

Matemáticas

Primer grado

Bloque 3	Los mapas y las escalas	186
	27. Fracciones y decimales positivos y negativos 2.....	188
	28. Porcentajes 2.....	194
	29. Variación lineal 2.....	204
	30. Ecuaciones 3.....	214
	31. Sucesiones 2.....	220
	32. Existencia y unicidad 3.....	224
	33. Perímetros y áreas 3.....	232
	34. Volumen de prismas 3.....	238
	35. Gráficas circulares 2.....	244
	36. Medidas de tendencia central 2.....	250
	37. Medidas de tendencia central 3.....	256
	38. Probabilidad 2.....	262
	Evaluación	268
	Bibliografía.....	270
	Créditos iconográficos.....	271





1:14 900 000
0 149 298 447 km



Bloque 3

Los mapas y las escalas

Un mapa es una representación geográfica de un territorio en dos dimensiones.

Generalmente, contienen información de diferente naturaleza, por ejemplo, ríos, etnias, lenguas, distribución de la población, entre otros. Uno de los elementos más importantes en un mapa es la escala en la que están elaborados, pues ello permite saber el tamaño real que representan.

Existen dos formas de presentar la escala. La primera es gráfica, y consiste en una barra con tramos blancos y oscuros donde se señalan distancias, como la que puedes observar en la parte inferior izquierda de la imagen. La segunda es la numérica; esta escala utiliza una razón matemática para informar cuánto se reduce la imagen original. Por ejemplo, si la razón es 1:25 000, significa que una unidad en el mapa es igual a 25 000 unidades en la realidad.

27. Fracciones y decimales positivos y negativos 2

Sesión
1

■ Para empezar



Retomemos los cuadrados mágicos. Recuerda que son arreglos de celdas con números que al ser sumados por renglón, columna o diagonal se obtiene el mismo resultado. Observa la ilustración. Corresponde a la fachada de uno de los monumentos históricos más bellos y famosos de la ciudad de Barcelona: el Templo de la Sagrada Familia. Si miras con cuidado, te darás cuenta que tiene grabado un cuadrado mágico. ¿Cuánto suman sus columnas, renglones y diagonales? Ahora te retamos a que resuelvas el siguiente cuadrado mágico. Puedes utilizar cualquier

número entero de una cifra, incluyendo el 0, de tal forma que la suma de sus columnas, renglones y diagonales sea igual a -6 . No puedes repetir ningún número.

La habilidad que desarrollas al resolver cuadrados mágicos como el anterior te servirá para resolver problemas de suma y resta de números positivos y negativos. En las sesiones siguientes resolverás problemas que impliquen sumar y restar este tipo de números.

	-2	
		1

■ Manos a la obra

Juegos con números

1. Reúnete con otro compañero para hacer esta actividad y la siguiente.

Acomoden los siguientes números en el cuadrado mágico de manera que la suma sea $-\frac{3}{2}$.

Los nueve números son:

$$-5, \frac{1}{2}, -7, \frac{12}{3}, -6, -0.5, -\frac{3}{2}, 6, \frac{20}{4}$$

2. Comparen su cuadrado mágico con otra pareja. Verifiquen que las sumas de tres números en línea siempre den $-\frac{3}{2}$ y que no haya números repetidos. Pueden utilizar una calculadora para comprobar el resultado.

3. Trabaja de manera individual esta y la siguiente actividad. Responde las preguntas.



a) Si a un número x le sumo un negativo y el resultado es positivo, ¿qué signo debe tener x ? _____

b) Si a un número x le sumo un positivo y el resultado es cero, ¿qué características debe tener x ? _____

c) Si a un número x le resto un negativo, ¿el valor de x aumenta o disminuye? _____

d) Si a un número x le sumo un negativo y el resultado es negativo, ¿qué signo tiene x ? _____

4. Realiza las siguientes sumas en tu cuaderno, decide si usarás números de tipo fraccionario o decimal.

$$\frac{2}{10} + 1.005 =$$

$$3 + 0.3 + \frac{4}{5} =$$

$$\left(-\frac{1}{10}\right) + (-0.35) + \left(\frac{1}{2}\right) =$$

$$(-4) + \left(\frac{5}{8}\right) + \left(-\frac{3}{2}\right) =$$

5. Forma un equipo para resolver las siguientes adivinanzas.

a) Pensé un número, le sumé -4.5 y obtuve 5.6 . ¿Qué número pensé? _____

b) Pensé un número, le sumé $-\frac{2}{5}$ y obtuve -3.2 . ¿Qué número pensé? _____

c) Pensé un número, le sumé $\frac{2}{3}$ y obtuve -3 . ¿Qué número pensé? _____

d) Pensé un número, le resté -2.4 y obtuve -3.2 . ¿Qué número pensé? _____

e) Pensé un número, le resté -2.6 y obtuve 4 . ¿Qué número pensé? _____

6. En grupo y con apoyo del maestro revisen sus resultados. En cada caso escriban la operación y verifiquen que se obtiene el resultado que se indica. Discutan acerca del procedimiento que usaron para sumar números fraccionarios y decimales con signo.

7. Observen el recurso audiovisual [Uso de la calculadora para sumar números positivos y negativos](#) a fin de practicar el uso de esta herramienta.





1. De manera individual, resuelve en tu cuaderno las operaciones siguientes; puedes expresar el resultado mediante fracciones o números decimales.

$$\left(\frac{1}{4}\right) - (-0.4) =$$

$$(-14.8) - \left(\frac{3}{2}\right) =$$

$$(23.004) - \left(\frac{1}{50}\right) =$$

$$\left(-\frac{3}{25}\right) - (2.005) =$$

2. En parejas resuelvan esta actividad y la siguiente.

Analicen la información que se muestra en la tabla y anoten la **variación** de cada día. Después haz lo que se te pide.

Pronóstico del tiempo del 8 al 15 de enero en Chicago, EUA

Días	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo
Temperaturas máximas (°C)	3	3	8	12	-3	-5	-9
Temperaturas mínimas (°C)	-4	-1	-8	-4	-7	-14	-13
Variación (°C)							

- a) ¿En qué días hubo mayor variación de la temperatura?
 b) De las siguientes operaciones, subraya la que sirve para calcular la variación entre dos temperaturas diferentes.

$$(-9) + (-13) =$$

$$(-13) - (-9) =$$

$$(-9) - (-13) =$$

3. Analicen la información y respondan las preguntas.

El problema del calentamiento global se ha estudiado con detenimiento desde inicios del siglo xx. En la tabla siguiente se muestran las variaciones en promedio experimentadas cada 20 años en todo el planeta.

1900	1920	1940	1960	1980	2000
$\left(-\frac{3}{10}\right)^\circ\text{C}$	$(-0.05)^\circ\text{C}$	$\left(+\frac{19}{50}\right)^\circ\text{C}$	$(-0.1)^\circ\text{C}$	$\left(+\frac{11}{100}\right)^\circ\text{C}$	$\left(+\frac{3}{8}\right)^\circ\text{C}$



Glosario

Variación: es la distancia entre la temperatura más alta y la más baja. Por ejemplo, entre una temperatura de 5 °C y otra de -3 °C, hay una distancia de 8 °C.



Vínculo con... Geografía

En los temas "Elementos y factores del clima" y "Distribución de climas en el mundo" viste la forma en que varía la temperatura de acuerdo con las regiones geográficas; los conocimientos adquiridos en estas sesiones son los utensilios matemáticos que necesitas para calcular esos cambios.

a) ¿Cuántos grados había variado la temperatura de 1900 hasta 1980?

Operación	Resultado

b) Si en la ciudad de Roma la temperatura promedio en 1960 fue de $18.3\text{ }^{\circ}\text{C}$, ¿cuál había sido la temperatura promedio en esa ciudad en 1940?

Planteamiento	Resultado

c) Si en una región de España, la temperatura promedio en 1940 fue de $13.1\text{ }^{\circ}\text{C}$, ¿cuál había sido la temperatura promedio en esa región en 1920?

Planteamiento	Resultado

d) En el estado de Aguascalientes, México, la temperatura promedio en 2000 fue de $17.5\text{ }^{\circ}\text{C}$. ¿Cuál fue la temperatura promedio en ese estado en 1960?

Planteamiento	Resultado

¿Aumentó o disminuyó? _____

¿Qué signo corresponde al resultado? _____

4. Realicen una puesta en común para compartir los procedimientos y resultados. Corrijan lo que sea necesario.

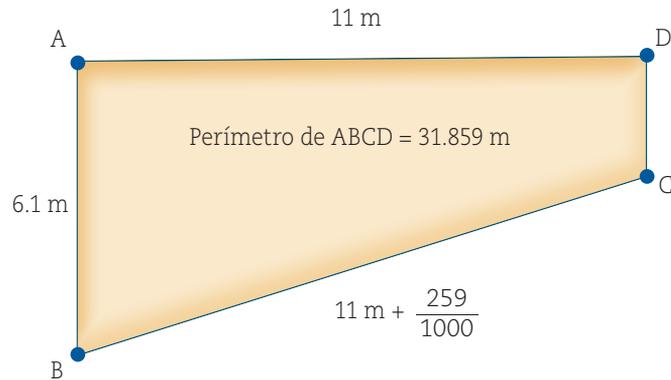


5. Observen el recurso audiovisual [Sumar y restar decimales y fracciones con signo](#) en el que se mostrarán distintas situaciones en las que se necesita hacer operaciones con los números decimales y fraccionarios con signo.



Problemas diversos

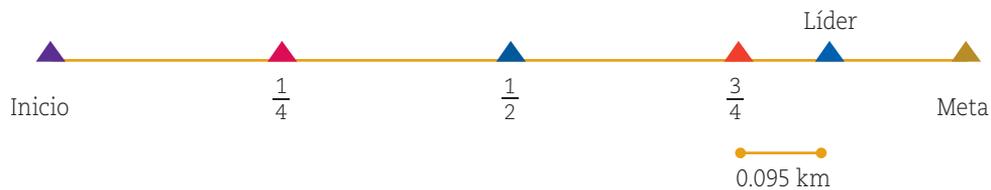
1. Resuelve de manera individual este y los dos siguientes problemas.
Se pondrá una reja en todo el perímetro del jardín ilustrado en la imagen.



- a) ¿Cuál es la medida dada en fracción del lado CD? _____
b) ¿Cuál es la medida en número decimal del lado CD? _____



2. En una carrera de 1 km el líder aventaja por 0.095 km al segundo lugar, quien lleva $\frac{3}{4}$ de la carrera recorrida. ¿Qué distancia ha recorrido el líder?



3. Mi papá repartió un terreno entre mis dos hermanos y yo. Al mayor le tocaron $\frac{4}{8}$ del terreno, al de en medio, $\frac{1}{3}$.
a) ¿Qué parte del terreno me toca a mí? _____
b) Subrayen la operación con la que se resuelve el problema.

$$\frac{4}{8} - \frac{1}{3} - 1$$

$$1 - \frac{4}{8} + \frac{1}{3}$$

$$\frac{4}{8} + \frac{1}{3} - 1$$

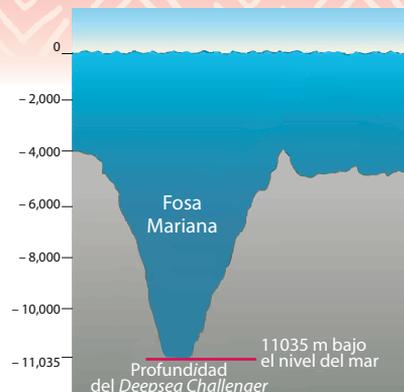
$$1 - \frac{4}{8} - \frac{1}{3}$$

4. Forma un equipo para hacer las dos actividades siguientes.
Resuelvan la siguiente suma de fracciones con ayuda de la recta numérica. Marca con rojo el punto donde se ubica el resultado.

$$2\frac{1}{5} + \frac{7}{10} + (-1\frac{1}{5}) =$$



5. En las Islas Marianas del océano Pacífico se encuentra una fosa donde está el punto más profundo de la Tierra que se conoce hasta ahora. En 2012, James Cameron, director de cine canadiense, llegó al fondo de esta fosa con ayuda de un sumergible llamado *Deepsea Challenger*. Analicen la información de la tabla y contesten las preguntas.



Tiempo transcurrido (min)	15	25	55	105	120
Profundidad alcanzada (m)	-1 375.66	-2 292.34	-5 042.38	-9 625.71	-10 971

- a) ¿Cuánto tiempo le llevó al sumergible llegar al fondo de la fosa? _____
- b) ¿A qué profundidad llegó al minuto 15? _____
- c) ¿Cuántos metros descendió del minuto 15 al minuto 25? _____
- d) ¿Cuál fue el periodo más largo? ¿Cuántos metros descendió durante ese periodo? _____
6. Comparen en grupo sus procedimientos y resultados. En caso de haber diferencias, analicen con detenimiento los procedimientos usados y localicen el error.
7. Utilicen el recurso informático *Problemas complejos de suma y resta* para practicar lo aprendido.
8. En el portal de Telesecundaria encontrarás una referencia a una página web sobre la combinación de operaciones aritméticas con números naturales, decimales y fraccionarios.



■ Para terminar

En tu cuaderno, resuelve el problema, primero convirtiendo los datos de manera que sólo se utilicen fracciones. Después convierte todos los datos a números decimales para realizar las operaciones.

Mario y Juan tienen una empresa. Mario ha invertido $\frac{3}{8}$ de millón de pesos y Juan 0.453 millones de pesos. ¿Cuánto dinero tienen invertido entre los dos?

Describe el procedimiento usado con cada tipo de número y compara los resultados.

¿Son exactos o aproximados? Explica por qué.



28. Porcentajes 2

Sesión
1

■ Para empezar



Para atender las necesidades sociales, todo gobierno necesita dinero, y la forma más directa de obtenerlo es mediante los impuestos. En México tenemos uno llamado Impuesto al Valor Agregado, al que conocemos como IVA, por sus siglas. Este impuesto al consumo se paga al comprar diversos artículos, pues ya viene incluido en el precio de varios de ellos.

En las sesiones anteriores calculaste el tanto por ciento de una cantidad usando como base el 50%, 25%, 10% y 1%. Ahora profundizarás en el estudio del tanto por ciento al aprender otras maneras de expresarlo (con fracciones o con decimales), a saber cómo calcular cualquier porcentaje y también a obtener cuánto cuesta determinado producto antes de que se le aplique el IVA. En nuestro país el IVA equivale al 16% del valor del producto. Si un producto cuesta \$100.00 con el IVA incluido, ¿cuánto cuesta sin IVA?

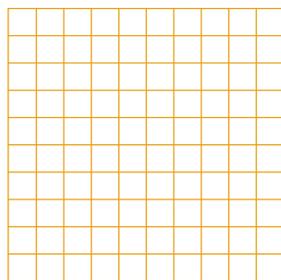
■ Manos a la obra

Con fracción o decimal

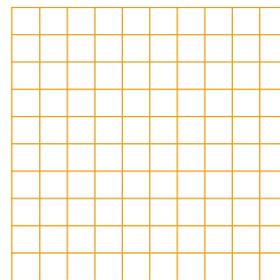


1. Haz las actividades 1 y 2 de manera individual.

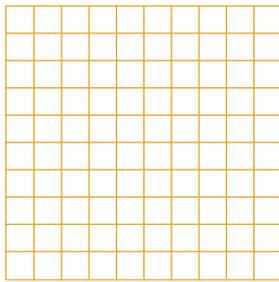
En cada caso colorea lo que se indica y escribe el tanto por ciento, la fracción o el decimal correspondiente que falte.



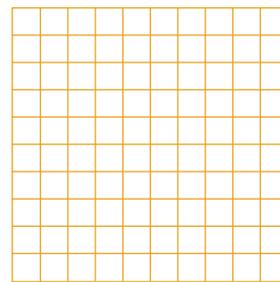
Tanto por ciento: 30%
Fracción: _____
Decimal: _____



Tanto por ciento: _____
Fracción: $\frac{70}{100} = \frac{7}{10}$
Decimal: _____



Tanto por ciento: 83%
Fracción: _____
Decimal: _____



Tanto por ciento: _____
Fracción: _____
Decimal: 0.45

2. Completa la tabla

Tanto por ciento	Fracción con denominador 100	Fracción simplificada	Número decimal
35%			
	$\frac{18}{100}$		
		$\frac{3}{4}$	
			0.8
90%			

3. En grupo, comparen sus respuestas. Propongan que se expresen en fracciones o decimales y encuentren el tanto por ciento equivalente. Después lean y analicen la siguiente información.

