México, 2018", disponible en https://bit.ly/2XaliQp

¿Cuáles son tus preocupaciones hoy en día? (%)

Total de jóvenes que contestaron la encuesta: 24 691

	Porcentajes totales por respuesta	Porcentajes por género e intervalo de edad					
		Total	12-17 años	18-29 años	Total	12-17 años	18-29 años
No tener dinero	41	38	29	44	45	27	48
Sacar buenas calificaciones	38	40	57	29	34	62	28
Fracasar	33	33	29	35	33	26	35
Tener amigos	15	15	20	12	13	23	11
No cumplir con las expectativas de los demás	11	12	12	12	11	11	11
La muerte	11	11	11	12	12	11	12
No tener las cosas que me gustaría poseer	10	10	10	11	11	9	11
No tener a alguien o algo en quien creer	8	8	8	8	8	7	9
No ser como los demás	8	8	8	7	8	10	8
Me da flojera casi todo y no sé por qué	7	8	10	6	7	9	6
Bajar de peso y verme bien para los demás	5	6	7	5	4	4	4
No tener novio / novia	5	5	6	5	5	5	5
Subtotales		16 078	7 095	8 983	8 613	1 902	6 711

a) De acuerdo con la información anterior, ¿cuántos jóvenes en total contestaron que les preocupa no tener dinero? ________________

b) Si consideran sumar los porcentajes totales de las respuestas registradas, ¿qué porcentaje obtienen? __________ ¿Qué significado tiene ese valor en el contexto de la situación? ________________

c) ¿Cuántas mujeres de entre 12 y 17 años contestaron la pregunta? __________

d) ¿Cuál es la mayor preocupación de las mujeres? ______________________

¿Hay algún intervalo de edad en que les preocupe más? ______________

En caso afirmativo, ¿en cuál? ______________________________

e) ¿Cuántos hombres en total contestaron la pregunta de la encuesta? ________

f) ¿Cuál es la mayor preocupación de los hombres? ______________________

¿Hay algún intervalo de edad en que les preocupe más? ______________

En caso afirmativo, ¿en cuál? ______________________________

g) ¿A quién le importa más no tener novio o novia, a los hombres o a las mujeres?

____________________ Justifica tu respuesta. ______________

____

h) ¿En qué intervalo de edad hay mayor variabilidad en el porcentaje de respuestas de los hombres y de las mujeres? ______________ Justifica tu respuesta.

____

i) ¿En qué intervalo de edad hay menor variabilidad en el porcentaje de respuestas de los hombres y de las mujeres? ______________ Justifica tu respuesta.

____

____

2. Comparen sus respuestas de las actividades con las de sus compañeros y con su maestro. En caso necesario, corrijan los errores. Además, continúen analizando la información que presentan los resultados. Por ejemplo, a cuántas mujeres de 12 a 17 años les interesa tener amigos, y realicen un sondeo en su grupo sobre si les inquietan las mismas situaciones o si existen otras que les preocupen.

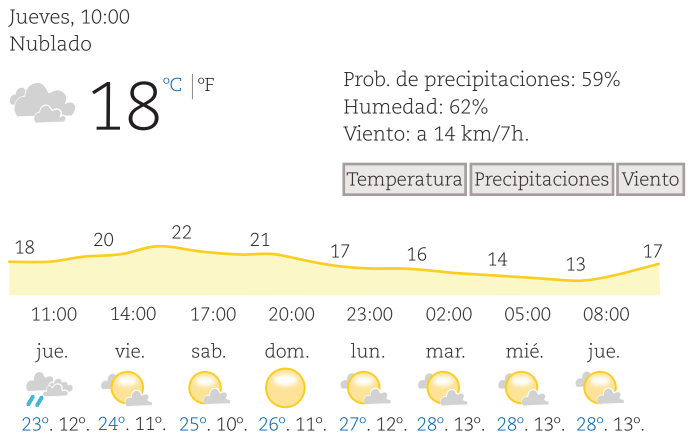
3. Trabajen en equipo. En su cuaderno, elaboren una tabla y gráfica de distribución de frecuencias que muestren los resultados para cada una de las respuestas completadas en las tarjetas de la actividad 5 de la sesión 1, así como los valores de las medidas de tendencia central, rango y desviación media en los casos en los que sea posible obtenerlos. Cada integrante debe recopilar las respuestas a una de las preguntas. Incluyan las gráficas y tablas en el periódico mural de la sesión anterior. Si es posible, usen una hoja de cálculo electrónica o *software* que les permita organizar y presentar sus resultados. Conserven las tarjetas con los datos, ya que posteriormente se utilizarán como barajas en la secuencia 27 para extraer información.

4. Observen el recurso audiovisual *Comparación de conjuntos de datos estadísticos* para analizar cómo se maneja y se presenta la información en distintas oficinas públicas y privadas para comparar conjuntos de datos generados por ellas.

27. Eventos mutuamente excluyentes 3

Sesión 1

Para empezar



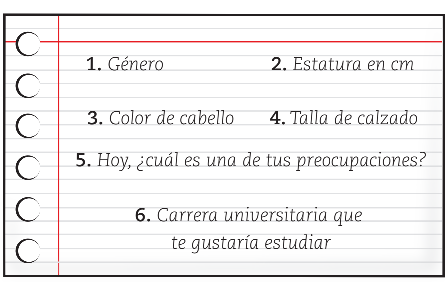
Ejemplo de pronóstico del estado del tiempo.

En la vida existen algunos sucesos que se pueden predecir. Su probabilidad de ocurrencia se mide en una escala de números entre el cero (evento imposible) y el uno (evento seguro). En medio, entre lo imposible y lo seguro, está lo probable.

La imagen muestra la vista de un pronóstico del estado del tiempo en determinado día y lugar. En un informe de este tipo se proporciona la temperatura probable en diferentes horas del día, así como la temperatura promedio; la probabilidad de precipitación o lluvia; el porcentaje de humedad y la velocidad del viento, entre otros aspectos. En la imagen se observa que hay un pronóstico de temperatura de 18 °C a las 10:00 horas, y se espera que la temperatura máxima sea de 23 °C y la mínima de 12 °C. ¿Cómo crees que fue posible predecir esas medidas de la temperatura? ¿Qué probabilidad hay de que se cumpla ese pronóstico? ¿Con base en qué datos crees que se determinan?

En esta secuencia calcularás la probabilidad de ocurrencia de diferentes eventos que pueden ser simples, compuestos o mutuamente excluyentes, para analizar situaciones aleatorias, como los juegos de azar y la consideración de si un juego es justo o no y, en este último caso, identificar si es posible compensar las condiciones o premios prometidos.

Manos a la obra



Pronóstico y oferta

1. Trabajen en pareja. Utilicen las tarjetas con los registros de las respuestas que recopilaron en la secuencia 26.

   Primero, revuelvan las tarjetas y, sin ver, extraigan una. Anoten los resultados que se piden en la tabla de la siguiente página.

