LIBRO PARA EL MAESTRO

Matemáticas

Tercer grado

TELEsecundaria

Bloque 2

Secuencia 10 Mínimo común múltiplo y máximo común divisor 1 (LT, Vol. II, págs. 12-21)

Tiempo de realización	5 sesiones
Eje temático	Número, álgebra y variación
Tema	Número
Aprendizaje esperado	Usa técnicas para determinar el mcm y el MCD.
Intención didáctica	Que los alumnos usen el mcm o el MCD de dos o más números al resolver problemas.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisuales** • *Descomposición en factores primos* • *Problemas que se resuelven con el mcm o con el MCD* **Informático** • *Factorización en números primos*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recurso audiovisual** • *Descomposición en factores primos, MCD y mcm*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Expresen un número compuesto como producto de factores primos. Distingan entre conjunto de divisores de un número, factores primos de un número y expresión como potencias de los factores primos de un número.
- Sesión 2. Identifiquen la relación entre los factores primos de un número y el valor de dicho número. Por ejemplo, que un factor 2 duplica el número y un factor 3 lo triplica. Usen la técnica de sacar mitad, tercera, etcétera, para encontrar los factores primos de un número.
- Sesión 3. Obtengan el máximo común divisor de dos o más números, y lo usen al resolver problemas.
- Sesión 4. Obtengan el mínimo común múltiplo de dos o más números y lo usen al resolver problemas.
- Sesión 5. Usen el mcm o el MCD de dos o más números al resolver problemas.

Acerca de...

La secuencia se inicia con el planteamiento de un problema en el que se trata de identificar, entre cuatro autos que corren alrededor de una pista, cuáles son los dos primeros que pasan juntos por la línea de salida. En ese momento no se espera que los alumnos resuelvan el problema, aunque sí pueden hacer algunas conjeturas. Por ejemplo, pueden pensar que son los automóviles A y B, porque van más rápido. En la sesión 4 se retoma este problema, cuando los alumnos tienen elementos suficientes para encontrar y justificar la solución.

De manera general, las dos primeras sesiones se enfocan en que los alumnos se familiaricen y logren distinguir con claridad cuál es el conjunto de divisores y de factores primos de un número. Que vean que el conjunto de divisores puede obtenerse al multiplicar dos o más factores primos. Que sepan usar la técnica para descomponer cualquier número en el producto de sus factores primos y que lo puedan expresar usando potencias.

Posteriormente, hay una sesión dedicada al máximo común divisor (MCD) y otra al mínimo común múltiplo (mcm), para culminar con el estudio simultáneo de ambos conceptos con la finalidad de analizar algunas diferencias y similitudes entre ellos.

Sobre las ideas de los alumnos

Algunos alumnos no logran identificar con suficiente claridad que las técnicas de factorización implican las mismas operaciones y, por lo tanto, conducen al mismo resultado, es decir, son expresiones equivalentes de un número. Por ejemplo, al factorizar el número 420, cualquiera de los procedimientos que se muestran a continuación es válido.

$420 \div 2 = 210$
$210 \div 2 = 105$
$105 \div 3 = 35$
$35 \div 5 = 7$
$7 \div 7 = 1$

420	2
210	2
105	3
35	5
7	7
1	

420

42 10

42 2 x 5

6 x 7 2 x 5

2 x 3 x 7 2 x 5

En los dos primeros procedimientos se hacen divisiones sucesivas hasta que el cociente es uno. La diferencia es que en el primero se dice: "420 entre 2", mientras que en el segundo, que es el usual, suele decirse: "Mitad de 420". No sobra recordar a los alumnos que dividir entre dos y obtener la mitad son operaciones equivalentes, pues en ambos procedimientos se van obteniendo directamente los factores primos.

En el tercer procedimiento se van haciendo descomposiciones "a modo" hasta que sólo hay factores primos. En los tres casos, los criterios de divisibilidad permiten agilizar la descomposición.

Muchos alumnos suelen confundir el mcm y MCD de dos o más números, probablemente porque sólo centran la atención en la primera palabra de cada expresión: mínimo, que los lleva a pensar en un número menor, y máximo, que los conduce a pensar en un número mayor. Es importante insistir en que consideren el sentido de los tres términos que forman cada expresión. Mínimo, el menor; común, que corresponde a varios números; múltiplo, que contiene a dichos números, por lo que debe ser igual o mayor que ellos. Un análisis similar y persistente es necesario para distinguir el MCD. Es importante que de esas reflexiones concluyan que en relación con el mcm siempre hay un múltiplo que es mayor que el mcm, mientras que respecto al MCD, no existe un divisor que sea mayor que el MCD.

Cuando se usan potencias para expresar el producto de factores primos de un número, por ejemplo, $300 = 2^2 \times 3 \times 5^2$, es importante aclarar a los alumnos que los factores primos son 2, 3 y 5, si bien el 2 y el 5 se repiten dos veces cada uno. El número $2^2 = 4$ no es número primo, por lo tanto no puede ser factor primo. Cuando se trata de dos o más números, por ejemplo,

$$300 = 2^2 \times 3 \times 5^2$$
$$504 = 2^3 \times 3^2 \times 7,$$

los factores primos comunes son 2 y 3, mientras que los no comunes son 5 y 7. En el caso del factor común 2, el de menor exponente es 2^2 y el de mayor exponente es 2^3, una comparación similar puede hacerse con el factor común 3.

¿Cómo guío el proceso?

Lea con los alumnos la sección “Para empezar” y, si es necesario, ayúdelos a entender el problema que se plantea. Pregúnteles, por ejemplo, “¿Cuál es el auto más rápido?”; “¿Cuál es el menos rápido?”; “En 54 segundos, ¿cuántas vueltas da a la pista el auto más rápido?”; “¿Cuál de los cuatro autos da tres vueltas a la pista en un minuto?”. Pídales que hagan predicciones: “¿Cuáles son los primeros autos que pasarán juntos por la línea de salida después de que salen?”. Coménteles que en la sesión 4 se verá quiénes acertaron.

Antes de resolver la tabla de la actividad 1 de la sesión 1, se sugiere hacer un ejercicio de manera grupal, para que los alumnos vean cómo se puede resolver la actividad. Uno de los alumnos dice un número cualquiera; otro dice el mismo número, pero como producto de dos factores; otro alumno menciona el mismo número, pero como producto de tres factores; y así continúan hasta que sólo quedan factores primos. Después de esta actividad, se espera que los alumnos no tengan problemas para completar la tabla.

La actividad 5 apunta a que los alumnos vean que el conjunto de divisores de un número y la factorización en primos de éstos, no son lo mismo. Por ejemplo:

- El conjunto de divisores de 300 es {1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 25, 30, 50, 60, 75, 100, 150, 300}.
- El conjunto de factores primos de 300 es {$2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5$}.

Comente que los factores primos de un número pertenecen al conjunto de divisores de ese número y que todos los demás divisores son el producto de dos o más factores primos. Es importante que, a partir de la factorización en primos de un número, los alumnos sean capaces de encontrar el conjunto de divisores. Por ejemplo, $30 = 2 \times 3 \times 5$; $75 = 3 \times 5 \times 5$.

En la actividad 1 de la sesión 2, observe si los alumnos se dan cuenta de que los factores primos de un número tienen relación con el valor del número. Por ejemplo, si se agrega un factor 2, el número se duplica; si se quita un factor 2, el número disminuye a la mitad. Si se agrega un factor 3, el número se triplica; si se quita un factor 3, el número se reduce a la tercera parte. Con estos ejercicios puede hacerles saber a los alumnos que existen otras formas de referirse a los múltiplos de los números de manera diferente: el cuádruple, el quíntuple... el nónuplo, el undécuplo... el céntuplo, etcétera.

Además de realizar las actividades 3 y 4 de esta misma sesión, procure que los alumnos practiquen las técnicas de factorización hasta familiarzarse con ellas. Es importante enfatizar la idea de que, por ejemplo, $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$, $24 = 2^3 \times 3$, $24 = 4 \times 6$ son algunas de las diferentes maneras de expresar el mismo número. Hay que centrar la atención en que tanto el 24 como las expresiones de productos de primos son diferentes formas de escribir los números, y que hacerlo de un modo o de otro depende de las estrategias necesarias para hacer un cálculo o resolver un problema.

En la sesión 3, lea con los alumnos el problema de la actividad 1 y ayúdelos a entenderlo. No se pretende que en este momento encuentren la solución, pero pueden sugerir alguna y ver si funciona. Por ejemplo, pueden ver que a lo largo de la tira de madera caben 18 cuadrados de 10 cm por lado, pero ¿caben también a lo ancho sin que sobre ni falte? Esta forma de acercarse a la solución les ayuda a entender el problema y les hace ver que es necesario hacer ajustes.

Después de algunas reflexiones en la actividad 1, sugiérales que pasen a la actividad 2. Observe si empiezan a darse cuenta de que la factorización en primos de 180 y 108 y el uso de los factores comunes es el camino indicado para llegar a la solución del problema. La tabla de factorización en números primos queda así:

Medidas del rectángulo	Factorización en números primos
Ancho = 108	$2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$
Largo = 180	$2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$

La intención de la actividad 2, inciso a), es que puedan ver lo siguiente:

$$\cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{3} \times \cancel{3} \times 3$$
$$\cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{3} \times \cancel{3} \times 5$$

Sólo se marcan los factores que se repiten en el otro número, y queda sin tachar un 3 porque, aunque es factor común, no se repite en el otro número. El producto de los factores tachados es 36, que es el MCD de 108 y 180 y corresponde a la mayor medida que pueden tener los cuadrados. Caben 5 a lo largo y 3 a lo ancho, 15 cuadrados en total de 36 cm de lado.

En la tercera columna de la tabla de la actividad 4 puede haber confusión. El encabezado dice: "Factores primos comunes de *a*, *b* y *c*", considerando que:

$$a = 588 = 2 \times 2 \times 3 \times 7 \times 7$$
$$b = 180 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$$
$$c = 700 = 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 7$$

Con base en lo anterior, los alumnos pueden pensar que el único factor primo común es 2, y tienen razón, pero dicho factor aparece dos veces en los tres números, de manera que los factores primos comunes son 2 y 2.

En la tabla de la actividad 5 se les piden los "Factores que producen el MCD"; aquí los alumnos se darán cuenta de que el resultado obtenido es el mismo que el de la columna 3 de la actividad 4. Es necesario que los alumnos hagan la relación entre los factores primos de *a*, *b* y *c* y los factores que producen el MCD, y que se den cuenta de que son los mismos valores.

En la actividad 6 es importante no decir a los alumnos que la solución del problema es el MCD de la longitud de los muros. Sólo hay que observar lo que hacen y orientarlos durante el ejercicio. En la actividad 7, es sustancial que haga preguntas que ayuden a los alumnos a reflexionar sobre los procedimientos que siguieron para encontrar los resultados.

En la sesión 4 se retoman las preguntas con las que se inició la secuencia, por lo que en la puesta en común deberá preguntar cuáles fueron las respuestas, para después contrastarlas con los resultados que obtengan.

En la actividad 1, inciso a), deben realizar el llenado de la tabla; si lo desean, pueden agilizar la tarea usando la calculadora. Al contestar la pregunta 1, inciso b), verán en la tabla que el menor tiempo en que dos autos coinciden es 72 segundos y corresponde a los autos A y C.

Este problema tiene una relación directa con el mcm de dos números, y es hasta la actividad 4 cuando se hace evidente. Mientras tanto, en las actividades 2 y 3 los alumnos podrán analizar con detalle el significado de este concepto.

Es muy probable que en la actividad 2, inciso a), haya respuestas diferentes. Se sugiere aprovechar esta cualidad de la pregunta para que los alumnos busquen criterios generales para responder. Pregunte: "¿Cuántos múltiplos comunes hay de 3 y 8?". Las respuestas pueden ser: "Muchos", "No se puede saber", "Infinidad", entre otras. Las preguntas: "¿Es 486 múltiplo común de 3 y 8?", "¿podrían encontrar un número de cuatro cifras que sea múltiplo común de 3 y 8?", pueden llevar a los alumnos a pensar que cualquier número que sea múltiplo de 24, que es el mcm de 3 y 8, es múltiplo común de 3 y 8.

Lo anterior se vincula con las preguntas 2, incisos e) y f), en las que se espera que los alumnos concluyan que expresiones como $2n$, $3n$, $4n$ son múltiplos de 2, 3 y 4, respectivamente, para cualquier valor entero de n.

Como se señaló anteriormente, en la actividad 4 de esta sesión se hace evidente que la solución del problema de los autos puede encontrarse al comparar el mcm de todas las parejas de números que se pueden formar con los que representan los tiempos: 18 y 20; 18 y 24; 18 y 28; 20 y 24; 20 y 28; 24 y 28. Al comparar el mcm de cada pareja de números, se ve que el menor es el que corresponde a 18 y 24, que es 72, mientras que el mayor corresponde a 18 y 28, que es 252.

En la actividad 1 de la sesión 5, si observa que los alumnos ya no tienen dificultad para calcular el mcm y el MCD de dos o más números mediante la descomposición de cada número en factores primos, puede mostrarles el procedimiento abreviado para calcular el mcm que, para el caso de 48, 56 y 64, consiste en lo siguiente:

$$\text{mcm} = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 7 = 2^6 \times 3 \times 7 = 1344$$

48	56	64	2
24	28	32	2
12	14	16	2
6	7	8	2
3	7	4	2
3	7	2	2
3	7	1	3
1	7	1	7
1	1	1	

mcm = $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 7 = 2^6 \times 3 \times 7 = 1344$

La simplificación consiste en obtener cada factor primo de los tres números al mismo tiempo, siempre que esto sea posible; cuando no, simplemente se baja el número, como en el caso del 7, que no tiene mitad. Con esta técnica no hay necesidad de seleccionar factores, todos forman parte del mcm.

En caso de que se muestre este procedimiento en la actividad 1, en la actividad 2 tendrán la oportunidad de usarlo, o seguir usando la descomposición de cada número. También puede sugerirles a los alumnos que usen uno de los dos procedimientos y, en seguida, comprueben con el otro.

Los 4 enunciados de la actividad 3 se prestan para que los alumnos discutan, sobre todo si algunos piensan que es verdadero y otros que es falso, sólo hay que animarlos a que digan el porqué de sus respuestas y a que den ejemplos que logren convencer a los que piensan diferente.

Observe lo que hacen en el problema 5, inciso a). Es probable que muchos obtengan el mcm de 21 y 35, que es 105. Este número no es la solución porque tiene tres cifras y la condición es que tenga cuatro. ¿El número que se busca tendría que ser múltiplo de 105? Ésta es la pregunta clave que probablemente algunos alumnos se plantearán, misma que los llevará a la solución al multiplicar 105×2, 105×3, 105×4, hasta que encuentren un número de cuatro cifras. Este número es 1050, que se obtiene al multiplicar 105×10, lo que significa que a la factorización del mcm = $105 = 3 \times 5 \times 7$, es necesario agregarle dos factores más, un 2 y un 5 para encontrar el número perdido.

Pautas para la evaluación formativa

Con la finalidad de verificar en qué medida se logra la intención didáctica que aparece en la ficha descriptiva, es necesario hacer un registro para cerciorarse de que los alumnos realizan lo siguiente:

- Expresan un número compuesto como producto de sus factores primos.
- Calculan el MCD de dos o más números.
- Calculan el mcm de dos o más números.
- Usan correctamente el MCD de dos o más números al resolver problemas.
- Utilizan correctamente el mcm de dos o más números al resolver problemas.

¿Cómo apoyar?

Con los alumnos que enfrenten dificultades al factorizar números, calcular el MCD o el mcm. Inténtelo con números de menor valor, con los cuales puedan hacer el cálculo mentalmente. Esto les ayudará a encontrar sentido a lo que buscan y al uso de operaciones escritas cuando el caso lo requiera. Es importante vincular los aprendizajes de la secuencia 1, "Múltiplos, divisores y números primos", y de la secuencia 2, "Criterios de divisibilidad", para que los alumnos relacionen lo que en ellas se estudió con lo que se estudia en esta secuencia.

¿Cómo extender?

Organice al grupo en equipos y pídales que cada equipo formule una pregunta relacionada con la factorización de números con el MCD o con el mcm o que inventen problemas que se resuelvan usando el mcm, o bien el MCD.

$$1\,890 = \underbrace{2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7}_{\text{Descomposición en factores con números primos}} = \overbrace{2 \times 3^3 \times 5 \times 7}^{\text{Descomposición usando potencias}}$$

Secuencia 11 Figuras geométricas y equivalencia de expresiones de segundo grado 2

(LT, Vol. II, págs. 22-29)

Tiempo de realización	4 sesiones
Eje temático	Número, álgebra y variación
Tema	Patrones, figuras geométricas y expresiones equivalentes
Aprendizaje esperado	Formula expresiones de segundo grado para representar propiedades del área de figuras geométricas y verifica equivalencia de expresiones, tanto algebraica como geométricamente.
Intención didáctica	Que los alumnos establezcan la equivalencia de expresiones algebraicas de segundo grado para representar el área de figuras geométricas y para obtener valores desconocidos y que factoricen expresiones algebraicas.
Vínculos con otras asignaturas	*Historia,* segundo grado, secuencia 12: "El poderío mexica". *Ciencia y Tecnología. Biología*, secuencia 1: "La biodiversidad mexicana"; secuencia 6: "El cuidado de la biodiversidad e identidad mexicanas".
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	Audiovisual • *Factores de una expresión algebraica de segundo grado* Informático • *Factorización de expresiones cuadráticas*
Materiales de apoyo para el maestro	Recursos audiovisuales • *Factorización de expresiones algebraicas de segundo grado* • *Expresiones equivalentes y no equivalentes*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

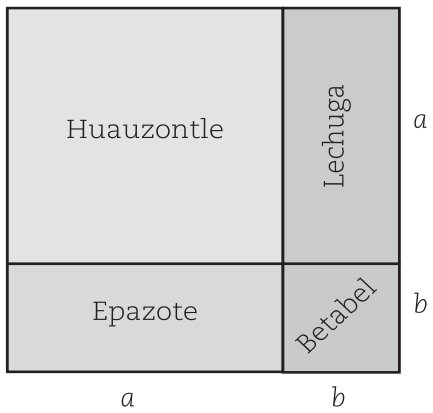
- Sesión 1. Usen expresiones algebraicas equivalentes para expresar áreas.
- Sesión 2. Expresen algebraicamente composiciones de áreas que representan binomios al cuadrado y binomios con un término común, y determinen la equivalencia de las expresiones encontradas.
- Sesión 3. Usen expresiones algebraicas para representar diversas configuraciones geométricas. Factoricen la expresión algebraica que representa el área de una configuración geométrica.
- Sesión 4. Comprueben la equivalencia de expresiones algebraicas que representan el área de figuras geométricas.

Acerca de...

Esta secuencia forma parte del trabajo que los alumnos han realizado desde el bloque 1 acerca de la equivalencia de expresiones algebraicas de segundo grado (también llamadas cuadráticas) a partir de las transformaciones algebraicas correspondientes o la sustitución de las literales iguales por un mismo valor.

Dado que la forma usual de las chinampas es rectangular, a partir del contexto, basado en lo que se cultiva en ellas y la gran biodiversidad de nuestro país, se plantean problemas para expresar áreas de terrenos de cultivo mediante expresiones algebraicas que sean equivalentes, esto es, que los alumnos encuentren diversas maneras de expresar, en estos casos, una misma área.

Entre los problemas que aquí se plantean, se recurre a la representación geométrica del trinomio cuadrado perfecto y del trinomio de la forma $x^2 + (a + b)x + ab$, a partir del producto de dos binomios. Estos conceptos serán de gran utilidad en las secuencias donde se resuelven ecuaciones cuadráticas.



En general, las secuencias que forman parte de este aprendizaje esperado se basan en la manipulación algebraica de los términos, esto es, en las operaciones algebraicas que hasta ahora se han estudiado, destacando principalmente la factorización de expresiones; también se relaciona con los contenidos estudiados en el tema de número, como la jerarquía de las operaciones y los conceptos de múltiplo y factor, así como con el cálculo de áreas de figuras geométricas.

Sobre las ideas de los alumnos

La descomposición en factores (factorización) se ha estudiado anteriormente en aritmética al encontrar las diferentes formas de expresar cualquier número como un producto de dos o más números. Ahora, los alumnos deberán recordar esas formas de expresar los números, además de las operaciones con potencias de la misma base y, en general, el uso de la jerarquía de las operaciones.

Tenga en cuenta que los alumnos pueden confundirse respecto a que, al estar representadas por literales, las medidas de los lados de las figuras que tienen los terrenos, en lugar de multiplicar, sumen para determinar su área. De ahí que el modelo de áreas de figuras sea el apoyo visual para que los alumnos comprendan que al multiplicar dos literales distintas, o incluso la misma, están considerando dos dimensiones (largo y ancho o base y altura).

¿Cómo guío el proceso?

Con la finalidad de que los alumnos encuentren relaciones entre los contenidos que estudian a lo largo de su preparación escolar, al realizar la lectura introductoria de la secuencia puede preguntarles si recuerdan la secuencia de Historia de segundo grado, donde se habla de las chinampas como una forma de agricultura de la cultura mexica; así como de lo visto en las secuencias de Biología de primer grado, donde estudiaron la biodiversidad en nuestro país, y de los cultivos y alimentos característicos de cada región.

En seguida se pide que los alumnos trabajen individualmente con el fin de analizar, tanto ellos como usted, los aspectos que aún puedan representar un obstáculo para avanzar en el estudio de este contenido. Puede suceder que los alumnos sumen exponentes de las literales iguales en un polinomio, por ejemplo en la actividad 1, inciso c), donde una expresión para representar el perímetro de la chinampa es: $(5x + 3x + x + 3x + x + 2x + 3x)$, y que ellos consideren que es equivalente a $18x^6$; o bien, en la actividad 1, inciso d), donde el resultado final sería $18x^2$, los alum-nos anoten $18x^4$, también porque sumaron los exponentes.

En la sesión 2, el problema 1 difiere de las representaciones que venían trabajando en la secuencia anterior, donde las áreas eran externas y colindantes. Ahora se trata de un área dentro de otra, elemento que será importante revisar con los alumnos en la respuesta del inciso c), pues puede suceder que obtengan el área de todo el cuadrado de lado *d* y la sumen con el área del cuadrado pequeño, sin darse cuenta de que si obtienen el área del cuadrado con lado *d*, ya están incluyendo el área verde. Así, las expresiones que pueden obtener en este inciso serían d^2, $e^2 + e(d - e) + d(d - e)$ o bien, $e^2 + d^2 - e^2$, si es que suman las respuestas a los dos incisos anteriores. En esta última expresión habrá que hacerlos reflexionar que e^2 se elimina, ya que aparece sumando y después restando, de ahí que sólo queda d^2.

El problema de la actividad 2 los llevará a una representación geométrica de lo que es el trinomio cuadrado perfecto y la posibilidad de escribirlo algebraicamente de diferente forma, lo que ayudará posteriormente a comprender su factorización:

$$\begin{aligned} &(a+b)^2 = (a+b)(a+b) \\ &= a^2 + ab + ab + b^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 \end{aligned}$$

La misma situación surge con el problema de la actividad 3, donde seguramente las expresiones que muchos obtendrán para el área de toda la chinampa resulten de la suma de las cuatro áreas en que está dividida:

$$x^2 + ax + bx + ab = x^2 + (a+b)x + ab$$

Otros posiblemente digan que para obtener el área de todo el rectángulo basta con multiplicar $(x + a)(x + b)$, lo que ayudará posteriormente a comprender la factorización.