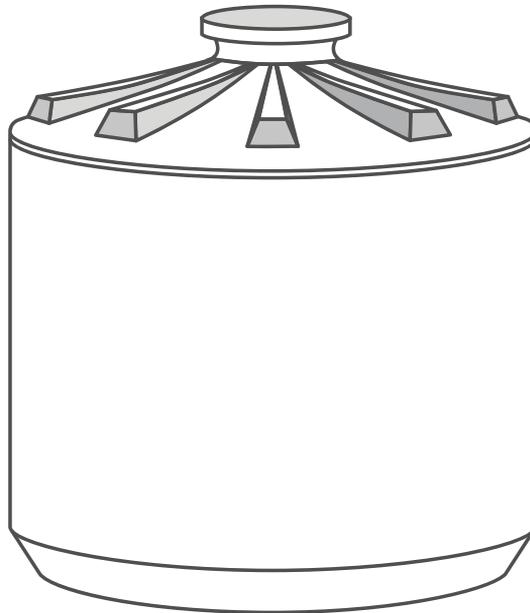
El **tanto por ciento** se refiere a **tantos de cada 100**, por lo que puede escribirse como una fracción con denominador 100 o como un número con punto decimal. Por ejemplo, **20%** puede escribirse:

- Como la fracción $\frac{20}{100}$, la que al ser simplificada queda como $\frac{1}{5}$.
- Como el decimal 0.20, que es lo mismo que 0.2.



De muchas maneras

1. Reúnete con un compañero y resuelvan las actividades 1 y 2. Un tinaco de 80 litros contiene agua al 65% de su capacidad.
 - a) El dibujo representa el tinaco, colorean aproximadamente hasta dónde llega el agua.



- b) ¿Cuántos litros de agua hay en el tinaco? _____
2. En los siguientes incisos se muestra la forma en que varios alumnos resolvieron el problema anterior. Anoten las cantidades que corresponden a sus cálculos.
 - a) Martha lo hizo calculando porcentajes que conoce.

Procedimiento	Cantidad (L)
Calculó el 50% de 80	
Calculó el 10% de 80	
Calculó el 5% de 80	
Sumó los tres resultados	

b) Teresa lo hizo a partir del 1%.

Procedimiento	Cantidad (L)
Calculó el 1% de 80	
Multiplicó el resultado por 65	

c) Julio pensó que 65% es lo mismo que $\frac{65}{100}$ así que multiplicó 80 por $\frac{65}{100}$.
 $80 \times \frac{65}{100} = \underline{\hspace{2cm}}$

d) Luis pensó que 65% es lo mismo que 0.65, así que multiplicó 80 por 0.65.
 $80 \times 0.65 = \underline{\hspace{2cm}}$

e) Lulú hizo una regla de tres.

Litros	Tanto por ciento
80	100%
x	65%

Multiplicó en cruz y obtuvo: $100x = (65)(80)$

Y resolvió la ecuación: $x = \underline{\hspace{2cm}}$

3. De manera individual, resuelve lo siguiente, utilizando dos procedimientos distintos en cada caso.



85% de 120 = _____

16% de 94 = _____

4. Comparen sus respuestas en grupo. Comenten cuáles procedimientos eligieron en la actividad 2 y digan por qué.

5. Observen el recurso audiovisual *De muchas maneras* que muestra distintas maneras de obtener un porcentaje.



El precio con descuento y sin descuento

1. Forma un equipo para hacer esta actividad. En la papelería “La gomita” todos los cuadernos están con el 10% de descuento. Anoten el precio sin descuento, recuerden que el precio con descuento equivale al 90 % del precio original.



Con descuento: \$135.00

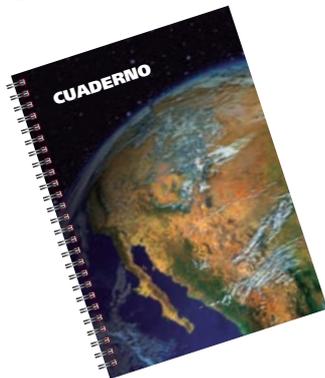
Sin descuento: _____



Con descuento: \$36.00

Sin descuento: _____

2. En grupo, comparen sus procedimientos para calcular el precio sin descuento, luego en equipo calculen el precio sin descuento de estos otros cuadernos.



Con descuento: \$40.50

Sin descuento: _____



Con descuento: \$90.00

Sin descuento: _____



Con descuento: \$72.00

Sin descuento: _____



Con descuento: \$58.50

Sin descuento: _____

Pastas de dientes

1. Reúnete con un compañero para llevar a cabo las actividades 1 a 4.
Calculen el tanto por ciento que dan de regalo en cada una de las pastas de dientes.



Contenido: 200 g
(160 g + 40 g de regalo)

Tanto por ciento de regalo: _____



Contenido: 204 g
(170 g + 34 g de regalo)

Tanto por ciento de regalo: _____

2. Hagan una puesta en común, comparen sus resultados y procedimientos con los de otras parejas. Después calculen el tanto por ciento que dan de regalo en cada una de las pastas:



Contenido: 300 g
(240 g + 60 g de regalo)

Tanto por ciento de regalo: _____



Contenido: 180 g
(120 g + 60 g de regalo)

Tanto por ciento de regalo: _____



Contenido: 119 g
(85 g + 34 g de regalo)

Tanto por ciento de regalo: _____

- a) ¿En cuál marca regalan más producto en relación con la cantidad inicial?

- b) ¿Qué tanto por ciento representa en cada caso?

- c) ¿En cuál regalan el menor tanto por ciento en relación con la cantidad inicial?

- d) ¿Qué tanto por ciento representa en cada caso?



3. Realicen otra puesta en común para comparar sus resultados y procedimientos.

4. Completen la manera en que estos alumnos calcularon el tanto por ciento de la pasta "Adiós mal aliento".



- a) Miriam calculó el 1% de 170, encontró que es _____, luego calculó cuántas veces cabe ese 1% en 34 y encontró que es _____
- b) Irene estableció una regla de tres.

Gramos	Tanto por ciento (%)
170	100
34	x

Hizo los productos cruzados:

$$170x = (\text{_____})(\text{_____})$$

Resolvió la ecuación: $x =$ _____

- c) Laura dividió 34 entre 170, obtuvo el decimal _____, luego lo expresó como tanto por ciento: _____

5. De acuerdo con el dato interesante, ¿qué tanto por ciento de los mexicanos tiene problemas de salud bucal si consideramos que la población es de 120 millones de personas? _____
6. Arturo contestó correctamente 72 preguntas de un examen de 90, ¿qué tanto por ciento contestó bien? _____
7. Comparen sus resultados con los de otros compañeros. Si sus respuestas difieren, averigüen por qué y, si es necesario, corrijan.

Dato interesante

Ocho de cada diez mexicanos tienen problemas dentales.





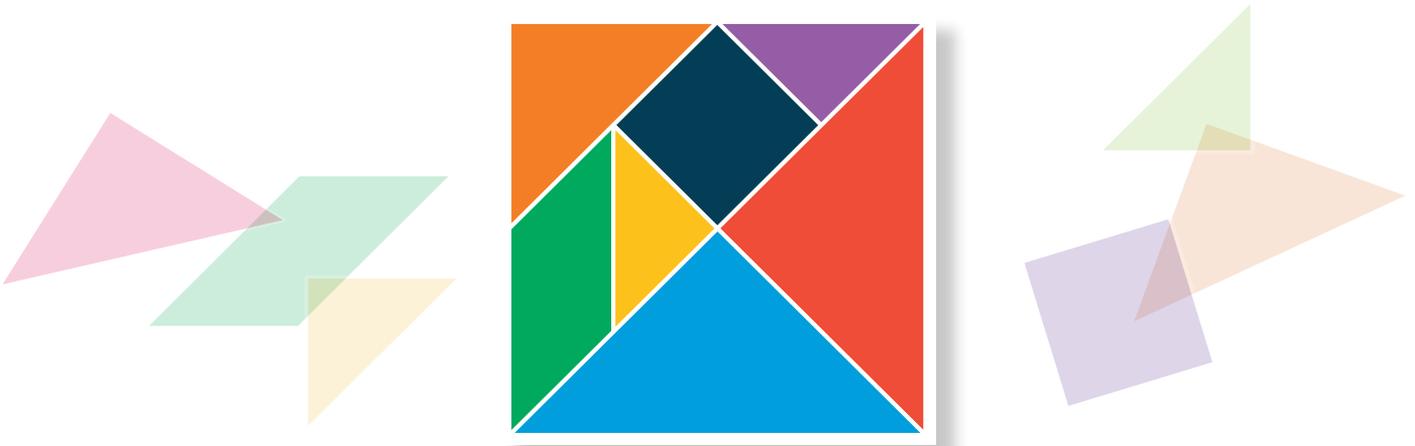
8. Observen el recurso audiovisual *¿Qué tanto por ciento es...?* donde se muestran diversas situaciones en las que es necesario conocer un porcentaje.

Sesión
5

¡A practicar porcentajes!



1. Resuelve de manera individual esta actividad y la siguiente.
Si todo el tangram es el 100 %, anota dentro de cada figura el tanto por ciento que le corresponde.



2. Calcula el precio sin IVA de las prendas.



Precio sin IVA: \$ _____



Precio sin IVA: \$ _____

3. Reúnete con un compañero para hacer las restantes actividades de la sesión.
Anoten el tanto por ciento de asistencia de cada grupo.

1°A

Alumnos: 40

Asistieron: 30

Asistió _____ %

1°B

Alumnos: 45

Asistieron: 35

Asistió _____ %

1°C

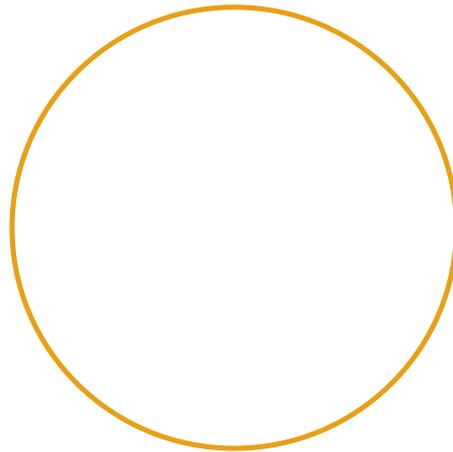
Alumnos: 50

Asistieron: 40

Asistió _____ %



4. Coloreen el círculo de acuerdo con lo siguiente: 50% de rojo, 20% de azul, 15% de amarillo y 15% de verde.



5. Completen la tabla.

Cantidad base	Tanto por ciento que aumenta o disminuye	Resultado
120	Menos el 50%	
90	Más el 150%	
	Menos el 25%	300
	Más el 125%	450
200		550
250		750

6. En grupo, comparen sus resultados y comenten los procedimientos que siguieron para llegar a ellos. Si es necesario, corríjanlos.
7. Utilicen el recurso informático *Más de porcentajes* para practicar su aplicación en diversas situaciones.



■ Para terminar

Un producto cuesta \$371.20 ya con el IVA incluido, ¿cuánto cuesta sin IVA? Explica cómo lo calculaste.

Si divides un precio con IVA entre 1.16, ¿qué obtienes? Explícalo en tu cuaderno.



29. Variación lineal 2

Sesión
1

■ Para empezar

BUSCAMOS VENEDORES

PERSONAS DE CUALQUIER EDAD CON
GANAS DE GANAR COMISIONES

DEL
25%
HASTA
40%



Juan trabaja en una empresa donde gana \$3 000.00 al mes, más una comisión de \$10.00 por cada \$100.00 de venta. ¿Cuánto ganará en un mes si sus ventas fueron de \$5 000.00? ¿Y si vendió \$8 000.00? ¿Cómo calcularías su sueldo total con cualquier cantidad de ventas?

En estas sesiones aprenderás a resolver problemas como el anterior, a expresar relaciones usando literales, a graficarlas y a identificar la razón de cambio.

■ Manos a la obra

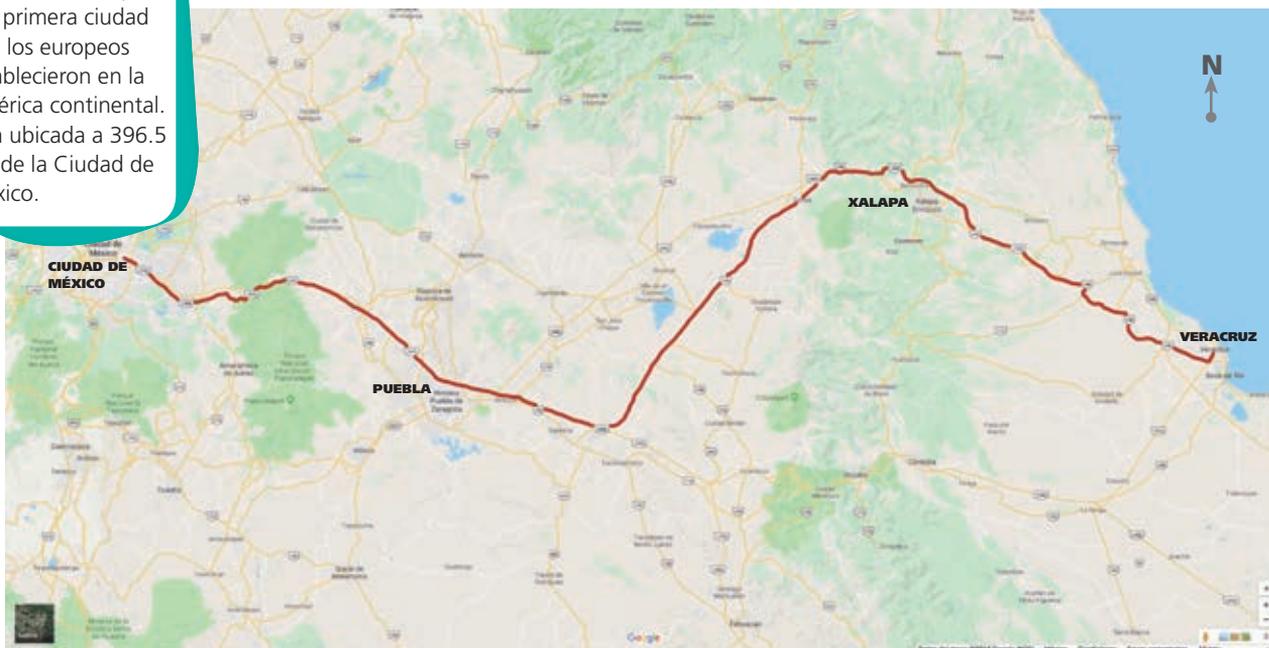
Viaje con rendimiento

1. Reúnete con un compañero para hacer esta actividad y la que sigue.

Don Julián viajará en su camión desde el Puerto de Veracruz a la Ciudad de México, pasando por Xalapa y Puebla.

Dato interesante

El 22 de abril de 1519, los españoles Hernán Cortés, Francisco de Montejo y Alonso Hernández de Portocarrero fundaron la ciudad y el puerto de Veracruz, por lo que se le considera como el primer municipio y la primera ciudad que los europeos establecieron en la América continental. Está ubicada a 396.5 km de la Ciudad de México.



Su camión consumió 3 L de gasolina en una distancia de 42 km; luego recorrió 70 km y consumió 5 L. Completen la tabla.

	Veracruz-Xalapa	Xalapa-Puebla	Puebla-CDMX	Total
Distancia (km)	105	175		
Cantidad de gasolina (L)			9.5	
$\frac{\text{Distancia (km)}}{\text{Cantidad de gasolina (L)}}$	14			

2. La relación entre la distancia en kilómetros que recorre un vehículo por cada litro de combustible que consume se llama **rendimiento**, esta relación o **razón** se representa con la expresión $\frac{\text{km}}{\text{L}}$.

- ¿Cuál es el rendimiento del camión? _____
- Escriban la expresión algebraica que relaciona la distancia recorrida con el consumo de gasolina. Consideren y como la distancia y x como la cantidad de gasolina. _____
- Completen la tabla.

y (km)	0		28			84		
x (L)		1		3	4		8	10

3. Comparen sus resultados en grupo. Si sus respuestas difieren, investiguen por qué. Después analicen y comenten la siguiente información.

Una **razón** es el cociente de dos cantidades, esto es, una comparación entre dos cantidades.

Por ejemplo, si en un grupo hay 30 mujeres y 15 hombres, decimos que la razón del número de mujeres respecto al número de hombres es “30 a 15”, lo cual puede escribirse como $\frac{30}{15}$.

Si en una relación de variación entre dos cantidades x y y , la razón de una cantidad a la otra es constante, esto es $\frac{y}{x} = a$, decimos que la relación es de *variación lineal* y puede representarse de la siguiente forma: $y = ax$ donde a es la razón de cambio.



Vínculo con... Geografía

Con las herramientas matemáticas que adquirirás en estas sesiones, podrás calcular el tiempo de un recorrido cuando conoces la distancia y velocidad de un objeto, lo cual te ayudará a entender mejor lo que estudiaste en el tema “Representaciones del espacio geográfico”.