Regresen la tarjeta y tomen otra al azar para extraer una tarjeta nueva y registrar sus resultados. Completen 10 registros para llenar la tabla y contesten las preguntas.

Registro de 10 tarjetas										
Tarjeta	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Género										
Estatura en cm										
Talla de calzado										

a) Si se toma un alumno al azar, ¿es más probable que sea hombre o mujer? ____________________

b) ¿Cuál es la probabilidad frecuencial de que sea hombre y mida más de 165 cm? ____________________

c) ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer y su talla de calzado sea mayor que 23 cm? ____________________

d) ¿Cuál es la probabilidad de que mida 160 cm de estatura y la talla de calzado sea 24 cm? ____________________

Dato interesante
Una de las maneras de saber qué les preocupa a los jóvenes es conocer sus hábitos. En los países desarrollados, 94% de los jóvenes de entre 15 y 24 años están conectados a internet, cifra que representa un porcentaje muy elevado si se considera que el promedio de conectividad de la población general es de 50%.

2. Utilicen la tabla de frecuencias que elaboraron en la secuencia 26. Consideren los valores de las frecuencias relativas de género, estatura y talla de calzado para contestar en su cuaderno.

a) Si se toma un alumno al azar, ¿es más probable que sea hombre o mujer? Justifiquen su respuesta.

b) ¿Cuál es la probabilidad frecuencial de que sea hombre y mida más de 165 cm?, ¿y de que sea mujer y su talla de calzado sea mayor de 23 cm?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que mida 160 cm de estatura y la talla de calzado sea 24 cm?

3. En grupo y con ayuda de su maestro, comparen y comenten las respuestas de las actividades 1 y 2. Describan lo que ocurre con los valores de los resultados que se obtienen en cada caso.

4. En algunos estados de la República se apoya a los padres de familia con vales de descuento para que los canjeen en algunos comercios y reciban uniformes y calzado para sus hijos. Contesten en su cuaderno: ¿de qué manera los responsables de ese tipo de comercios podrían usar información como la recolectada? ¿Qué es más posible que ocurra, recibir vales para uniformes de mujer o de hombre? Si suponen que los datos de la tabla de arriba pertenecen a uno de los comercios participantes, ¿qué número de talla o tallas de calzado para mujer es más posible que pidan?, ¿y para hombre?

¿Le gustaría estudiar una carrera CTIM?			
Género	**Sí**	**No**	**Total**
Mujer			
Hombre			
Total			

5. Consideren las respuestas a la pregunta 6 de la tarjeta: *Carrera universitaria que te gustaría estudiar*. En parejas, organicen las respuestas de mujeres y hombres que quieren estudiar una carrera de Ciencias, Tecnología, Ingeniería o Matemáticas (CTIM), y completen la tabla de doble entrada que se muestra a la izquierda.

6. Respondan en su cuaderno. Si se selecciona al azar a un alumno que haya respondido a la pregunta 6 de la tarjeta y se definen los eventos:

A: Le gustaría estudiar una carrera de CTIM.

B: Es mujer.

C: No le gustaría estudiar una carrera de CTIM.

a) ¿Puede ocurrir que el alumno seleccionado al azar cumpla con los eventos A y el C a la vez? ____________________ ¿Por qué? ____________________

____

¿Cuál es la probabilidad de que…

b) el alumno seleccionado aleatoriamente sea mujer? ____________________

c) el alumno seleccionado aleatoriamente quiera estudiar una carrera de CTIM?

____

d) ocurran los eventos A y B? ____________________

e) ocurran los eventos A y C? ____________________

f) ocurran los eventos A o C? ____________________

7. En grupo y con apoyo de su maestro, comparen y comenten sus respuestas. En caso de ser necesario, corrijan.

Sesión 2

Un juego de dados usando la diferencia

1. Trabajen en pareja. Jueguen "A quitar fichas".

Tablero		
0	1	2
3	4	5

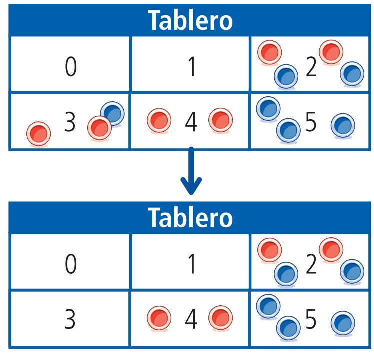
Tablero		
0	1	2
3	4	5

- Para jugar, requieren de dos dados de seis caras y de un tablero como el que se muestra a la izquierda.

  Además, cada jugador debe tener seis fichas de un mismo color y puede colocarlas como quiera en las casillas del 0 al 5. Por ejemplo, un jugador tiene seis fichas de color rojo y decide colocar una ficha en cada casillero, mientras que el otro jugador tiene seis fichas de color azul y coloca todas sus fichas en la casilla 5.

- Una vez que los jugadores colocan sus fichas, por turno, cada uno lanza ambos dados y quitan, si hay, la ficha o fichas de la casilla que indica la diferencia entre los puntos de la cara superior de los dados.

  Por ejemplo, si se distribuyen las fichas como se muestra en el tablero de la derecha y a un jugador, al lanzar los dados, le salen 5 y 2, la diferencia es 5 - 2 = 3. Entonces, deberá quitar sus fichas que están en la casilla 3.



- Gana el jugador que quite primero todas sus fichas del tablero. Registren en la tabla de abajo la diferencia que obtuvieron en cada lanzamiento.

Juego 1										
Número de lanzamiento	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Diferencia entre los puntos de la cara superior de los dados										

¿Quién ganó el juego 1? ______________________________

2. Realicen los juegos 2, 3 y 4. Antes de iniciar cada juego predigan, ¿quién de los dos jugadores creen que ganará y por qué?

En su cuaderno, registren los resultados de los lanzamientos y quién ganó en cada juego. Indiquen si se cumplió lo que esperaban o qué ocurrió.

Juego 2	**Juego 3**	**Juego 4**
Jugador 1. Casillas con número par.	Jugador 1. Casillas con números mayores que 2.	Jugador 1. Casilla del número 3.
Jugador 2. Casillas con número impar.	Jugador 2. Casillas con números menores o iguales que 2.	Jugador 2. Casillas con números diferentes de 3.

3. En grupo y con ayuda de su maestro, comenten y comparen sus resultados. Respondan en su cuaderno: ¿encontraron alguna estrategia para ganar el juego? ¿Creen que la estrategia que usaron les servirá para aumentar la probabilidad de ganar en cualquier juego?, ¿por qué?

Después, calculen la probabilidad teórica de los eventos indicados en los juegos anteriores para distinguir sus tipos, a fin de buscar la mejor colocación de las fichas para ganar un juego y seleccionar eventos que permitan que los jugadores tengan las mismas ventajas.