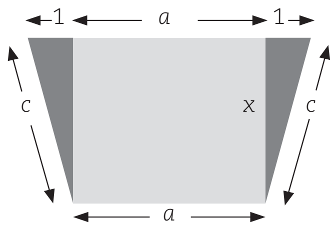
Lo anterior justifica la necesidad de que los alumnos comprueben siempre que las expresiones que obtienen son equivalentes, ya sea con la sustitución de las literales por valores numéricos, o bien mediante la transformación de una expresión en la otra.

En las actividades 1 y 2 de la sesión 3 se pide que los alumnos encuentren los factores (medidas de los lados) que permiten expresar el área de las figuras dadas, así como representar geométricamente el área de figuras, dadas las expresiones que representan su área, con el fin de que pongan en juego, de diferente forma, lo estudiado en las dos sesiones anteriores.

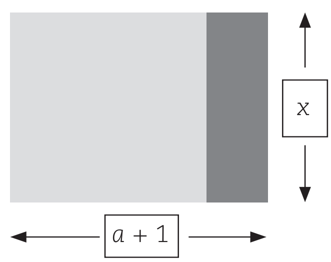
La actividad 3 se centra en la búsqueda de los factores que permiten obtener los trinomios dados, pero ahora ya no tienen el apoyo de la representación geométrica. Se trata ya de un trabajo meramente algebraico, por lo que es importante que usted les insista en que realicen los productos que obtengan para verificar que son equivalentes a las expresiones dadas. El recuadro incluido en la actividad 6 muestra la relación entre estos dos elementos.

Al final de esta sesión, se pide a los alumnos que investiguen acerca de los cultivos que se pueden tener en casa, tanto en zonas rurales, donde esta actividad se facilita, como en zonas urbanas, donde se ha promovido lo que se conoce como *azotea verde*, que consiste en tener diversos cultivos para el autoconsumo en la azotea de una vivienda o en un espacio que pueda ser destinado a ello. La finalidad de este punto es que apoye a los alumnos en la reflexión acerca de cómo contribuir, aunque sea en pequeña medida, a evitar los problemas que ocasiona la agricultura intensiva en la actualidad.

En la sesión 4, actividad 1, se plantea la transformación de algunas figuras geométricas en otras, a fin de que los alumnos relacionen primero las longitudes de los lados cuando las figuras se transforman, y después, que establezcan la equivalencia entre las expresiones algebraicas usadas para calcular sus áreas más fácilmente. Por ejemplo, en el caso del trapecio isósceles



que se transforma en un rectángulo, los alumnos deberán observar que los dos triángulos que forman parte de la base mayor son congruentes y que, acomodados a la derecha del rectángulo obtenido a partir de la base menor, forman un rectángulo cuya área es la misma que la del trapecio; también se puede ver que la altura del rectángulo es la distancia entre la base menor y la base mayor; por lo tanto, las longitudes buscadas son:



Y ellos partirán de aquí para establecer que las dos expresiones que anoten son equivalentes. Entre las que pueden surgir de ambas figuras, están:

$$\frac{(a + 2) + a}{2}x = (a + 1)x$$

Se podría solicitar a los alumnos que igualen las expresiones y realicen las operaciones necesarias para demostrar que ambas expresiones son equivalentes, ya que la forma más fácil, y a la cual seguramente recurrirán, será sustituir las literales por algún valor; sin embargo, los alumnos deben ejercitar la operatividad con expresiones algebraicas.

Pautas para la evaluación formativa

Con el fin de analizar qué conocimientos les quedan claros a los alumnos o en cuáles tienen dificultades, es importante observar los siguientes aspectos:

- Identifican los términos de cualquier expresión algebraica.
- Distinguen las operaciones que están indicadas en una expresión algebraica.
- Identifican algunas propiedades de las igualdades, por ejemplo: si dos términos son iguales a otro término, entonces los dos primeros son iguales entre sí; o que es posible cambiar el orden de los miembros sin que la igualdad se altere.
- Aplican correctamente las operaciones con exponentes.
- Utilizan la trasposición de términos en una igualdad.
- Escriben e identifcan las expresiones algebraicas equivalentes para expresar áreas y perímetros.

¿Cómo apoyar?

Un error muy frecuente de los alumnos es el manejo de exponentes. En general, confunden la suma de términos semejantes con el producto. Si observa que esto ocurre, será necesario volver a trabajar con ellos las secuencias relativas a las operaciones con exponentes de la misma base, a fin de que recuerden que cuando dos o más términos tienen la misma literal, pero se están sumando o restando, sólo se opera con los coeficientes y la literal se queda igual. Puede recurrir también a lo que ellos saben acerca de cómo comprobar la igualdad de expresiones, dando un mismo valor a las literales que son iguales. Por ejemplo, si escriben esto:

$$(5x + 3x + x + 3x + x + 2x + 3x) = 18x^6,$$

dígales que sustituyan la literal por 2, por ejemplo, y al realizar las operaciones, del lado izquierdo obtendrán 36, mientras que del lado derecho será 1152.

En caso de que les falle la trasposición de términos, recurra a la balanza como estrategia didáctica para que comprendan que lo que hagan de un lado de la igualdad, deberán hacerlo también del otro para mantener el equilibrio (la igualdad). Una vez que comprendan y practiquen esta estrategia, les será más fácil entender las recetas: "Si está sumando, pasa restando", "Si está multiplicando, pasa dividiendo", etcétera.

¿Cómo extender?

La factorización de expresiones algebraicas no es un tema sencillo, por lo que se sugiere que proponga ejercicios de factorización como los siguientes:

$$4x^4 + 6x^2 + 10 =$$

$$9a^3 + 3a^2 =$$

$$12y - 4y^4 + 6y^2 + 16 =$$

$$2x^2 + 100 =$$

$$16a^4 - 20a^2b + 20a^2b - 25b^2 =$$

$$25y^2 - 30y =$$

$$36y^2 - 48yz + 48yz - 64z^2 =$$

$$x^2 + 2x + 4 + 2x =$$

Se recomienda hacer una puesta en común que permita analizar las expresiones anotadas por los alumnos, que pueden ser diversas, y comprobar si son equivalentes. Si no lo son, analicen si el error es trivial o si es reflejo de algún concepto que no ha quedado claro.

Secuencia 12 Funciones 2

(LT, Vol. II, págs. 30-39)

Tiempo de realización	5 sesiones
Eje temático	Número, álgebra y variación
Tema	Funciones
Aprendizaje esperado	Analiza y compara diversos tipos de variación a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica, que resultan de modelar situaciones y fenómenos de la física y de otros contextos.
Intención didáctica	Que los alumnos analicen las relaciones funcionales con variación cuadrática para conocer sus propiedades y características, poder resolver problemas y obtener la expresión algebraica de ese tipo de relación funcional.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisual** • *Distancia de seguridad* **Informático** • *Análisis de gráficas y expresiones algebraicas de funciones cuadráticas*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recursos audiovisuales** • *Relaciones funcionales con variación cuadrática* • *Interpretación de gráficas con secciones curvas*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Analicen la representación tabular de una variación cuadrática para determinar la representación gráfica que corresponde al crecimiento observado.
- Sesión 2. Comparen modelos de crecimiento cuadrático a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica, que resultan de modelar situaciones de la vida real.
- Sesión 3. Verifiquen que la representación algebraica de un fenómeno de la física corresponde a la situación que representa, así como a los datos de su tabla y de su representación gráfica.
- Sesión 4. Profundicen en las nociones de dependencia y razón de cambio como características de una relación de variación funcional.
- Sesión 5. Analicen cómo cambian la representación algebraica y gráfica cuando varía una de las condiciones, e identifiquen qué representa cada término de dicha expresión.

Acerca de...

Las gráficas de funciones sirven, entre otras cosas, para analizar cualitativa y cuantitativamente las relaciones de dependencia entre dos conjuntos de cantidades y el tipo de variación que existe entre éstas. Asimismo, al ser la representación de un modelo, un problema o fenómeno cercano o significativo para los alumnos, su análisis puede comenzar por aspectos cualitativos de la variación y derivar en soluciones cuantitativas o de otro tipo de representación (tabular o algebraica).

Desde la primaria, los alumnos han estudiado la relación que hay entre dos conjuntos de cantidades; en la secundaria han profundizado en el estudio de las relaciones como procesos de variación, y en particular se ha hecho hincapié en los procesos de variación funcional con situaciones lineales y de proporcionalidad directa e inversa. Además, el estudio de los fenómenos de variación se ha hecho con diferentes representaciones matemáticas.

En la secuencia 5 se analizaron situaciones que permiten identificar si la relación entre las cantidades corresponde a una variación funcional y si es lineal o cuadrática, a partir de la lectura, la interpretación, la elaboración y el análisis de gráficas y tablas. Es el antecedente directo del estudio que se va a desarrollar en esta secuencia. Asimismo, los conceptos y procedimientos estudiados en las secuencias de figuras geométricas y de equivalencia de expresiones algebraicas, así como las secuencias sobre ecuaciones, son antecedentes relevantes para aprender lo que se propone en esta secuencia.

Sobre las ideas de los alumnos

Los alumnos saben que, cuando hay dos conjuntos de valores y se comparan los elementos de uno con respecto al otro, puede ocurrir que tengan una relación de dependencia lineal, o bien directa o inversa, en la que es posible identificar una constante. También puede suceder que no tengan relación alguna.

En la secuencia 5 conocieron algunas situaciones que cumplen con una relación de variación que aumenta de manera diferente a la lineal. Tal vez, algunos alumnos, al no encontrar un valor constante entre cada par de valores, consideren que no hay una relación de variación funcional, pero justamente las situaciones que se presentan en esta secuencia tratan, particularmente, de dos casos de relación funcional cuadrática con la intención de que los alumnos se concentren en identificar y analizar las características de este tipo de variación, en las cuales no se puede identificar una constante.

Un aspecto importante es que los alumnos comprendan los conceptos de función y ecuación, así como sus diferencias, lo cual se desarrolla en las secuencias referentes a funciones, ecuaciones y expresiones algebraicas equivalentes.

¿Cómo guío el proceso?

Lea y comente con los alumnos la sección "Para empezar" con el fin de identificar la familiaridad y las ideas que tienen los alumnos respecto al contexto de la secuencia. Las preguntas son sobre todo para entender el fenómeno y hacer conciencia de la utilidad de los teléfonos celulares, pero también para alertar sobre la importancia de no distraerse con estos aparatos al conducir.

A lo largo de la secuencia se pretende que los alumnos relacionen las distintas representaciones de las funciones con las situaciones y los fenómenos descritos en ella.

La actividad 1 de la sesión 1 centra el trabajo en el análisis del aumento del número de celulares que se ha dado en los últimos años por cada 100 habitantes. Se pretende que, a partir de observar este crecimiento, los alumnos puedan determinar o aproximar los valores de los años que no aparecen en la tabla a partir de la información dada. Los primeros dos incisos están enfocados en que comparen el crecimiento que hubo de un año a otro. Observe qué razonamientos usan para encontrar los valores que se piden en el inciso c). Vale la pena analizar en un primer momento qué significa que haya *n* celulares por cada 100 habitantes para contestar el resto de los incisos de esta actividad. En las actividades 2 y 3 conviene que no sólo comparen los valores de la tabla con los de la gráfica, sino también que, una vez que los alumnos hayan dado sus razones, propicie la discusión con preguntas como: "¿Por qué no es posible que la gráfica esté compuesta por dos segmentos de recta?"; "¿El comportamiento del primer año al quinto es lineal?"; "¿Cómo podemos mostrar que no hay un crecimiento lineal?". Aclarar lo anterior les permitirá afrontar de lleno las actividades de la sesión 2.

Pregúnteles si recuerdan cómo se comporta una variación lineal y cómo se diferencia del

Cartel de una campaña vial que busca evitar accidentes.

comportamiento de una variación cuadrática; pídales que escriban este análisis de las gráficas en su cuaderno.

La actividad 1 de la sesión 2 comienza con la intención de reforzar la comprensión de la relación funcional que se presenta y cómo se habla no del total de celulares, sino de cuántos hay por cada 100 habitantes. Por otro lado, se solicita que identifiquen la expresión algebraica que modela el fenómeno en estudio. Para esto, los alumnos pueden elegir varias estrategias. Si observa que afrontan dificultades para hacerlo o lo hacen de manera azarosa, sugiera que examinen los valores que conocen, por ejemplo, ¿qué pasa en cada expresión cuando sustituyen algún valor de la tabla?, ¿qué resultado obtienen?, ¿esto cómo les ayuda a desechar o elegir las expresiones? Otra opción es que grafiquen cada una de las expresiones y la comparen con la gráfica de la sesión 1 para seleccionar la representación algebraica correspondiente a la tabla y la gráfica vistas anteriormente. En la actividad 2 se espera que, a partir de la expresión algebraica elegida en la actividad anterior, completen la tabla haciendo una proyección de los resultados del estudio anterior. Cuando los alumnos encuentren los resultados, comente con ellos lo que significa que a partir del año 2019 haya más de 100 teléfonos celulares por cada 100 habitantes y por qué eso tiene un sentido lógico en la realidad; además, pregunten por qué es importante analizar esto desde el punto de vista de la ecología y del cuidado del medio ambiente. En la actividad 3 deberán trazar la gráfica correspondiente. En realidad, ya cuentan con todos los elementos para hacerla, pues tienen la información de la sesión 1 (incluso la gráfica) y la tabla que acaban de elaborar. Para la actividad 4, promueva una puesta en común centrada en hacer una conexión entre las tres representaciones: los datos que aparecen en las tablas, las gráficas y la expresión algebraica. Para ello puede preguntar: "¿Con cuál representación es más fácil ver cómo se comporta el fenómeno?"; "¿Cuál representación te ayuda a obtener cualquier valor en el tiempo?"; "¿Cuál les permite hacer una mejor proyección a futuro?". Comente que la gráfica representa los valores de la tabla y que éstos están dados por la expresión algebraica. También conviene que analicen el fenómeno en sí. Para eso, puede plantear preguntas del tipo: ¿por qué creen que el crecimiento se comporta de esa manera?, ¿este crecimiento acabará en algún momento?, ¿creen que siempre habrá crecimiento?

La actividad 5 tiene como propósito analizar otra gráfica que representa el mismo fenómeno, pero en Europa. El alumno debe completar, a partir de la gráfica, una tabla de un conjunto de datos y responder preguntas comparando ambos estudios. Considere que los resultados pueden ser variables por la manera en que cada uno lee la gráfica. Conviene que ayude a los alumnos a dar significado a los resultados numéricos que se obtienen. Por ejemplo, en el inciso e); la respuesta es 163.7 teléfonos celulares por cada 100 habitantes en 2025. Es importante que el alumno dé un significado a esta respuesta con preguntas como: "¿Qué quiere decir ese número?"; "¿Tiene sentido ese resultado en la realidad?"; "¿Por qué es decimal y no un entero positivo?".

La sesión 3 se compone de cinco actividades. En la primera se debe entender el fenómeno de la distancia óptima para evitar accidentes. Para lograrlo; se proporciona información sobre la distancia de seguridad al conducir automóviles y se formulan cuestionamientos sobre la relación entre la velocidad del vehículo y la distancia de seguridad al frenar el automóvil. En la segunda actividad se incluye información sobre cómo calcular la distancia de seguridad para evitar accidentes tomando en cuenta el espacio que se necesita, el tiempo para reaccionar y la velocidad del automóvil.

Con la "regla de oro" que se proporciona en la campaña vial para evitar accidentes, se pide en la actividad 3 que se complete una tabla para distintas velocidades y la distancia de seguridad asociada a ellas. Con esos datos se intenta que los alumnos comprendan cómo se obtiene una expresión algebraica que representa la situación que relaciona la velocidad del automóvil con la distancia de frenado. Para ello se muestran tres formas de representar algebraicamente la situación descrita. Conviene que analice con sus alumnos cada una de las expresiones, y que vean las similitudes y diferencias.

Observe con ellos qué significa algebraicamente "quitarle el cero" a los números que tienen que multiplicar entre sí.

Considere que la respuesta correcta al inciso c) es $\left(\frac{x}{10}\right)^2 = \left(\frac{x^2}{100}\right)$, por lo que los alumnos tienen que determinar en el inciso d) que las expresiones de Ramón y Sofía son las correctas y además son equivalentes.

La gráfica de la actividad 5 les permite apreciar cómo a mayor velocidad se necesita más distancia para frenar sin provocar un accidente.

En la primera actividad de la sesión 4 se introduce una función cuadrática con coeficientes decimales, y por medio de ésta se relaciona la velocidad de un automóvil con la distancia de seguridad. Conviene que se tenga en cuenta en todo momento que se trata del mismo fenómeno, pero usando otro modelo. El primero se utilizó para una campaña de concientización, así que debía ofrecer una manera sencilla de calcular la distancia en función de la velocidad, para usarla cotidianamente. Al emplear la expresión algebraica de esta sesión, se quiere tener más precisión entre el fenómeno físico y el modelo matemático que lo representa. Para graficar, se solicita al alumno que complete antes los datos de la tabla correspondiente. Es importante que comente a los alumnos que las 2 expresiones representan lo mismo, pero que están descritas con diferentes literales. Esto significa que uno puede nombrar las variables como guste, siempre y cuando se sepa que representan lo mismo.

En la actividad 2, los alumnos deben graficar la función de la distancia de seguridad respecto a la velocidad usando la expresión funcional y los datos obtenidos en la actividad anterior.

La actividad 3 se orienta hacia la comparación de las dos gráficas anteriores, donde podrán apreciar su semejanza y observar que, a pesar de la sencillez de la primera, cumple el cometido de determinar la distancia de frenado seguro.

La primera actividad de la sesión 5 tiene como propósito que los alumnos identifiquen los términos de la expresión funcional con la distancia de frenado, y ahora con el agregado de la distancia de reacción dando la función:

$D(v) = 0.007v^2 + 0.2v$, es decir, se establece la relación entre la distancia de frenado y el uso del teléfono celular mientras se maneja. Conviene que verifique con los alumnos qué significa reaccionar tres y seis veces más tarde, dado que se les pide escribir las expresiones algebraicas de las dos situaciones descritas. En el inciso b), cuando grafiquen las tres situaciones, compare y analice con los alumnos las implicaciones de estar distraído cuando se maneja, sobre todo a altas velocidades.

Es conveniente que en la puesta en común de la actividad 2 comenten cómo, al variar los factores, cambian las gráficas. Vean qué es lo que se modifica, así cómo la manera en que varía la distancia de frenado en función de la velocidad. Por ejemplo, puede ver cómo se modifica la distancia según la distracción que se presenta a la misma velocidad. Es importante reflexionar que no sólo por reducir la velocidad se reduce el riesgo, sino que también hay que reducir las distracciones.

Pautas para la evaluación formativa

Con la finalidad de verificar en qué medida se va logrando la intención didáctica que aparece en la ficha descriptiva, se requiere hacer un registro para cerciorarse de que los alumnos realizan lo siguiente:

- Distinguen claramente cuál representación gráfica se corresponde mejor con el crecimiento observado.
- Logran hacer la conexión que hay entre las representaciones tabular, gráfica y algebraica, que resultan de modelar situaciones de crecimiento cuadrático.
- Logran vincular o explicar el fenómeno a partir de las distintas representaciones.
- Ante las relaciones funcionales que se presentan, determinan cuál variable es la independiente y cuál es la dependiente.

¿Cómo apoyar?

Si observa que algunos alumnos tienen dificultades para seleccionar la gráfica que corresponde a los datos de la tabla de la actividad 2 de la sesión 1, puede sugerir que identifiquen cada par ordenado de la tabla en ambas gráficas; en aquella en la que ubiquen todos los puntos determinados por los pares ordenados será la que le corresponde.

Esta sugerencia también la puede hacer si observa que tienen dificultad para trazar la gráfica de la actividad 3 de la sesión 2. De esta manera, puede ayudar a los alumnos a reconocer algunas de las características de la relación funcional, por ejemplo, si se tienen dos conjuntos de valores, uno de ellos puede ser el de los valores independientes, ubicados por lo general en el eje X, y los otros, los dependientes, ubicados en el eje Y.

¿Cómo extender?

Si tiene acceso a una computadora con internet, puede conectarse con alguno de los graficadores en línea gratuitos, por ejemplo Geogebra y Wolfram Alpha, que le permitirá hacer ampliaciones de las gráficas y modificar los parámetros para ver las implicaciones de los cambios. Asimismo, revise algunos recursos en internet o simulaciones para explicar o comprender mejor el fenómeno. Por ejemplo, puede ver el video que se encuentra en https://www.youtube.com/watch?v=fB9_id8BhU0

Secuencia 13 Ecuaciones cuadráticas 2

(LT, Vol. II, págs. 40-49)

Tiempo de realización	5 sesiones
Eje temático	Número, álgebra y variación
Tema	Ecuaciones
Aprendizaje esperado	Resuelve problemas mediante la formulación y solución algebraica de ecuaciones cuadráticas.
Intención didáctica	Que los alumnos usen ecuaciones cuadráticas al resolver problemas por el método de factorización.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisuales** • *Ecuaciones cuadráticas incompletas* • *Ecuaciones cuadráticas por factorización* **Informáticos** • *Factorización de ecuaciones cuadráticas incompletas* • *Ecuaciones cuadráticas por factorización*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recursos audiovisuales** • *Aspectos a considerar para resolver ecuaciones cuadráticas incompletas* • *Recomendaciones iniciales para el estudio de ecuaciones cuadráticas*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Resuelvan ecuaciones cuadráticas de la forma $ax^2 + c = 0$, para solucionar problemas.
- Sesión 2. Usen ecuaciones de la forma $ax^2 + bx = 0$ para resolver problemas.
- Sesión 3. Utilicen el método de factorización para resolver ecuaciones de la forma $x^2 + bx + c = 0$ al solucionar problemas.
- Sesión 4. Identifiquen las raíces de una ecuación de segundo grado cuando ésta se expresa de la forma $(x + p)(x + q) = 0$ y sepan formular una ecuación de segundo grado dadas las dos raíces.
- Sesión 5. Identifiquen las dos raíces de una ecuación de segundo grado en la representación gráfica de la función de la cuál se obtiene y formulen la ecuación correspondiente.

Acerca de...

En la secuencia 4, los alumnos comenzaron a formular ecuaciones de segundo grado para resolver ciertos problemas y usaron métodos intuitivos para llegar a la solución. Esta secuencia se desarrolla al considerar la complejidad de las ecuaciones y, paralelamente, los métodos que suelen utilizarse para resolverlas. Se inicia con las ecuaciones incompletas, de la forma $ax^2 + c = 0$ y, $ax^2 + bx = 0$, y culmina con las ecuaciones completas, de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, cuya resolución se lleva a cabo por el método de factorización y por la propiedad del producto cero.