Plan de ventas

1. Forma un equipo para hacer esta actividad y la siguiente.

Una tienda publicó un aviso para contratar vendedores de sus nuevos productos:

OPORTUNIDAD DE TRABAJO

¿Tienes actitud emprendedora? ¡Ven con nosotros!

Estamos contratando personas para venta por catálogo nueva línea de cosméticos.

Plan de ventas A.

\$4.00 por cada artículo vendido.

Plan de ventas B.

\$2.00 por cada artículo vendido y

\$50.00 de sueldo base semanal.

Tel: 0000-0000

Redes sociales: info_contrata y @info_contrata

a) ¿Qué plan de ventas conviene elegir? _____

b) Expliquen por qué. _____



2. Realicen lo que se indica y respondan las preguntas.

a) Completen la tabla.

Artículos vendidos	0	5	10	15	20	25		
Plan de ventas A (\$)		20		60		100		
Plan de ventas B (\$)	50			80	90		110	120

b) ¿Cuántos artículos hay que vender para que el plan B convenga más? _____

c) ¿Y para que convenga más el A? _____

d) En los planes de ventas A y B, ¿la relación entre el número de artículos vendidos y el pago es de variación lineal? Expliquen por qué. _____



- e) Completen la tabla. Representen con y el pago y con x la cantidad de artículos vendidos.

	Plan de ventas A	Plan de ventas B
Razón de cambio		
Expresión algebraica		

3. Comparen sus procedimientos y respuestas con su grupo; si son distintas, averigüen por qué y lleguen a acuerdos, luego analicen la siguiente información.

Una expresión algebraica de la forma $y = ax$ representa una variación lineal proporcional e indica que para calcular los valores de y se debe multiplicar la razón de cambio a por los valores de x .

Por ejemplo, en el problema de los planes de ventas, $y = 4x$ indica que para calcular el pago (y) se multiplica 4 (razón de cambio) por la cantidad de artículos vendidos (x).

Una expresión algebraica de la forma $y = ax + b$ representa una variación lineal **no** proporcional e indica que para calcular los valores de y , se debe multiplicar la razón de cambio a por los valores de x y sumar el valor de b al producto. Por ejemplo, $y = 2x + 50$ indica que para calcular el pago (y) se multiplica 2 (razón de cambio) por la cantidad de artículos vendidos (x) y se suma 50 (sueldo base).

En los dos casos anteriores, decimos que y **está en función de x** y que hay una **relación funcional** entre ambas cantidades.

4. Observen el recurso audiovisual [Expresiones algebraicas de relaciones funcionales](#) en el que se profundizará más el concepto de relación funcional.



Café cortado

1. Forma un equipo para realizar esta actividad y la que sigue.

Andrea es cortadora de café en cereza, es decir, del fruto del cafeto, y recibió un pago de \$37.50 por 2.5 kg de café que recolectó. Su hermano recolectó 4.2 kg y recibió un pago de \$63.00.



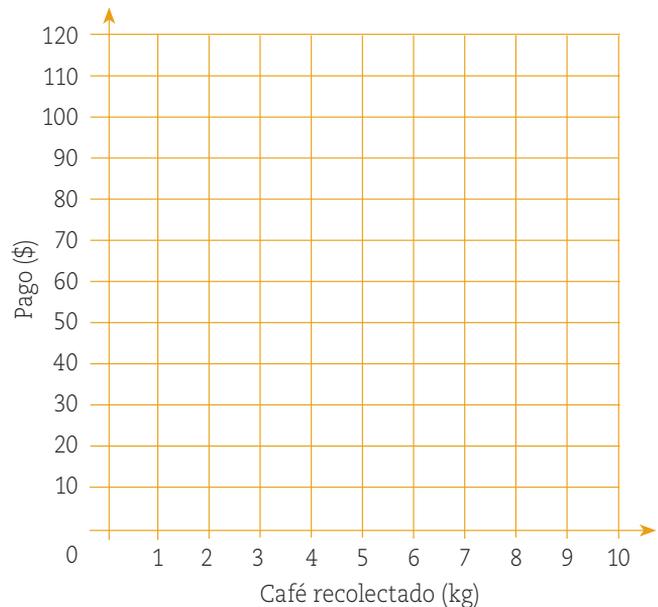
Dato interesante

El quintal es una medida utilizada para pesar diferente tipo de cosechas.

Un quintal de café cereza equivale a 250 kg.

- ¿Cuánto recibirán de pago si entre los dos recolectan un cuarto de quintal de café en cereza? _____
- ¿Cuál es el valor de la razón de cambio del pago y la cantidad de café recolectado? _____
- ¿Qué operación hay que hacer para calcular el pago? _____
- Escriban la expresión algebraica que relaciona y (el pago en pesos) con x (cantidad de café recolectado en kilogramos). _____
- Completen la tabla y construyan la gráfica correspondiente.

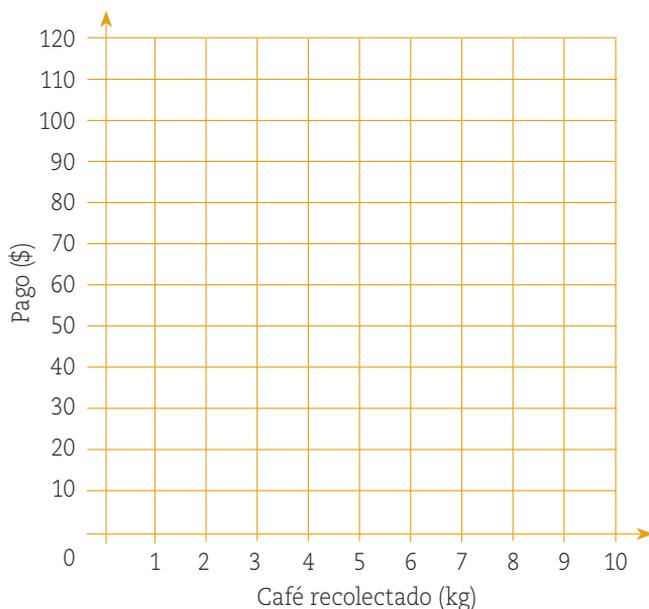
Café recolectado (kg) x	Pago (\$) y
0	0
1	
2	
4	
5	
8	



- Analicen la gráfica que construyeron. ¿Cumple con las características enunciadas en el recuadro de la página siguiente? Expliquen la respuesta. _____

- ¿La relación entre el pago y la cantidad de café recolectado es de variación lineal? Justifiquen su respuesta. _____

2. Si la razón de cambio entre el pago y la cantidad de café fuera igual a 10, anoten la expresión algebraica que relaciona ambas cantidades y tracen la gráfica correspondiente. _____



3. Comparen en grupo sus respuestas; después, analicen la siguiente información.

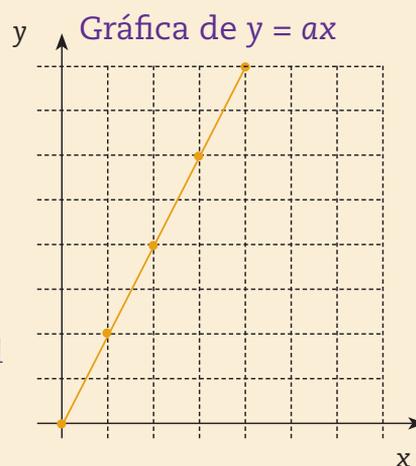
La gráfica asociada a la expresión $y = ax$, son puntos que están sobre una línea recta, por ello decimos que este tipo de relaciones funcionales son de **variación lineal**. En este caso, además, la línea pasa por el origen de las coordenadas.

La razón de cambio a es una cantidad constante definida como el cociente

$\frac{y}{x} = a$. A la **razón de cambio** a

también se le llama **pendiente** de la

recta. Dicha razón de cambio indica cómo cambia una variable en función del cambio en la otra.



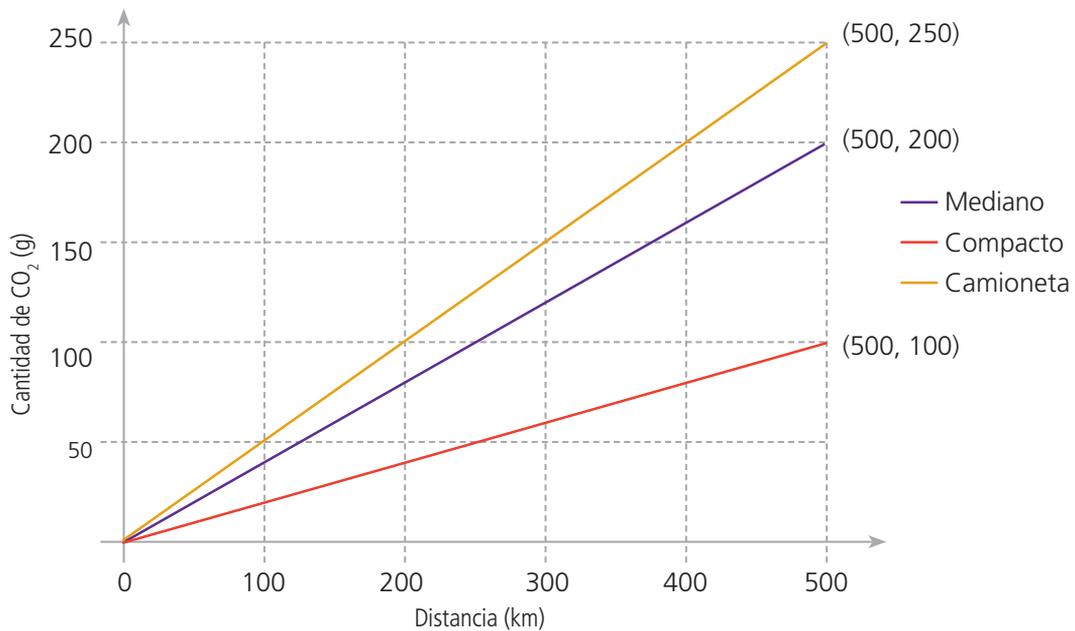
4. Observen el recurso audiovisual [Gráficas de relaciones funcionales](#) en el que se trata con mayor profundidad la información anterior.



Automóviles contaminantes

1. Forma un equipo para hacer todas las actividades de esta sesión.

Los automóviles son agentes de contaminación del medio ambiente, debido a las altas cantidades de dióxido de carbono (CO_2) que emiten al quemar combustible. Un coche en marcha emite una cantidad de CO_2 proporcional a cada kilómetro que recorre. Las gráficas en el plano cartesiano muestran la relación de la cantidad de CO_2 (en gramos) emitida por tres automóviles al recorrer cierta distancia (en kilómetros). Analicen las gráficas y contesten.



- a) ¿Qué automóvil contamina más? _____
- b) ¿Qué automóvil contamina menos? _____

2. Analicen los datos de la gráfica anterior y completen la tabla.

Distancia (km)	Cantidad de CO_2 emitida (g)		
	Compacto	Mediano	Camioneta
1			0.5
100			
200		80	
300	60		
400			
500	100		

3. Representen con y la cantidad de CO_2 emitida y con x la distancia recorrida. Completen la tabla con la razón de cambio y la expresión algebraica para cada automóvil.

	Razón de cambio	Expresión algebraica
Compacto		
Mediano		
Camioneta		

4. Analicen las respuestas de la tabla y contesten.
- ¿Qué expresión tiene la mayor razón de cambio? _____
 - ¿Qué expresión tiene la menor razón de cambio? _____
 - ¿Qué gráfica tiene la inclinación con mayor elevación? _____
 - ¿Qué gráfica tiene la inclinación con menor elevación? _____
 - ¿Qué relación hay entre la razón de cambio y la inclinación de la recta correspondiente? _____



5. Comenten en grupo cómo identificaron los vehículos que son más y menos contaminantes; si es necesario, corríjanlo.

6. Observen el recurso audiovisual *Puntos que informan* para conocer mejor cómo interpretar información contenida en las gráficas.



Costos por envío

Sesión
5

1. Resuelve individualmente esta actividad y la siguiente.

Luisa enviará una caja con medicamentos y víveres a un hospital comunitario de una localidad lejana. Para ello, revisa los costos de tres empresas de servicio de paquetería:

Envia-2: \$1.00 por kilogramo de peso del paquete, más \$50.00 de tarifa base.

PaqueTx: \$3.00 por kilogramo de peso del paquete.

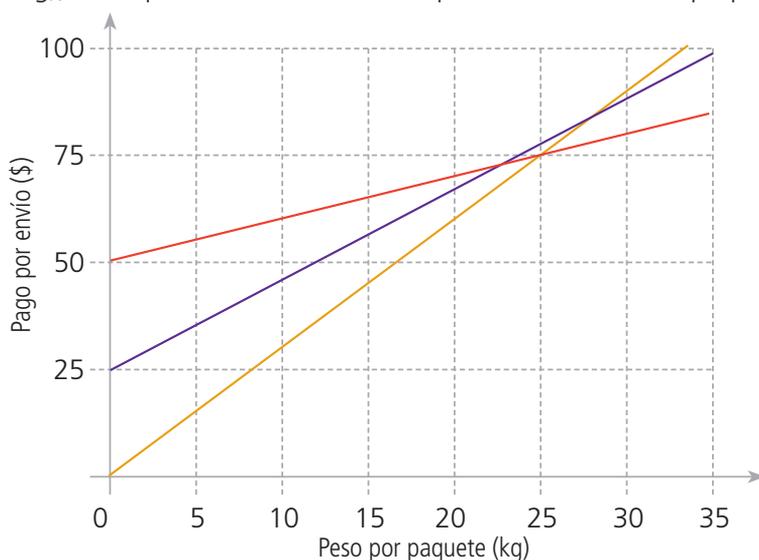
Llevapack: \$2.00 por kilogramo de peso del paquete, más \$25.00 de tarifa base.

- ¿Qué empresa le conviene más para enviar la caja? _____
- Explica cómo obtuviste la respuesta. _____





2. La gráfica muestra la relación del pago por envío (en pesos) y el peso por paquete (en kg), correspondientes a las tres empresas de servicio de paquetería.



a) Identifica la gráfica que representa a cada empresa y completa la tabla. Representa con x el peso por paquete y con y el pago por envío.

Empresa	Color de su gráfica	Expresión algebraica
Envía-2		
PaqueTx		
Llevapack		

b) ¿Qué empresa conviene más para enviar paquetes con poco peso? _____
c) ¿Cuál conviene más para enviar paquetes con mucho peso? _____

3. Comenta con tu grupo cómo puede obtenerse la expresión algebraica a partir de la gráfica asociada a una relación lineal entre dos conjuntos de cantidades. Al terminar analicen la información para posteriormente resolver de manera individual la última actividad.

La expresión algebraica asociada a una relación de variación lineal entre dos conjuntos de cantidades x y y , tiene los siguientes elementos:

- La **razón de cambio**, representada por a , definida como el cociente de y entre x .

- La **ordenada al origen**, representada por b , definida como el valor de la ordenada donde la recta interseca al eje vertical; esto es, el valor de y cuando x es igual a 0.

Con estos datos, la expresión algebraica se escribe:

$$y = (\text{razón de cambio}) x + (\text{ordenada al origen})$$

De manera convencional, la expresión tiene la forma $y = ax + b$.

4. Completa la tabla.

Expresión algebraica	Razón de cambio	Ordenada al origen
$z = 0.15 + 5.3t$		
$y = 10x$		
$5x + 15 = y$		
$c = d + (-1)$		

5. Observen el recurso audiovisual [Comparación de gráficas](#) para completar la información acerca de cómo comparar gráficas de relaciones de variación lineal.



6. Utilicen el recurso informático [Gráficas de variación lineal](#) para practicar la obtención de expresiones de la forma $y = ax$ a partir de la gráfica.



7. En el portal de Telesecundaria encontrarás una referencia a una página web sobre gráficas de variación lineal.

■ Para terminar

Analiza las expresiones algebraicas:

$$y = 4x$$

$$y = \frac{3}{4}x$$

$$y = 5.6x$$

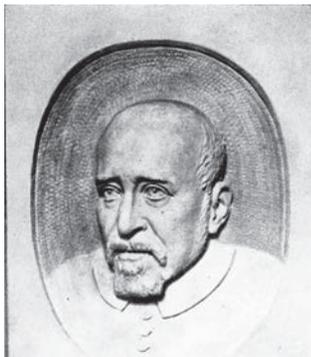
- Traza en una hoja cuadriculada la gráfica de cada una de las expresiones, usando un solo plano cartesiano para las tres gráficas.
- ¿Cuál tiene la menor inclinación?
- ¿Cuál tiene la mayor inclinación?
- ¿Cuál es la ordenada al origen de cada gráfica?
- Escribe cómo obtuviste la respuesta.