4. Lean y comenten la siguiente información.

Dos maneras de tener un juego de azar justo o equitativo son:
- Cuando, en cada turno, todos los jugadores tienen las mismas probabilidades de ganar.
- Cuando las reglas del juego favorecen de igual manera a todos los jugadores.

Comenten con sus compañeros de grupo y con su maestro qué condiciones se requieren para que los juegos anteriores sean justos considerando lo que acaban de leer.

Sesión 3

Para terminar

Otro juego de dados

1. Trabajen en pareja. Emma y Joel conocen un juego con dados en el que también se determina la diferencia y se disponen a jugarlo.

El juego es...

- Lanzan dos dados sucesivamente y calculan la diferencia de puntos entre ambos dados.
- Emma se anota un punto cuando el valor de la diferencia es 0, 1 o 2.
- Joel se anota un punto cuando la diferencia es 3, 4 o 5.
- El juego inicia con 20 puntos a repartir y termina cuando se han repartido todos los puntos.

a) Antes de iniciar el juego, predigan: ¿ambos jugadores tienen la misma posibilidad de ganar? __________ ¿Por qué? ______________________________

En caso contrario, ¿quién de los dos jugadores creen que ganará y por qué?

____

Realicen cinco veces el juego y registren sus resultados en una tabla de frecuencias como la siguiente.

Jugador	Evento: la diferencia de puntos es…	Conteo	Número de veces que ocurrió la diferencia (frecuencia absoluta)	Frecuencia relativa
Emma gana	0			
	1			
	2			
Joel gana	3			
	4			
	5			
			100	

b) Consideren los resultados de la tabla y revisen sus respuestas a las preguntas del inciso a). ¿Se confirma su predicción, o qué ajustes debe hacen para lograrla?

____

____

2. En su cuaderno realicen lo que se pide.

a) Elaboren un diagrama de árbol con todos los resultados posibles que pueden tener al lanzar dos dados cúbicos no cargados sucesivamente. Por ejemplo, (1,1), (1,2),… etcétera.

b) En el diagrama de árbol, identifiquen los dos resultados posibles del evento compuesto A: la diferencia es 5 puntos. Márquenlos con color rojo.

c) Ahora, marquen todos los resultados posibles de los eventos. B: la diferencia es 4 puntos (de azul); C: la diferencia es 3 puntos (de verde); D: la diferencia es 2 puntos (de amarillo); E: la diferencian es 1 punto (de café); F: la diferencia es 0 (de gris).

d) Escriban los resultados posibles que son favorables a los eventos A y B.

e) Calculen la probabilidad de cada uno de los seis eventos.

f) ¿Cuál es la probabilidad de que Emma gane el juego?, ¿y la probabilidad de que gane Joel?

3. Lean y comenten la información.

Otra manera de tener un juego de azar justo o equitativo es cuando hay eventos que tienen mayor probabilidad de ocurrencia o reglas que favorecen un resultado en particular, entonces se compensa con la distribución de los premios de los eventos con menor probabilidad.

4. ¿Es equitativo el juego de Emma y Joel? ______________. Si se decide compensar con puntos al jugador que tiene menos posibilidades de ganar, ¿cuántos puntos se le podrían dar? ____

____

____

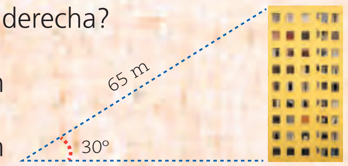
5. Observa el recurso audiovisual *Juegos de azar* para identificar los resultados y definir eventos que permitan generar juegos equitativos.

6. Usa el recurso informático *Juegos de azar* para calcular la probabilidad de eventos simples, compuestos, mutuamente excluyentes y complementarios.

Evaluación

Marca con una ✓ las respuestas correctas.

1. ¿Cuánto mide la altura del edificio que se muestra a la derecha?

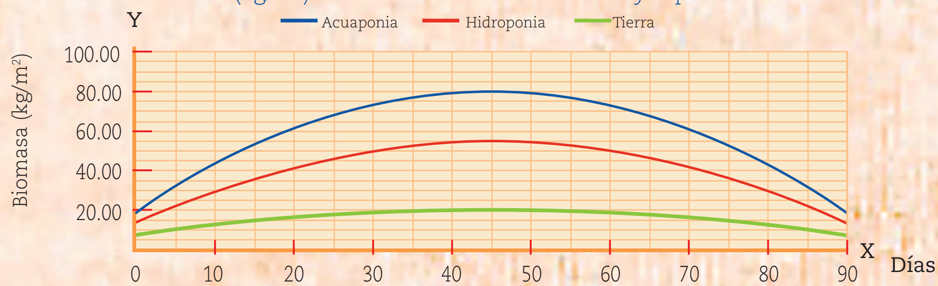


Ⓐ 56.29 m Ⓑ 37.52 m

Ⓒ 32.50 m Ⓓ 30.30 m

2. Una manera de medir el rendimiento de los cultivos es calcular cuántos kilogramos de materia viva o biomasa se producen por metro cuadrado. La siguiente gráfica registra la biomasa por metro cuadrado en los 90 días de mayor producción de jitomate en tres tipos distintos de cultivo: sembrado en tierra, sembrado en hidroponia y mediante un sistema de acuaponia (donde también se agregó a lo obtenido a este cálculo la producción de peces). Con esta información, responde lo que se te pide.

Biomasa (kg/m²) obtenida en los 90 días de mayor producción



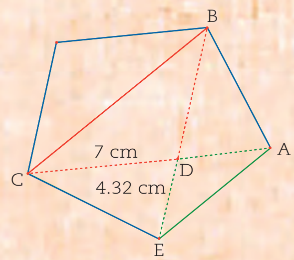
¿Cuál de los cultivos tiene mejor rendimiento en kilogramos por metro cuadrado?

Ⓐ Acuaponia Ⓑ Hidroponia Ⓒ Tierra Ⓓ Todos por igual

3. Con base en la gráfica anterior, ¿a los cuántos días se observa la máxima producción para los tres tipos de cultivo?

Ⓐ 45 Ⓑ 50 Ⓒ 70 Ⓓ 90

4. Indica cuál es la razón de semejanza ΔBCD: ΔAED de los triángulos que se forman en el pentágono regular que se muestra a la derecha.



Ⓐ $\frac{1}{2}$ Ⓑ 1.62

Ⓒ 4.32 Ⓓ 7

5. ¿Cuál es la medida del lado AE del pentágono?

Ⓐ 4.32 cm Ⓑ 7 cm Ⓒ 7.5 cm Ⓓ 11.32 cm

6. ¿Qué opción corresponde a un múltiplo de 5, siendo x un número natural cualquiera?