4. Anoten lo que falta en la tabla.

Ecuación factorizada	Ecuación desarrollada	Raíces	
$(x - 1)(x + 2) = 0$			
	$x^2 - x - 2 = 0$		
		$x_1 = 4$	$x_2 = 3$
	$x^2 - 6x = 0$		
$(x - 3)(x + 4) = 0$			
	$x^2 + 5x - 14 = 0$		
		$x_1 = 7$	$x_2 = -2$

Otro aspecto que se destaca en la secuencia es el significado de las raíces, tanto en el contexto de los problemas como en el algebraico. En el primer caso se cuestiona que, en ciertos problemas sobre números, las dos raíces de la ecuación sean solución del problema, mientras que en otros, por ejemplo los relacionados con edades o con medidas, sólo una de las raíces es solución del problema.

En el segundo caso, el significado de las raíces se asocia a la representación gráfica de la ecuación, específicamente con las abscisas de los puntos donde la curva corta al eje X.

Sobre las ideas de los alumnos

Algunas de las nociones que los alumnos han construido y sirven de sustento para el estudio de esta secuencia, son las siguientes:

- Una ecuación se puede simplificar al aplicar la misma operación en los dos miembros de la ecuación, como se ilustra en la siguiente tabla.

Ecuación inicial	Qué se hace	Ecuación final
$2x^2 - 50 = 0$	Se suma 50 en ambos miembros de la ecuación.	$2x^2 = 50$
$2x^2 = 50$	Ambos miembros se dividen entre 2.	$x^2 = 25$
$x^2 = 25$	Se extrae la raíz cuadrada en ambos miembros.	$x_1 = 5$ $x_2 = -5$

- Un número es factor común de dos o más números si los divide exactamente. Por ejemplo, 3 es factor común de los números 6, 12 y 18. Adicionalmente, el mayor factor común o máximo común divisor de 6, 12 y 18, es 6. Esta misma idea es válida para las expresiones algebraicas. Por ejemplo, $2x$ es factor común de $4x$ y de $8x^2$, porque divide a ambos en forma exacta: $\frac{4x}{2x} = 2$, $\frac{8x^2}{2x} = 4x$. El mayor factor común o máximo común divisor de $4x$ y $8x^2$, es $4x$. Una idea previa que entra en juego en esta parte es la de cociente de potencias de la misma base que se estudió en segundo grado.
- La propiedad del producto cero es fundamental en el desarrollo de esta secuencia y para muchos alumnos no es trivial. Dada la ecuación

$$(x - 3)(x + 5) = 0,$$

en la que hay una multiplicación de dos factores cuyo resultado es cero, necesariamente $x - 3 = 0$, o bien, $x + 5 = 0$, de donde resulta que si $x - 3 = 0$, entonces $x = 3$. Si $x + 5 = 0$, entonces $x = -5$; por lo que las raíces de la ecuación son 3 y -5.
- Cuando en una ecuación como

$$x^2 - 3x - 180 = 0$$

se requiere encontrar dos números que sumados den -3 y multiplicados den -180, los alumnos pueden echar mano de la factorización en primos de $180 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$. Si se agrupan convenientemente estos factores, por un lado $2 \times 2 \times 3$, y por otro 3×5, en tales productos (12 y 15) hay una diferencia de 3, que es la que se requiere. Lo que resta es asignar los signos adecuados, -15 y 12, para que la suma sea -3 y el producto -180.

¿Cómo guío el proceso?

Se sugiere leer con los alumnos la sección "Para empezar", que aporta algunos datos sobre el desarrollo del lenguaje algebraico. Puede preguntarles cuántos años pasaron desde la época en que vivió Diofanto hasta la época de Francisco Vieta, para que tengan una idea acerca de la lentitud de los avances matemáticos. En estos casos, también sirve ubicar en un mapamundi los lugares donde vivieron Diofanto, Al Juarismi y Vieta.

En la sesión 1, es probable que en el inciso a) los alumnos usen literales distintas para representar un número cualquiera. Aproveche esto en el inciso c) para enfatizar la idea de que, efectivamente, es válido usar cualquier literal, aunque se acostumbra usar las últimas letras del alfabeto para representar números desconocidos o incógnitas.

Al comparar las ecuaciones del inciso c), es muy importante que a los alumnos les quede claro que toda ecuación relaciona dos expresiones cuyo valor es el mismo, en este caso $3x^2$ y 108; ambas valen 108, y por ello se pueden relacionar con el signo *igual*. Se seguirá insistiendo sobre esta idea más adelante.

Observe lo que hacen en el inciso d). Es probable que algunos sigan usando el procedimiento de ensayo y error, pero también se espera que intenten simplificar la ecuación al efectuar las mismas operaciones en ambos miembros, como lo hicieron con las ecuaciones lineales. Lo nuevo en este caso es el uso de la raíz cuadrada como operación inversa de elevar al cuadrado. No se los diga, pueden seguir usando el ensayo y error; al final de la sesión podrán ver la explicación. Es necesario que verifiquen que en este caso las dos raíces de la ecuación son solución del problema porque $3(6)^2 = 108$ y $3(-6)^2 = 108$.

En el inciso a) de la actividad 2, observe si los alumnos identifican las dos expresiones que representan el área del círculo. Una de ellas es la fórmula: πr^2, que en este caso puede escribirse: $3.14r^2$, la otra es el área conocida, 153.86 cm^2, de manera que la ecuación es $3.14r^2 = 153.86$.

En contraste con el problema de la actividad 1, se pretende que los alumnos puedan determinar por sí mismos que, en éste, sólo la raíz positiva es solución del problema, puesto que se trata de una medida de longitud.

En la actividad 1 de la sesión 2, nuevamente se retoma la idea de relacionar dos expresiones que tienen el mismo valor para formular la ecuación. En este caso, uno de los valores es la suma de las áreas de los dos cuadrados ($2x^2$), y el otro es el área del rectángulo ($6x$). Conviene hacer notar que en este caso ambos valores se desconocen porque no se sabe el valor de x.

En el inciso d) de la actividad 1, se espera que por ensayo y error encuentren el número que satisface la ecuación. En seguida, en el inciso e), verifiquen si el número encontrado cumple con las condiciones del problema.

La actividad 2 contiene dos aspectos que son fundamentales en lo que resta de la secuencia. El primero se refiere a la factorización de expresiones algebraicas, en este caso la factorización del primer miembro de la ecuación $2x^2 - 6x = 0$. Se trata de encontrar un término que sea factor común de $2x^2$ y de $6x$, usando la misma idea que los alumnos ya tienen de factor común: esto es, el número que divide exactamente a dos o más números y, en este caso, se trata de buscar la expresión que divide exactamente a dos o más expresiones algebraicas. ¿Qué expresión divide exactamente a $2x^2$ y a $6x$? La respuesta podría ser 2, porque $\frac{2x^2}{2} = x^2$ y $\frac{6x}{2} = 3x$. También podría ser x, porque $\frac{2x^2}{x} = 2x$ y $\frac{6x}{x} = 6$. También podría ser $2x$, porque $\frac{2x^2}{2x} = x$, y $\frac{6x}{2x} = 3$, ¿cuál de los tres factores conviene tomar? El que permite simplificar más la expresión, lo que los alumnos conocen como mayor factor común o máximo común divisor (MCD). De manera que la mejor forma de factorizar la ecuación es $2x(x - 3) = 0$. El primer factor ($2x$) es el mayor factor común, y el segundo factor ($x - 3$) es el binomio formado por los cocientes de dividir cada término entre el mayor factor común.

El segundo aspecto se refiere a la propiedad del producto cero, según la cual, si el producto de los dos factores es cero, por lo menos uno de ellos debe ser igual a cero. Esta propiedad es la que permite resolver ecuaciones de este tipo una vez que están factorizadas. Si suponemos que el primer factor es igual a cero, obtenemos la ecuación $2x = 0$, en la que el valor de x es 0 y ésta es la primera raíz de la ecuación cuadrática. Si suponemos que el segundo factor es igual a cero, obtenemos la ecuación $x - 3 = 0$, por lo que $x = 3$ y ésta es la segunda raíz de la ecuación cuadrática.

En el inciso c) de la actividad 4 es posible que surjan ecuaciones equivalentes. Por ejemplo, $x(x - 5) = 0$ y $2x\,(x - 5\,) = 0$. Ambas ecuaciones tienen como raíces 0 y 5, por lo que son ecuaciones equivalentes.

En la actividad 1 de la sesión 3, se espera que los alumnos logren formular la ecuación $x(x + 1) = 182$. Esta ecuación les permitirá encontrar, por ensayo y error, dos números consecutivos positivos que multiplicados dan 182. Sin embargo, hay otros dos números consecutivos negativos cuyo producto es 182. Para que los alumnos sepan cómo encontrarlos, en la actividad 2 se desarrolla y explica el procedimiento para resolver, por el método de factorización, la ecuación, $x^2 + x - 182 = 0$, que es equivalente a la que se formula en la actividad 1.

Es probable que, además de la explicación que hay en el libro del alumno, en las actividades 2 y 3 sea necesario agregar otros ejemplos para resolver las dudas que surjan. Por ejemplo, les puede proponer $x(x + 7) = -12$ cuyas raíces son -4 y -3.

Analice con los alumnos la actividad 4 y ayúdelos a entender que los dos números buscados pueden ser: dos positivos, dos negativos, o uno positivo y otro negativo, en función de los signos que tengan los términos de la ecuación.

Si algunos alumnos tienen dificultad para resolver las ecuaciones y no se les ocurre hacer las multiplicaciones de la segunda columna para encontrar a qué expresión son equivalentes, sugiéralo usted.

Uno de los propósitos de la actividad 1 de la sesión 4 es mostrar a los alumnos que una misma ecuación, en este caso $x(x + 7) = 294$ o bien $x(x - 7) = 294$, puede servir para resolver diferentes problemas, además de fortalecer las ideas que se han venido trabajando en las sesiones anteriores, como que, en ciertos casos, sólo una de las raíces es solución del problema.

Con base en lo que se ha estudiado, observe, en la actividad 3, si los alumnos son capaces de identificar las raíces de la ecuación en la forma factorizada, y de expresar ésta en la forma canónica $x^2 + 6x + 9 = 0$. En el inciso d) de la actividad 3 se pretende que los alumnos puedan explicar que las raíces de una ecuación cuadrática, cuando se presenta factorizada, son los opuestos de los términos no comunes de los factores. En la tabla de la actividad 4 se verá si los alumnos son capaces de transitar de la ecuación cuadrática en su forma canónica, $x^2 + bx + c = 0$, a las raíces de la ecuación, pasando por la forma factorizada, así como de recorrer el camino inverso, ir de las raíces a la forma canónica, pasando por la forma factorizada.

En la actividad 5 se analiza el caso especial del trinomio cuadrado perfecto, cuya factorización es un binomio elevado al cuadrado, y la solución una raíz doble o dos raíces iguales, aunque suele decirse que tienen una solución doble. Al pasar de la forma factorizada a la canónica, es conveniente que los alumnos efectúen el producto en vez de memorizar la regla que fácilmente se olvida.

En el inciso b) de la actividad 7 observe si los alumnos logran pensar que si la condición es que la ecuación tenga una solución, debe ser un trinomio cuadrado perfecto, y para que lo sea, k debe valer el doble de la raíz cuadrada de 16 multiplicada por 1, es decir, $2 \times 4 \times 1 = 8$. Para el inciso c), probando con algunos casos particulares, algunos alumnos encontrarán, por ejemplo, que k debe valer 10, pues dos números que sumados dan 10, y multiplicados dan 16, son 8 y 2, y las raíces serían -8 y -2. Es poco probable, pero podría suceder, que algunos alumnos dieran una respuesta más general: "El valor de k debe ser mayor que 8". De aquí podrían concluir que en el inciso d) el valor de k debe ser menor que 8. En la siguiente secuencia sobre ecuaciones cuadráticas podrán justificar estas respuestas con ayuda del discriminante.

Al estudiar las ecuaciones de primer grado, los alumnos observaron que la solución de una ecuación se puede ver en la gráfica de la función de la que se obtiene, como la abscisa del punto donde la recta corta al eje X. Dicho de otra manera, es la abscisa del punto en el que la ordenada vale cero.

La actividad 1 de la sesión 5 retoma estas ideas para las ecuaciones cuadráticas. En este caso, se tiene una curva (parábola) en vez de una recta, y la gráfica corresponde a una función cuadrática. Las raíces de la ecuación cuadrática asociada a la función son las abscisas de los puntos donde la curva corta al eje X, es decir, las abscisas de los puntos donde la ordenada vale cero. Una vez que los alumnos logren identificar las raíces, lo demás es algo ya hecho en otras actividades de esta secuencia.

Observe si logran apreciar en la actividad 2 que todas las gráficas tienen una raíz igual a cero y otra distinta de cero, esto puede llevarlos a pensar que se trata de ecuaciones incompletas de la forma $ax^2 + bx = 0$. Es interesante ver cómo los alumnos resuelven la tabla de la actividad 3, donde se espera que comiencen por identificar las raíces y, con base en éstas, completen lo demás. Sólo hay una gráfica que no corta al eje X, por lo tanto no tiene raíces en los números en-

2. Con base en la gráfica que se muestra, completen la tabla.

Color	Raíces	Ecuación factorizada	Ecuación desarrollada
Azul			
	$x_1 = 0; x_2 = -\frac{1}{2}$		
		$x(x - 3) = 0$	
			$x^2 + 2x = 0$

teros o racionales. Si lo cree conveniente, puede decirles que la ecuación es $x^2 + 8 = 0$, que es una ecuación incompleta de la forma $ax^2 + c = 0$, que no tiene solución.

Para responder la actividad 3, inciso b), observen que la gráfica q sólo toca al eje X en un punto, lo que significa que sólo tiene una raíz, o bien, una raíz doble.

Pautas para la evaluación formativa

Con la finalidad de verificar en qué medida se va logrando la intención didáctica que aparece en la ficha descriptiva, es necesario hacer un registro para cerciorarse de que los alumnos realizan lo siguiente:

- Resolver ecuaciones de la forma $ax^2 + c = 0$, y de utilizarlas al resolver problemas.
- Resolver ecuaciones de la forma $ax^2 + bx = 0$, y de utilizarlas al resolver problemas.
- Resolver problemas que implican usar ecuaciones de la forma $ax^2 + bx + c = 0$.
- Formular ecuaciones cuadráticas a partir de sus raíces.
- Formular ecuaciones cuadráticas a partir de su representación gráfica.

¿Cómo apoyar?

Deténgase el tiempo que sea necesario en el estudio de las ecuaciones incompletas, con el fin de que los alumnos vayan comprendiendo lo que hacen; esto les dará confianza para avanzar. Por ejemplo, puede proponer el siguiente problema, que se modela con una ecuación cuadrática: "Se tienen dos cuadrados iguales, de área x^2 cada uno. La suma de las áreas de estos dos cuadrados es igual a un rectángulo de área $6x$. ¿Cuánto mide el lado del cuadrado?".

A fin de lograr una mayor comprensión, puede proponerles que dibujen y recorten las figuras para sobreponer los dos cuadrados iguales sobre el rectángulo. Los alumnos deberán encontrar que los dos cuadrados iguales cubren exactamente el rectángulo, con lo que podrán observar que la medida del lado de cada cuadrado debe ser igual que la medida de la altura del rectángulo, y que los datos conocidos corresponden al área de las tres figuras. Entonces se puede comprender mejor por qué la ecuación que modela la situación es $x^2 + x^2 = 6x$. De este modo, puede proponer a los alumnos que, aún cuando tengan dificultades, representen la situación de la actividad 3 de la sesión 2, ya que decir: "Cuatro veces el cuadrado de un número es igual a ocho veces el mismo número. ¿De qué número se trata?", es equivalente a: "Cuatro cuadrados iguales de área x^2 cada uno y la suma de las áreas de esos cuadrados es igual a un rectángulo de área $8x$. ¿Cuánto mide el lado del cuadrado?". La representación gráfica es:

La ecuación cuadrática que modela la situación es: $x^2 + x^2 + x^2 + x^2 = 8x$.

Simplificando:

$$4x^2 - 8x = 0$$
$$4x(x - 2) = 0$$

Luego, si $4x = 0$, se tiene que $x = 0$, si $(x - 2) = 0$ entonces $x = 2$.

¿Cómo extender?

Si los alumnos resuelven un problema sin dificultad, pídales que formulen un problema similar para que todo el grupo lo resuelva. Un ejemplo es la manera como se propone en la sección "¿Cómo apoyar?" para transformar un problema en otro equivalente. Es importante que no sólo en esta secuencia y este tema se proponga este tipo de actividades, porque son acciones que promueven que los alumnos desarrollen habilidades para plantear y resolver problemas.

Secuencia 14 ¿Ecuación o función?

(LT, Vol. II, págs. 50-59)

Tiempo de realización	4 sesiones
Eje temático	Número, álgebra y variación
Tema	Patrones, figuras geométricas y expresiones equivalentes
Aprendizaje esperado	Diferencia las expresiones algebraicas de las funciones y de las ecuaciones.
Intención didáctica	Que los alumnos resuelvan problemas que impliquen el uso de funciones cuadráticas y las ecuaciones asociadas a ellas para distinguirlas y diferenciarlas.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisual** • *¿Función o ecuación?* **Informático** • *¿Función o ecuación?*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recurso audiovisual** • *Diferencias entre función y ecuación*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Reconozcan la solución de una ecuación lineal y las soluciones de una ecuación cuadrática como el valor de la abscisa del punto donde la gráfica correspondiente a la relación lineal o cuadrática interseca al eje X.
- Sesión 2. Comparen el comportamiento de las gráficas de funciones lineales y cuadráticas.
- Sesión 3. Analicen el comportamiento de las gráficas de las funciones $y = x^2$ y $y = x^2 + c$ y determinen la manera en que a cada una de estas funciones se le asocia una ecuación.
- Sesión 4. Reconozcan las soluciones de las ecuaciones cuadráticas asociadas a funciones de la forma $y = ax^2 + bx$ y las resuelvan algebraicamente.

Acerca de...

En la secuencia 4 la atención se centra en el uso de procedimientos de ensayo y error; en la 13, en procedimientos algebraicos para encontrar las raíces de ecuaciones lineales y cuadráticas, mientras que en esta secuencia se analiza la relación entre el concepto de ecuación y el de funciones lineales y cuadráticas (secuencias 5 y 13), sin dejar de lado el uso de los procedimientos algebraicos estudiados en las secuencias 3 y 11. Este análisis ofrece a los alumnos un referente visual sobre la naturaleza y el número de soluciones de dichas ecuaciones.

Para facilitar la comprensión de las relaciones entre los conceptos de *función* y *ecuación* se eligieron contextos de medición como perímetro y área de superficies cuadradas, rectangulares y circulares, y volúmenes de prismas rectangulares. En cada caso, los alumnos deben analizar con cuidado la situación que se plantea. Por ejemplo, para representar algebraicamente el área de una chinampa rectangular, además de entender el significado y uso de la variable x, deben considerar el conjunto de valores que ésta puede tener para que tanto la medida del ancho de la chinampa como su área resulten valores positivos.

En esta secuencia, los alumnos contrastan la forma en que crecen las funciones lineales y cuadráticas, hecho que pueden visualizar en las gráficas correspondientes; además, revisan la noción de expresiones algebraicas equivalentes tanto en expresiones que representan funciones como en las que son ecuaciones, por ejemplo, la función $y = x^2 - 5x$ es equivalente a $y = x(x - 5)$.

En general, en esta secuencia se analizan funciones de la forma $y = x^2$, $y = x^2 + c$ y $y = ax^2 + bx$, a las cuales se asocian las ecuaciones cuadráticas incompletas $x^2 = 0$, $x^2 + c = 0$, y $ax^2 + bx = 0$, respectivamente. Las soluciones de las ecuaciones de esta forma se encuentran algebraicamente y se visualizan en las gráficas de las funciones correspondientes.

Sobre las ideas de los alumnos

Para los alumnos, ¿qué representan las literales en las siguientes expresiones?

$$x^2 - 16x$$
$$x^2 + 16x = 0$$
$$x^2 + 16x = y$$

Muchos alumnos pueden interpretar la primera expresión como una ecuación mal planteada y, por lo tanto, no se puede resolver. Esto muestra que, por un lado, tienen dificultad para interpretar la literal involucrada como un número general y, por otro, una tendencia a ver la literal como incógnita, como un único valor que hay que determinar.

En cuanto a la segunda expresión, lo que muchos hacen para resolverla es proceder por ensayo y error y, en ocasiones, al resolver un problema asignan a la misma literal distintos valores, de modo que la suma del lado izquierdo dé como resultado el número de la derecha. Esto muestra una confusión muy común entre los alumnos, quizá porque se les ha enseñado que en álgebra las letras representan números, pero no se ha enfatizado que, cuando se define una literal para representar una medida o cualquier otro valor, ya no se puede utilizar esa literal en ese problema para representar otra medida u otro valor distinto.

En cuanto a la tercera expresión, muchos alumnos comentan: "No se puede resolver porque no tiene un resultado numérico" o "Es el resultado de una suma, pero no sabemos de qué suma se trata".

En cursos anteriores, los alumnos manipularon ecuaciones con incógnitas en los dos miembros, como $3x + 12 = 2x + 3$, y las resolvieron con procedimientos basados en las propiedades de la igualdad. Entre las ecuaciones que ahora se les presentan, la más parecida a las conocidas en cuanto a procedimientos de resolución es del tipo $x^2 - 9 = 0$ que se puede resolver con el uso de las propiedades de la igualdad: $x^2 = 9$, $x = \pm\sqrt{9}$, $x = \pm 3$. La transición al estudio de las ecuaciones cuadráticas que generalmente se igualan a cero, y que esas ecuaciones tengan dos soluciones, no deja de ser extraño para los alumnos.

Ocurre con frecuencia que el signo $\pm$ aparece como por arte de magia sin tener idea de dónde surge. Esto provoca en muchos alumnos la falsa idea de que las matemáticas se comportan de modo raro y que es difícil comprender ese comportamiento. Ante ello, es necesario recordar lo estudiado en segundo grado acerca de que una raíz cuadrada tiene dos resultados, uno positivo y uno negativo, pues al elevarlos al cuadrado se obtiene el radicando:

$$\sqrt{16} = \pm 4, \text{ ya que, } (4)(4) = 16 \text{ y } (-4)(-4) = 16$$

¿Cómo guío el proceso?

Con el objetivo de ubicar a los alumnos en el tema de la variación, lea con ellos la sección "Para empezar" y pregunte qué tipo de relación se puede establecer entre las variables dadas por el número de hojas de un libro y su número de páginas, o entre el número de kilogramos de un producto y su precio. Enseguida, haga que examinen la variación que se manifiesta en el área de una chinampa cuadrada al asignar diversos valores a la variable. Trate de que su intervención lleve a los alumnos a enumerar algunas características que diferencian a estos tipos de variación. Por ejemplo, en las primeras, los cambios de las variables se dan en intervalos iguales; se trata de un caso particular de variación lineal, son relaciones de proporcionalidad directa. En contraste, en la segunda situación, a intervalos iguales de la variable independiente no corresponden intervalos iguales en la variable dependiente; se trata de una relación funcional de tipo cuadrático cuyo análisis se realiza en la actividad 1 de la sección "Manos a la obra".