30. Ecuaciones 3

Sesión
1

■ Para empezar



Robert Recorde

Una ecuación nos dice que dos operaciones, aparentemente diferentes, tienen la misma respuesta. La clave de este hecho es el signo igual (=), el cual fue inventado por el matemático inglés Robert Recorde en el año de 1557.

Recorde utilizó este símbolo para evitar escribir las palabras “es igual a” y la razón que dio para usar dos líneas paralelas es que “no hay dos cosas que puedan ser más iguales”. Posteriormente, en 1591, el matemático francés François Viète desarrolló una notación algebraica en la que se representan las incógnitas con vocales (*a, e, i, o, u*) y a los valores constantes con consonantes.

En estas sesiones ampliarás tus conocimientos al plantear y resolver ecuaciones de las formas $ax + b = c$ y $ax + b = cx + d$. Te darás cuenta de que una ecuación sólo es cierta para un determinado valor de la incógnita y conocerás otras técnicas para resolver este tipo de ecuaciones.



François Viète

■ Manos a la obra

¿Cuánto vale el término que contiene x ?

1. Trabaja en equipo éste y el siguiente problema.

Doña Rosita compró 5 tamales y un atole de \$10.00. Si en total pagó \$50.00, ¿cuánto costó cada tamal?

- a) ¿Cuál de las ecuaciones corresponde al problema planteado? Subráyena.

$$5 + x + 10 = 50 \qquad 5x + 10 = 50 \qquad \frac{5}{x} + 10 = 50$$

- b) ¿Cuánto debe valer x en la expresión que corresponde al problema? _____
c) ¿Cuánto cuesta un tamal? _____

2. Una maestra organizó a su grupo en cuatro equipos, tres con el mismo número de integrantes y uno con los 8 alumnos restantes; si la maestra tiene 29 alumnos en total, ¿cuántos estudiantes son en cada equipo? _____

a) Subrayen la ecuación que corresponda al problema planteado.

$$\frac{x}{3} + 8 = 29$$

$$\frac{3}{x} + 8 = 29$$

$$3x + 8 = 29$$

b) ¿Cuánto vale x en la ecuación que expresa al problema? _____

c) ¿Cuántos integrantes tiene cada uno de los tres equipos? _____

3. Trabaja individualmente esta actividad.

A cada ecuación le corresponde una solución; resuelve cuál es y anota la letra en el paréntesis.



Ecuación	Solución
() $8x + 5 = 21$	a) $x = 5$
() $3x - 17 = 13$	b) $x = 3$
() $-27 = -11x + 6$	c) $x = 20$
() $\frac{1}{2}x + 5 = 15$	d) $x = 25$
() $-38 = -12x + 10$	e) $x = 10$
() $1.5x - 4 = 8$	f) $x = 8$
() $\frac{x}{5} + 13 = 18$	g) $x = 2$
() $-26 = -7x + 9$	h) $x = 4$

4. Comparen sus respuestas en grupo, discutan los casos en los que no coincidieron.

Después analicen la información.

Las ecuaciones lineales son ciertas sólo para un valor determinado, este valor **satisface** la ecuación y, por lo tanto, es la **solución**.

Otra manera de resolver las ecuaciones de la forma $ax + b = c$, además del “camino de regreso”, es la que consiste en averiguar el valor del término que contiene a x .

Por ejemplo, en la ecuación $4x + 7 = 31$, el término $4x$ debe valer 24, puesto que $24 + 7 = 31$, entonces, si $4x = 24$, ¿cuánto vale x ? ¿Qué número multiplicado por 4 da 24?

Amplificar para simplificar

Sesión
2

1. Analicen y anoten si las igualdades son verdaderas (V) o no (F). No utilicen calculadora.

a) $28(24) = 42(12)$ _____

b) $35(21) = 14(25)$ _____

c) $26(15) = 13(30)$ _____

d) $45(20) = 15(60)$ _____



2. Anoten el número que falta para que la igualdad sea verdadera.

a) $1 + 2 + 3 + 4 = 7 + \underline{\hspace{2cm}}$

b) $43 + \underline{\hspace{2cm}} = 57 + 11$

c) $\underline{\hspace{2cm}} + 67 = 50 + 31$

d) $40 + 33 = \underline{\hspace{2cm}} + 20$

3. Analicen la siguiente técnica para averiguar si la igualdad es verdadera. Después hagan lo que se indica.

$$(3) 28 (24) = 42 (12) (4)$$

$$(2) (3) \cancel{(4)} \cancel{(7)} \cancel{(12)} = \cancel{(7)} \cancel{(4)} \cancel{(12)} (6)$$

$$6 = 6$$

a) ¿En qué consiste la técnica? _____

b) ¿A qué conclusión podrían llegar? _____

4. Utilicen la técnica anterior para determinar si es verdadera la igualdad.

$$48 (17) = 34 (36)$$

5. Obtengan el número que falta para que la igualdad se cumpla.

$$\underline{\hspace{2cm}} + 67 = 50 + 31$$

$$\underline{\hspace{2cm}} + 50 + 17 = 50 + 17 + 14$$

6. Usen la técnica anterior para averiguar qué número falta en la igualdad.

$$38 + \underline{\hspace{2cm}} = 43 + 22$$



7. Determina de manera individual, utilizando la técnica anterior, si las ecuaciones se satisfacen.

$\frac{1}{4}x + 9 = \frac{1}{2}x + 8$	$10g - 5 = 8g + 7$	$5h + 8 = 4h + 13$
$9k + 15 = 5k + 23$	$8x - 15 = 6x + 7$	$3.5b + 8 = 6b - 4.5$
$4e - 14 = 3e + 11$	$2y + 6.5 = 1.5y + 10$	$7t - 25 = 4t + 14$

8. En grupo, comparen sus respuestas. En los casos en que no coincidan, identifiquen los errores y corrijan.



9. Observen el recurso audiovisual *Resolución de ecuaciones* con el fin de consolidar el estudio de la técnica de resolución que acaban de ver.



1. Trabaja individualmente la siguiente situación.

Doña Mago compró 3 kg de chiles verdes y \$11.00 de tomate en una tienda. En otra tienda compró 2 kg de chiles verdes y \$24.00 de cebolla. Si en cada tienda pagó la misma cantidad de dinero y el precio de cada kilogramo de chile verde fue el mismo en ambas tiendas, ¿cuánto costó un kilogramo de chile?

- a) Subraya la ecuación que representa el problema.

$$3 + x + 11 = 2 + x + 24 \quad \frac{3}{x} + 11 = \frac{2}{x} + 24 \quad 3x + 11 = 2x + 24$$

- b) Resuelve la ecuación que subrayaste. _____

- c) ¿Cuánto costó el kilogramo de chile? _____

- d) ¿Cuánto pagó en cada tienda? _____

- e) ¿Cuánto pagó en total? _____

2. En equipo, resuelvan esta actividad y la siguiente. Determinen si, con el valor de la incógnita indicada, la igualdad es verdadera o falsa.

		v	f			v	f
$6a - 2 = 4a + 12$	Si $a = 7$			$7u + 2 = 5u + 26$	Si $u = 12$		
$7w - 18 = 5w + 8$	Si $w = 15$			$12p = 7p + 20$	Si $p = 6$		
$4e + 5 = 2e + 9$	Si $e = 4$			$13d - 28 = 8 + 12$	Si $d = 4$		
$6r = 5r + 16$	Si $r = 16$			$2.5f - 5 = 1.5f + 10$	Si $f = 15$		
$6t + 8 = 5t + 17$	Si $t = 11$			$\frac{5}{6}y = \frac{1}{2}y + \frac{2}{3}$	Si $y = 2$		
$5y - 3.5 = 4y + 5.5$	Si $y = 8$						

3. Analicen el ejemplo y verifiquen la solución de las ecuaciones anteriores.

$8x + 4 = 5x + 13$ $5x + 3x + 4 = 5x + 4 + 9$ $3x = 9$ $x = \frac{9}{3}$ $x = 3$	<p style="text-align: center;">Comprobación</p> $8x + 4 = 5x + 13$ $8(3) + 4 = 5(3) + 13$ $24 + 4 = 15 + 13$ $28 = 28$
--	--



4. Comparen las respuestas que dieron a las actividades anteriores; en caso de que no coincidan, analicen y corrijan si es necesario.

¿Qué significa despejar la incógnita?

1. Haz individualmente ésta y las tres actividades siguientes. Plantea una ecuación, resuélvela en tu cuaderno utilizando el método de la balanza y responde las preguntas que se presentan.

Mario y Pedro tienen igual cantidad de canicas. Mario tiene cinco bolsas llenas y 13 canicas sueltas; a Pedro le faltan 12 canicas para tener seis bolsas llenas. A todas las bolsas les cabe la misma cantidad de canicas.

a) ¿Cuántas canicas tiene cada uno? _____

b) ¿Cuántas canicas le caben a cada bolsa? _____

2. Mateo y Luis trabajaron la misma cantidad de horas en una obra; Mateo trabajó cuatro jornadas, menos cinco horas; mientras que Luis trabajó tres jornadas, más dos horas.

a) ¿Cuántas horas por día trabajó cada uno? _____

b) ¿Cuántas horas en total trabajaron Mateo y Luis? _____



3. Si multiplico un número por 4 y al resultado le sumo 5, obtengo lo mismo que si lo multiplico por 3 y al resultado le resto 7. ¿Qué número es? _____

a) Escribe la ecuación que representa el problema. _____

b) Resuelve la ecuación en tu cuaderno y verifica que se satisface con la solución encontrada.

4. Resuelve las ecuaciones en tu cuaderno y subraya la opción correcta.

a) $8m + 4 = 5m + 13$

$m = 2$

$m = 3$

$m = 4$

$m = 12$

b) $5j - 7 = 4j + 2$

$j = -9$

$j = 9$

$j = 10$

$j = 11$

c) $25b - 10 = 21b + 18$

$b = 4$

$b = 6$

$b = 7$

$b = 8$



d) $8y - 7.5 = 6.5y + 9$

$y = 5$

$y = 7$

$y = 9$

$y = 11$

e) $17x - 8 = 11x + 16$

$x = 1$

$x = 4$

$x = 7$

$x = 24$

5. Comparen sus resultados en grupo y corrijan en caso de ser necesario. Luego, analicen la siguiente información.

Otra manera de resolver ecuaciones de la forma $ax + b = cx + d$ es mediante la **técnica de la balanza**. Con esta técnica se trata de simplificar la ecuación, pero sin descomponer los términos. Por ejemplo, para resolver la ecuación: $4g - 7 = 2g + 23$, se hace lo siguiente.

¿Qué tenemos?	¿Qué queremos?	¿Cómo le hacemos?	¿Qué obtenemos?
1) $4g - 7 = 2g + 23$	Eliminar $2g$ del segundo miembro.	Sumamos $-2g$ en ambos miembros. $4g - 7 - 2g = 2g - 2g + 23$	$2g - 7 = + 23$
2) $2g - 7 = + 23$	Eliminar -7 del primer miembro.	Sumamos $+7$ en ambos miembros. $2g - 7 + 7 = 23 + 7$	$2g = 30$
3) $2g = 30$	Despejar g .	Dividimos entre 2 ambos miembros. $\frac{2g}{2} = \frac{30}{2}$	$g = 15$

Despejar la incógnita significa llevar a cabo las operaciones necesarias para que se muestre como solución de la ecuación. Se llama técnica de la balanza porque se hace la misma operación en ambos miembros para mantener el equilibrio.

6. Observen el recurso audiovisual [La balanza](#), con la finalidad de ampliar su conocimiento sobre esta técnica de resolución de ecuaciones.



■ Para terminar

Se tienen las siguientes igualdades y el valor de cada una de sus incógnitas.

a) $6x + 12 = 42$

$x = 9$

b) $9y - 7 = 6y + 11$

$y = 6$

Resuelve la ecuación en tu cuaderno y verifica que los valores proporcionados sean correctos.

En caso de que algún valor no lo sea, indica cuál es el error y corrígelo justificando tu respuesta.

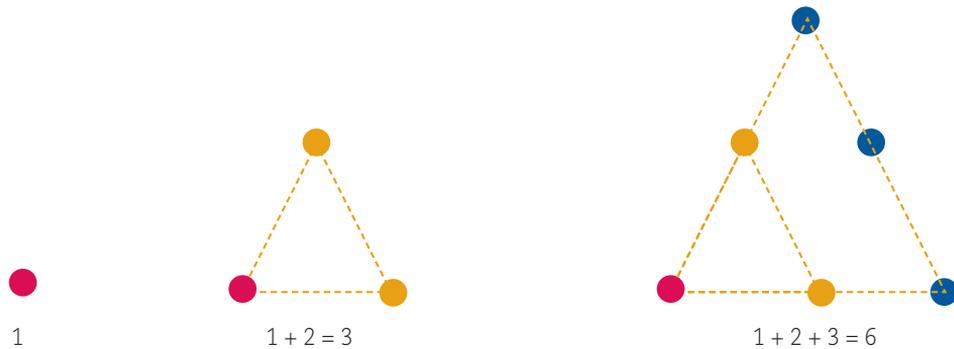


31. Sucesiones 2

Sesión
1

■ Para empezar

Algunas sucesiones de figuras tienen una historia interesante, por ejemplo, la de los números figurativos que fueron introducidos y estudiados por Pitágoras y sus discípulos. Observa esta sucesión que corresponde a los llamados números triangulares. Se tiene en cuenta el número de puntos (vértices) para generar la sucesión numérica que le corresponde. Ahora estudiarás otras sucesiones y determinarás las reglas que las generan.



■ Manos a la obra

¿Qué número falta?



1. Observen el recurso audiovisual *Pitágoras, su escuela y los números figurativos*, mediante el cual se percatarán de la importancia que tuvo la escuela de Pitágoras para las matemáticas.
2. Resuelve en pareja esta actividad y la siguiente. Consideren la siguiente sucesión numérica.

2, 7, 12, 17, 22, ...

- a) ¿Qué tienen en común los números de esa sucesión? _____

- b) Si se continuara la lista, ¿se escribiría el 77 como parte de ella? ¿Por qué? ____

- c) ¿El número 322 forma parte de esta lista? ¿Por qué? _____

3. Analicen la siguiente sucesión.

3, 6, 9, 12, 15, 18, ...

- El 3 ocupa el lugar 1 de la sucesión, el 6 ocupa el lugar 2, el 9 ocupa el lugar 3 y así sucesivamente. ¿Qué número ocupará el lugar 20? _____
- ¿Cómo lo calcularon? _____
- Si n es el lugar que ocupa un número en la sucesión, ¿cuál es la regla para calcular cualquier número de la sucesión? _____

4. Haz de manera individual el siguiente ejercicio.

- Anota los tres números que siguen en la siguiente sucesión.

7, 14, 21, _____, _____, _____, ...

- ¿Qué número ocupará el lugar 20? _____.
- ¿Cómo lo calculaste? _____

- Si n es el lugar que ocupa un número en la sucesión, ¿cuál es la regla para calcular cualquier número de la sucesión? _____

5. Comenten en grupo, con ayuda del maestro, sus resultados. Luego comparen las reglas que encontraron y analicen la siguiente información.

Cada uno de los números que forman una sucesión se llama **término**. En la sucesión 4, 8, 12, 16, ... el 4 ocupa el lugar 1, el 8 ocupa el lugar 2, el 12 ocupa el lugar 3 y así sucesivamente. Cada término de esta sucesión se obtiene multiplicando el lugar que ocupa por 4, por ejemplo en el lugar 20 estará el número

$$20 \times 4 = 80.$$

La regla para encontrar cualquier término de esta sucesión es $4n$, donde n es el lugar que ocupa el término (1, 2, 3, 4, ...).

6. Observen el recurso audiovisual [Reglas de sucesiones](#) para conocer más sucesiones, sus respectivas reglas y cómo calcular un término cuando se conoce el lugar que ocupa.



¿Cuál es la regla?

1. Reúnete con un compañero para hacer esta y las dos siguientes actividades. Completen la siguiente tabla para generar la sucesión numérica.

Lugar del término en la sucesión	Términos de la sucesión	Procedimiento para hallarlos	Procedimiento en lenguaje común
1	1	$(2 \times 1) - 1 = 1$	
2	3		
3	5		
4		$(2 \times 4) - 1 =$	
6	11		El doble del lugar que ocupa, menos uno.
20			
n			

2. Encuentren el procedimiento y la regla para cada una de las siguientes sucesiones.

Sucesión	Procedimiento en lenguaje común	Regla usando n para indicar el lugar del término
10, 20, 30, 40, 50, ...		
9, 19, 29, 39, 49, ...		
5, 10, 15, 20, 25, ...		
6, 11, 16, 21, 26, ...		