(A) $5 + x$ (B) $\frac{5}{x}$ (C) $5x$ (D) $5 - x$

7. En una urna hay 50 canicas numeradas del 1 al 50. Sin ver, se saca una canica de la urna. Consideren los siguientes eventos.

La canica que sale tiene un número…

A: menor que 10. **B:** de dos dígitos.

C: mayor que 25. **D:** terminado en número par.

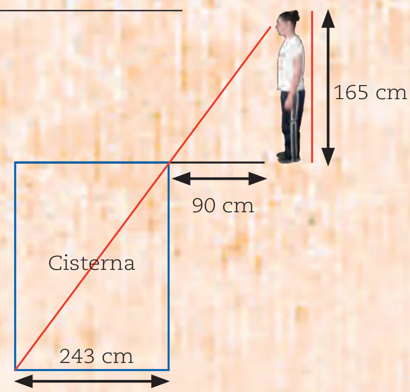
E: que es múltiplo de 5.

Si Manuel y Fernanda desean sacar canicas de la urna, ¿cuáles de los eventos deben realizar para que el juego sea justo?

(A) A y B (B) A y E (C) C y D (D) D y E

Lee cada situación y haz lo que se te pide.

1. Según los datos de la imagen, ¿cuál es la profundidad de la cisterna? ____________



2. De acuerdo con el valor del discriminante, escribe dentro del paréntesis correspondiente cuántas soluciones en los números racionales o irracionales tiene cada una de las siguientes ecuaciones cuadráticas.

a) $x^2 - 20x + 100 = 0$ (____________)

b) $x^2 - 3x + 2 = 0$ (____________)

c) $x^2 - 2x + 3 = 0$ (____________)

3. El largo de un terreno rectangular mide el triple de lo que mide el ancho. Al aumentar 12 m el largo y 6 m el ancho, el área original se duplicó.

Con base en esta información, anota lo que se pide.

a) Medidas originales del terreno.

Largo: ____________ Ancho: ____________ Área: ____________

b) Medidas aumentadas del terreno.

Largo: ____________ Ancho: ____________ Área: ____________

c) Ecuación que permite hallar la medida original del ancho del terreno.

____

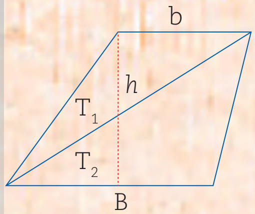
d) Soluciones de la ecuación: x_1 = ____________ x_2 = ____________

4. ¿Cuál o cuáles son los valores de la abscisa en que la gráfica de cada función corta al eje X?

a) $y = x^2 - 4x + 4$ ____________________

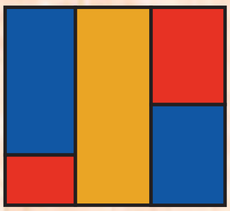
b) $y = x^2 + 4x + 3$ ____________________

c) $y = x^2 - 5x + 6$ ____________________

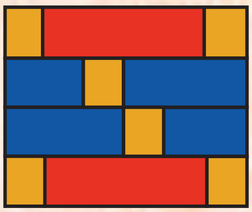


5. En el trapecio que se muestra, las áreas de los triángulos T_1 y T_2 son $\frac{bh}{2}$ y $\frac{Bh}{2}$, respectivamente. El área del trapecio es la suma de las áreas de los dos triángulos. Expresa el área del trapecio en forma factorizada. ____________________

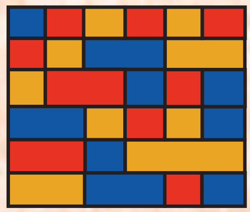
6. En una feria tienen los siguientes tableros para jugar tiro al blanco. Si al lanzar el dardo cae en la zona amarilla, el jugador obtiene un premio de \$50.



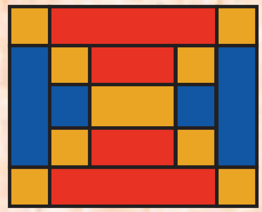
Tablero 1



Tablero 2



Tablero 3



Tablero 4

a) ¿Qué tablero eliges para jugar? ____________ Justifica tu respuesta. ____________

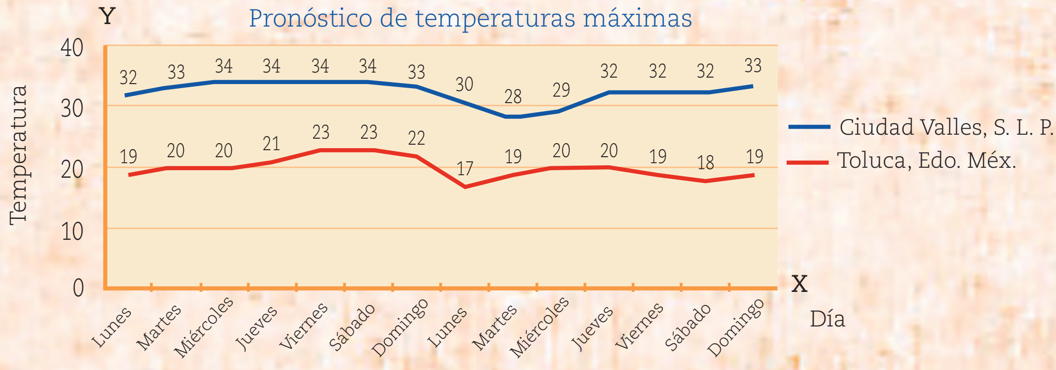
b) Si eliges el tablero 3, ¿cuál es la probabilidad de ganar? ____________

c) ¿Cuál es la probabilidad de ganar en el tablero 1? ____________

d) Si se cambian las condiciones del juego para que sea justo, ¿qué opciones son convenientes? Márcalas con una ✓.

☐ Quitar el tablero 2 ya que quedarán solamente tres tableros en los que la probabilidad de caer en la zona amarilla es igual.	☐ Cambiar el tablero 2 por un tablero en el que la probabilidad de caer en la zona amarilla sea igual que en el tablero 4.	☐ Cambiar el tablero 2 ya que los dos cuadritos azules del centro del tablero deben cambiar a color amarillo para que haya cuatro cuadritos y que la probabilidad de la zona amarilla sea $\frac{1}{3}$.	☐ Quitar el tablero 3 ya que quedarán solamente tres tableros en los que la probabilidad de caer en la zona amarilla será igual.

7. Utiliza la información de las gráficas y realiza los procedimientos necesarios para completar las afirmaciones. Las siguientes gráficas de línea muestran el pronóstico de las temperaturas máximas en °C para los próximos 14 días en dos ciudades de la República Mexicana.