Para una mejor comprensión de la situación que se propone en la actividad 1, conviene reproducir en el pizarrón la imagen de la chinampa de modo que se distinga la parte cultivable y las medidas de sus lados: x y $x - 2$. Por la fórmula del área del rectángulo, se tiene que la expresión algebraica del área es $y = x(x - 2)$, o bien, $y = x^2 - 2x$. La tabla de valores que representa la variación del área es:

Lado	x	−1	0	1	2	2.5	3	$\frac{11}{3}$
Área cultivada	$y = x^2 - 2x$	3	0	−1	0	1.25	3	$\frac{55}{9}$

Al trazar la gráfica correspondiente a esta función, explique a los alumnos que la parte positiva del eje X representa las diversas medidas del lado de la parte cultivada de la chinampa, y la parte positiva del eje Y representa el área correspondiente. Por lo tanto, la parte de la parábola que tiene sentido para la situación que se analiza es la que se halla en el primer cuadrante, sin considerar el origen, ya que ni los lados ni el área del rectángulo pueden tener valores negativos o cero. Consecuentemente, el punto más bajo de la parábola (el vértice) de coordenadas (1, −1) no tiene sentido para la situación porque el valor −1 para el área es negativo.

En cuanto a la situación que plantea la actividad 2, oriente la reflexión de los alumnos hacia el hecho de que las magnitudes que varían en este caso son la altura o el nivel que alcanza el agua en la alberca (x) y, consecuentemente, el volumen del agua (y). Se trata aquí de una función de proporcionalidad directa, puesto que, por cada unidad de medida de la altura, el volumen en que aumenta el agua es el mismo. La expresión algebraica de esta función es, por tanto, de primer grado, es una función lineal $y = 25x$ y la ecuación asociada es $25x = 0$.

En la sesión 2 se proponen actividades similares a las de la sesión 1, pero ahora referidas al círculo y a la circunferencia. La tabla de la actividad 5 puede aprovecharla para que los alumnos observen algunas diferencias entre las funciones lineales y las cuadráticas, y también respecto a las ecuaciones asociadas a ellas.

Tabla de valores de la circunferencia y área del círculo en función del radio						
Círculo	A	B	C	D	E	F
r en cm	1	2	3	4	5	6
$C(r)$ en cm	6.2832	12.5664	18.8496	25.1328	31.416	37.6992
$A(r)$ en cm^2	3.1416	12.5664	28.2744	50.2656	78.54	113.0971

Por ejemplo, la función cuadrática $A(r) = \pi r^2$ crece más rápidamente que la lineal o de proporcionalidad directa $C(r) = 2\pi r$; en la última, por cada centímetro que aumenta el radio, la circunferencia aumenta 6.2832 cm, es decir, el aumento es constante debido al factor 2π en la función. Esta diferencia en el crecimiento se refleja en las gráficas correspondientes. Es importante destacar que esta diferencia no se observa en las gráficas que presenta el libro de texto porque los valores que se asignan al radio son menores de 5 cm, por lo tanto, conviene verificar esto trazando las gráficas para radios mayores de 5 cm.

La actividad 6, inciso f), se responde al resolver una ecuación cuadrática: "¿Existe un círculo que tenga un área de 5 cm^2?"; "¿A qué punto o puntos de la parábola corresponden?". Puesto que las variables involucradas son la medida del radio y el área, y esta última ya se conoce (5 cm^2), con la ecuación $3.1416\, r^2 = 5$ se puede calcular la medida del radio: 1.26 cm. Así pues, el punto de la parábola pedido tiene por coordenadas (1.26, 5), punto que puede ubicarse visualmente en la gráfica que se presenta en el libro.

En el inciso g) es importante que comente a los alumnos que no se espera que obtengan los resultados directamente por medio de operaciones en la calculadora, sino que aprecien que las dos expresiones escogidas como respuesta son equivalentes debido a la propiedad asociativa y conmutativa de la multiplicación.

En la actividad 8 se espera que puedan darse cuenta de que la gráfica del área de la parábola se corresponde con los valores de la tabla; asimismo, que encuentren el valor del vértice de la misma forma en que lo hicieron en el inciso f). En la actividad 9, en cambio, se busca que puedan establecer la relación entre el comportamiento del área y la circunferencia conforme crece el radio.

En la sesión 3 se analiza el comportamiento de las gráficas de las funciones de la forma $y = x^2$ y $y = x^2 + c$ y la manera en que a cada una de estas funciones cuadráticas se le asocia una ecuación. Un punto importante sobre el comportamiento de estas gráficas es que son exactamente iguales, y lo único que cambia es su ubicación en el plano cartesiano. Por ejemplo, el vértice de la parábola $y = x^2$ está en el origen del plano y abre hacia arriba; si esta parábola se desplaza 5 unidades hacia arriba, su expresión algebraica es $y = x^2 + 5$, pero si lo hace 5 unidades hacia abajo, su expresión algebraica es $y = x^2 - 5$. Las ecuaciones asociadas son $x^2 = 0$, $x^2 + 5 = 0$, y $x^2 - 5 = 0$, respectivamente. La solución de la primera ecuación es $x = 0$ porque la parábola $y = x^2$ toca al eje X en el punto en que la abscisa es 0; la segunda no tiene solución en los números racionales o irracionales, pues la parábola $y = x^2 - 2x$ no corta en ningún punto al eje X; por último, la tercera tiene dos soluciones, ya que la parábola $y = x^2 - 5$ corta al eje X en dos puntos, cuyas abscisas son $\sqrt{5}$ y $-\sqrt{5}$, y estos valores son las soluciones de esa ecuación.

En la sesión 4 se analiza el comportamiento de las gráficas de funciones cuadráticas de la forma $y = ax^2 + bx$ y la manera en que a esta función se le asocia una ecuación. Un punto importante sobre el comportamiento de estas gráficas es que cortan al eje X en el origen del plano cartesiano. La razón es que al factorizar la expresión $ax^2 + bx$ e igualarla a cero se obtiene la ecuación asociada $x(ax + b) = 0$. Se sabe que si el producto de dos factores es cero, al menos uno de ellos tiene que ser cero. De modo que, si el factor x es cero, la gráfica debe cortar al eje X en el origen del plano cartesiano. El otro punto en que la gráfica corta al eje X se obtiene despejando x de la ecuación $ax + b = 0$. Por ejemplo, la ecuación asociada a la función $y = x^2 + 2x$ es $x^2 + 2x = 0$, que es equivalente a $x(x + 2) = 0$. Al igualar a cero el primer factor, se obtiene la primera solución $x_1 = 0$; y al igualar a cero el segundo factor, se obtiene $x + 2 = 0$, por lo tanto, la segunda solución es $x_2 = -2$. Esto significa que la gráfica de la función corta al eje X en dos puntos cuyas abscisas son 0 y −2.

Una manera en que puede conducir la reflexión y la realización de la actividad 3 en el grupo consiste en presentar la tabla como ahora se indica. De esta manera, los alumnos asociarán cada gráfica con la función correspondiente a partir de los puntos en que ésta corta al eje X.

2. Hagan la gráfica de $y = x^2 - 4$ en el plano cartesiano en el que ya está dibujada la gráfica de $y = x^2$ y describan en qué se parecen y en qué son diferentes. ____________

____

a) Completen la tabla de las funciones descritas en las actividades 1 y 2.

Tabla de valores de las funciones $y = x^2$ y $y = x^2 - 4$							
x	−3	$-\frac{5}{2}$	−1	0	1	$\frac{5}{2}$	3
$y = x^2$	9	$\frac{25}{4}$	1	0	1	$\frac{25}{4}$	9
$y = x^2 - 4$	5	$\frac{9}{4}$	−3	−4	−3	$\frac{9}{4}$	5

Función	Función equivalente	Ecuación asociada	Soluciones
$y = x^2 - 3x$	$y = x(x - 3)$	$x(x - 3) = 0$	$x_1 = 0, \quad x = 3$
$y = 2x^2 + x$	$y = x(2x + 1)$	$x(2x + 1) = 0$	$x_1 = 0, \quad x = -\frac{1}{2}$
$y = x^2 + 2x$	$y = x(x + 2)$	$x(x + 2) = 0$	$x_1 = 0, \quad x = -2$
$y = x^2 - 2x$	$y = x(x - 2)$	$x(x - 2) = 0$	$x_1 = 0, \quad x_2 = 2$

Pautas para la evaluación

Con el fin de verificar en qué medida se logra la intención didáctica que aparece en la ficha descriptiva, es necesario hacer un registro para cerciorarse de que los alumnos realizan lo siguiente:

- Distinguen claramente entre una función y una ecuación.
- Reconocen el significado de las literales involucradas en una ecuación y en una función.
- Resuelven algebraicamente ecuaciones cuadráticas incompletas.
- Representan gráficamente situaciones que implican funciones lineales y cuadráticas.
- Identifican las soluciones de ecuaciones cuadráticas a partir de la representación gráfica de la función de la que se obtienen.
- Diferencian la solución de la ecuación de la solución del problema.

¿Cómo apoyar?

Proponga, si es necesario, situaciones problemáticas adicionales que impliquen la representación algebraica de funciones cuadráticas. Por ejemplo: "Traza la gráfica de la función

$$y = x^2 + 2x - 15".$$

a) ¿En qué puntos corta la gráfica de esta función al eje X?

b) ¿Cómo identificas las soluciones de la ecuación asociada a esa función en la gráfica correspondiente?

¿Cómo extender?

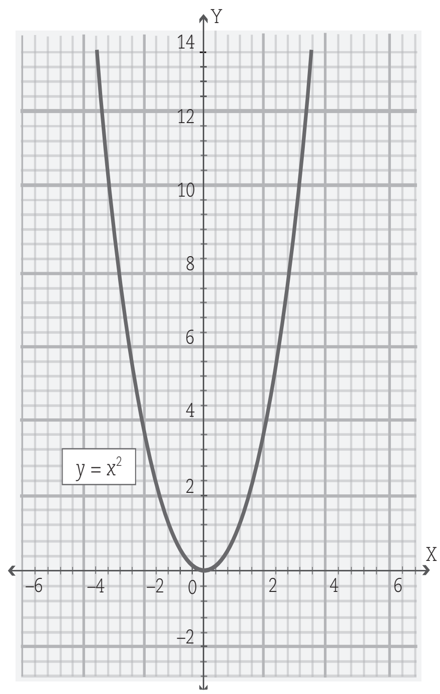
Si observa que los alumnos resuelven con facilidad algún problema, pídales que ellos inventen uno nuevo para que todo el grupo lo resuelva.

Si los alumnos no tienen dificultades para realizar la actividad 2 de la sesión 3, que consiste en hacer la gráfica de $y = x^2 - 4$ en el plano cartesiano en el que ya está dibujada la gráfica de $y = x^2$, pida entonces que elaboren las gráficas de las funciones $y = x^2 + 4$; $y = x^2 - 2$ y $y = x^2 + 2$, para que describan lo que ocurre tanto en las gráficas de las funciones como en los puntos donde cortan al eje X en cada caso.

Análisis gráfico de $y = x^2$ y $y = x^2 + c$

1. Trabajen en equipo. Contesten las preguntas que se les plantean. La parábola que se muestra es la representación gráfica de la función $y = x^2$.

$y = x^2$



Secuencia 15 Polígonos semejantes 2

(LT, Vol. II, págs. 60-69)

Tiempo de realización	5 sesiones
Eje temático	Forma, espacio y medida
Tema	Figuras y cuerpos geométricos
Aprendizaje esperado	Construye polígonos semejantes. Determina y usa criterios de semejanza de triángulos.
Intención didáctica	Que los alumnos analicen y comparen los triángulos para construir los criterios de semejanza.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisuales** • *Lados y ángulos correspondientes* • *Criterios de semejanza* **Informático** • *Criterios de semejanza*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recursos audiovisuales** • *Acerca de los criterios de semejanza* • *Aspectos didácticos de la enseñanza de los polígonos semejantes*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Construyan triángulos semejantes dada una razón de semejanza. Además, identifiquen los lados y ángulos correspondientes para determinar la razón de semejanza entre dos o más triángulos.
- Sesión 2. Analicen las condiciones que son necesarias para establecer que dos triángulos son semejantes por el criterio ángulo, ángulo (AA).
- Sesión 3. Analicen y comparen triángulos para determinar el criterio de semejanza lado, lado, lado (LLL).
- Sesión 4. Identifiquen las características que tienen en común los triángulos para determinar su semejanza por el criterio lado, ángulo, lado (LAL).
- Sesión 5. Resuelvan problemas que implican la aplicación de alguno de los criterios de semejanza de triángulos y la noción de razón de semejanza.

Acerca de...

La semejanza de triángulos permite usar conocimientos estudiados en grados anteriores acerca de la proporcionalidad y el concepto de constante de proporcionalidad que les ayudará a comprender la razón de semejanza, así como a valorar la precisión y destreza al medir y trazar figuras geométricas. También favorece la formulación de conjeturas y argumentos, así como el uso de procedimientos novedosos. Por otro lado, la determinación y el estudio de los criterios de semejanza brindarán a los alumnos herramientas poderosas para resolver problemas de medición y justificar sus resultados.

Esta secuencia se vincula directamente con la secuencia 16, "Razones trigonométricas 2", y con la secuencia 17, "Teorema de Pitágoras 2", y se apoya en lo aprendido en la secuencia 6, "Polígonos semejantes 1", del bloque 1. Otras herramientas que les dan más elementos para argumentar y justificar alguno de los criterios de semejanza son los criterios de existencia y unicidad en la construcción de triángulos, y que la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo siempre es 180°.

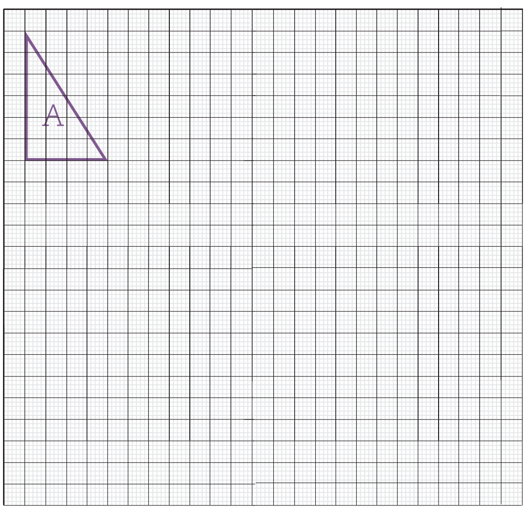
Sobre las ideas de los alumnos

Entre las ideas y los problemas que los alumnos tienen con el estudio de la semejanza es que no la identifican cuando la medida de los lados de una figura no es múltiplo de la otra, o bien, porque en lugar de usar una relación de tipo multiplicativo se utiliza una de tipo aditivo.

Otra dificultad radica en formular y comunicar argumentos basados en los conocimientos matemáticos que ya tienen. Algunos alumnos utilizan como justificación decir que dos triángulos son semejantes porque así lo parecen. En caso de identificar esta situación u otra similar, debe apoyarlos para que apliquen la definición de lo que estudiaron acerca de dos polígonos semejantes —lo son cuando sus lados correspondientes son proporcionales y sus ángulos correspondientes son iguales—, y aprovechar para vincularlo a lo que saben de proporcionalidad.

¿Qué material se necesita?

Para apoyar a los alumnos en la comprensión de algunos problemas en las actividades de esta secuencia, se pueden usar pliegos de papel bond cuadriculado. También es necesario contar con un juego de geometría y tijeras. Prevea varios juegos de tangram para hacer algunas actividades que se sugieren en la sección "Cómo extender".



¿Cómo guío el proceso?

Lea y comente con los alumnos la sección "Para empezar". Ponga atención a las nociones que tienen de la semejanza de polígonos y la razón de semejanza (o escala). Analicen la imagen para identificar primero los triángulos que la conforman, luego exploren y conjeturen cuáles son semejantes (o congruentes), y al final justifiquen por qué lo afirman. Esto le permitirá detectar nociones que los alumnos no tengan claras sobre la semejanza de polígonos, las propiedades de los triángulos o la formalidad con que los alumnos justifican sus conjeturas. No olvide volver a esta imagen al finalizar la secuencia, para que los alumnos contrasten lo que sabían con lo que lograron aprender.

En el desarrollo de la secuencia se proponen actividades para que los alumnos tracen triángulos y exploren y comparen sus elementos, características y propiedades, ya sea como consecuencia de la información que se proporciona o porque ellos encuentren nuevos elementos, características y propiedades que tengan en común los triángulos semejantes, a fin de determinar y usar los tres criterios de semejanza. Además, deben saber usar la razón de semejanza para construir o comparar los triángulos. Considere que la razón de semejanza será el elemento principal para verificar si dos triángulos son semejantes o no, mientras no se establezcan los criterios de semejanza.

En la actividad 1 de la sesión 1, observe si los alumnos usan como unidad de medida uno de los cuadritos de la retícula y si también lo usan para trazar las figuras. Es importante que quede clara la noción de razón de semejanza. Si lo considera necesario, después de que las parejas discutan y hagan sus primeros intentos, proponga una discusión plenaria o con los equipos que tengan problemas para comprender que la razón de semejanza 3 a 1 con respecto a otro es equivalente a decir que los lados de la segunda figura miden el triple que los de la primera; o bien, que está en escala 3 a 1. Asimismo, discutan qué significa que la razón de semejanza sea $\frac{1}{2}$ o la mitad. Puede responder algunas preguntas de la actividad 2 junto con el grupo y luego pedir que regresen al trabajo en parejas.

Triángulo	Azul	Rojo	Verde
Azul	$\frac{2.5}{2.5}=\frac{6}{6}=\frac{4}{4}=1$	$\frac{2.5}{3.75}=\frac{6}{9}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$	$\frac{2.5}{5}=\frac{6}{12}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$
Rojo	$\frac{3.75}{2.5}=\frac{9}{6}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$	$\frac{3.75}{3.75}=\frac{9}{9}=\frac{6}{6}=1$	$\frac{3.75}{5}=\frac{9}{12}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$
Verde	$\frac{5}{2.5}=\frac{12}{6}=\frac{8}{4}=2$	$\frac{5}{3.75}=\frac{12}{9}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$	$\frac{5}{5}=\frac{12}{12}=\frac{8}{8}=1$

En la actividad 3 los alumnos no tienen que medir lados ni ángulos; se trata de comparar los triángulos y establecer la relación de correspondencia entre los lados y ángulos. Las tablas se pueden, y deben, llenar con la información que tienen los triángulos, pues todas las medidas de los lados están indicadas en la imagen. Para el caso de los ángulos, los datos necesarios aparecen en el inciso b). Aquí sólo usarán las razones de semejanza e identificarán las parejas de lados y ángulos correspondientes. Para el inciso c) propicie una lluvia de ideas acerca de la interpretación de los valores de las razones obtenidas, así como de por qué algunas son recíprocas o inversas y por qué otras son iguales a 1; para esto es necesario expresar las razones en su mínima expresión, como se muestra en la tabla adjunta.

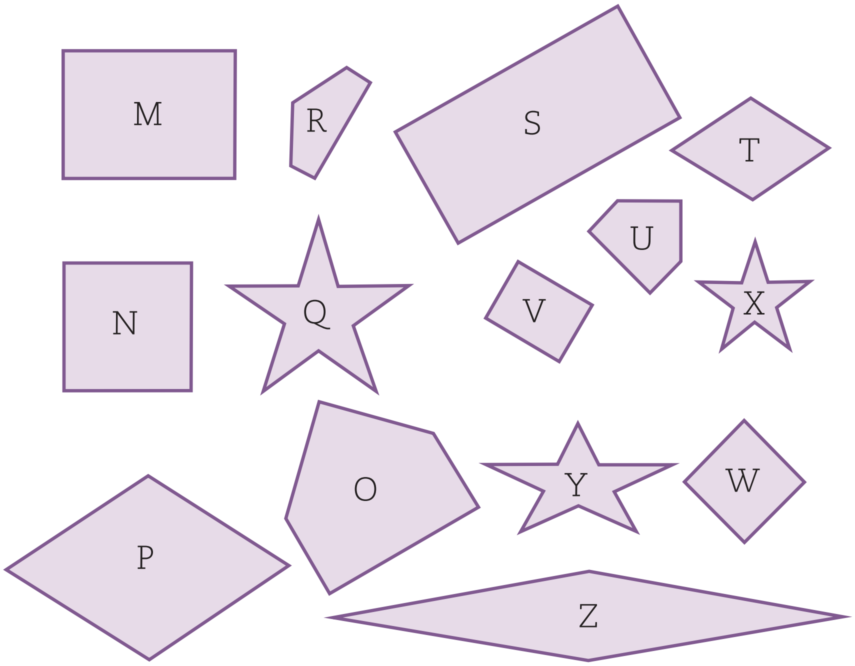
Para obtener el criterio de semejanza AA en las actividades 1, 2 y 3 de la sesión 2, se pretende que, al trazar los triángulos, ya sean los rectángulos isósceles de la actividad 1 o los escalenos de la actividad 2 con las mismas medidas de los ángulos correspondientes y sin importar la medida de los lados homólogos correspondientes, se obtengan triángulos semejantes. Es importante considerar que debido a los trazos (grosor de la punta del compás o lápiz) y a la imprecisión de los instrumentos de medición, puede haber diferencias en las medidas obtenidas y que, al comparar, no se consigan valores exactamente iguales. Si lo considera conveniente, puede hacer una reflexión con los alumnos acerca de cómo se toman previsiones en otras situaciones (industria, tecnología, construcción), dados los posibles errores en las mediciones. A fin de obtener mayor información consulte: https://www.uaeh.edu.mx/scige/boletin/prepa3/n7/m4.html

Considere los márgenes de error cuando los alumnos den sus respuestas. Al final de la actividad 3 es necesario recapitular para que recuerden que fue suficiente que la medida de los ángulos fuese igual para trazar triángulos semejantes. Compare este resultado con lo que sabían de los polígonos (caso del rectángulo y el cuadrado).

La tabla de la actividad 3d) es también una oportunidad para comparar las razones de semejanza entre dos triángulos (la razón vista del primero respecto al segundo, y del segundo respecto al primero), con lo que verán también que las razones son inversas o recíprocas.

Si no surge como parte de la argumentación de los alumnos la propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo (180°), es conveniente que usted les ayude a recordarlo, ya sea al final de la sesión, o bien, en la actividad 5.

En la sesión 3 los alumnos deberán concluir que si dos triángulos tienen los lados correspondientes proporcionales, entonces los ángulos correspondientes son iguales. Recuerde a los alumnos que esto no sucedía con los polígonos de más de 3 lados, por ejemplo en la sesión 4 de la secuencia 6, con el caso del cuadrado y un rombo con ángulos no rectos.