3. Relacionen cada regla con la sucesión que le corresponde.

- | | |
|-------------|------------------------|
| a) $5n + 2$ | () 7, 10, 13, 16, ... |
| b) $3n + 4$ | () 7, 11, 15, 19, ... |
| c) $2n + 5$ | () 7, 12, 17, 22, ... |
| d) $4n + 3$ | () 7, 9, 11, 13, ... |

4. De manera individual realiza las siguientes actividades.

Halla los primeros cuatro términos de las sucesiones.

- a) $n + 1$ _____
b) $6n$ _____
c) $3n - 2$ _____
d) $2(n + 1)$ _____
e) $3(n - 1)$ _____

5. Escribe la regla para hallar cualquier término de cada una de las siguientes sucesiones:

- a) 7, 10, 13, 16, 19, 22, ... _____
b) 5, 9, 13, 17, 21, 25, ... _____
c) 3, 7, 11, 15, 19, 23, ... _____

6. Con ayuda de su maestro, comparen en grupo las distintas fórmulas que hallaron en el ejercicio 2. ¿Qué tienen en común? ¿En qué son diferentes? Luego, comparen y analicen el resto de sus resultados. Si estos difieren, averigüen si son equivalentes. En caso necesario corrijan sus respuestas.

7. Observen el recurso audiovisual [Reglas equivalentes de sucesiones](#) para identificar si dos reglas de sucesiones son equivalentes.



8. Utilicen el recurso informático [Reglas de sucesiones](#) para reafirmar y practicar lo visto en estas sesiones.



■ Para terminar

En tu cuaderno anota una regla en lenguaje común que sea equivalente a cada una de las siguientes, justificando tu respuesta.

- a) $4(n - 2)$ b) $3(n - 2) + n$ c) $2(n + 2)$ d) $10n + 5$

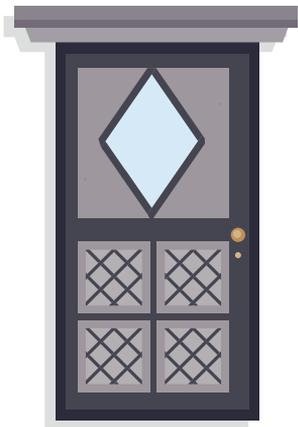
Luego, obtén los primeros cinco términos de las sucesiones, comprobando que forman parte de ellas. Finalmente, escribe cuál es el término que ocupa la posición número 20 para cada sucesión.



32. Existencia y unicidad 3

Sesión
1

■ Para empezar

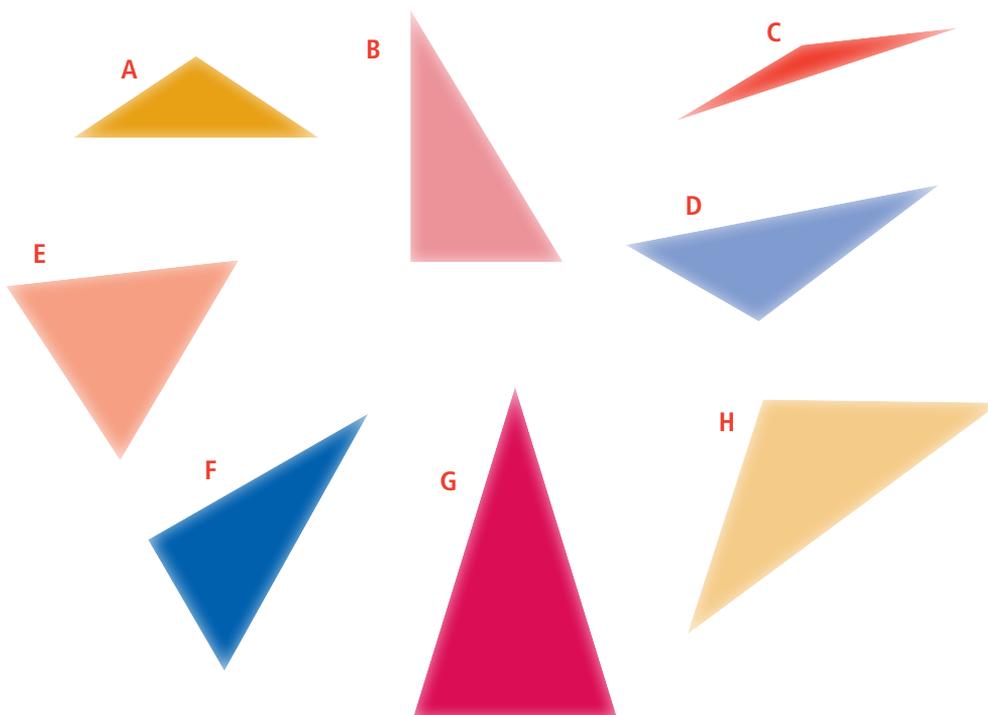


Claudia necesita cambiar el vidrio de su puerta. Cuando llega a la vidriería pide uno en forma de rombo que mida medio metro de lado. El vidriero lo corta con esa forma y medida; sin embargo, cuando va a casa de Claudia a colocarlo se da cuenta de que aunque los lados sí miden medio metro, el vidrio ¡no le queda a la puerta! ¿Qué crees que haya pasado?, ¿tendría Claudia que haberle dado otro dato? Al concluir las cinco sesiones aprenderás a responder preguntas como la anterior, tanto para triángulos como para paralelogramos.

■ Manos a la obra

Figuras con la misma forma y medida

1. Reúnete con un compañero para desarrollar ésta y las dos siguientes actividades. De los siguientes triángulos, ¿cuáles tienen la misma forma y la misma medida?



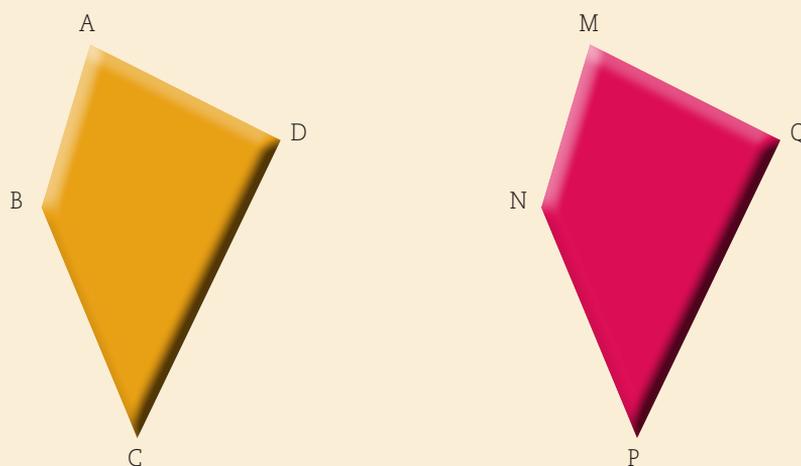
2. Tracen en una hoja blanca un triángulo cuyos ángulos midan 90° , 55° y 35° .
 - a) Recórtenlo y compárenlo con los triángulos de otras dos parejas.
 - b) ¿Tienen la misma forma? _____
 - c) ¿Sus lados miden exactamente lo mismo? _____

3. Tracen en una hoja blanca un triángulo cuyos lados midan 8 cm, 9 cm y 7 cm.
 - a) Recórtenlo y compárenlo con los triángulos de otras dos parejas.
 - b) ¿Su forma es exactamente igual? _____
 - c) ¿La medida de sus lados es exactamente la misma? _____

4. Comparen sus respuestas en grupo. En particular, comenten si en las actividades 2 y 3 se dio el caso de que hubiera triángulos con la misma forma y las mismas medidas. Por último, analicen y comenten la siguiente información.



Dos figuras que tienen la misma forma y las mismas medidas son figuras **congruentes**. Cuando dos figuras son congruentes pueden ponerse una encima de la otra y todos sus lados y ángulos coinciden. Los lados o los ángulos que coinciden se llaman correspondientes. Por ejemplo, los siguientes cuadriláteros son congruentes.



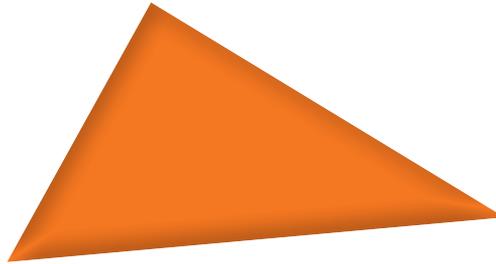
El lado AB es correspondiente al lado MN. El ángulo A es correspondiente al ángulo M.

5. Observen el recurso audiovisual [Figuras congruentes](#), mediante el cual aprenderán más sobre las propiedades de la congruencia.



Los mensajes

1. Reúnete con un compañero para hacer esta y las tres siguientes actividades.
 - a) En una hoja blanca tracen un triángulo y recórtelo. Nadie más debe verlo.



- b) En otra hoja escriban un mensaje para que otra pareja trace un triángulo que sea congruente con el de ustedes. Anoten los datos que sean necesarios.

Mensaje:

Construyan un triángulo que...

- c) Intercambien su mensaje con otra pareja.
 - d) Construyan el triángulo del mensaje que les tocó y recórtelo.
2. Comparen el triángulo que trazaron con el de la pareja con la que intercambiaron el mensaje.
 - a) ¿Son congruentes? _____
 - b) Si no son congruentes analicen si la falla estuvo en el mensaje o en el trazo que hicieron.
 3. Repitan la actividad anterior con las siguientes condiciones:
 - a) No pueden escribir en su mensaje la medida de los tres lados.
 - b) Sólo pueden escribir la medida de uno o dos lados y otros datos que consideren necesarios.
 4. Comenten en grupo sus mensajes. Identifiquen con cuáles sí pudieron construir triángulos congruentes y con cuáles no.
 5. Realiza de manera individual esta actividad.

¿Cuáles son los tres mensajes con los que es seguro que se puedan construir triángulos congruentes? Márquenlos.



Mensaje 1: Construyan un triángulo que tenga un lado de 4 cm y otro de 6 cm.

Mensaje 2: Construyan un triángulo que tenga un lado de 8 cm, otro de 6 cm y el otro de 9 cm.

Mensaje 3: Construyan un triángulo cuyos ángulos midan 50° , 30° y 100° .

Mensaje 4: Construyan un triángulo que tenga un lado de 9 cm, otro de 6 cm y un ángulo de 60° .

Mensaje 5: Construyan un triángulo que tenga un ángulo de 60° , otro de 40° y el lado adyacente a estos ángulos mida 10 cm.

Mensaje 6: Construyan un triángulo que tenga un lado de 8 cm, otro de 10 cm y el ángulo comprendido entre ellos mida 70° .

6. Comparen en grupo sus resultados.

Si hay mensajes en los que no coinciden, todos construyan de manera individual los triángulos indicados y verifiquen si las figuras resultantes son congruentes o no.

Criterios de congruencia

Sesión
3

1. Forma un equipo para hacer ésta y las dos siguientes actividades.

Analicen los triángulos que construyeron y los mensajes de la sesión anterior y anoten ✓ a las tres afirmaciones que son verdaderas.

Dos triángulos son congruentes si tienen respectivamente iguales dos ángulos.

Dos triángulos son congruentes si tienen respectivamente iguales dos lados.

Dos triángulos son congruentes si tienen respectivamente iguales tres ángulos.

Dos triángulos son congruentes si tienen respectivamente iguales dos lados y cualquiera de sus ángulos.

Dos triángulos son congruentes si tienen respectivamente iguales sus tres lados.

Dos triángulos son congruentes si tienen respectivamente iguales dos lados y el ángulo que forman.

Dos triángulos son congruentes si tienen respectivamente iguales dos ángulos y cualquiera de los lados.

Dos triángulos son congruentes si tienen respectivamente iguales un lado y los dos ángulos adyacentes a él.

2. Las afirmaciones que eligieron se llaman *criterios de congruencia de triángulos*. Se denominan según los lados o ángulos que tienen respectivamente iguales los dos triángulos. Completen las siguientes oraciones.



Los **criterios de congruencia de triángulos** son tres.

Criterio lado-lado-lado (**LLL**). Dos triángulos son congruentes si ...

Criterio lado-ángulo-lado (**LAL**). Dos triángulos son congruentes si ...

Criterio ángulo-lado-ángulo (**ALA**). Dos triángulos son congruentes si ...

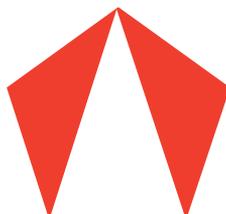
Comparen sus respuestas. En los casos en que no coincidan, identifiquen los errores y corrijan.



3. Contesta las preguntas.

a) El pentágono que se muestra tiene los lados iguales y los ángulos iguales, es un pentágono regular.

¿Cuál de los criterios de congruencia garantiza que los triángulos coloreados son congruentes? _____



b) Cuando trazas la diagonal de un cuadrado.

¿Qué criterio de congruencia garantiza la igualdad de los dos triángulos que se forman? _____



4. Comparen sus resultados en grupo. En caso de tener respuestas distintas, analicen por qué. Luego hagan un resumen en su cuaderno sobre los criterios de congruencia de triángulos.

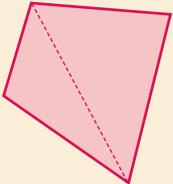


5. Observen el recurso audiovisual *Criterios de congruencia de triángulos* que muestra los criterios y ejemplos de ellos.

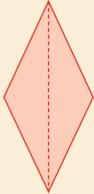


6. Utilicen el recurso informático *Criterios de congruencia de triángulos* para identificar el criterio que se usa para garantizar la congruencia en los casos presentados.

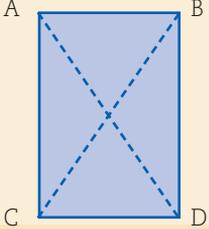
1. Forma un equipo para completar las siguientes tablas.
a) Suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero.

Hagan una hipótesis	Figura de apoyo	Preguntas para tratar de probar su hipótesis
¿Cuánto piensan que suman los ángulos interiores de un cuadrilátero? _____ _____	Se traza la diagonal de un cuadrilátero. 	a) ¿Cuántos triángulos se formaron? _____ b) ¿Cuánto suman los ángulos interiores de cada triángulo? _____ c) ¿Cuánto suman los ángulos interiores del cuadrilátero? _____
¿Su hipótesis fue falsa o verdadera? _____		

- b) Ángulos opuestos de un rombo.

Hagan una hipótesis	Figura de apoyo	Preguntas para tratar de probar su hipótesis
¿Qué relación piensan que tienen los ángulos opuestos de un rombo? _____ _____ _____	Se traza la diagonal de un rombo. 	a) ¿Los triángulos que se forman son congruentes? _____ b) ¿Qué criterio de congruencia lo garantiza? _____ c) ¿Los ángulos correspondientes de triángulos congruentes son iguales? _____
¿Su hipótesis fue falsa o verdadera? _____		

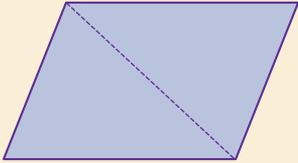
- c) Las diagonales de un rectángulo.

Hagan una hipótesis	Figura de apoyo	Preguntas para tratar de probar su hipótesis
¿Qué relación piensan que tienen las diagonales de un rectángulo? _____ _____ _____	Se trazan las dos diagonales del rectángulo. 	a) ¿Los triángulos ACD y BDC son congruentes? _____ b) ¿Qué criterio de congruencia lo garantiza? _____ c) ¿Los lados correspondientes de triángulos congruentes son iguales? _____
¿Su hipótesis fue falsa o verdadera? _____		





d) Los ángulos opuestos de un romboide.

Hagan una hipótesis	Figura de apoyo	Preguntas para tratar de probar su hipótesis
¿Qué relación piensan que tienen los ángulos opuestos de un romboide? _____ _____ _____	Se traza una diagonal del romboide. 	a) ¿Los triángulos son congruentes? _____ b) ¿Qué criterio de congruencia lo garantiza? _____ c) ¿Los ángulos correspondientes de triángulos congruentes son iguales? _____
¿Su hipótesis fue falsa o verdadera? _____		

2. En grupo, comparen sus hipótesis y respuestas con las de los otros equipos. En caso de que difieran, analicen por qué.



3. Observen el recurso audiovisual *Propiedades de los paralelogramos* que muestra cómo usar los criterios de congruencia para probar algunas propiedades de los paralelogramos.

Sesión
5

¿Existe el cuadrilátero?