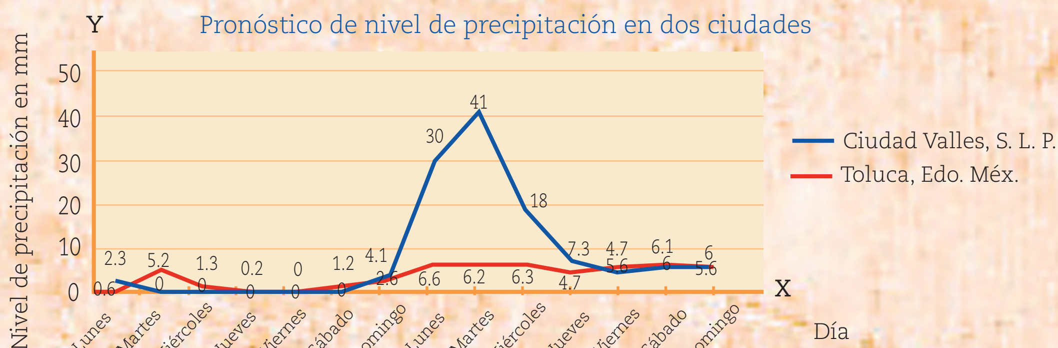


En Ciudad Valles, la menor temperatura que se espera es __________ y la mayor es __________ , mientras que en la ciudad de Toluca la menor temperatura es __________ y la mayor temperatura pronosticada es __________. En ambas ciudades, el rango de la temperatura máxima y mínima pronosticada es ____________ y ____________.

En Toluca, la temperatura máxima más frecuente pronosticada es __________ y, en Ciudad Valles, la más frecuente es __________ .

La temperatura máxima media pronosticada para Ciudad Valles es __________ con una desviación media de __________ . En el caso de la ciudad de Toluca, se pronostica que la temperatura máxima media sea __________ con una variación media de __________. De acuerdo con esta información, se espera que la temperatura máxima para las próximas dos semanas tenga __________ variación.
poca/mucha

8. Las siguientes gráficas de línea muestran el pronóstico del nivel de precipitación para los próximos 14 días en dos ciudades de la República.



a) De acuerdo con el pronóstico para la primera semana, ¿en qué ciudad se espera un mayor nivel de precipitación? ____

b) ¿En qué ciudad se pronostica una posible tormenta? __________ ¿En qué datos basas tu respuesta? ____

c) Si se busca resumir la información de las gráficas, ¿cuál o cuáles valores del nivel de precipitación esperado para cada ciudad representan mejor el pronóstico? Marca con una ✓ tu elección.

- ☐ Media: Cd. Valles, 8.54 mm / Toluca, 3.72 mm, porque ______________________.
- ☐ Mediana: Cd. Valles, 4.40 mm / Toluca, 4.95 mm, porque ______________________.
- ☐ Moda: Cd. Valles, 0 mm / Toluca, 5.6 mm, porque ______________________.
- ☐ Rango: Cd. Valles, 41 mm / Toluca, 6.6 mm, porque ______________________.

Tablas trigonométricas

Ángulo	Seno	Coseno	Tangente
1°	0.0175	0.9998	0.0175
2°	0.0349	0.9994	0.0349
3°	0.0523	0.9986	0.0524
4°	0.0698	0.9976	0.0699
5°	0.0872	0.9962	0.0875
6°	0.1045	0.9945	0.1051
7°	0.1219	0.9925	0.1228
8°	0.1392	0.9903	0.1405
9°	0.1564	0.9877	0.1584
10°	0.1736	0.9848	0.1763
11°	0.1908	0.9816	0.1944
12°	0.2079	0.9781	0.2126
13°	0.2250	0.9744	0.2309
14°	0.2419	0.9703	0.2493
15°	0.2588	0.9659	0.2679
16°	0.2756	0.9613	0.2867
17°	0.2924	0.9563	0.3057
18°	0.3090	0.9511	0.3249
19°	0.3256	0.9455	0.3443
20°	0.3420	0.9397	0.3640
21°	0.3584	0.9336	0.3839
22°	0.3746	0.9272	0.4040
23°	0.3907	0.9205	0.4245
24°	0.4067	0.9135	0.4452
25°	0.4226	0.9063	0.4663
26°	0.4384	0.8988	0.4877
27°	0.4540	0.8910	0.5095
28°	0.4695	0.8829	0.5317
29°	0.4848	0.8746	0.5543
30°	0.5000	0.8660	0.5774
31°	0.5150	0.8572	0.6009
32°	0.5299	0.8480	0.6249
33°	0.5446	0.8387	0.6494
34°	0.5592	0.8290	0.6745
35°	0.5736	0.8192	0.7002
36°	0.5878	0.8090	0.7265
37°	0.6018	0.7986	0.7536
38°	0.6157	0.7880	0.7813
39°	0.6293	0.7771	0.8098
40°	0.6428	0.7660	0.8391
41°	0.6561	0.7547	0.8693
42°	0.6691	0.7431	0.9004
43°	0.6820	0.7314	0.9325
44°	0.6947	0.7193	0.9657
45°	0.7071	0.7071	1.0000

Ángulo	Seno	Coseno	Tangente
46°	0.7193	0.6947	1.0355
47°	0.7314	0.6820	1.0724
48°	0.7431	0.6691	1.1106
49°	0.7547	0.6561	1.1504
50°	0.7660	0.6428	1.1918
51°	0.7771	0.6293	1.2349
52°	0.7880	0.6157	1.2799
53°	0.7986	0.6018	1.3270
54°	0.8090	0.5878	1.3764
55°	0.8192	0.5736	1.4281
56°	0.8290	0.5592	1.4826
57°	0.8387	0.5446	1.5399
58°	0.8480	0.5299	1.6003
59°	0.8572	0.5150	1.6643
60°	0.8660	0.5000	1.7321
61°	0.8746	0.4848	1.8040
62°	0.8829	0.4695	1.8807
63°	0.8910	0.4540	1.9626
64°	0.8988	0.4384	2.0503
65°	0.9063	0.4226	2.1445
66°	0.9135	0.4067	2.2460
67°	0.9205	0.3907	2.3559
68°	0.9272	0.3746	2.4751
69°	0.9336	0.3584	2.6051
70°	0.9397	0.3420	2.7475
71°	0.9455	0.3256	2.9042
72°	0.9511	0.3090	3.0777
73°	0.9563	0.2924	3.2709
74°	0.9613	0.2756	3.4874
75°	0.9659	0.2588	3.7321
76°	0.9703	0.2419	4.0108
77°	0.9744	0.2250	4.3315
78°	0.9781	0.2079	4.7046
79°	0.9816	0.1908	5.1446
80°	0.9848	0.1736	5.6713
81°	0.9877	0.1564	6.3138
82°	0.9903	0.1392	7.1154
83°	0.9925	0.1219	8.1443
84°	0.9945	0.1045	9.5144
85°	0.9962	0.0872	11.4301
86°	0.9976	0.0698	14.3007
87°	0.9986	0.0523	19.0811
88°	0.9994	0.0349	28.6363
89°	0.9998	0.0175	57.2900
90°	1.0000	0.0000	Infinito

Bibliografía

Blatner, David (2003). *El encanto de pi*, México, Aguilar.