La actividad 3 contiene una hipótesis acerca de sólo considerar la medida de dos de los lados para determinar si los triángulos son semejantes. Los alumnos tienen que responder si están o no de acuerdo con la afirmación. Es importante que les recuerde que no se trata sólo de aventurar una respuesta afirmativa o negativa, sino de pensar en los argumentos que respaldan la respuesta. Sería conveniente que antes de seguir con la actividad 4, les propusiera hacer un intercambio de ideas acerca de esa hipótesis. Además, en el desarrollo de la actividad 4 puede ver con sus alumnos la relevancia de los contraejemplos en las matemáticas para desechar ciertas conjeturas. Esto es, si se muestra un caso en que la afirmación no se cumple, entonces no es verdadera la conjetura y tampoco se puede generalizar. En la sesión 4 se analiza el tercer criterio de semejanza (LAL), donde el énfasis está en la necesidad de dar la medida del ángulo formado por dos lados para saber si se cumple o no la semejanza entre triángulos. Es probable que algún alumno desde la sesión 3 se haya percatado de esto; si así fue, es conveniente recuperarlo para validarlo con las actividades propuestas en esta sesión. El envío de mensajes de la actividad 3 es una buena oportunidad para identificar la información necesaria y relevante para reconocer la condición que permite obtener triángulos semejantes. En la actividad 4 se propone una puesta en común para formalizar el criterio lado, ángulo, lado (LAL). En esta sesión puede recordar los criterios de unicidad en la construcción de triángulos y asociarlo a este resultado. Si tienen sólo la pareja de lados, aunque sean proporcionales a los de otro triángulo, se pueden construir muchos triángulos con diferentes medidas de ángulos y, por lo tanto, no serán semejantes al original.

Las actividades de la sesión 5 permiten que los alumnos pongan en práctica lo aprendido y utilicen alguno de los criterios de semejanza para justificar sus afirmaciones o resultados.

Pautas para la evaluación formativa

Con la finalidad de verificar en qué medida se logra la intención didáctica de esta secuencia, observe si los alumnos:

- Distinguen claramente cuáles son los lados y ángulos correspondientes entre dos triángulos dados.
- Calculan la razón de semejanza entre los lados de dos triángulos semejantes.

- Comprenden y utilizan el criterio de semejanza AA y entienden por qué no es necesario recurrir al tercer ángulo para determinar que dos triángulos son semejantes.
- Comprenden y utilizan el criterio de semejanza LLL y entienden por qué es suficiente que se dé esta condición para determinar que dos triángulos son semejantes.
- Formalizan el criterio de semejanza LAL y son capaces de explicar por qué esta información es suficiente para señalar que dos triángulos son semejantes.

¿Cómo apoyar?

Si observa que en la actividad 3 de la sesión 1 los alumnos tienen dificultades para determinar los lados y ángulos correspondientes entre dos triángulos, pida que los calquen o copien y recorten para sobreponerlos y poder identificarlos. Esto puede sugerirlo también en la actividad 2 de la sesión 5.

También pida que entre los equipos o las parejas comparen sus triángulos y obtengan las razones de semejanza.

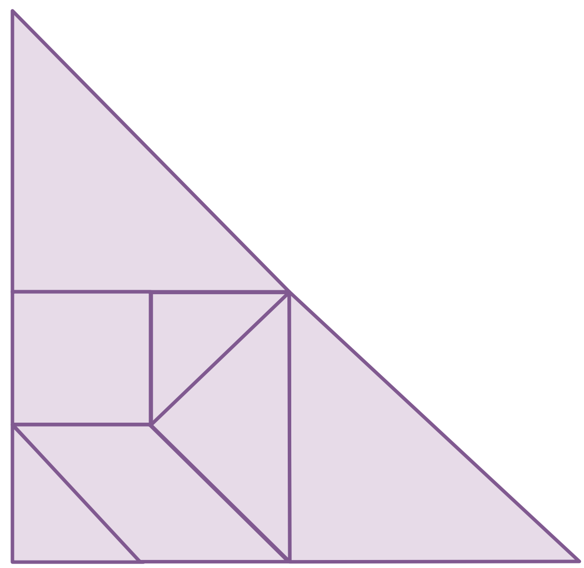
En el caso de errores en la medición, puede recordar a sus alumnos que, en primer grado, en la secuencia 36 de medidas de tendencia central, estudiaron el caso del peso de un producto enlatado del que se registraban las variaciones al pesarlo para establecer el margen de aceptación de un error. De este modo, sensibiliza a los alumnos acerca de que las matemáticas las construyen los seres humanos y no son algo estático y establecido rígidamente.

¿Cómo extender?

Pregunte a sus alumnos si se puede afirmar que dos triángulos son semejantes si tienen un lado y un ángulo correspondiente iguales. Solicíte que justifiquen sus respuestas y den argumentos o contraejemplos.

Una actividad que puede proponer implica usar el tangram compuesto de 7 figuras (5 triángulos, 1 cuadrado y 1 romboide). Si no cuenta con el recurso en la escuela, se pueden imprimir varios juegos desde la siguiente dirección electrónica: https://www.edufichas.com/wp-content/uploads/2019/03/tangram-imprimir-PDF.pdf

Se pueden llevar a cabo varias actividades relacionadas con la semejanza de polígonos y, en particular, con la de triángulos. Por ejemplo, pedir a los alumnos que justifiquen por qué los cinco triángulos son semejantes entre sí y que determinen en qué basan su afirmación. También puede solicitar que encuentren la razón de semejanza de uno de los triángulos de menor área respecto al resto. Después organice un concurso entre equipos. Puede hacerse por etapas: primero muestre uno de los triángulos del tangram y pida que encuentren un triángulo semejante entre las piezas restantes; luego pida que formen otro triángulo semejante con dos piezas, con tres y después con cuatro. Puede dar un punto a cada equipo que lo logre en un tiempo dado. Al final, pida que construyan un triángulo semejante con todas las piezas. Si tiene poco tiempo, reduzca el juego y establezca que gana el equipo que construya el triángulo semejante con el mayor número de piezas y justifique por qué es semejante al que se indicó. Pregunte: ”¿Será posible construir triángulos semejantes al original con cinco y seis piezas?”. Si nadie logra hacer el triángulo con siete piezas, muéstreles al final la solución.



Si cuenta con los recursos adecuados, lleve a cabo con los alumnos las actividades sugeridas en los sitios de internet relacionadas con estos contenidos.

Secuencia 16 Razones trigonométricas 2

(LT, Vol. II, págs. 70-77)

Tiempo de realización	5 sesiones
Eje temático	Forma, espacio y medida
Tema	Figuras y cuerpos geométricos
Aprendizaje esperado	Resuelve problemas utilizando las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.
Intención didáctica	Que los alumnos construyan los conceptos de seno, coseno y tangente de un ángulo y calculen el valor de estas razones a partir de las medidas de los lados de triángulos rectángulos.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	Audiovisual • *A veces Pitágoras no es suficiente* Informático • *Cálculo de razones trigonométricas a partir de triángulos rectángulos*
Materiales de apoyo para el maestro	Recurso audiovisual • *Aspectos didácticos de la enseñanza de la trigonometría*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Analicen los valores de las razones que se dan entre los lados de un triángulo rectángulo y los comparen con los valores correspondientes de otros triángulos rectángulos semejantes.
- Sesión 2. Identifiquen los elementos que conforman un triángulo rectángulo para establecer las razones entre sus lados, comparen estos cocientes con los de otros triángulos semejantes e identifiquen los valores constantes.
- Sesión 3. Establezcan y calculen las razones seno, coseno y tangente de un ángulo agudo a partir de las medidas de los lados de un triángulo rectángulo.
- Sesión 4. Analicen que el valor de las razones seno, coseno y tangente depende de las medidas del ángulo al que se refieren y no de la medida de los lados que lo forman.
- Sesión 5. Calculen el valor de las razones seno, coseno y tangente de algunos ángulos e inicien la resolución de problemas que implican el uso de razones trigonométricas.

Acerca de...

Si bien los alumnos iniciaron el estudio de la trigonometría en la secuencia 7, “Razones trigonométricas 1”, del bloque 1, es importante recordar que en aquella secuencia conocieron situaciones que se modelan con un triángulo rectángulo y que los ángulos agudos representaban la inclinación de una escalera o la elevación de un tanque y las resolvieron de manera informal, sin establecer formalmente las razones trigonométricas: seno, coseno y tangente.

En esta secuencia los alumnos formalizarán los nombres y las definiciones de esas razones. Para conseguirlo, se proponen actividades en las que exploran algunas nociones importantes, como los valores constantes de algunos cocientes debido a la relación de semejanza que hay entre las figuras, aunque los valores de las medidas de los lados que forman los ángulos o triángulos involucrados cambien. Para que obtengan esta noción, en la sesión 1 se inicia el estudio con un contexto real basado en el ángulo de inclinación que debe tener una escalera al recargarse en una pared.

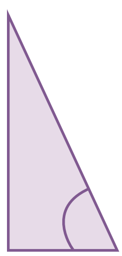
A partir de la sesión 2 se hace la abstracción de esto para trabajar en contextos puramente matemáticos (triángulos rectángulos). Este tránsito entre lo concreto y lo abstracto se realizar gracias a los conocimientos adquiridos en las secuencias 6 y 15 sobre polígonos semejantes, donde determinaron la razón de semejanza entre triángulos.

La noción de que el valor de las razones trigonométricas depende del valor del ángulo y no de las medidas de los lados del triángulo donde se ubica es muy importante para establecer generalizaciones. Por ejemplo, el valor del coseno de 45° siempre será 0.7071, aproximadamente, sin importar la longitud de los lados que lo forman.

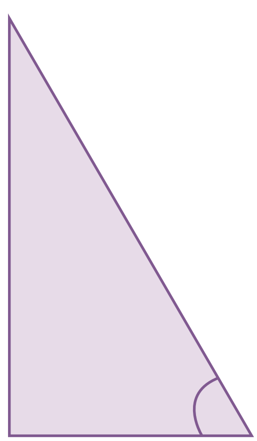
En las sesiones 4 y 5 se estudia esto con el fin de que lo comprendan y aprendan.

Sobre las ideas de los alumnos

Como ya se dijo, es común que los alumnos consideren que los valores de las tres razones trigonométricas que aquí se estudian (seno, coseno y tangente) dependen de las medidas de los lados del triángulo, y que en un triángulo semejante a otro, pero con lados de longitudes mayores, encontrarán valores mayores para las razones trigonométricas; por ejemplo, pueden creer que el valor del seno del ángulo marcado en el triángulo 1 es menor que el del seno del ángulo marcado en el triángulo 2.



Triángulo 1



Triángulo 2

Es importante que los alumnos desechen esta idea. Para lograrlo ayudarán las actividades que realicen en esta secuencia y el concepto de semejanza de triángulos.

¿Cómo guío el proceso?

La sesión 1 vincula la presente secuencia con lo aprendido en la 7, "Razones trigonométricas 1". Se trata de considerar un contexto real y modelarlo con un objeto geométrico: un triángulo rectángulo.

Para la actividad 1 de la sesión 1, los alumnos tendrán que argumentar si los triángulos son semejantes. Se espera que usen argumentos geométricos. Si un alumno menciona que son semejantes "porque se ve", es importante que lo invite a dar argumentos basados en propiedades geométricas y, de ser necesario, que consulte los criterios de semejanza que estudiaron en la secuencia 15. En este caso, un argumento válido es: "Los triángulos son semejantes porque tienen dos lados correspondientes proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos es igual"; otro argumento geométrico es: "Al ser triángulos rectángulos con un ángulo agudo igual, se deduce que el otro ángulo mide lo mismo en ambos triángulos y, por lo tanto, son semejantes". Para encontrar los valores de las longitudes que no se conocen, los alumnos deben calcular la razón de semejanza que debiera existir entre el triángulo A y los demás triángulos, para lo cual ayuda referirse al contexto que están modelando esos triángulos.

Por ejemplo, para encontrar la medida de la altura que alcanza la escalera D en la pared al quedar las zancas a una distancia de 1.96 m, se plantea la razón de semejanza que hay con la correspondiente distancia a la que se encuentran la escalera A de la pared, 1.12 m, y se obtiene:

$$\frac{1.96}{1.12} = \frac{x}{1.66}$$

$$1.75 = \frac{x}{1.66}$$

$$x = 1.75 \times 1.66 = 2.905 \text{ m}$$

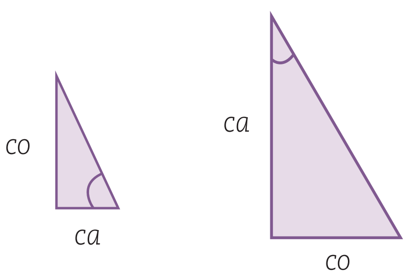
Una vez calculada la razón de semejanza que hay entre los triángulos A y D (1.75), es posible obtener la medida de la longitud de la escalera D, 3.5 m (porque $\frac{1.96}{1.12} = \frac{x}{2}$, de donde $x = 1.75 \times 2 = 3.5$ m).

Y de manera similar se obtienen las medidas de las otras longitudes.

La parte medular de la sesión se encuentra en los cocientes que los alumnos anotarán en la tabla. Calcularán el seno, coseno y tangente del ángulo de 56°, aunque aún no se introducen sus nombres. En la puesta en común enfatice que los cocientes que calcularon son constantes porque siempre se tienen los mismos valores, a pesar de que se calculan en triángulos con diferentes medidas. Esta idea se reforzará continuamente y se formalizará en la sesión 4. Vea la siguiente tabla donde se aprecia lo señalado.

	Situación			
	A	B	C	D
Longitud de la escalera (en m)	2	2.5	3	3.5
Distancia de la escalera a la pared (en m)	1.12	1.4	1.68	1.96
Altura que alcanza la escalera en la pared (en m)	1.66	2.075	2.49	2.905
Ángulo que la escalera forma con el piso	56°	56°	56°	56°
$C_1 = \frac{\text{altura que alcanza en la pared}}{\text{longitud de la escalera}}$	$\frac{1.66}{2} = 0.83$	$\frac{2.075}{2.5} = 0.83$	$\frac{2.49}{3} = 0.83$	$\frac{2.905}{3.5} = 0.83$
$C_2 = \frac{\text{distancia de la escalera a la pared}}{\text{longitud de la escalera}}$	$\frac{1.12}{2} = 0.56$	$\frac{1.4}{2.5} = 0.56$	$\frac{1.68}{3} = 0.56$	$\frac{1.96}{3.5} = 0.56$
$C_3 = \frac{\text{altura que alcanza en la pared}}{\text{distancia de la escalera a la pared}}$	$\frac{1.66}{1.12} = 1.4821$	$\frac{2.075}{1.4} = 1.4821$	$\frac{2.49}{1.68} = 1.4821$	$\frac{2.905}{1.96} = 1.4821$

En la secuencia 8, "Teorema de Pitágoras 1", los alumnos aprendieron que los lados que forman el ángulo recto en un triángulo rectángulo reciben el nombre de catetos; en esta sesión aprenderán a identificarlos como el cateto adyacente y el cateto opuesto a un ángulo no recto del triángulo rectángulo.



Permita que sean los alumnos quienes construyan la definición a partir de observar y analizar los catetos en relación con los ángulos marcados, de donde se espera que observen que el cateto adyacente a un ángulo es el que, junto con la hipotenusa, forma parte del ángulo agudo, mientras que el cateto opuesto es aquel que no forma parte del ángulo. Saber identificar el cateto opuesto y el adyacente a un ángulo es esencial para el trabajo con razones trigonométricas.

En la actividad 4 se pide a los alumnos completar la tabla, parte medular de la sesión 2, ya que se usan las definiciones de las razones trigonométricas:

$$\frac{\textit{cateto opuesto}}{\textit{hipotenusa}}\ ;\ \frac{\textit{cateto adyacente}}{\textit{hipotenusa}}\ ;\ \frac{\textit{cateto opuesto}}{\textit{cateto adyacente}}$$

No es necesario que mencione cómo se llaman esos cocientes, esto se hará en la siguiente sesión. La idea es que los calculen a partir de tomar las medidas necesarias. Es muy probable que, cuando haga la puesta en común, algunos de estos cocientes no sean exactamente iguales. Puede deberse a la imprecisión en las medidas; comente con ellos la dificultad de tomar medidas exactas, pues es un tema de gran valor formativo. Independientemente de que las diferencias sean significativas o no, invítelos a que analicen si se debieron a errores al hacer los cálculos o al elegir los valores de los catetos opuestos o adyacentes. En la siguiente tabla se presentan los resultados que pudieran obtener los alumnos.

	co	ca	h	$\frac{co}{h}$	$\frac{ca}{h}$	$\frac{co}{ca}$
A	3	4	5	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$
B	1.5	2	2.5	$\frac{1.5}{2.5}$	$\frac{2}{2.5}$	$\frac{1.5}{2}$
C	2.25	3	4	$\frac{2.25}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2.25}{3}$
D	0.8	1	1.28	$\frac{0.8}{1.28}$	$\frac{1}{1.28}$	$\frac{0.8}{1}$
E	3.75	5	6.25	$\frac{3.75}{6.25}$	$\frac{5}{6.25}$	$\frac{3.75}{5}$

Puesto que en la secuencia "Razones trigonométricas 1" y en las sesiones 1 y 2 de la presente secuencia se han introducido las nociones sobre razones trigonométricas, se justifica que la sesión 3 se inicie con la definición formal de las razones trigonométricas: seno, coseno y tangente de un ángulo.

Los alumnos se han acercado al concepto y ahora se formaliza la definición, esto es, el nombre que reciben los cocientes que han obtenido y la manera en que se simbolizan.

Es probable que en la actividad 3 los alumnos piensen que la hipotenusa mide 5 cm dado que

$$\textit{seno}\ M = \frac{\textit{cateto opuesto}}{\textit{hipotenusa}} \text{ y el } \textit{sen}\ M = \frac{3}{5}$$

Es importante que les haga notar que el segmento NP mide 6 cm, y que es el cateto opuesto del ángulo M. Se espera, entonces, que reconozcan que la hipotenusa tiene que medir 10 cm y que el $\textit{sen}\ M = \frac{6}{10}$, es equivalente a $\textit{sen}\ M = \frac{3}{5}$, una vez que se reduce la fracción. Si lo considera conveniente, pregunte cómo calcularían la medida del segmento MP.

En la sesión 4, los alumnos continúan usando las razones trigonométricas y reafirman varias ideas importantes. Una de ellas es que, cuando se hacen mediciones, pueden surgir diferencias debidas a la imprecisión de los instrumentos (como se comentó en la secuencia 15); la otra es que el valor de las razones depende de la medida del ángulo y no del tamaño del triángulo al que pertenece el ángulo. Permita que sean los alumnos quienes midan y hagan los cálculos necesarios, incluso si cometen errores al medir o al calcular, ya que al hacerlo obtienen un mayor valor formativo que si se les dan directamente las medidas. En la actividad 3, invítelos a que argumenten usando hechos geométricos, por ejemplo: "Todos los triángulos rectángulos que tienen un ángulo agudo correspondiente igual son semejantes, y al ser semejantes, tienen sus lados proporcionales, por lo que los valores de las razones $\frac{co}{h}$, $\frac{ca}{h}$, $\frac{co}{ca}$ son los mismos para cualquiera de esos triángulos".

Con las actividades realizadas en la secuencia, los alumnos están preparados para construir tablas de valores de las razones seno, coseno y tangente de un ángulo. Esto lo harán en la sesión 5 para los ángulos de 10°, 20°, 30°, 45° y 50°. Es importante que elaboren esta tabla porque les permitirá comprender de dónde surgen los valores de las razones para los diferentes ángulos cuando consultan una tabla de razones trigonométricas o cuando usan la calculadora para indagar algún valor en particular.

La actividad 2 corresponde a la resolución de una situación que implica determinar la medida del cateto opuesto en un triángulo rectángulo; es importante que les proporcione tiempo suficiente para que discutan y averigüen cómo calcular el cateto opuesto al ángulo de 70° y la hipotenusa. Se espera que los alumnos noten que para calcular uno de los valores requieren de alguna razón trigonométrica, ya que para usar el teorema de Pitágoras necesitan las medidas de dos lados y, en este caso, sólo tienen la medida de un lado y un ángulo. No obstante, una vez que hayan calculado ya sea el cateto opuesto o la hipotenusa, tendrán oportunidad de decidir si usan otra razón trigonométrica o el teorema de Pitágoras. Si en la puesta en común sólo surge uno de los dos procedimientos, usted puede motivarlos preguntándoles si habrá otra manera de hacerlo.

Pautas para la evaluación formativa

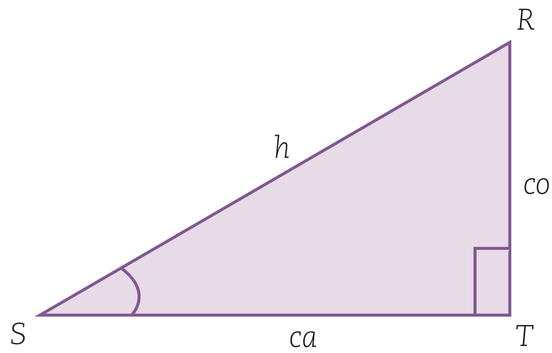
Observe si los alumnos:

- Identifican correctamente la hipotenusa, el cateto opuesto y el cateto adyacente al ángulo agudo indicados en un triángulo rectángulo.
- Calculan correctamente los valores de los cocientes: $\frac{co}{h}$, $\frac{ca}{h}$, $\frac{co}{ca}$.
- Reconocen estos cocientes con los nombres de seno, coseno y tangente de un ángulo, respectivamente.
- Reconocen que el valor de las razones trigonométricas depende de la medida del ángulo.
- Calculan el valor del seno, el coseno y la tangente de un ángulo agudo a partir de las medidas de los lados de un triángulo rectángulo.

¿Cómo apoyar?

Es muy probable que los alumnos tengan problemas para dar los argumentos geométricos necesarios en esta secuencia porque no tienen afianzados los conocimientos sobre semejanza de triángulos. De ser necesario, pida que revisen las secuencias donde estudiaron los criterios de semejanza de triángulos, en particular la secuencia 15.

Si observa que los alumnos tienen dificultades para contestar la actividad 2 de la sesión 3, sugiéreles que identifiquen los elementos de cada triángulo rectángulo, como lo hicieron en la actividad 3 de la sesión 2, y luego planteen las razones para obtener las medidas que se requieren. Por ejemplo:



$$sen\ S = \frac{co}{h} = \frac{RT}{RS} = \frac{\square}{\square}$$

$$cos\ S = \frac{ca}{h} = \frac{ST}{SR} = \frac{\square}{\square}$$

$$tan\ S = \frac{co}{ca} = \frac{RT}{ST} = \frac{\square}{\square}$$

¿Cómo extender?

Puede pedir que calculen las razones trigonométricas de ángulos diversos, por ejemplo, de 34°, 62°, 73°, 85°, etc., luego de que tracen, en su cuaderno, cualquier triángulo rectángulo que tenga el ángulo de la medida elegida. Indique que tomen las medidas de los catetos y la hipotenusa para que luego calculen el seno, el coseno y la tangente del ángulo. Después pueden comprobar usando en la calculadora las teclas de las razones trigonométricas, y si llegaron a un resultado diferente, analicen a qué se debió.

También puede solicitar que calculen los valores de las razones trigonométricas para los ángulos que no han sido indicados en las actividades de las sesiones, por ejemplo, el caso de los ángulos B, E y R de los triángulos de la actividad 2 de la sesión 3.