1. Reúnete con un compañero para hacer las actividades de esta sesión. En cada caso, antes de trazar el cuadrilátero mencionen si existe o no un cuadrilátero con las medidas que se indican. Si no se puede, argumenten su respuesta; en caso contrario, trácenlo.

a) Un cuadrilátero cuyos ángulos midan 30° , 50° , 100° y 120° ,

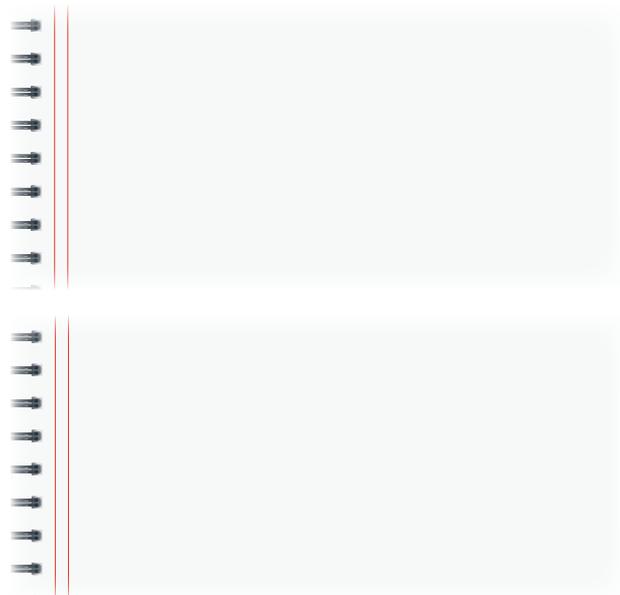
¿se puede trazar? _____

Argumenten su respuesta. _____

b) Un romboide cuyos ángulos midan 60° , 120° , 60° y 120° ,

¿se puede trazar? _____

Argumenten su respuesta. _____



- c) Un rombo cuyos lados midan 5 cm y que tenga tres ángulos de 60° , ¿se puede trazar? _____
Argumenten su respuesta. _____

- d) Un rectángulo que tenga una diagonal de 6 cm y otra de 5 cm, ¿se puede trazar? _____
Argumenten su respuesta. _____

- e) Un rombo cuyos lados midan 4 cm y que tenga dos ángulos de 120° , ¿se puede trazar? _____
Argumenten su respuesta. _____



2. Comparen sus resultados, argumentos y trazos con su grupo. Entre todos determinen cuál o cuáles datos podrían cambiar en los cuadriláteros que no se pudieron trazar para que sí se puedan hacer.

Cuadrilátero	Datos iniciales	Datos ya cambiados

3. En el portal de Telesecundaria encontrarás una referencia a una página web sobre los triángulos, sus características y sus propiedades.

■ Para terminar

Un conjunto de datos determina una figura única si se construyen varias figuras con esos datos y todas son congruentes. ¿Un cuadrado queda determinado de manera única si se da sólo la medida de su diagonal? Argumenta en tu cuaderno la respuesta.



33. Perímetros y áreas 3

Sesión
1

■ Para empezar



Para medir los kilómetros que han recorrido, los automóviles suelen tener un dispositivo cuentakilómetros, que también lleva el nombre de odómetro. ¿Cómo mide los kilómetros que recorre un automóvil?, ¿cuál es la relación entre el kilometraje que marca el odómetro y el tema de los perímetros? El odómetro utiliza una vuelta de la rueda para medir la distancia. Si una llanta tiene un diámetro de 62 cm, ¿cuántas vueltas tiene que dar para que el cuentakilómetros marque un kilómetro más? A lo largo de tres sesiones verás la relación

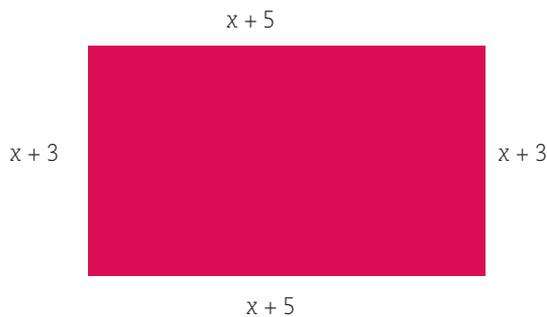
que tiene la rueda de una llanta, un círculo, con el recorrido lineal que hace al rodar, que es su perímetro.

■ Manos a la obra

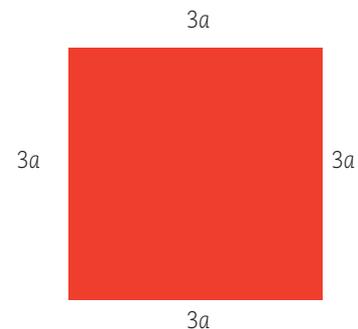
Perímetros

1. Realiza todas las actividades de esta sesión de manera individual.

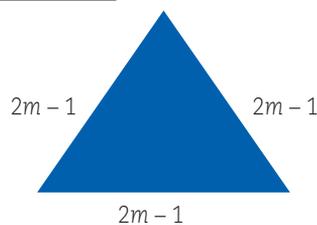
Debajo de cada figura anota su perímetro.



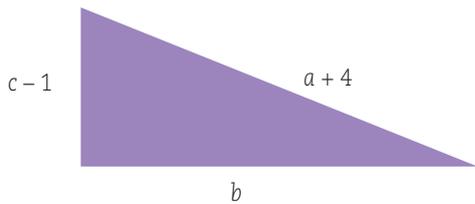
P= _____



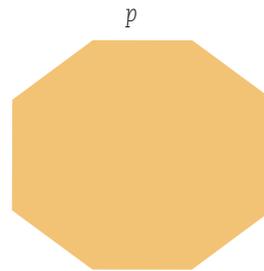
P= _____



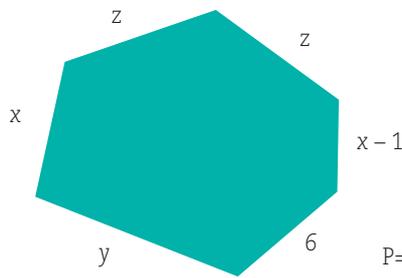
P= _____



P= _____



P= _____

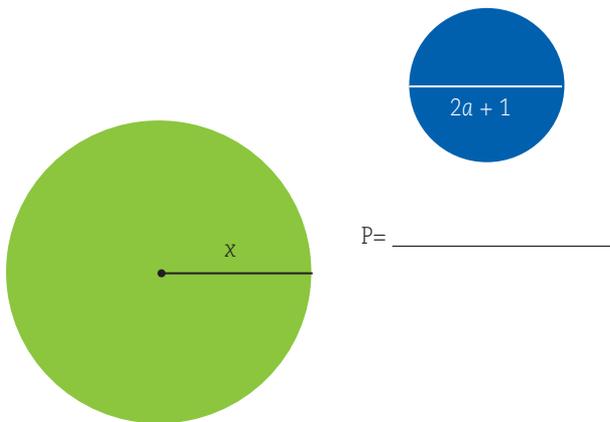


P= _____

2. Responde:

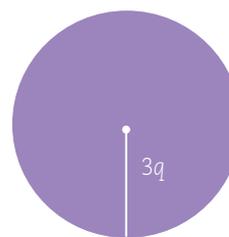
- Si el perímetro del rectángulo es 34 cm, ¿cuánto vale la x ? _____
- Si el perímetro del cuadrado es 48 cm, ¿cuánto vale la a ? _____
- Si el perímetro del triángulo equilátero es 27 cm, ¿cuánto vale la m ? _____

3. Anota el perímetro de cada uno de los círculos.



P= _____

P= _____



P= _____

4. Si el perímetro del círculo lila es 37.68 cm, ¿cuánto vale q ? (Considera $\pi = 3.14$)

5. Comenten en el grupo qué hicieron para obtener la expresión que representa el perímetro de las figuras y para calcular el valor de las literales.



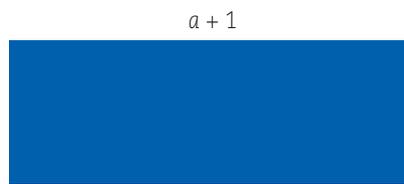


6. Observen el recurso audiovisual *Expresiones algebraicas para calcular perímetros* donde se muestra cómo se expresa el perímetro de figuras geométricas mediante expresiones algebraicas.

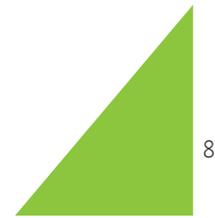
Sesión
2

Áreas

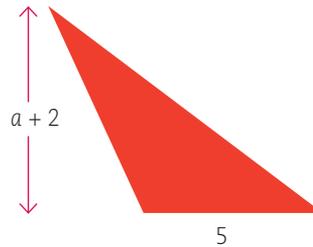
1. Reúnete con un compañero para hacer ésta y las dos siguientes actividades. Anoten debajo de cada figura su área.



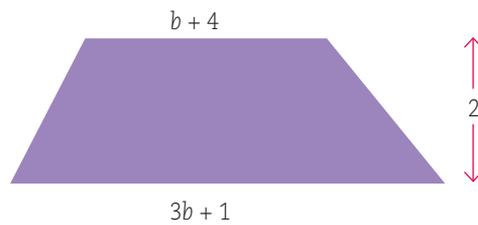
A= _____



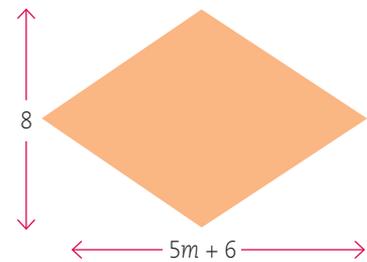
A= _____



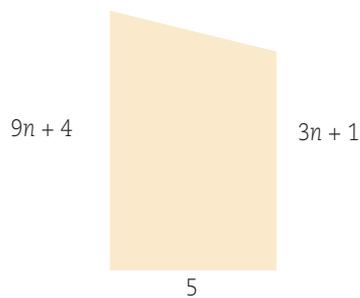
A= _____



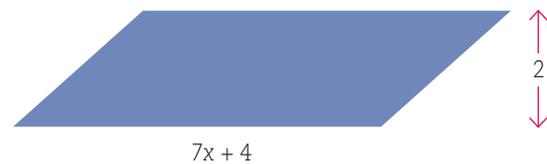
A= _____



A= _____



A= _____



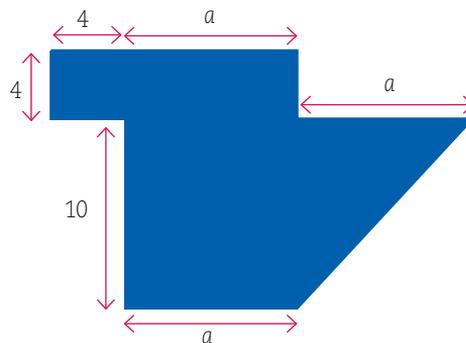
A= _____

2. Respondan:

- a) Si el área del rectángulo es 48 cm^2 , ¿cuánto vale a ? _____
- b) Si el área del trapecio lila es 37 cm^2 , ¿cuánto vale b ? _____
- c) Si el área del romboide es 36 cm^2 , ¿cuánto vale x ? _____

3. ¿Cuál es el área de la figura?

A = _____



4. Responde de manera individual.

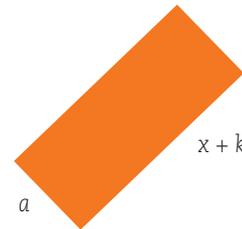
Anota el perímetro o el área según se indique.



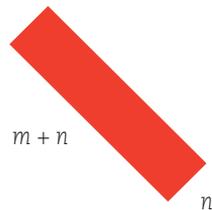
A = _____



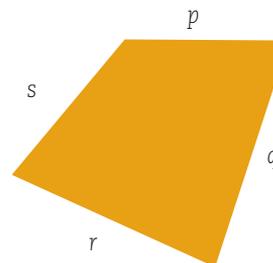
P = _____



A = _____



P = _____



P = _____

5. Compara tus respuestas con las del grupo. Si son diferentes, analicen si se trata de expresiones equivalentes.

Vínculo con...
Matemáticas

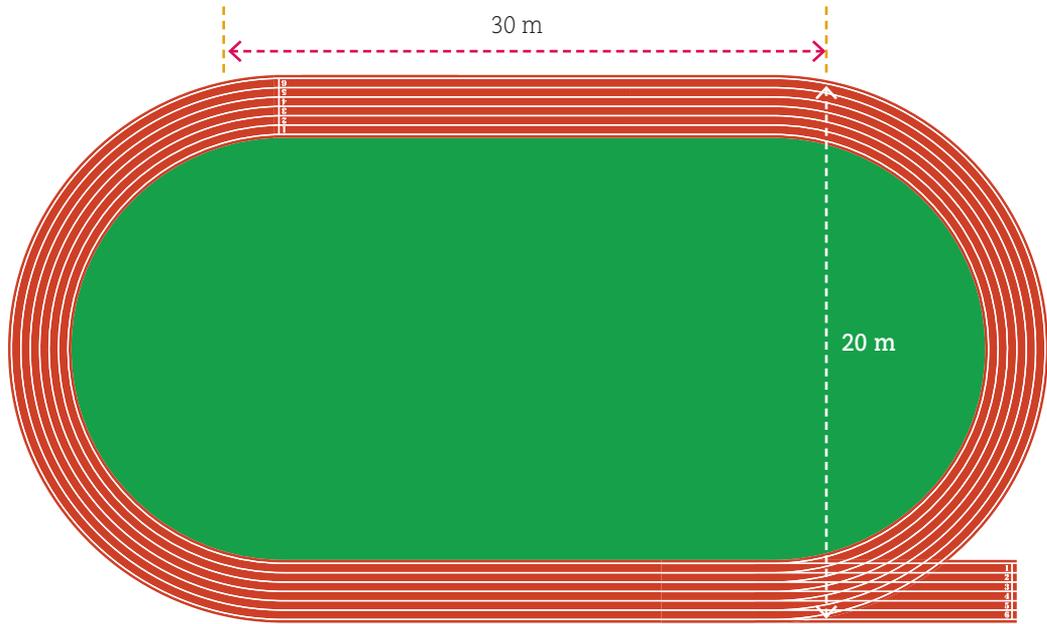
Recuerda que en el Bloque 1 ya analizaste las áreas de varias figuras geométricas mediante la utilización de las ecuaciones de primer grado. Puedes repasar las páginas de la 58 a la 61.



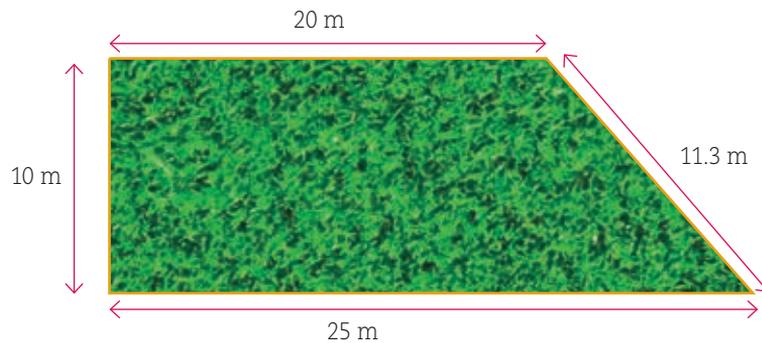
Perímetros y áreas en situaciones reales

Sesión
3

1. Forma un equipo para hacer ésta y las dos actividades que siguen.
Clara corre todos los días alrededor de una pista como la siguiente.
Si todos los días da 10 vueltas a la pista ¿qué distancia corre? (Considera $\pi = 3.14$)

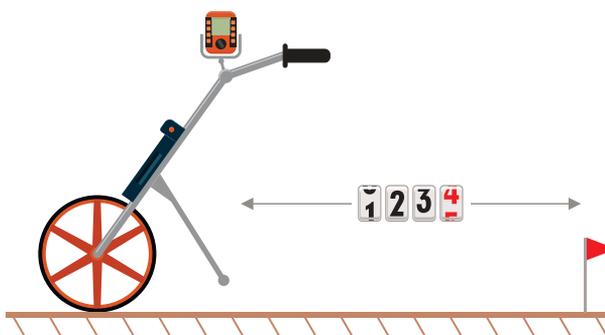


2. Este jardín se va a cubrir con pasto y se pondrá una cerca de madera alrededor.

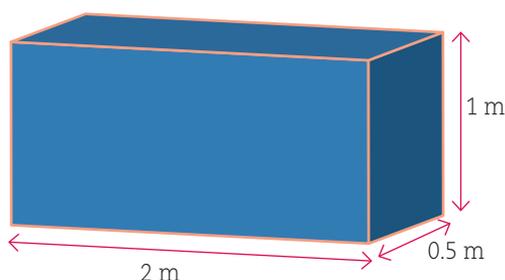


- a) ¿Cuántos metros cuadrados de pasto se requieren? _____
- b) ¿Cuántos metros medirá la cerca? _____

3. El aparato que se ilustra, un *odómetro de rueda*, sirve para medir longitudes. ¿Cuánto mide el diámetro de su rueda si en cada vuelta avanza un metro?
(Considera $\pi = 3.14$)



4. Resuelve de manera individual estas dos actividades.
Saúl va a forrar una gran caja con tela que cuesta \$70.00 el metro cuadrado.