Bosch Giral, Carlos *et al*. CDMX (2002). *Una ventana a las incógnitas*, México, Santillana (Biblioteca Juvenil Ilustrada).

________ (2002). *Una ventana al infinito*, México, Santillana (Biblioteca Juvenil Ilustrada).

Castelnuovo, Emma (2001). *De viaje con la matemática. Imaginación y razonamiento matemático*, México, Trillas.

CDMX (2018). "Encuesta de tendencias juveniles 2018", México, CDMX.

Crilly, Tony (2014). *50 cosas que hay que saber sobre matemáticas*, Barcelona, Ariel.

Guedj, Denis (2011). *El imperio de los números. Descubrir la ciencia y la tecnología*, Barcelona, Blume (Biblioteca Ilustrada).

Hernández Garciadiego, Carlos (2002). *La geometría en el deporte*, México, Santillana (Biblioteca Juvenil Ilustrada).

________ (2002). *Matemáticas y deportes*, México, Santillana (Biblioteca Juvenil Ilustrada).

IFT (2019). "La educación de las niñas y jóvenes mujeres en ciencias, tecnología, ingeniería y matemáticas", México, IFT.

IMCO, A. C. (2019). "Compara carreras 2019", México. IMCO.

Jiménez, Douglas (2010). *Matemáticos que cambiaron al mundo. Vidas de genios del número y la forma que fueron famosos y dejaron huella en la historia*, Providencia, Chile, Tajamar Editores.

Jouette, André (2000). *El secreto de los números*, Barcelona, Ediciones Robinbook.

Noreña Villarías, Francisco *et al*. (2002). *El movimiento*, México, Santillana (Biblioteca Juvenil Ilustrada).

Peña, José Antonio de la (2002). *Geometría y el mundo*, México, Santillana (Biblioteca Juvenil Ilustrada).

________ (2002). *Matemáticas y la vida cotidiana*, México, Santillana (Biblioteca Juvenil Ilustrada).

________ (2005). *Números para contar y medir, crear y soñar*. México, Santillana (Huellas de Papel).

Peña, José Antonio de la y Michael Barot (2006). *Retos. Un acercamiento de la educación para la vida*, México, Santillana.

Perelman, Yakov (1995). *Álgebra recreativa*, México, Planeta.

Reid, Constance (2008). *Del cero al infinito. Por qué son interesantes los números*, Pablo Martínez Lozada (trad.), México, Consejo Nacional para la Cultura y las Artes.

Rodríguez Vidal, Rafael y María del Carmen Rodríguez Rigual (1986). *Cuentos y cuentas de los matemáticos*, Barcelona, Reverté.

Ruiz, Concepción *et al*. (2002). *Crónicas geométricas*, México, Santillana (Biblioteca Juvenil Ilustrada).

Ruiz, Concepción y Sergio de Régules (2002). *Crónicas algebraicas*, México, Santillana (Biblioteca Juvenil Ilustrada).

S/A (2018), *Guía básica de accesibilidad para personas con discapacidad en edificios y áreas de atención ciudadana de la Secretaría de Finanzas*, Estado de México, Gobierno del Estado de México.

Sánchez Torres, Juan Diego (2012). *Recreamáticas. Recreaciones matemáticas para jóvenes y adultos*, Madrid, Rialp.

Tahan, Malba (2005). *El hombre que calculaba*, Basilio Lozada (trad.), México, SEP-Limusa (Libros del Rincón).

Referencias electrónicas

FAO. "Cada gota cuenta". Disponible en http://www.fao.org/fao-stories/article/es/c/1113809/ (Consultado el 11 de octubre de 2020).

_______ *El estado mundial de la pesca y la acuicultura*. Disponible en http://www.fao.org/3/CA0190es/CA0190es.pdf (Consultado el 11 de octubre de 2020).

Geogebra. Disponible en http://www.geogebra.org (Consultado el 11 de octubre de 2020).

Instituto Mexicano para la Competitivdad. Centro de Investigaciones en Política Pública. Disponible en https://imco.org.mx/ (Consultado el 11 de octubre de 2020).

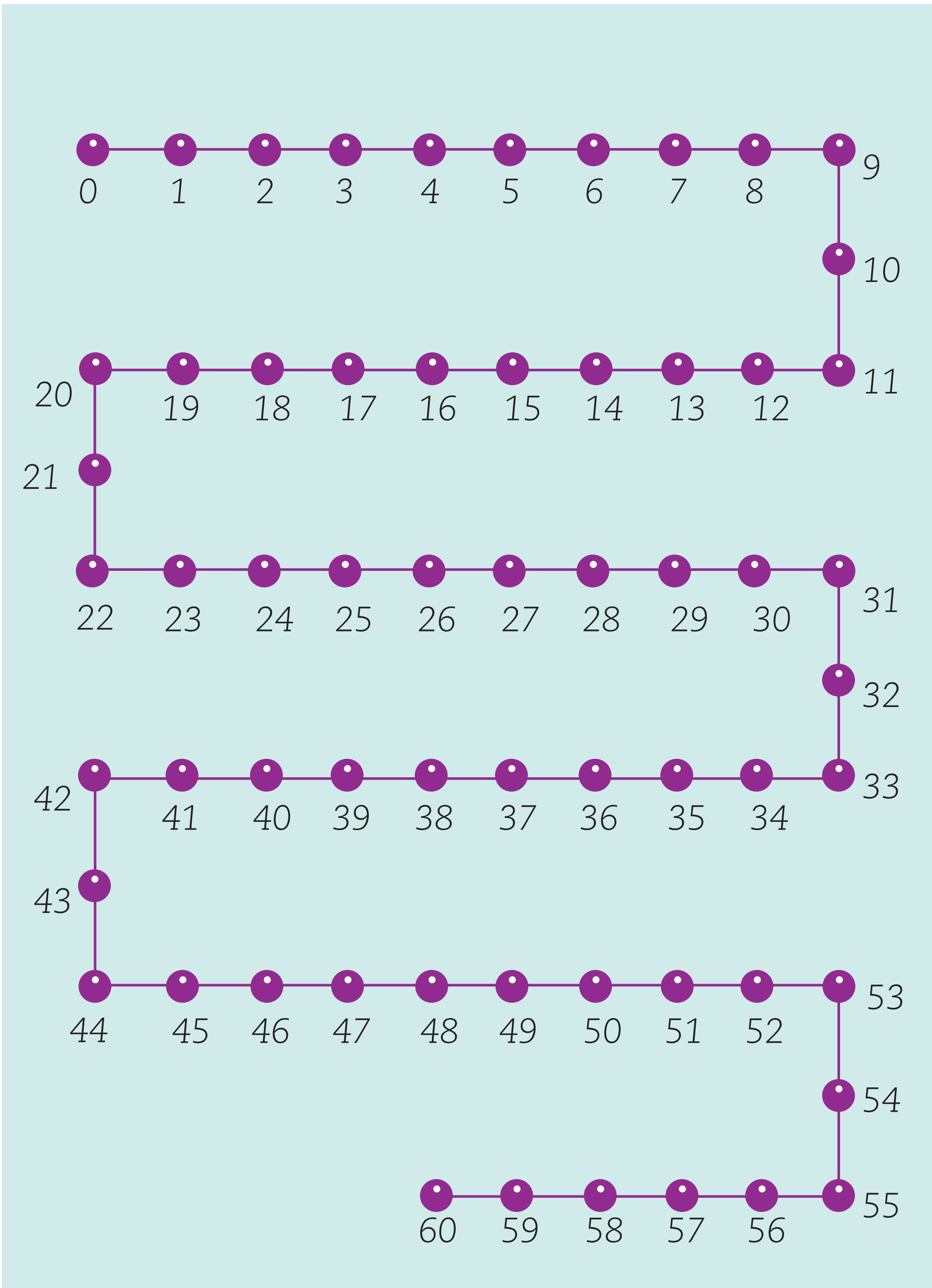
IXL Math On line. Disponible en http://www.ixl.com/math/ (Consultado el 11 de octubre de 2020).