Secuencia 17 Teorema de Pitágoras 2

(LT, Vol. II, págs. 78-85)

Tiempo de realización	4 sesiones
Eje temático	Forma, espacio y medida
Tema	Medida
Aprendizaje esperado	Formula, justifica y usa el teorema de Pitágoras.
Intención didáctica	Que los alumnos apliquen el teorema de Pitágoras en la resolución de problemas con contextos reales o puramente matemáticos.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	Audiovisual • *Aplicaciones del teorema de Pitágoras* Informático • *Uso del teorema de Pitágoras en las figuras geométricas*
Materiales de apoyo para el maestro	Recursos audiovisuales • *Usos y aplicaciones del teorema de Pitágoras* • *Aspectos didácticos del teorema de Pitágoras*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Apliquen el teorema de Pitágoras en la resolución de problemas en un contexto real.
- Sesión 2. Usen el teorema de Pitágoras para calcular perímetros de figuras geométricas.
- Sesión 3. Utilicen el teorema de Pitágoras en el cálculo de áreas de figuras geométricas.
- Sesión 4. Resuelvan problemas que implican aplicar el teorema de Pitágoras.

Acerca de...

En la secuencia 8, "Teorema de Pitágoras 1", los alumnos exploraron y justificaron de diferentes maneras el teorema de Pitágoras. En esta secuencia tendrán la oportunidad de conocer diversas aplicaciones de este teorema, tanto en contextos reales como en situaciones puramente geométricas y de medición de perímetros y áreas de polígonos.

Para resolver estos problemas, necesitarán recordar que el perímetro es la medida del contorno de una figura y que se calcula sumando la medida de todos sus lados. También habrá que repasar que el área de una figura es la medida de su superficie y que, dependiendo de la figura, se requieren diversos datos: lados, altura, base, base mayor, base menor, diagonal mayor, diagonal menor o apotema. Deben recordar, además, que para obtener estos datos cuando no se conocen explícitamente, hay que recurrir a las propiedades geométricas de las figuras, en particular las de los polígonos que han estudiado tanto en este grado como en los grados anteriores, por ejemplo, el método de triángulación para obtener el área de un polígono o de una figura irregular.

En el desarrollo de las actividades de esta secuencia, los alumnos se enfrentarán constantemente al cálculo de las raíces cuadradas, en algunos casos exactas y en otras no. Las raíces que no son exactas son números irracionales, es decir, son números que tienen una parte decimal infinita y no periódica, por lo que en ocasiones conviene mantenerlos expresados como raíz, entre otras razones, porque da cuenta de dónde surge el valor, porque es más preciso y reduce el error de cálculo. Para realizar los cálculos necesarios, solicite que utilicen sólo dos decimales, lo cual les permitirá sumarlos (por ejemplo, para el cálculo de perímetros). No olvide siempre mencionar que en estos casos el resultado que encuentran es aproximado. Si quisieran que el resultado fuera exacto, tendrían que dejar las raíces indicadas. Por ejemplo, el valor de un perímetro podría ser $P = 7 + \sqrt{5}$.

Esto es válido aunque los alumnos no estén familiarizados con este tipo de expresiones, pero representan una oportunidad para que le den significado a este tipo de números y no se limiten a dar por correcto o incorrecto un resultado.

Sobre las ideas de los alumnos

No obstante que los alumnos estudian el perímetro y el área desde su educación primaria, es probable que aún en tercer grado de secundaria algunos no tengan claros estos conceptos ni las unidades de medida con las que se expresa cada una de estas magnitudes, ya que un error común es expresar el área en unidades lineales o el perímetro en unidades cuadradas, por lo que es importante que preste especial atención a estos detalles.

¿Cómo guío el proceso?

Se sugiere que antes de que indique a los alumnos que abran su libro, plantee el problema de la sección "Para empezar". Permita que por equipos discutan y lo resuelvan. Luego haga una puesta en común para comparar las respuestas y los procedimientos de los equipos.

La sugerencia de que plantee el problema antes de que los alumnos abran su libro obedece a que la secuencia lleva en el título "teorema de Pitágoras", lo que seguramente influirá en que utilicen dicho teorema. Al evitar ver el libro, los alumnos podrán reflexionar y explorar métodos para encontrar la solución.

Se espera que en la puesta en común algunos equipos propongan el teorema de Pitágoras para resolver el problema; si no lo hacen, usted puede preguntarles: "¿Será útil el teorema de Pitágoras? Si es así, ¿cómo podríamos usarlo?".

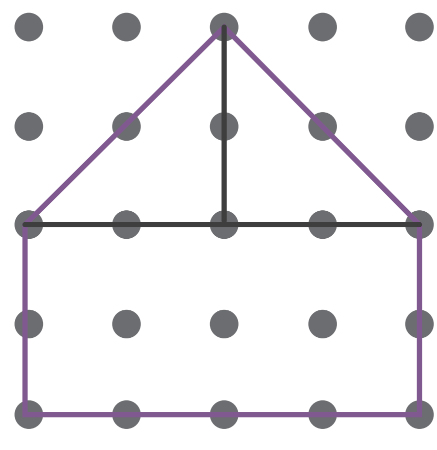
Ahora podrán comenzar la actividad 1 de la sesión 1, donde tendrán que reafirmar el cálculo de la hipotenusa, dadas las medidas de los catetos (como lo hicieron en el problema inicial), obteniendo como resultados:

- Sí, porque $c = \sqrt{(9 + 2.25)} = \sqrt{11.25} = 3.3541$;
- Sí, porque $c = \sqrt{5} = 2.2361$;
- Sí, porque $c = \sqrt{6.8} = 2.6076$;
- Sí, porque $c = \sqrt{13} = 3.6055$.

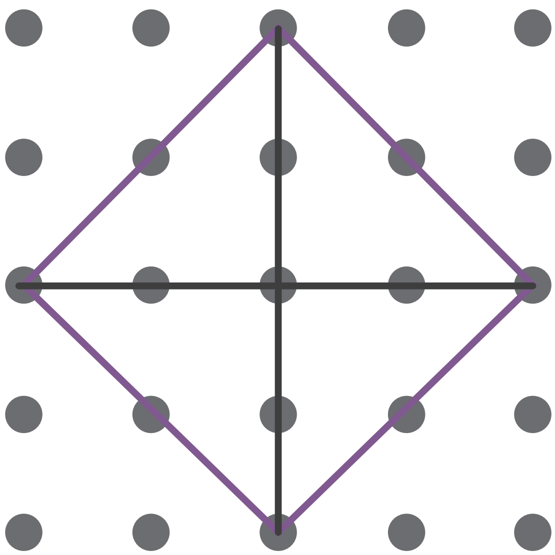
Aunque matemáticamente es posible pasar el espejo por la puerta en cada caso, será importante que comenten los riesgos que implica manipular materiales frágiles al pasarlos por un espacio tan justo.

La actividad 2 ofrece un reto diferente: calcular la medida de un cateto cuando se conocen las medidas del otro cateto y la hipotenusa. Por ejemplo, para el caso de la primera puerta se representa como $5^2 = 3.5^2 + b^2$, y queda como $b = \sqrt{25 - 12.25} = \sqrt{12.75} = 3.5707$.

Para la sesión 2, solicite a cada pareja que resuelva la actividad 1, y que si bien en el libro sólo deben poner el resultado, noten que se les pide que describan la manera en que calcularon cada perímetro. Por ejemplo, en el caso del pentágono, se puede descomponer en dos triángulos rectángulos iguales y un rectángulo.

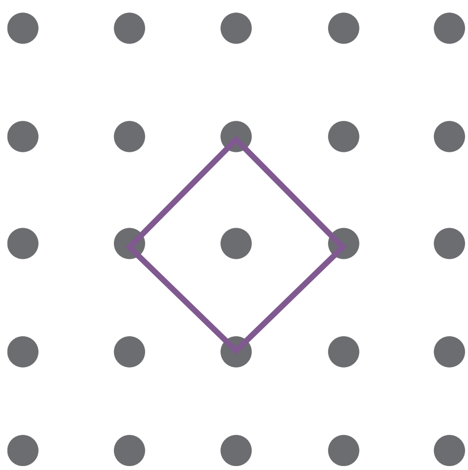


En el caso del cuadrado, a partir de sus diagonales (que son perpendiculares) se obtienen cuatro triángulos rectángulos iguales (que también son iguales a los del pentágono).



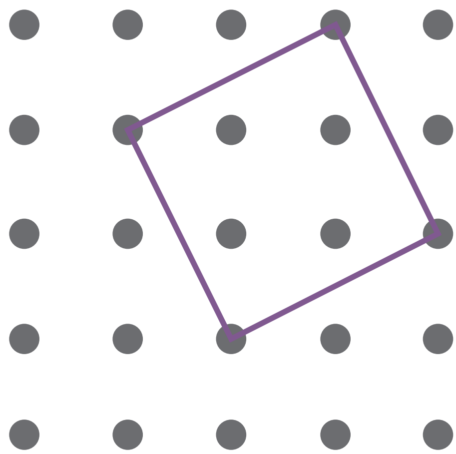
La medida de la hipotenusa de cada triángulo rectángulo es $\sqrt{2^2 + 2^2}$, de donde la hipotenusa es igual a $\sqrt{8} = 2\sqrt{2} = 2.82$, por lo que el perímetro del cuadrado es $4\sqrt{8}$.

En la actividad 2 seguramente tendrán dificultad con los cuadrados de áreas de dos unidades cuadradas y de cinco unidades cuadradas. Lo anterior se debe a que los alumnos tienen una imagen estereotipada de los cuadrados, y suelen construirlos con los lados paralelos a los bordes de la página (lados horizontales y verticales),



mientras que en este caso tendrán que construirlos con los lados inclinados.

Si nota que se les dificulta mucho resolver la actividad, puede apoyarlos sugiriendo: "¿Y si pones los lados inclinados?, ¿se podrá?".



Estos cuadrados miden por lado $\sqrt{2}$ y $\sqrt{5}$; redondeando a dos decimales sus valores son, respectivamente, 1.41 y 2.23. Para que los alumnos vean la diferencia entre ambas expresiones, puede pedir que calculen el área del cuadrado con la raíz indicada o con decimales y noten que, al usar estos últimos, se obtiene un número muy cercano a la medida del área. Por ejemplo, para el primer cuadrado se tiene:

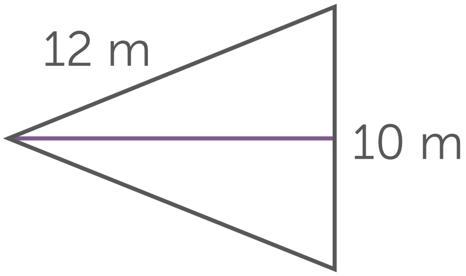
$$\textit{Área} = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$$
$$\textit{Área} = 1.41 \times 1.41 = 1.9881$$

En el caso de la actividad 3, se requiere dibujar una figura que tenga un perímetro mayor que $4 + 2\sqrt{17} + 2\sqrt{5} = 16.71$.

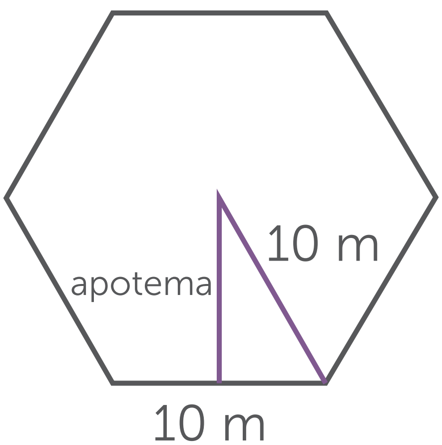
El trabajo en la sesión 3 es una buena oportunidad para repasar con los alumnos lo que es el área y cómo calcularla en diferentes figuras geométricas. Como ya se mencionó, no es necesario memorizar las fórmulas; por esta razón, aparecen indicadas en la tabla.

Al llegar al triángulo, se darán cuenta de que falta la altura; es probable que intuyan que, para calcularla, tendrán que usar el teorema de Pitágoras, así como para calcular la altura del trapecio isósceles y la del triángulo isósceles.

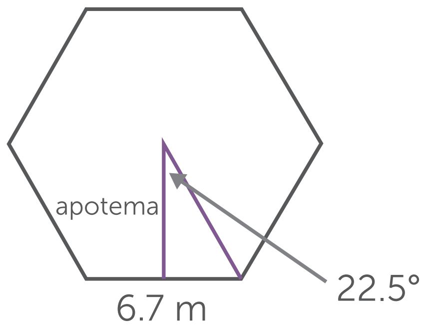
En el caso del triángulo isósceles conviene trazar la altura correspondiente al lado de 10 cm y usar el teorema de Pitágoras para calcular su medida.



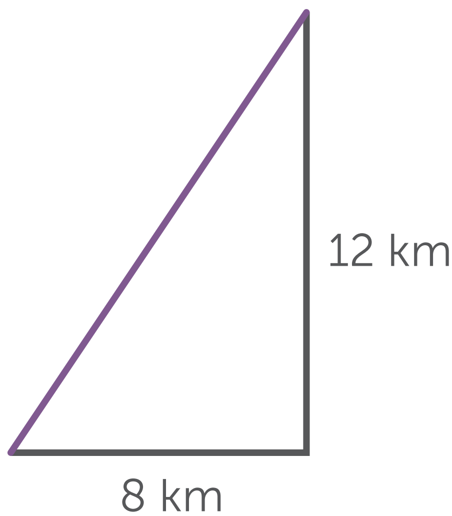
En el caso del hexágono y el octágono regular, los alumnos podrán realizar diferentes procedimientos. Por ejemplo, descomponerlos en otras figuras cuya área sepan calcular. Dado que se les proporciona la fórmula, es probable que quieran aplicarla, y entonces tendrán que calcular la medida de la apotema. En el caso del hexágono, puede calcularse usando el teorema de Pitágoras. Los alumnos tendrán que recordar que el hexágono puede dividirse en seis triángulos equiláteros.



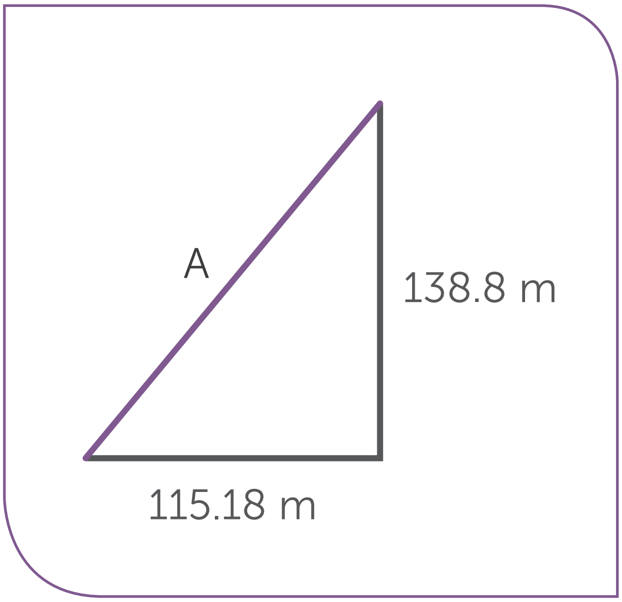
El caso del octágono es diferente, ya que, para calcular la medida de la apotema, deberán tener presente cómo obtener el ángulo central (360° entre 8), sacar la mitad de éste y, con ese dato, obtener la tangente del ángulo; pueden usar calculadora.



En la sesión 4 los alumnos resolverán problemas diversos. Sugierales que, cuando sea necesario, hagan un diagrama que represente el problema; esto les permitirá identificar el triángulo rectángulo que tienen que considerar para encontrar la medida que se pide. Por ejemplo, para el problema del inciso a), el diagrama será:



Los problemas c) y e) involucran figuras tridimensionales, por lo que también se recomienda que los alumnos representen la situación con figuras en dos dimensiones. Por ejemplo, para el problema c), el triángulo a considerar es el siguiente:



Pautas para la evaluación formativa

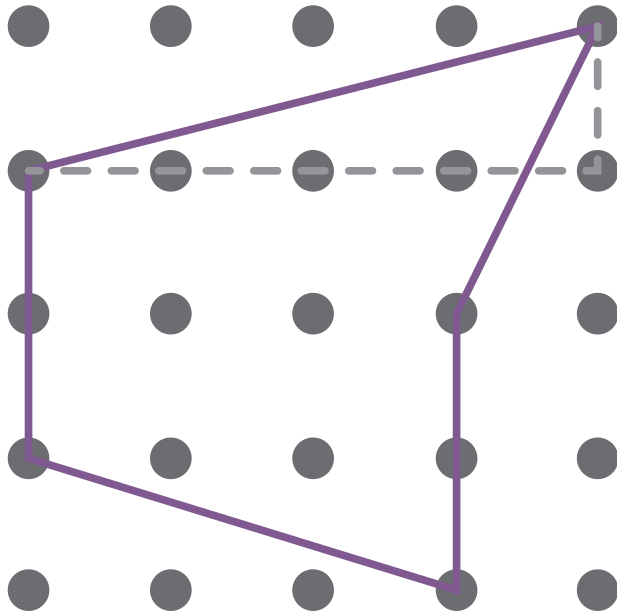
Observe si los alumnos:

- Aplican el teorema de Pitágoras para calcular un lado de un triángulo conociendo los otros dos.
- Usan el teorema de Pitágoras para calcular las medidas que requieren para obtener el perímetro y el área.
- Utilizan el teorema de Pitágoras para representar problemas que lo implican.

¿Cómo apoyar?

Cada vez que lo considere necesario, ayude a los alumnos a visualizar e identificar el triángulo rectángulo que está en juego en el problema. Por ejemplo, en los problemas de las puertas, el triángulo rectángulo está formado por dos lados de las puertas y la diagonal del rectángulo; a veces los alumnos no lo visualizan, por lo que es importante hacer énfasis en esto.

Para calcular la medida del lado en las figuras, también es importante apoyar a los alumnos a visualizar el o los triángulos rectángulos. Por ejemplo, en la siguiente figura hay que calcular la hipotenusa de un triángulo cuyos catetos miden 1 y 4 unidades.



También apóyelos a visualizar las relaciones y propiedades de los triángulos rectángulos para determinar las medidas. Por ejemplo, los dos primeros triángulos rectángulos de la sesión 2 son semejantes y su razón de semejanza es 4; al calcular la hipotenusa del primer triángulo se aplica el teorema de Pitágoras y se obtiene $\sqrt{2}$. Entonces, si se aplican los criterios de semejanza, se puede observar que la medida de la hipotenusa del triángulo 2 es $4\sqrt{2} = 5.6568$ y, si se determinan las medidas de las hipotenusas de los triángulos de manera independiente, se obtiene que la hipotenusa del triángulo 2 es $\sqrt{32} = 5.66$. Si lo considera necesario, en la discusión grupal destaque estas relaciones para que los alumnos visualicen de manera integral las actividades y no sólo se concentren en ciertos resultados particulares o aislados.

¿Cómo extender?

Puede complejizar algunos de los problemas. Por ejemplo, en la sesión 3 pida que construyan un triángulo cuya área sea de 10 unidades.

En el caso del problema de la pirámide de Keops, puede pedir que calculen la medida de las aristas de sus caras.

Secuencia 18 Tendencia central y dispersión de dos conjuntos de datos 1

(LT, Vol. II, págs. 86-93)

Tiempo de realización	4 sesiones
Eje temático	Análisis de datos
Tema	Estadística
Aprendizaje esperado	Compara la tendencia central (media, mediana, moda) y de dispersión (rango y desviación media) de dos conjuntos de datos.
Intención didáctica	Que los alumnos comparen los valores de las medidas de tendencia central y de dispersión de dos conjuntos de datos estadísticos para analizar situaciones que implican tomar decisiones de manera informada.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisual** • *Comparación de dos conjuntos de datos estadísticos* **Informático** • *Memorama: tus derechos (Disponible en http://somosaudiencias.ift.org.mx/ami_ninios_memorama.php)*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recursos audiovisuales** • *Aspectos didácticos del análisis de datos* • *Recursos para el estudio de la estadística*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Revisen la manera de calcular las medidas de tendencia central, rango y desviación media que ya conocen, así como su significado e interpretación en la situación que se les presenta.
- Sesión 2. Identifiquen aspectos relevantes de la representación gráfica de los datos para comparar dos conjuntos de datos; generen conjuntos de datos que satisfagan valores específicos de la mediana, la media aritmética y el rango.
- Sesión 3. Agrupen datos en intervalos y comparen los valores de las medidas de tendencia central, del rango y la desviación media.
- Sesión 4. Comparen dos conjuntos de datos estadísticos y los analicen e interpreten dentro de un proceso estadístico integrado.

Acerca de...

Con el propósito de apoyar a los alumnos en el logro del aprendizaje esperado, se han diseñado dos secuencias didácticas; la 18 es la primera y en ella se destaca la importancia de la lectura de las gráficas y la posibilidad de obtener información a partir de la representación de los datos, así como el uso de las medidas estadísticas que se han estudiado en los tres grados de Telesecundaria. Usted, al permitir que los alumnos respondan las preguntas con los conocimientos que se han construido hasta el momento, podrá valorar lo que han logrado, así como lo que es necesario reforzar o profundizar para que tengan un buen dominio de los conocimientos estadísticos y reflejen un mejor razonamiento estadístico.

En esta secuencia se propone empezar con una discusión sobre el uso y la importancia de la estadística y resaltar la necesidad de centrar su enseñanza en actividades que involucren al alumno en la resolución de problemas reales, proyectos estadísticos y análisis de datos reales. De ahí que la mayoría de las actividades estén vinculadas a la información que corresponde a algunos de los resultados publicados en una encuesta realizada a 24 691 jóvenes de entre 12 y 29 años de edad, en la cual la variable elegida para el estudio fue el número de horas al día que pasan frente a la pantalla de algún dispositivo electrónico, como teléfono celular, televisión, computadora, consola de videojuegos o tableta.

Con la realización de las actividades que integran las sesiones, se espera que los alumnos reconozcan los cuatro componentes principales de la estadística: plantear preguntas, recopilar datos, analizarlos e interpretarlos, todo como un proceso integrado. Se espera también que los alumnos efectúen procedimientos de cálculo de medidas y de construcción de representaciones; la esencia de esto se encuentra en que los valores y las representaciones estadísticas obtenidas puedan significar algo para los alumnos desde la situación que se les presenta como contexto. Éste es, en cierto modo, el fundamento del razonamiento estadístico: producir una mejor comprensión de los datos en un contexto particular.

Por otra parte, el lenguaje es generalmente el medio principal para comunicar nuestras ideas y, en particular, las ideas estadísticas; también es el medio por el cual los alumnos construyen su conocimiento y el que usan para procesar sus ideas. Sin embargo, el lenguaje en la estadística es uno en particular, y es importante que los alumnos lo desarrollen, tanto en su forma escrita como de manera oral, con el fin de expresar su avance en la comprensión del significado de los datos estadísticos. Así, pedir a los alumnos que describan un conjunto de datos relacionándolos con un contexto específico es un primer paso en el desarrollo del lenguaje estadístico. De ahí que se sugiera que no se limite a considerar si una respuesta es correcta o no, sólo por el valor o resultado que se da, sino que se promueva que los alumnos expongan sus argumentos para observar cuáles son algunos de los otros factores que consideran, como la lógica y la experiencia.

Otro aspecto fundamental es que los alumnos comprendan que las medidas de dispersión complementan las de posición central para caracterizar una distribución.

En esta secuencia, los alumnos deben aprender que los datos se pueden reorganizar y comparar con nuevos conjuntos de datos, como los que obtendrán al hacer su encuesta. Este tipo de actividades permite estudiar algunos de los elementos del razonamiento estadístico, como la *transnumeración*, que consiste en transformar la información usando conocimientos básicos de aritmética para facilitar la comprensión.