- a) ¿Cuál es el mínimo de tela que necesita comprar? _____
b) ¿Cuánto dinero va a gastar para comprar esa cantidad de tela? _____
5. Don Mario, el albañil, cobra \$90.00 por pegar un metro cuadrado de azulejo.
¿Cuánto cobrará por pegar azulejo en un piso rectangular que mide 5 metros de largo por 6.5 metros de ancho? _____
6. Con apoyo de su maestro, comparen sus resultados en grupo. Si tienen errores, corríjanlos.
7. Observen el recurso audiovisual *Áreas y perímetros en situaciones reales* en el cual se muestra la utilidad de saber calcular áreas y perímetros en la vida real.



■ Para terminar

Traza en tu cuaderno un rectángulo cuyo perímetro sea $4a + 8$ y su área $6a + 3$.

- a) ¿Cuál expresión algebraica es su base?
b) ¿Y su altura?
c) Explica cómo determinaste la base y la altura del rectángulo.



34. Volumen de prismas 3

Sesión
1

■ Para empezar



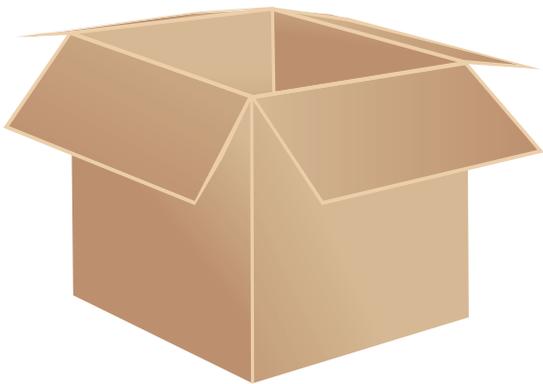
Los recipientes son objetos usados para contener y conservar diversos productos; pueden estar hechos de muy distintos materiales, como cuero, arcilla, piedra, metal, vidrio, madera, plástico, u otros más. En el interior hueco de los recipientes se puede almacenar o verter diferentes productos. La capacidad es una magnitud que los caracteriza y puede medirse en litros, mililitros, decilitros, pero

también puede medirse en unidades cúbicas. En estas sesiones continuará tu aprendizaje acerca del volumen y su relación con la capacidad.

■ Manos a la obra

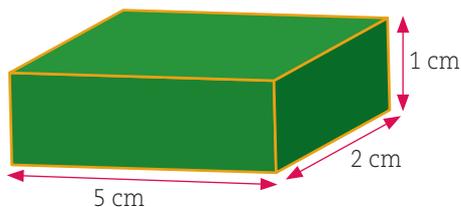
¿Cuánto le cabe?

1. Reúnete con un compañero para trabajar todas las actividades de esta sesión. La imagen muestra una caja en forma de cubo sin tapa y un cubo de madera, ambos con las mismas medidas. Respondan las preguntas y argumenten sus respuestas.

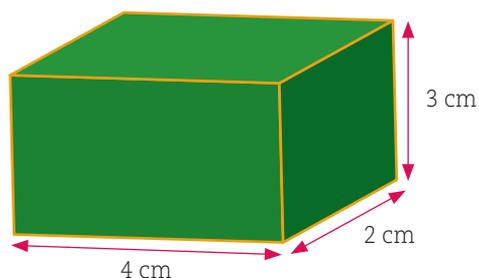


- a) ¿Tienen el mismo volumen? _____
- b) ¿Les cabe lo mismo a los dos?, es decir, ¿tienen la misma capacidad? _____

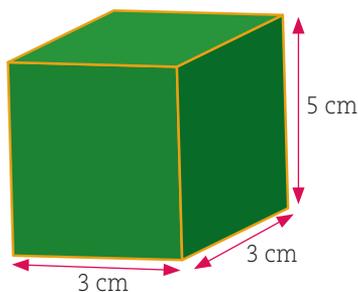
2. Se van a empaquetar dados de 1 cm^3 en las cajas. Anoten cuántos dados le caben a cada una y también calculen su volumen.



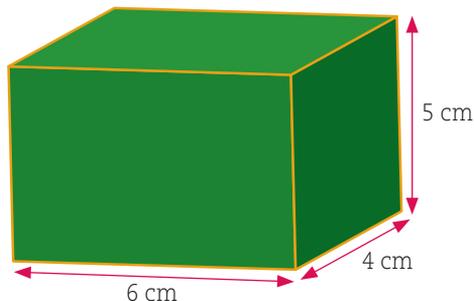
Número de dados: _____
 Volumen: _____



Número de dados: _____
 Volumen: _____



Número de dados: _____
 Volumen: _____



Número de dados: _____
 Volumen: _____

3. Comparen sus respuestas con las de las otras parejas. En particular, comenten:

- ¿Es lo mismo capacidad que volumen? _____
- ¿Hay cuerpos que tienen el mismo volumen pero diferente capacidad? _____

- La fórmula para calcular el volumen, ¿sirve también para calcular la capacidad?

- Si su respuesta a la pregunta anterior es afirmativa, ¿en qué casos? _____

4. Con todo su grupo comparen sus respuestas. Luego lean y comenten la siguiente información.

Todos los cuerpos tienen **volumen** porque todos ocupan espacio, pero no todos tienen **capacidad** porque no todos pueden contener algo. Los cuerpos que tienen capacidad son los recipientes. La capacidad de un recipiente corresponde al volumen del cuerpo que lo llena.





5. Observen el recurso audiovisual *Capacidad* en donde conocerán más acerca de esta magnitud.

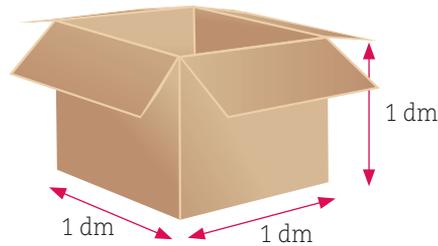
El dm^3 y el litro

1. Trabajen todas las actividades de esta sesión en pareja.

Necesitan tres recipientes diferentes que tengan capacidad de un litro y arroz suficiente para llenar uno de ellos. Además, requerirán una cartulina, su juego de geometría, tijeras y pegamento.



- a) Construyan con cartulina un cubo cuya arista mida 10 cm, es decir, un decímetro.



- b) El cubo que armaron tiene capacidad de un decímetro cúbico (dm^3). ¿Piensan que su capacidad es mayor a un litro, menor o igual? _____
- c) Usen los recipientes de un litro y el arroz para comprobar su respuesta.
2. A partir de su resultado anterior anoten en la tabla las medidas que deberían tener los recipientes que tienen la capacidad indicada. A continuación contesten las preguntas; en cada caso justifiquen su respuesta.

	Largo	Ancho	Altura
Más de un litro			5 cm
Un litro		8 cm	
Menos de un litro	10 cm		
10 litros			4 dm
1 000 litros		1 m	

- ¿A cuántos centímetros cúbicos equivale un decímetro cúbico? _____
- ¿A cuántos mililitros equivale un centímetro cúbico? _____
- Imaginen un cubo de un metro de arista. Su volumen es 1 metro cúbico, se simboliza: 1 m^3 . ¿A cuántos decímetros cúbicos equivale un metro cúbico? _____
- ¿Cuántos litros caben en un tinaco en forma de cubo que mide un metro de arista? _____

3. Comenten con el grupo sus hallazgos y respuestas y lean la siguiente información.

Un decímetro cúbico equivale a un litro.

Un decímetro cúbico equivale también a 1 000 centímetros cúbicos, entonces un centímetro cúbico equivale a un mililitro.

Un metro cúbico equivale a 1 000 decímetros cúbicos, es decir, a 1 000 litros.

4. Observen el recurso audiovisual *Relación entre volumen y capacidad* en donde conocerán más acerca de estas dos magnitudes.



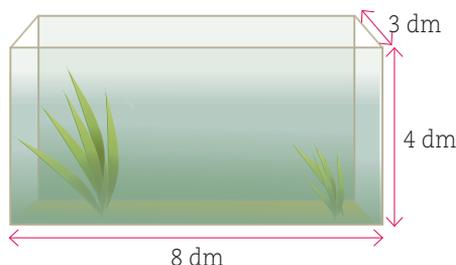
5. Para resolver problemas de conversión entre unidades de volumen y capacidad consulta las direcciones electrónicas: http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/2esomatematicas/2quincena10_contenidos_1a.htm y http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/2esomatematicas/2quincena10/2quincena10_ejercicios_1b.htm.



Sesión
3

Volumen y capacidad

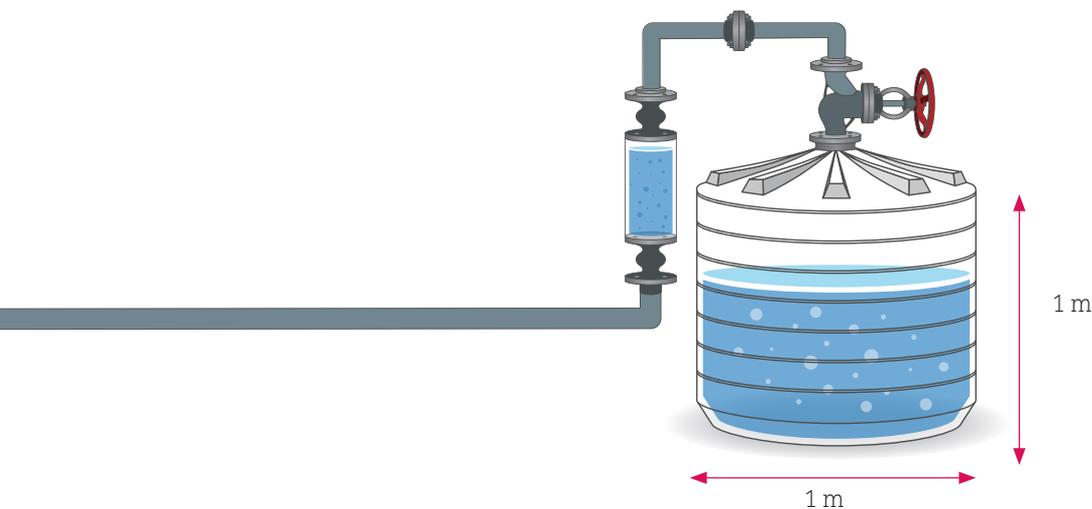
1. Reúnete con un compañero para resolver este y los tres problemas siguientes. Se recomienda que haya 4 litros de agua por cada pez de cierto tipo. ¿Cuántos peces como máximo pueden estar en la siguiente pecera si se sigue esta recomendación?



2. La familia Suárez quiere construir una cisterna para almacenar agua en su casa. La van a hacer en forma de prisma rectangular y quieren que contenga 1500 litros de agua. Anoten tres posibles medidas para construir una cisterna de esa capacidad:

- a) _____, _____, _____
- b) _____, _____, _____
- c) _____, _____, _____

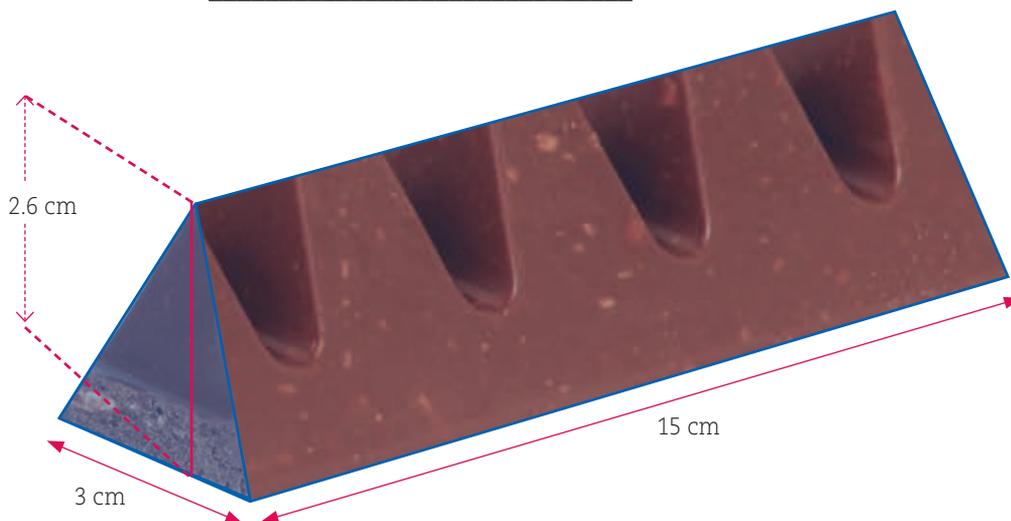
3. La imagen representa un tinaco para agua.



Lo alimenta una llave de la que salen 8 litros de agua por minuto. ¿En cuánto tiempo se va a llenar? _____

4. Calculen el volumen del chocolate de mayor tamaño que cabe en esta caja. El triángulo es equilátero y mide de altura 2.6 cm.

Volumen: _____



5. Resuelve de manera individual los siguientes problemas.

Una fábrica de jugos está planeando venderlos en tres presentaciones: un cuarto de litro, medio litro y un litro. Quiere hacer los envases en forma de prismas rectangulares. Anota las medidas que pueden tener cada uno de los envases que se indican.

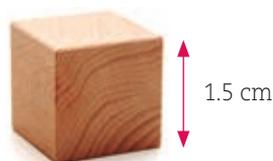
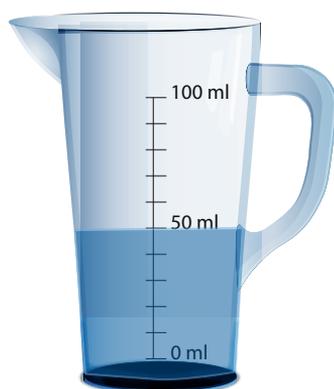
a) Para un cuarto de litro: _____

b) Para medio litro: _____

c) Para un litro: _____

6. Si para el envase de un cuarto de litro se quiere que la base sea un rectángulo que mida 7 cm por 5 cm, ¿cuál deberá ser su altura? _____

7. Se tiene un recipiente como el siguiente, graduado en mililitros y lleno de agua hasta los 50 ml. Si se introduce el cubo de la derecha, ¿a qué número llegará el nivel del agua?



8. En grupo, comparen sus respuestas. ¿En cuáles problemas hay más de una respuesta correcta?, ¿por qué? _____

9. Observen el recurso audiovisual [La capacidad en nuestra vida](#) mediante el que conocerán más acerca de la importancia de estudiar la magnitud *capacidad*.



■ Para terminar

Un mililitro es la milésima parte de un litro, ¿cuántos mililitros de agua caben en una cisterna en forma de cubo que mide un metro de arista? Explica en tu cuaderno cómo calculaste la respuesta.



35. Gráficas circulares 2

Sesión
1

■ Para empezar



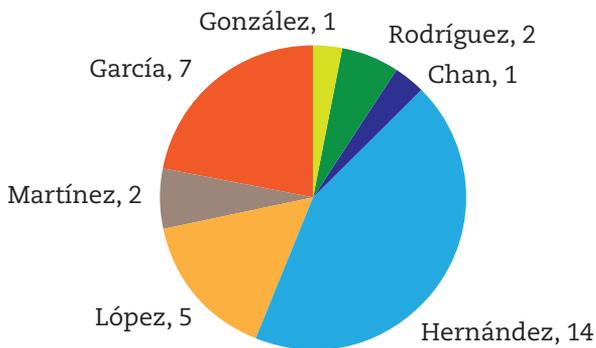
La información estadística generalmente se presenta en tablas de frecuencia y gráficas. Las representaciones gráficas tienen el propósito de revelar visualmente el comportamiento de los datos, de ahí que sea importante seleccionar adecuadamente el tipo de gráfica que se utilizará para representar de manera correcta los datos que se quiere comunicar. ¿Cuántos tipos de gráficas estadísticas conoces? Busca algunos ejemplos y observa qué tipo de información se presenta en esas gráficas. En las dos siguientes sesiones continuarás con la elaboración, lectura e interpretación de gráficas circulares o de sectores.