Khan Academy. Disponible en https://es.khanacademy.org/math/eb-1-secundaria-nme (Consultado el 11 de octubre de 2020).

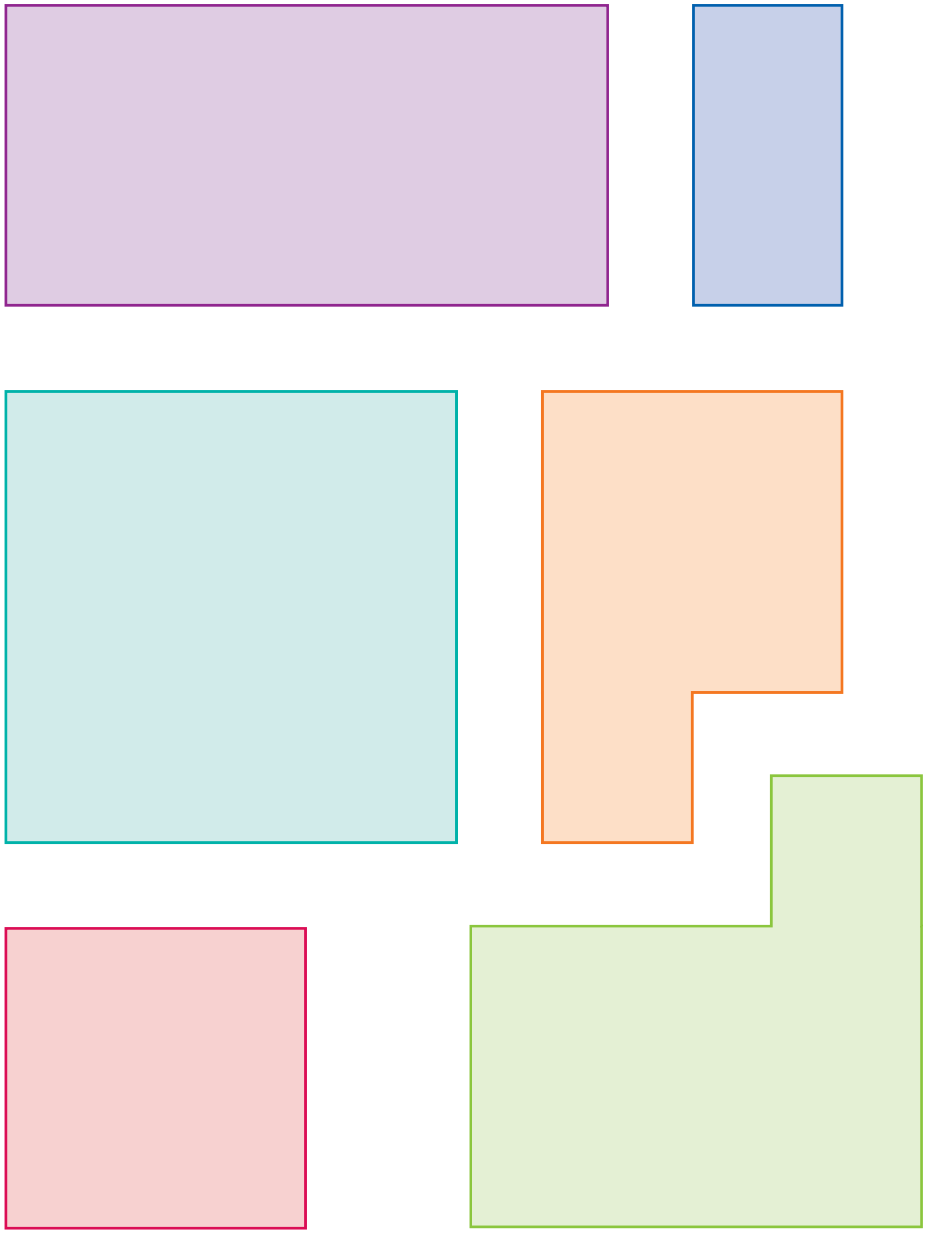
ONU, "Los países más poblados". Disponible en https://www.un.org/es/sections/issues-depth/population/index.html (Consultado el 11 de octubre de 2020).

Strathern, Paul (1999). *Pitágoras y su teorema*, Siglo XXI, España (Los científicos y sus descubrimientos). Disponible en http://www.librosmaravillosos.com/pitagorasysuteorema/pdf/Pitagoras%20y%20su%20teorema%20-%20Paul%20Strathern.pdf (Consultado el 11 de octubre de 2020).