Sobre las ideas de los alumnos

Se espera que los alumnos, en lo referente a conocimientos y habilidades estadísticas, sean capaces de leer, interpretar, organizar, evaluar críticamente y apreciar información estadística relacionada con contextos sociales.

Tal vez muchos alumnos piensen que hacer una gráfica, calcular una media aritmética o predecir una tendencia en un conjunto de datos son actividades relativamente independientes que se

Pregunta	Gráfica grupo A	Gráfica grupo B
¿Se forma algún bloque de datos? ¿Dónde?		
¿Hay algún hueco o corte? ¿Dónde?		
¿Hay valores atípicos de los datos? ¿Cuáles?		

Glosario
Valor atípico es el valor de los datos que está más lejos de los demás por ser inusualmente mayor o menor que el resto. En inglés se dice *outlier*.

pueden llevar a cabo para un conjunto de datos en particular, pero es importante que haga hincapié en que todas estas actividades están completamente relacionadas entre sí, en especial en la estadística.

Se considera que la mayoría de los alumnos es capaz de abordar la tarea de comparar conjuntos de datos enfocándose en datos específicos. Una manera de hacerlo es comparar los datos más grandes en los dos conjuntos, y la otra es comparar los conjuntos de datos a partir de un dato especifico y contar el número de datos que son iguales o mayores que él en cada conjunto.

¿Cómo guío el proceso?

Se sugiere que en la sección "Para empezar" destaque la importancia de la estadística en diferentes aspectos y áreas del conocimiento. Puede tomar como base el informe de la "Encuesta de Tendencias Juveniles 2018" o algún otro estudio que se encuentre en el portal del INEGI.

En cuanto a la sección "Manos a la obra", la primera actividad implica que los alumnos realicen diferentes niveles de lectura del gráfico y completen las tareas que se les indica.

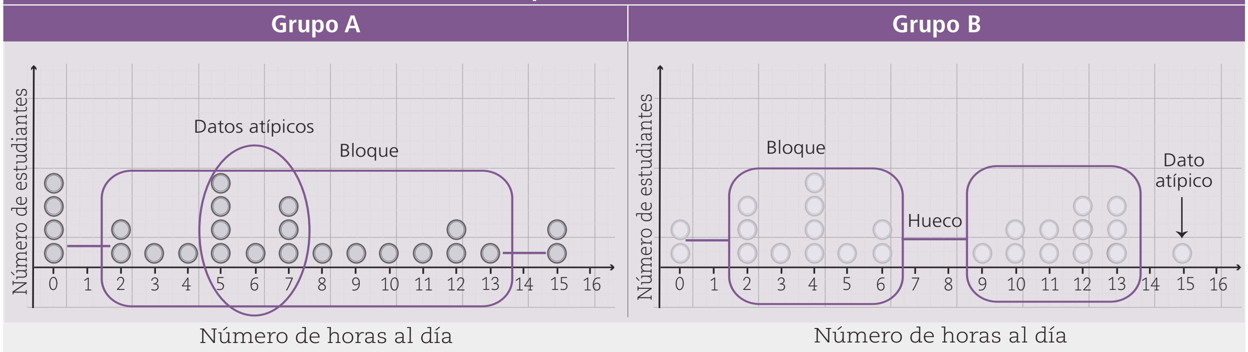
Algunos alumnos pueden tener dificultades al dar respuesta a la pregunta del inciso e) de la actividad 1 de la sesión 1: "¿Es posible conocer el promedio del número de horas al día que los jóvenes pasan al frente de la pantalla de algún dispositivo?". Principalmente, porque hay tres medidas que pueden utilizarse como promedio. Recuerde a los alumnos que, cuando se menciona *promedio* se refiere a la media aritmética, pero también se aplica a la mediana y a la moda por ser medidas de tendencia central, como lo estudiaron en primer grado. Si la respuesta es considerar como promedio la media aritmética, entonces será importante revisar de qué manera se podría obtener su valor. Por un lado, se conoce el número total de jóvenes que contestaron la pregunta de la encuesta y, con los diferentes porcentajes de respuesta que aparecen en la primera columna de barras apiladas, se puede determinar cuántos jóvenes contestaron de 1 a 3 horas al día, de 4 a 7, etc. (esto es, 29% de 24 691 más 34% de 24 691, etcétera). Luego sería necesario calcular la marca de clase (el punto medio de cada intervalo: el de 1 a 3 horas al día es 2; el de 4 a 7 es 5.5, etcétera). Una vez que se han reorganizado esos datos, se puede calcular el valor de la media aritmética.

Los procedimientos para calcular las medidas de tendencia central en datos agrupados no corresponden al programa de estudio de la educación secundaria; sin embargo, los alumnos tienen elementos para hacer esta reflexión a partir de los conceptos y procedimientos estadísticos que han estudiado, incluyendo también los de la elaboración de histogramas y polígonos de frecuencia. Además, hacer esta reflexión les permite desarrollar su razonamiento estadístico.

En el caso de la pregunta del inciso f), "¿Quiénes pasan más horas frente a una pantalla, las mujeres o los hombres?", la respuesta es "las mujeres", porque hay un mayor porcentaje que contestó más de 12 horas al día. Y, respecto a "¿En qué intervalo de edad se concentra la mayoría?", se refiere a 14% de las mujeres de 12 a 17 años. Finalmente, en cuanto a la dispersión de los datos, se puede considerar que es mínima la diferencia entre la variabilidad de los datos que corresponden a las mujeres de 12 a 17 y los de 18 a 29 años, incluso al comparar con los datos de los hombres jóvenes y revisar los porcentajes que se presentan para cada intervalo de edad y de horas al día. Al determinar cuál es el rango de la variable de estudio: el número de horas al día que pasan al frente de la pantalla de algún dispositivo, se tiene de 0 a más de 12 horas al día; es importante discutir con los alumnos cuál puede ser el número máximo de horas al día. Tal vez algunos digan que 24 horas, por ser la duración de un día, quizá otros señalen que 16 horas por considerar 8 para dormir. Justamente, de lo que se trata es de que expongan sus argumentos; pueden incluir algunos por su experiencia y otros por la lógica que tienen, lo que también tiene un papel importante en el desarrollo de su razonamiento estadístico.

En la actividad 2 los alumnos comparan dos conjuntos de datos con 25 elementos cada uno. En el inciso a) se pregunta cuál de dos grupos con igual número de alumnos pasa más tiempo al día frente a la pantalla de algún dispositivo electrónico. Posiblemente algunos comparen el número máximo de horas al día que pasan

Número de horas al día frente a la pantalla de algún dispositivo electrónico



frente a la pantalla de un dispositivo electrónico en cada grupo para contestar la pregunta. En este caso, coincide en ambos grupos que el máximo dato es 15 horas al día. Otros alumnos, además, pueden considerar que, en el grupo A, dos alumnos lo indicaron, y en el B, sólo uno, por lo que su respuesta al inciso a) será que los alumnos del grupo A pasan más tiempo al día frente a la pantalla de algún dispositivo.

Quizá para responder al inciso a) otros alumnos cuenten el número de alumnos de cada grupo que indicaron que pasan de 10 a 15 horas al día frente a una pantalla. Como se observa, en estos casos no hay necesidad de considerar a quienes indiquen que no pasan ninguna hora frente a una pantalla u otros datos menores a 10 horas al día. En un primer momento, esas respuestas son correctas y factibles; sin embargo, se pretende que en el transcurso del desarrollo de la actividad y de la secuencia, los alumnos hagan un análisis más profundo usando los valores de las medidas de tendencia central y de variabilidad (rango y desviación media).

Puede basarse en la tabla siguiente para revisar el trabajo de los alumnos.

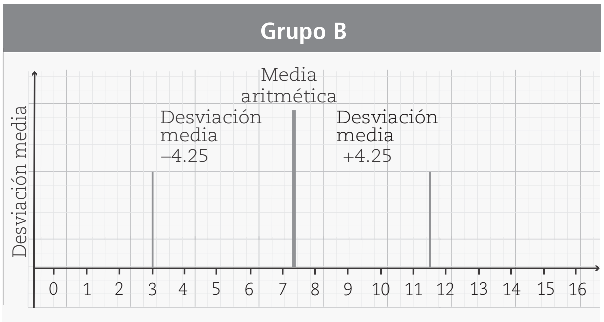
Medida	Grupo A	Grupo B
Media	6.52	7.32
Mediana	6	6
Moda	0 y 5	4
Rango	15	15
Desviación media	3.8208	4.2528

En la pregunta del inciso h) se espera que los alumnos afirmen que en el grupo B hay mayor variabilidad, basándose en el valor de la desviación media, 4.25. Es posible que algunos aún no lo comprendan o den otra respuesta.

En la actividad 3 se propone una discusión grupal. Pida a los alumnos que piensen en las diferencias que hay entre los tipos de preguntas que se hicieron. Se espera que reconozcan que algunas preguntas piden simplemente información del gráfico, mientras que otras requieren de interpretaciones de los datos que se muestran en él. Además, es un buen momento para contrastar las respuestas de los incisos a) y b) de la actividad 2 con las de los incisos e) a h), debido a que el valor del promedio del número de horas al día que los alumnos pasan usando la pantalla de un dispositivo cambia, dependiendo de cuál medida de tendencia central consideren utilizar como promedio.

En la actividad 4, cuando se les cuestiona si consideran que los alumnos de telesecundaria pasan demasiado tiempo frente a la pantalla de algún dispositivo, luego de comparar el número de horas de los alumnos del grupo A con el de los alumnos del grupo B, a menudo contestan que sí, utilizando como justificación el valor de la moda o la diferencia entre los datos máximos para ambos grupos o en el conteo de datos máximos o en el conteo a partir de un dato específico. Rara vez se basan en la diferencia entre los valores de las medidas de tendencia central y de dispersión que encontraron e identificaron.

Con el trabajo de análisis de las actividades 1, 2 y 3 de la sesión 2, se espera que la mayoría de los alumnos visualice mejor y comprenda el significado de los valores de las medidas, en especial de la variabilidad de los datos a partir del análisis gráfico de la desviación media. La siguiente imagen le ayudará a resolver sus dudas con las actividades 2 y 3:



Número de horas al día

Respecto a la actividad 4 hay diferentes respuestas, porque siempre que se cumpla que la suma de los ocho datos sea igual que 40, la media aritmética será 5. En el inciso a), dos ejemplos de conjuntos de 8 datos con valor de media aritmética de 5 horas al día pueden ser: 2, 4, 8, 3, 8, 5, 6, 4 y 0, 9, 6, 4, 6, 5, 3, 7.

En el caso del inciso b), tres conjuntos de 8 datos que cumplen los valores de media de 5 horas al día y mediana de 4 horas al día pueden ser: 2, 3, 4, 4, 4, 7, 8, 8; 0, 1, 2, 3, 5, 9, 10, 10 y 2, 2, 3, 4, 4, 8, 8, 9.

El tercer conjunto de los datos también cumple con las condiciones del inciso d), ya que el rango es 7 debido a que 9 − 2 = 7, lo que hace que también sea una opción de respuesta del inciso e), junto con los conjuntos 3, 4, 4, 4, 4, 4, 7, 10; 2, 2, 3, 3, 5, 7, 9, 9 y 2, 2, 2, 2, 6, 8, 9, 9.

Una vez más, es importante señalar que cuando revisen las respuestas de manera colectiva, analice los argumentos de los alumnos para promover su razonamiento estadístico. Por ejemplo, en el último conjunto, 2, 2, 2, 2, 6, 8, 9, 9, ninguno de los 8 datos es igual al valor de su media aritmética (5), ni de su mediana (al ser un conjunto de número par de elementos, la mediana es igual que el promedio de los dos datos en las posiciones centrales: (2 + 6) / 2 = 4).

Se requiere que en la discusión grupal de la actividad 5 se analicen detenidamente las características de los conjuntos de datos que encuentren para que comprendan el significado de esas medidas, además de comprender la variabilidad de los conjuntos de datos que cumplen con las condiciones indicadas.

En la sesión 3, los alumnos deben reorganizar los datos del grupo A y del grupo B, considerando los mismos intervalos que se encuentran en el gráfico de la "Encuesta de Tendencias Juveniles 2018", para hacer la comparación entre el total de ambos grupos y los resultados de dicha encuesta. Las respuestas de cada tabla son:

Intervalo de horas	Grupo A	Grupo B	Total (en ambos grupos)
De 1 a 3	3	4	7
De 4 a 7	9	7	16
De 8 a 12	6	8	14
Más de 12	3	4	7
Nada	4	2	6

Medidas	Grupo A	Grupo B	Total (en ambos grupos)
Media aritmética	6.52	7.32	6.92
Desviación media	3.8208	2528	4.0368
Mediana	6	6	6
Moda	0 y 5	4	0
Rango	15	15	15

Respecto al total, se observa que el dato con mayor frecuencia es 0 horas al día y la media aritmética es casi 7 horas al día, mientras que el dato central en los tres conjuntos es 6 horas al día. Si se comparan estos valores con la información que se presenta en el gráfico de la sesión 1, se observa que se mantiene el intervalo de 4 a 7 horas al día como el más típico, por lo que es posible que utilicen esta información para determinar su respuesta en el inciso b) de la actividad 2; de este modo, los alumnos están considerando los conceptos estadísticos y el conocimiento del contexto para sacar conclusiones.

Guíe la organización de las actividades 3 y 4 para que planteen las preguntas y definan a quién le pedirán contestar la encuesta.

En la sesión 4, los alumnos reunirán, organizarán y analizarán los datos que recopilaron para interpretar sus distribuciones y los valores de las medidas que encuentren en las actividades 1, 2 y 3, y los compararán con los de las sesiones anteriores.

Pida que la actividad 4 la resuelvan individualmente y elaboren las representaciones gráficas que consideren convenientes para visualizar los resultados y, si hay interés, elaborar un informe.

Los valores de las medidas de tendencia central y de dispersión resumen la distribución y variabilidad de un conjunto de datos. Particularmente, la media aritmética nos indica el valor central que representa la mayoría de los valores de los datos y la desviación media nos dice qué tan alejados o cercanos están los datos respecto al valor de la media aritmética. Si se consideran ambos valores, comprenderemos mejor, al comparar dos o más conjuntos, cuál tiene mayor variabilidad (menos datos alrededor de la media aritmética) o menor variabilidad (más datos alrededor de la media aritmética), lo cual se puede apreciar con el valor de la desviación media.

Gráfica | Temperaturas máximas mensuales de 1971 a 2000 en la ciudad A (°C)

Gráfica | Temperaturas máximas mensuales de 1971 a 2000 en la ciudad B (°C)

Pautas para la evaluación formativa

Con la finalidad de verificar en qué medida se va logrando la intención didáctica que aparece en la ficha descriptiva, es necesario hacer un registro para cerciorarse de que los alumnos realizan lo siguiente:

- Distinguen entre un tipo de representación gráfica estadística y otra.
- Reconocen el significado de las medidas de tendencia central, de rango y desviación media involucradas en cada situación.
- Representan gráficamente las situaciones que implican reorganizar los datos.
- Interpretan los valores de las medidas de tendencia central y de dispersión respecto al contexto o situación que se analiza.

¿Cómo apoyar?

Si lo considera conveniente, podría pedir que calculen la desviación media de los conjuntos de datos que encuentren en la actividad 4 de la sesión 2 para comprender de qué manera se distribuyen los datos.

¿Cómo extender?

Si lo considera necesario —y con el propósito de consolidar y ampliar lo estudiado durante la secuencia—, puede utilizar *software* libre como CoDAP para efectuar los cálculos y las gráficas. Es válido el uso de calculadoras para realizar los cálculos de las medidas de tendencia central y de desviación media, pues con eso se facilitará la interpretación integral de los datos de un conjunto.

Si lo considera conveniente, para que los alumnos reflexionen acerca de las ventajas y desventajas del uso de los celulares y dispositivos electrónicos, consulte los siguientes artículos: "Niños y tecnología: ventajas e inconvenientes del uso de dispositivos móviles", en https://www.mepiar.com/ninos-y-tecnologia-ventajas-e-inconvenientes-del-uso-de-dispositivos-moviles/ y "Consecuencias físicas de abusar del móvil", en https://www.muyinteresante.es/tecnologia/fotos/consecuencias-fisicas-de-absar-del-movil/dolor-de-cuello

Secuencia 19 Eventos mutuamente excluyentes 2

(LT, Vol. II, págs. 94-101)

Tiempo de realización	4 sesiones
Eje temático	Análisis de datos
Tema	Probabilidad
Aprendizaje esperado	Calcula la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes.
Intención didáctica	Calcular la probabilidad de dos eventos mutuamente excluyentes.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisual** • *Probabilidad de eventos mutuamente excluyentes* **Informático** • *Probabilidad de eventos mutuamente excluyentes*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recurso audiovisual** • *Aspectos didácticos de la enseñanza de la probabilidad*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Utilicen tablas de doble entrada para determinar los resultados favorables de eventos simples, compuestos y mutuamente excluyentes relacionados en una situación dada.
- Sesión 2. Aprendan a calcular la probabilidad de eventos simples, compuestos y mutuamente excluyentes a partir de la regla de la suma.
- Sesión 3. Determinen los resultados favorables de ciertos eventos, reconozcan cuáles son mutuamente excluyentes y calculen la probabilidad de los eventos de acuerdo con la fórmula que les corresponde.
- Sesión 4. Resuelvan problemas que corresponden a situaciones que implican el cálculo de la probabilidad de eventos que son mutuamente excluyentes y de eventos que no lo son.

Acerca de...

En esta secuencia los alumnos calculan la probabilidad de eventos mutuamente excluyentes y utilizan tablas de doble entrada y diagramas de árbol como recursos para organizar los resultados posibles de las situaciones aleatorias que se presentan. Se consideran situaciones relacionadas con la genética, la salud, las matemáticas y la población del mundo desde un punto de vista histórico y del análisis y la interpretación de resultados posibles y resultados favorables de eventos definidos previamente. Dichos resultados se expresan en forma de fracciones, decimales o porcentajes.

Específicamente, en esta secuencia se formaliza la manera de calcular la probabilidad de dos eventos, sean mutuamentes excluyentes o no.

Con el estudio de esta secuencia, los alumnos harán el conteo de los resultados favorables de un evento entre los casos posibles que corresponden a la situación aleatoria. Por lo tanto, requerirán hacer uso de sus habilidades de conteo, tanto para identificar si hace falta considerar algunos resultados posibles en el espacio muestral, como para determinar en qué eventos se está contando dos veces el mismo resultado favorable, es decir, si tienen resultados en común. De ahí que a los alumnos se les proponga el uso de recursos como el cuadro de Punett o el diagrama de árbol.

Sobre las ideas de los alumnos

En la secuencia 9, los alumnos identificaron los eventos mutuamente excluyentes a partir de un enfoque frecuencial, ya que llevaron a cabo el juego de azar propuesto y analizaron las frecuencias relativas obtenidas en otros ensayos, destacando la variabilidad de los resultados cada vez que se realizan los experimentos.

Además, los alumnos también aprendieron que dos eventos son mutuamemente excluyentes si los resultados favorables son distintos; ahora ese conocimiento se complementa indicando que dichos eventos no tienen resultados favorables en común. La intención de esta secuencia es reflexionar con los alumnos acerca de la vinculación de conceptos matemáticos con situaciones sociales para sensibilizarlos y motivarlos a estudiar otras situaciones que se proponen en las actividades de la secuencia, como en otros temas de las matemáticas.

¿Cómo guío el proceso?

En la sección "Para empezar" se trata una situación del área de la genética en la que se utiliza un recurso para organizar y presentar los resultados obtenidos: el cuadro de Punett, que es una tabla de doble entrada en la cual se identifican las combinaciones aleatorias de una descendencia. Esta situación brinda la posibilidad de ilustrar una manera en la que se ha desarrollado el conocimiento matemático, ya que no todos los recursos, procedimientos y conceptos surgen de la matemática misma.

La primera actividad de la sesión 1 corresponde a una situación relacionada con los resultados de una prueba de laboratorio respecto a infectarse con el estafilococo áureo y la edad de las personas participantes en la prueba. Los alumnos deben leer e interpretar la información presentada en el cuadro; ése es el propósito de las preguntas que se plantean en los incisos a) a d) que hacen explícita la relación del contexto con los datos.

Después, en la actividad 2, se les propone llevar a cabo una transnumeración de los datos del cuadro de la actividad 1 en un cuadro que contiene los cocientes que corresponden a las razones de los resultados de la prueba.

En seguida, calcularán la probabilidad de los eventos A, B y C y de algunas de sus combinaciones, lo cual corresponde a la fase de buscar nuevos significados una vez que se han transformado los datos. La siguiente tabla muestra los resultados a los que deben llegar los alumnos:

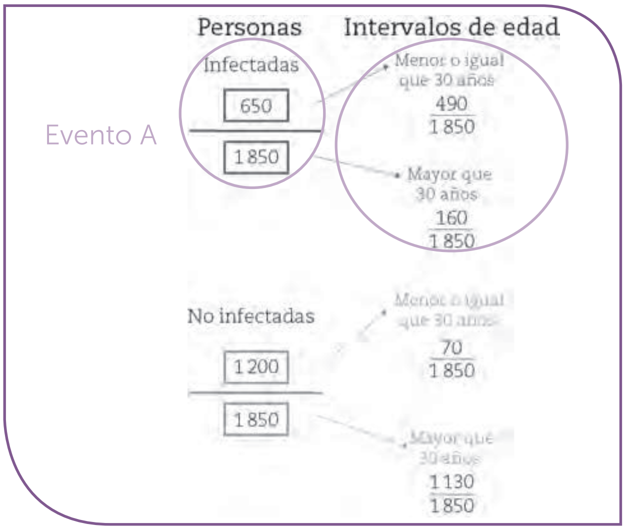
Intervalo de edad (años)	Infectados	No infectados	Total de resultados
Menor o igual que 30	$\frac{490}{1850} = \frac{49}{185}$	$\frac{70}{1850} = \frac{7}{185}$	$\frac{560}{1850} = \frac{56}{185}$
Mayor que 30	$\frac{160}{1850} = \frac{16}{185}$	$\frac{1130}{1850} = \frac{113}{185}$	$\frac{1290}{1850} = \frac{129}{185}$
Total	$\frac{650}{1850} = \frac{65}{185} = \frac{13}{37}$	$\frac{1200}{1850} = \frac{120}{185} = \frac{24}{37}$	$\frac{1850}{1850} = 1$

Identificar los eventos mutuamente excluyentes o no excluyentes, como se propone en la actividad 3, es parte de esta fase de buscar nuevos significados por medio de la transnumeración. De tal manera que en la actividad 4, en la discusión grupal, se recomienda señalar este trabajo de transformación. Es importante que guíe a los alumnos para que expliquen las características de los resultados favorables de los eventos mutuamente excluyentes con la intención de que en la actividad 5, al leer la información del recuadro, comprendan la formalización.

Para el caso de los eventos que no son mutuamente excluyentes, pídales que identifiquen si hay resultados que sean comunes como una manera de verificar su nivel de comprensión de la lectura y la revisión de los resultados que deberá hacerse a partir del contexto.

En la actividad 1 de la sesión 2, se pide que comparen la probabilidad del evento A o C y A o B con la suma de las probabilidades de dichos eventos simples, respectivamente, para decidir si son mutuamente excluyentes.