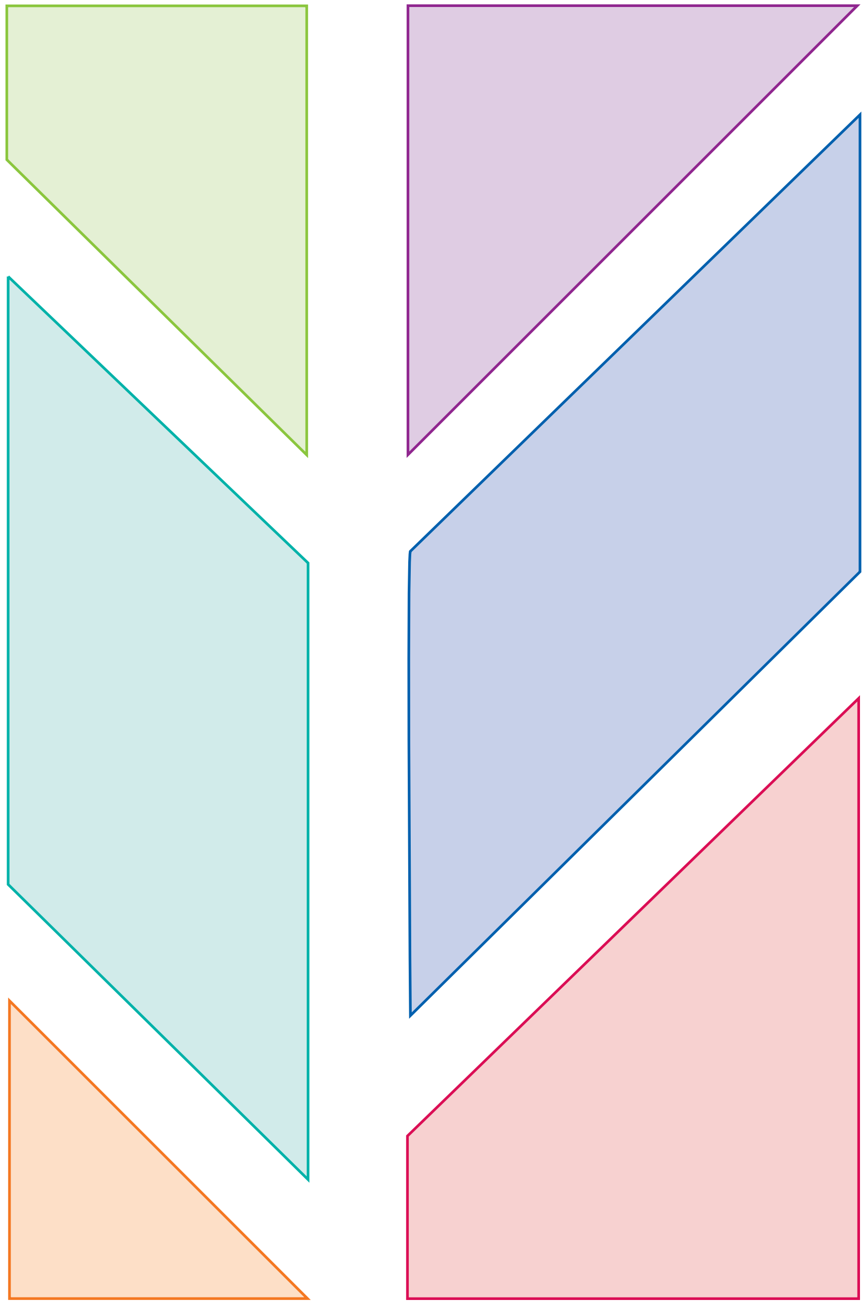
Recortable 1



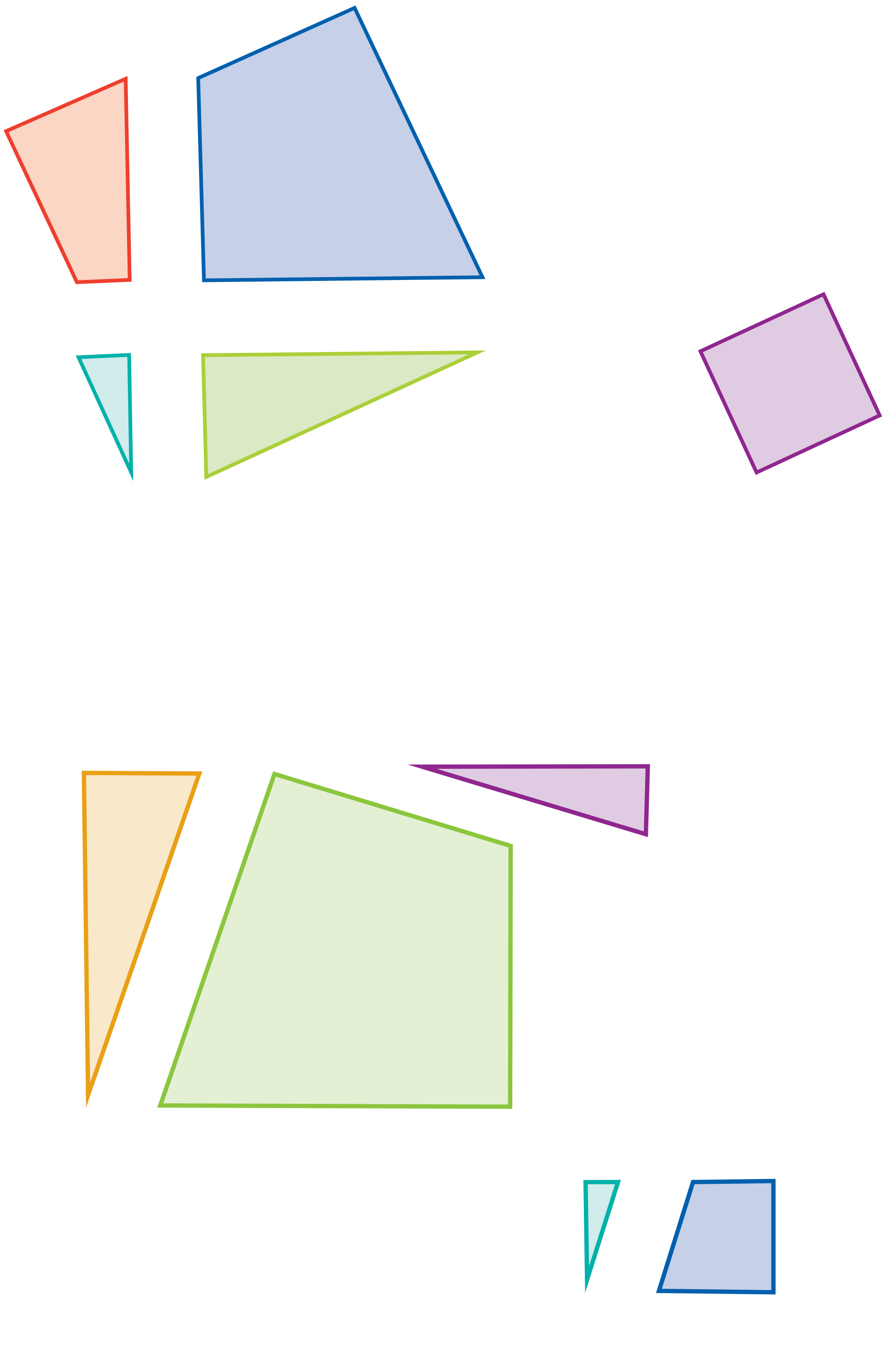
Recortable 2



Recortable 3



Recortable 4



Recortable 5