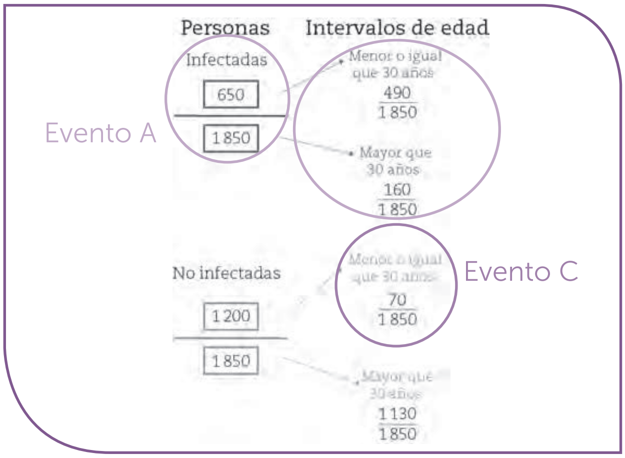
En la actividad 2 se propone una puesta en común en la que se deberá revisar que los alumnos identifiquen que al sumar las probabilidades de los eventos A y B se considera dos veces la probabilidad de que las personas estén enfermas y sean mayores que 30 años, $\frac{160}{1850}$, lo que representa que hay 160 personas con esas dos características y que son casos favorables para ambos eventos. Por lo tanto, los eventos no son mutuamente excluyentes, y para calcular la probabilidad de que ocurran ambos, se debe restar la probabilidad de seleccionar a una de esas 160 personas. Una manera de ilustrarlo es:



En la actividad 3 se introduce la formalización de la suma de las probabilidades de dos eventos que son mutuamente excluyentes o no. En particular, para calcular la probabilidad de que ocurra el evento la persona *está enferma o es mayor que 30 años*, se expresa como:

$$
\begin{aligned}
P(G) = P(A \text{ o } B) &= P(A) + P(B) - P(A \text{ y } B)\\
&= \frac{650}{1850} + \frac{1130}{1850} - \frac{160}{1850}\\
&= \frac{490}{1850} + \frac{1130}{1850} = \frac{1620}{1850}\\
&= \frac{162}{185} = 0.8756 = 87.56\%
\end{aligned}
$$

debido a que los eventos A y B no son mutuamente excluyentes. En el caso de los eventos A y C, sí son mutuamente excluyentes, lo cual se puede ver como:



Por otro lado, la probabilidad del evento *la persona está infectada o es menor o igual que 30 años y no esté infectada* es:

$$
P(H) = P(A \text{ o } C) = P(A) + P(C) - P(A \text{ y } C) =
$$
$$
\frac{650}{1850} + \frac{70}{1850} - 0 = \frac{650}{1850} + \frac{70}{1850} = \frac{720}{1850} = \frac{72}{185}
$$
$$
= 0.3891 = 38.91\%
$$

El contexto de la sesión 3 es numérico; en la actividad 1 se deben encontrar los 24 resultados posibles que se obtienen al escribir números con tres cifras con un conjunto de cuatro dígitos.

Posteriormente, se definen algunos eventos y se pregunta por los resultados favorables para identificar la no repetición de números de tres cifras y que existe un evento, el C, que es imposible que ocurra en esta situación numérica.

2	3	5
2	5	3
3	2	5
3	5	2
5	2	3
5	3	2

3	5	7
3	7	5
5	3	7
5	7	3
7	3	5
7	5	3

5	7	2
5	2	7
7	5	2
7	2	5
2	5	7
2	7	5

7	2	3
7	3	2
2	7	3
2	3	7
3	7	2
3	2	7

La incorporación de un evento imposible (o vacío) es un aspecto importante en la construcción del concepto de eventos mutuamente excluyentes y del razonamiento probabilístico de los alumnos, y debe ser analizado en la revisión grupal propuesta en las actividades 2 y 5.

Se espera que en la actividad 3 los alumnos identifiquen que los eventos: "B: El número elegido es mayor que 500" o "D: El número elegido tiene 2 en la primera cifra", son mutuamente excluyentes, como se observa en la imagen anterior, donde se puede ver que los eventos B y D no tienen resultados favorables en común.

Tal vez algunos alumnos indiquen que también los eventos: "A: El número elegido es múltiplo de 3" o "C: El número es menor que 200", son mutuamente excluyentes; en este caso, el evento "C: El número elegido es menor que 200", es vacío (no tiene resultados favorables) porque no hay resultados favorables para comparar con el evento A.

En la actividad 4, los alumnos deben elegir cuál es la manera correcta de aplicar la regla de la suma para calcular la probabilidad de los eventos indicados. Las respuestas a esta actividad son:

a) ¿Cuál es la probabilidad del evento (*A* o *B*)?

☐ $P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B)$

☑ $P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ y } B)$

$= \frac{12}{24} + \frac{12}{24} - \frac{6}{24} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

b) ¿Cuál es la probabilidad del evento (*A* o *C*)?

☑ $P(A \text{ o } C) = P(A) + P(C)$

$= \frac{12}{24} + \frac{0}{24} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$

☐ $P(A \text{ o } C) = P(A) + P(C) - P(A \text{ y } C)$

c) ¿Cuál es la probabilidad del evento (*B* o *C*)?

☑ $P(B \text{ o } C) = P(B) + P(C)$

$= \frac{12}{24} + \frac{0}{24} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$

☐ $P(B \text{ o } C) = P(B) + P(C) - P(B \text{ y } C)$

d) ¿Cuál es la probabilidad del evento (*A* o *D*)?

☐ $P(A \text{ o } D) = P(A) + P(D)$

☑ $P(A \text{ o } D) = P(A) + P(D) - P(A \text{ y } D)$

$= \frac{12}{24} + \frac{6}{24} - \frac{2}{24}$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

e) ¿Cuál es la probabilidad del evento (*C* o *D*)?

☑ $P(C \text{ o } D) = P(C) + P(D)$

$= \frac{0}{24} + \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$

☐ $P(C \text{ o } D) = P(C) + P(D) - P(C \text{ y } D)$

En la actividad 5, los alumnos deben exponer los argumentos que les llevaron a seleccionar lo que marcaron con anterioridad. Para justificar, basta con anotar los resultados favorables en común, o bien, que no haya resultados favorables en común. Por ejemplo, en el inciso a) el evento A o B tiene 6 resultados favorables que son: 573, 537, 735, 753, 723, 732.

En la actividad 6 se les pide definir eventos mutuamente excluyentes a cada uno de los eventos indicados. Una propuesta para el caso del evento M es: *el número elegido no es múltiplo de 3,* éste representa el complemento del evento A. En el caso del evento N, podría ser *el número elegido tiene 5 en la primera cifra*.

Anime a los alumnos a encontrar otros eventos, apoyándose en los conceptos que conocen, como el de evento complementario. La fórmula para calcular las probabilidades de los eventos que propongan debe ser del tipo: $P(A \text{ o } M) = P(A) + P(M)$.

Finalmente, en la sesión 4 se proponen dos situaciones relacionadas con los contextos de población y de acceso a la televisión e internet; la primera está expresada en porcentajes y millones de personas de cada región, por lo que, para contestar, se requiere analizar y reorganizar la información. Tal vez los alumnos observen que al sumar los porcentajes se obtiene el valor de 101%, debido a que son porcentajes redondeados; generalmente así se utilizan en los informes, y dado que esta situación es extraída de uno de ellos, esto es algo común (véase fuente). Además, se enfrentan a que el porcentaje de las regiones de Oceanía y EUA y Canadá está integrado en 5%, lo que dificulta la respuesta de los incisos a) y c), por lo que es conveniente utilizar el dato de población expresado en millones de personas. Una sugerencia es utilizar una tabla como la siguiente para mostrar el número de personas por región: y aplicar la regla de la suma para calcular la probabilidad de los eventos indicados.

Región	Número de personas	(%)	Países	Número de personas	(%)
Asia	4700000000	60.16	China	1484470000	19
			India	1406340000	18
África	1300000000	16.64			
Europa	750000000	9.60			
Latinoamérica y el Caribe	650000000	8.32			
EUA y Canadá	370000000	4.74			
Oceanía	43000000	0.55			
Total	7813000000	100.00			

De esta tabla también es posible comprender que los porcentajes están redondeados, e incluso, también el número de personas. La ventaja de organizar los datos en este tipo de tablas es que podemos identificar el número de personas a las que se hace referencia en cada inciso de la actividad para calcular la probabilidad, y de ahí podemos utilizar el porcentaje o la razón entre el número de personas de la región y el total. De esta forma, las respuestas a las preguntas son:

a) En términos de porcentaje: 61% + 4.74% = 65.74%.

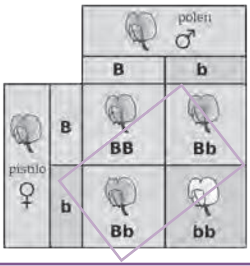
b) En términos de porcentaje: 19% + 18% = 37%.

c) En términos de porcentaje: 8% + 4.74% = 12.74%.

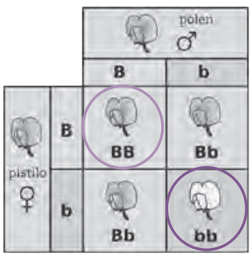
En la actividad 2, la respuesta a la pregunta se obtiene mediante la suma: 62% + 27% – 7% = 82%.

En la actividad 3, se solicita usar el cuadro de Punnett a fin de contestar las siguientes preguntas:

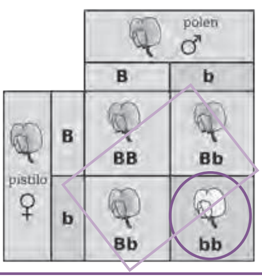
a) $\frac{1}{2}$



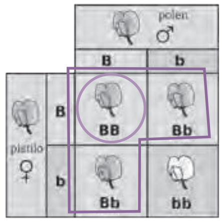
b) Mutuamente excluyentes;
$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$



c) Mutuamente excluyentes;
$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$



d) No son mutuamente excluyentes;
$\frac{3}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$



Pautas para la evaluación formativa

Con la finalidad de verificar la medida en que se logra la intención didáctica que aparece en la ficha descriptiva, es necesario hacer un registro para cerciorarse de que los alumnos realizan lo siguiente:

- Distinguen entre un tipo de evento y otro.
- Reconocen el significado de dos eventos mutuamente excluyentes.
- Representan gráficamente las situaciones que se plantean, ya sea en tablas o diagramas.
- Interpretan los valores de las medidas de la probabilidad de ocurrencia de los eventos respecto al contexto o la situación que se analiza.

¿Cómo apoyar?

Si observa que los alumnos aún tienen dificultades para comprender el origen de los cuadros de Punett, consulte: https://www.ck12.org/book/ck-12-conceptos-biolog%C3%ADa/section/3.6/. Si en el caso de la actividad 1 de la sesión 4 observa que los alumnos tienen dificultades, pida que presenten la información mediante un cuadro o diagrama de árbol.

¿Cómo extender?

Si considera necesario conocer más sobre el estafilococo áureo, consulte https://www.msdmanuals.com/es/hogar/infecciones/infecciones-bacterianas-bacterias-grampositivas/infecciones-por-staphylococcus-aureus.

Puede retomar los eventos de la secuencia 9 para practicar el cálculo de la probabilidad de eventos compuestos mediante el uso de la regla de la suma.

Evaluación. Bloque 2

(LT, Vol. II, págs. 106–107)

Reactivos 1 y 2. *Mínimo común múltiplo y máximo común divisor.* En el primero, el alumno debe obtener la descomposición en factores primos del número 472 que es $2 \times 2 \times 2 \times 59$. Pida a los alumnos que verifiquen la descomposición al multiplicar los factores. Pueden utilizar calculadora.

En el reactivo 2, la situación presentada implica determinar cuántas horas después una persona volverá a coincidir en la toma de sus tres medicamentos. Se puede determinar al calcular el mínimo común múltiplo de 2, 3 y 4, que es 12, así la respuesta correcta es C.

Reactivo 3. *Figuras geométricas y equivalencia de expresiones de segundo grado y ecuaciones cuadráticas.* El alumno debe identificar la ecuación cuadrática que permite determinar las medidas de la lona que plantea el problema: *El perímetro de una lona rectangular mide 30 m y su área, 50 m²*.

La ecuación es la opción A, porque $x(15 - x) = 50$ se puede transformar en:

Expresiones algebraicas equivalentes →

$$(15x - x^2) = 50$$
$$15x = 50 + x^2$$

Al igualar a cero para resolver la ecuación cuadrática:

Resolución de ecuación cuadrática →

$$0 = 50 + x^2 - 15x$$
$$0 = x^2 - 15x + 50$$

El trinomio al cuadrado se puede resolver factorizando:

$$0 = (x - 10)(x - 5)$$

De donde: $(x_1 - 10) = 0$
Al despejar queda que $x_1 = 10$ puede representar el valor de la medida del largo de la lona y $0 = (x_2 - 5)$ por lo que $x_2 = 5$ puede representar el valor de la medida del ancho de la lona.

Se sugiere que de manera semejante se desarrollen las otras ecuaciones para que el alumno comprenda lo que representa cada situación. También pida que, antes de resolver, expliquen por qué seleccionaron esas respuestas, de esa manera se conocerán cuáles son los aspectos del problema que lo llevan a elegir una u otra respuesta, así como a conocer cuáles son las características de las ecuaciones cuadráticas que distingue y cuáles no y los problemas al escribir una expresión algebraica equivalente (secuencia 11). Considere, además, que en la resolución por factorización de una ecuación cuadrática implícitamente está vinculado el contenido que el alumno ha estudiado en las secuencias 1, 2 y 10. Por lo tanto, es importante no limitarse en la revisión de la respuesta correcta, sino en indagar junto con el alumno de qué manera lo hizo para conocer realmente el progreso que va logrando. Como puede observar, el conocimiento matemático es acumulativo y progresivo, por lo cual se puede describir como una espiral, cuanta más información se obtenga del proceso que sigue un alumno al dar respuesta a un reactivo, mejor podemos conocer cuáles son sus fortalezas y debilidades y hacer los ajustes necesarios en la planeación de las actividades didácticas.

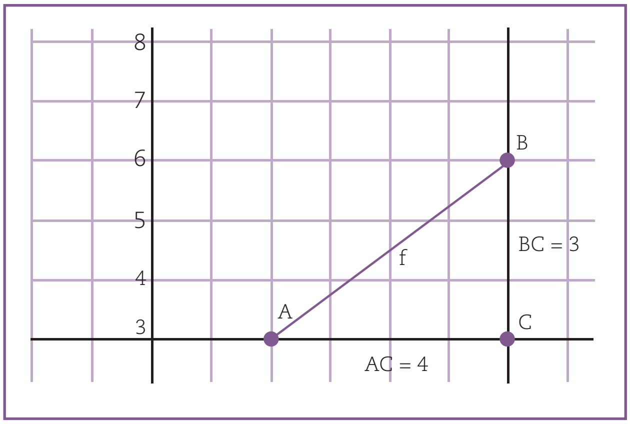
Reactivos 4, 5 y 6. *Polígonos semejantes.* En el reactivo 4 se espera que el alumno no requiera de construir el triángulo semejante, sino que interprete el dato que corresponde al valor de la razón de semejanza y comprenda que la longitud de cada lado del nuevo triángulo será dos veces y media la longitud de la medida original, respectivamente. La respuesta correcta es la opción B.

En el reactivo 5, el alumno requiere comparar los triángulos para determinar cuáles son semejantes, lo que implica determinar cuáles son los lados correspondientes entre los triángulos y luego determinar si las medidas de los lados son proporcionales y cuál es la razón de semejanza. Un error común de los alumnos es comparar solamente los valores de las medidas de los lados sin considerar la correspondencia. En este caso, se debe considerar como referente común el vértice del ángulo de 50° en cada triángulo y a partir de él comparar las longitudes de los lados correspondientes entre los triángulos.

A partir de lo anterior, se puede observar que solamente los triángulos B y D son semejantes.

Los dos triángulos del reactivo 6 son semejantes por el criterio de semejanza AA, ya que se conoce la medida de un par de ángulos correspondientes que es igual, 60°, por ser ángulos alternos internos entre paralelas (los lados BA y DE) y el otro par de ángulos iguales son los que se forman con los segmentos transversales que se intersecan en el punto C, al ser ángulos opuestos por el vértice.

Reactivos 7 y 8. *Teorema de Pitágoras.* Para determinar la distancia entre los puntos A (2, 3) y B (6, 6), ubicados en un plano cartesiano, la imagen muestra el triángulo rectángulo que se forma y la hipotenusa f representa la distancia entre los puntos A y B, la cual es equivalente a la raíz cuadrada de la suma de las áreas de los cuadrados formados por los catetos AC y BC. Entonces $AB = \sqrt[2]{4^2 + 3^2} = \sqrt[2]{16 + 9} = \sqrt[2]{25} = 5$.

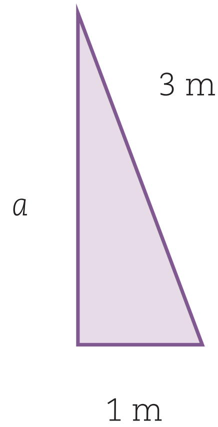


En el reactivo 8, para determinar la altura que alcanza la escalera de 3 m de largo y cuyo pie queda a 1 m de la pared, la altura corresponde a uno de los catetos del triángulo rectángulo que se forma:

$$3^2 = 1^2 + a^2$$

De donde:

$$a^2 = 3^2 - 1^2$$
$$a = \sqrt[2]{3^2 - 1^2}$$
$$a = \sqrt[2]{9 - 1}$$
$$a = \sqrt[2]{8}$$
$$a = \sqrt[2]{4 \times 2} =$$
$$\sqrt[2]{4} \times \sqrt[2]{2} = 2 \times \sqrt[2]{2} = 2.828427124 \approx 2.83$$

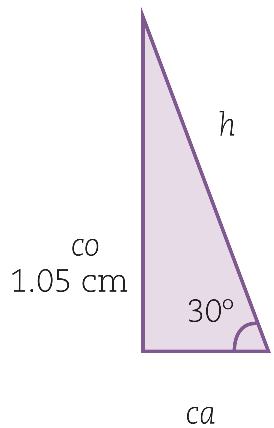


Reactivos 9 y 10. *Razones trigonométricas.* En el reactivo 9, la expresión que permite calcular la medida de la hipotenusa del triángulo rectángulo descrito es:

$$\text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2} = \frac{\textit{cateto opuesto}}{\textit{hipotenusa}} = \frac{1.05\ cm}{\textit{hipotenusa}}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1.05\ cm}{\textit{hipotenusa}}$$

$$\textit{hipotenusa} = \frac{1.05\ cm}{\frac{1}{2}} = 2.1\ cm$$



En el caso del reactivo 10, el alumno debe considerar que: $\cos A = \frac{3}{5} = \frac{ca}{h}$ y $\tan A = \frac{co}{ca} = \frac{co}{3}$, lo que significa que la hipotenusa mide 5 y el cateto adyacente mide 3 del triángulo rectángulo, entonces, el cateto opuesto mide 4, siendo la opción D la respuesta correcta, $\tan A = \frac{4}{3}$.

Reactivo 11. *Eventos mutuamente excluyentes.* Para identificar cuáles son los eventos mutuamente excluyentes, se sugiere listar los resultados posibles al lanzar tres monedas iguales al aire e identificar cuáles son los resultados favorables a cada evento y cuáles tienen resultados ajenos.

<table>
<tr><th>Moneda 1</th><th>Moneda 2</th><th>Moneda 3</th><th colspan="4">Eventos</th></tr>
<tr><td>S</td><td>S</td><td>S</td><td>Caen tres soles</td><td></td><td rowspan="7">Cae uno o más soles</td><td>No aparecen o caen águilas</td></tr>
<tr><td>A</td><td>S</td><td>S</td><td rowspan="3">Caen dos soles</td><td rowspan="7">Caen menos de tres soles</td><td rowspan="7"></td></tr>
<tr><td>S</td><td>A</td><td>S</td></tr>
<tr><td>S</td><td>S</td><td>A</td></tr>
<tr><td>A</td><td>A</td><td>S</td><td rowspan="3">Cae un sol</td></tr>
<tr><td>A</td><td>S</td><td>A</td></tr>
<tr><td>S</td><td>A</td><td>A</td></tr>
<tr><td>A</td><td>A</td><td>A</td><td>No cae sol</td><td></td></tr>
</table>

La segunda parte de la evaluación está integrada por siete actividades. En la primera, las respuestas son:

MCD de 420, 630 y 330 = $2 \times 3 \times 5 = 30$
mcm de 420, 630 y 330 = $2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 11 = 13\,860$.

En la segunda actividad, las tres expresiones algebraicas equivalentes para representar el área de las figuras geométricas son:

a)		
Expresión 1	Expresión 2	Expresión 3
$(2a + 3b)(2a + 3b)$	$(2a + 3b)^2$	$4a^2 + 12ab + 9b^2$

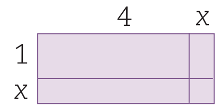
b)		
Expresión 1	Expresión 2	Expresión 3
$aq + pq + ap + a^2$	$q(a + p) + a(p + a)$	$a(a + p + q) + pq$

Considere que pueden existir otras expresiones algebraicas equivalentes.

Para la tercera actividad, una respuesta posible es: $(x + 1)(x + 4) = x^2 + 5x + 4$.

La figura geométrica puede cambiar de posición, pero la expresión en producto de dos factores es única.

En la actividad 4, las raíces que corresponden son c), a) y b), de arriba hacia abajo.



Para la quinta actividad, una manera de determinar cuál es la representación gráfica es asignando valores a la variable x en la expresión algebraica de la función $y = 3.14x^2 + 9.42x$.

Por ejemplo, $x = 1$, $x = 5$ y $x = 10$. Así se obtienen los puntos (1, 12.56), (5, 125.6) y (10, 408.2), respectivamente, que se ubican en la gráfica del inciso b).

En la actividad 6, para encontrar la medida del ancho de un disco de superficie de 56.52, la expresión algebraica de la función se convierte en la ecuación: $56.52 = 3.14x^2 + 9.42x$. Al igualar a cero, se obtiene: $3.14x^2 + 9.42x - 56.52 = 0$

$$\frac{3.14}{3.14}x^2 + \frac{9.42}{3.14}x - \frac{56.52}{3.14} = \frac{0}{3.14}$$

$$x^2 + 3x - 18 = 0$$

Al factorizar la ecuación cuadrática, se tiene: $(x + 6)(x - 3) = 0$.

Si el factor $(x + 6) = 0$, entonces $x_2 = 3$. Si el factor es $(x - 3) = 0$, entonces $x_1 = -6$.

De acuerdo con el contexto del problema, el valor de la incógnita representa la medida del ancho del disco, es decir que debe ser un valor positivo; la respuesta correcta es $x_2 = 3$.

La actividad 7 requiere calcular la media aritmética y la desviación media de cada conjunto de datos; los valores son:

	Caseta de cobro A	Caseta de cobro B
Media aritmética	Llegan 25.6 automóviles	Llegan 27.5 automóviles
Desviación media	±5.8 automóviles	±7.7 automóviles

La respuesta de los incisos a) y b) es la caseta B.