■ Manos a la obra

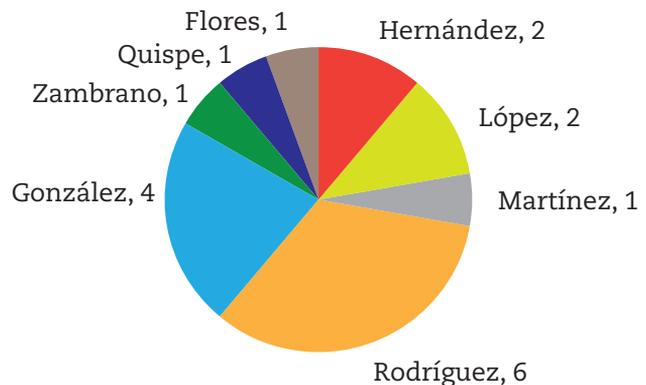
El apellido, una estadística más

1. Forma un equipo para realizar ésta y la siguiente actividad. Relacionen cada gráfica con el mapa que le corresponda.

APELLIDOS MÁS FRECUENTES EN _____



APELLIDOS MÁS FRECUENTES EN _____



1. LOS APELLIDOS MÁS FRECUENTES EN LATINOAMÉRICA



Fuente: https://elpais.com/internacional/2016/08/18/actualidad/1471533988_249052.html?rel=mas

2. LOS APELLIDOS MÁS FRECUENTES EN MÉXICO



Fuente: https://elpais.com/internacional/2017/01/25/actualidad/1485359370_555984.html

- Completan el título de cada gráfica circular.
- Expliquen qué representa cada uno de los sectores circulares. _____

- En la primera gráfica, ¿cuál es la frecuencia mayor? _____
- ¿A qué dato corresponde? _____
- ¿Y cuál es la frecuencia más alta en la segunda gráfica? _____
- ¿Cuántos países latinoamericanos están considerados? _____
- ¿En cuántos de esos países el apellido más frecuente es López? _____
- ¿Qué proporción representan del total? _____
- Completa la frase: En México el segundo apellido más frecuente es _____, mientras que en los países latinoamericanos que hablan español es _____

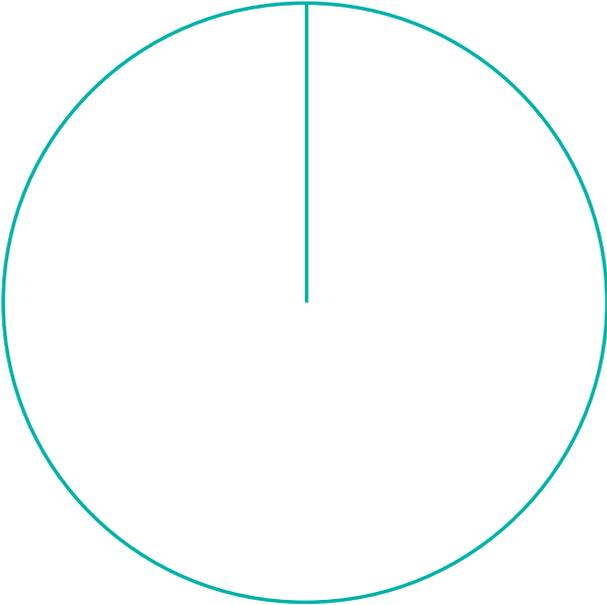
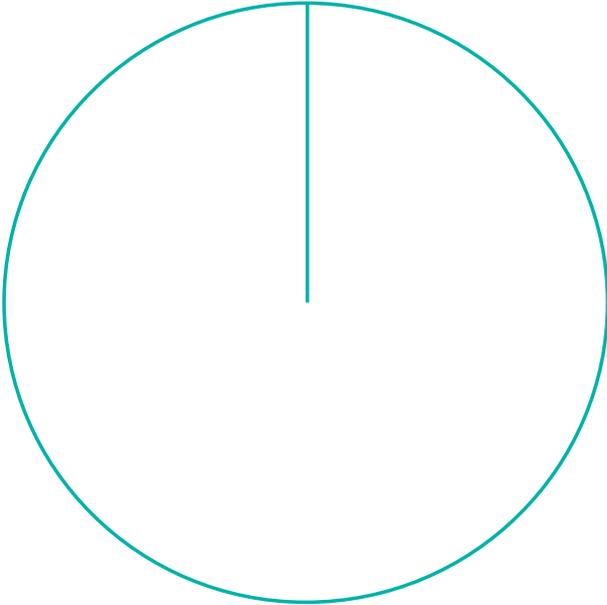
Dato interesante

El idioma español lo hablan alrededor de 392 millones de personas y, por su importancia, es uno de los idiomas oficiales en la ONU.

- Lleven a cabo un sondeo e identifiquen cuáles son los apellidos más frecuentes en su grupo y en su escuela.
 - Elaboren en su cuaderno las tablas de frecuencia que les correspondan, expresando el resultado en forma de porcentaje y de frecuencia relativa (fracción y decimal).



- b) Tracen las gráficas circulares para cada situación, en la escuela y en su grupo. Si es posible, utilicen una hoja de cálculo electrónica para elaborarla.

	
El apellido más frecuente en....	

- c) ¿Cuál es el apellido más frecuente en cada caso? _____
- d) Completen la frase que aparece después de las gráficas, de acuerdo con los resultados de ambos casos.
- e) Comparen sus resultados con los de la actividad 1. ¿Coinciden o son diferentes? Justifiquen su respuesta. _____

3. Con ayuda de su maestro, expresen en el grupo las conclusiones que pueden obtenerse con base en su ejercicio.



4. Observen el recurso audiovisual [Construcción de gráficas circulares mediante hoja de cálculo](#) para que aprendan a elaborar gráficas circulares.

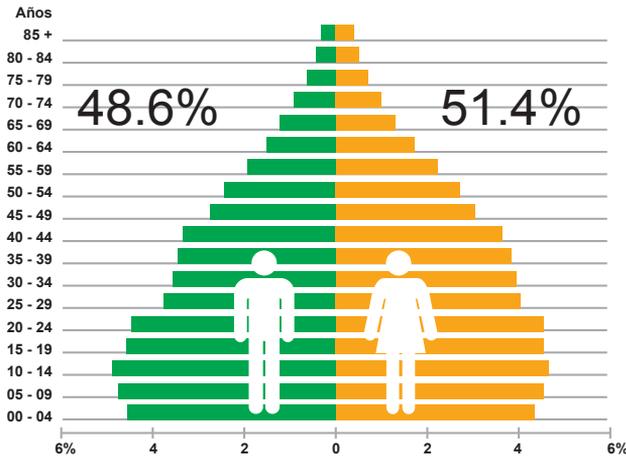
1. Reúnete con un compañero para hacer esta actividad y la siguiente.
Lean la siguiente infografía que se publicó en 2016. Realicen lo que se pide.



- a) ¿A qué se refiere la información? _____
- b) ¿Qué se conmemora y en qué fecha? _____
- c) ¿Cuántos millones de personas vivían en México en 2015? _____
- d) ¿De cada 100 personas, ¿cuántas están en edad productiva? _____



- e) Consideren el primer dato que muestra la infografía sobre la población total en México y la siguiente gráfica piramidal que muestra los porcentajes de la distribución de la población por sexo y por grupos de cinco años.



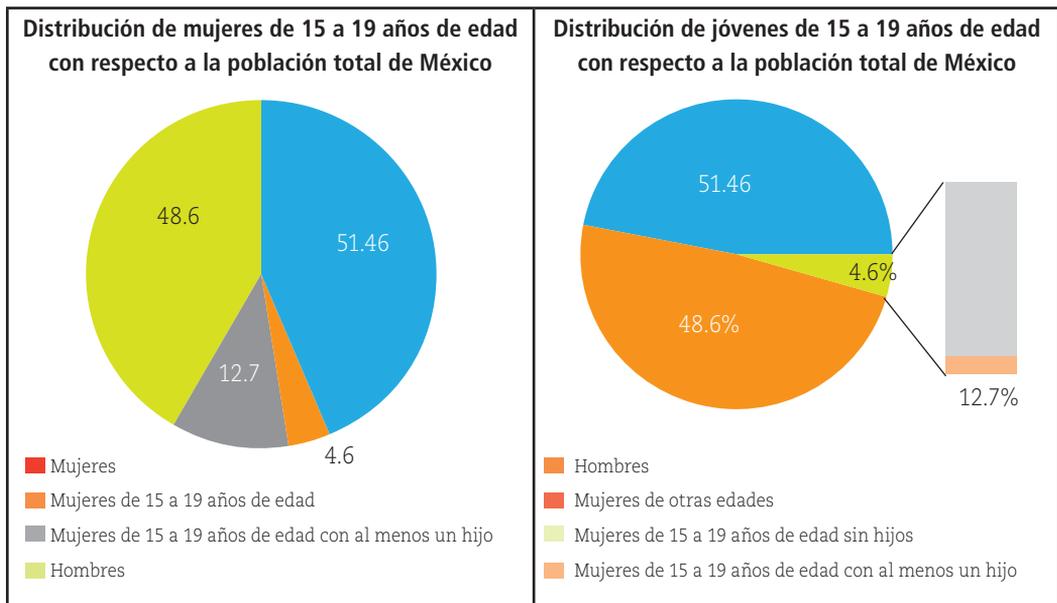
Fuente: Inegi, Encuesta intercensal 2015, en <http://www.inegi.org.mx/temas/estructura/>

- f) ¿Qué tanto por ciento representan las jóvenes de 15 a 19 años, aproximadamente? _____
- g) ¿Aproximadamente cuántas jóvenes de 15 a 19 años hay? _____

2. Consideren el siguiente dato sobre las adolescentes de 15 a 19 años de edad.



Marquen con una ✓ la gráfica circular que represente correctamente la información del porcentaje de las jóvenes de 15 a 19 años de edad con al menos un hijo.



3. Resuelve esta actividad de manera individual, considerando la siguiente información.



De las y los jóvenes de 20 a 24 años de edad  27.5% cuenta con estudios de nivel superior.

Elabora en tu cuaderno una gráfica circular que muestre el porcentaje con respecto a toda la población.

4. Con la ayuda de su maestro comparen sus respuestas en grupo. Luego analicen la siguiente información y coméntenla.

Las **gráficas circulares o de sectores** se utilizan principalmente para representar datos cualitativos o atributos (color de cabello, apellido, nombres, entre otros).

Permiten mostrar y comparar el tamaño relativo de las partes que componen un todo; por eso pueden expresarse en frecuencias, frecuencias relativas (en forma de fracción y decimal) y porcentajes.

5. Utilicen el recurso informático *Gráficas circulares* para practicar más la construcción e interpretación de gráficas circulares.
6. En el portal de Telesecundaria encontrarás una referencia a una página web sobre los diferentes tipos de gráficas que existen.



■ Para terminar

En tu cuaderno elabora una gráfica circular que muestre correctamente la siguiente información.

3.5% de las niñas y los niños de 6 a 14 años de edad  y 37.3% de las y los adolescentes (15 a 19 años de edad) no asiste a la escuela.

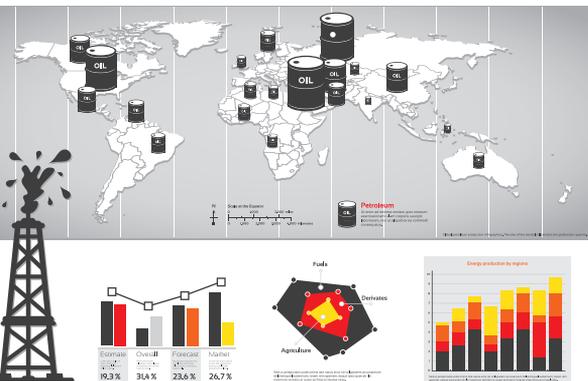
Escribe en el cuaderno cómo construiste la gráfica y cuál es la medida de los ángulos de los sectores que representan cada dato.



36. Medidas de tendencia central 2

Sesión
1

■ Para empezar



Es común que al final de un año se presenten noticias e informes sobre el resultado de diversas situaciones, por ejemplo, la producción anual de petróleo, su precio promedio de venta, su porcentaje de ganancia o pérdida, entre otros aspectos. Cuando los datos se agrupan, organizan y procesan para elaborar reportes, generalmente se utilizan gráficas y números que llamamos estadísticas. A lo largo de las dos siguientes sesiones analizarás algunas de las propiedades que tienen las medidas de

tendencia central, así como su utilidad para determinar cuál medida conviene usar como promedio para representar a un conjunto de datos.

■ Manos a la obra

Comportamiento de las medidas de tendencia central

1. Forma un equipo para trabajar esta actividad y las dos que siguen.

En la tabla se muestra el precio de una lata de atún en 5 tiendas diferentes.

Tienda	1	2	3	4	5
Precio de la lata de atún	\$14.90	\$16.25	\$14.90	\$15.90	\$16.75

- a) ¿Es correcto decir que el precio promedio de una lata es de \$19.00? Procuren contestar usando sólo el cálculo mental. Justifiquen su respuesta.

- b) Ubiquen en la siguiente gráfica el menor precio registrado de la lata de atún y luego el mayor. Pueden marcar un punto sobre la línea o arriba de ella.

Precios de una lata de atún (\$)



- c) Calculen la media aritmética, la moda y la mediana del precio.

- d) Ubíquenlos y etiquétenlos en la gráfica.
- e) ¿Entre qué datos se encuentran las medidas de tendencia central? _____

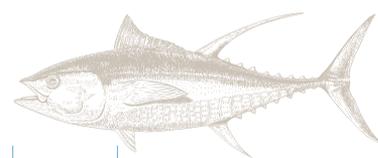
- f) ¿Alguno de los valores de las medidas de tendencia central que obtuvieron es igual al valor de algún dato? En caso afirmativo, anótenlos. _____

- g) ¿Siempre sucederá esto? Justifiquen su respuesta. _____

2. Supongan que en la tienda 3 el precio de lata de atún está en oferta y es \$11.50.

- a) Digan lo que ocurrirá con el precio máximo, el precio mínimo, la media aritmética, la moda y la mediana.
- b) Obtengan los valores de la media aritmética, la moda y la mediana. Usen una calculadora para efectuar los cálculos.
- c) Representen la situación en la gráfica. Utilicen distintos colores para distinguir la media aritmética, la moda y la mediana de los precios registrados.

Precios de una lata de atún (\$)



3. Supongan que hubo un cambio de precios y ahora el precio de una lata de atún es de \$19.45.

- a) ¿Qué valores se mantienen y qué valores cambian? _____

- b) Obtengan los valores de la media aritmética, la moda y la mediana.

- c) Representen en la misma gráfica de la actividad anterior los datos y valores que corresponden a esta actividad para analizar los cambios acontecidos.



d) Analicen y describan cuáles son los cambios obtenidos en los promedios. _____



4. Comparen sus respuestas con todo el grupo, y con ayuda de su maestro, describan en su cuaderno lo que ocurre con los valores de las medidas de tendencia central en cada situación basándose en las representaciones gráficas.
5. Observen el recurso audiovisual *¿Cómo cambia la media aritmética?* cuyo propósito es observar la manera en que valores muy grandes o muy pequeños afectan el valor de esa medida.

Estadísticas familiares

1. Reúnete con un compañero y realicen ésta y la siguiente actividad.
Completen la tabla con cuatro de los precios que se registraron en la actividad 1 de la primera sesión.
a) Calculen el valor de las medidas de tendencia central. Usen calculadora.

Situación 1					
Tienda	1	2	3	4	5
Precio de la lata de atún		\$100.00			

Media aritmética: _____ Moda: _____ Mediana: _____

- b) Ahora completen la tabla con los mismos cuatro valores que registraron en el inciso anterior y calculen nuevamente las medidas de tendencia central.

Situación 2					
Tienda	1	2	3	4	5
Precio de la lata de atún		\$0.00			

Media aritmética: _____ Moda: _____ Mediana: _____

- c) Completen el siguiente cuadro para comparar los valores de las medidas de tendencia central en cada conjunto de datos.

Situación	Precio mínimo	Precio promedio (media aritmética)	Precio más frecuente (moda)	Precio que corresponde a la mediana	Precio máximo
1					
2					

- d) ¿Cuáles son los valores de los promedios que cambian y cuáles se mantienen?

- e) Describan de qué manera afectan los precios de cero y cien pesos a los valores de los promedios. _____
- f) ¿Cuántos datos están involucrados en el cálculo de la media aritmética del inciso b)? _____

2. Se hizo una encuesta para conocer el número de hermanos que cada alumno del grupo tiene. Los datos registrados fueron:

0, 3, 3, 4, 4, 0, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 1, 0, 5, 1, 2, 4, 1, 2

- a) Organiza los datos en la tabla.
- b) En ese grupo, ¿cuál número de hermanos es el más frecuente? _____
- c) ¿Cuál es la media aritmética del número de hermanos? _____
- d) ¿Cuál es el valor de la mediana del conjunto?

- e) Si no consideran el número máximo de hermanos, ¿qué ocurre con el valor de la media aritmética y de la mediana? _____
- f) Si no consideran el número mínimo de hermanos, ¿qué pasa con el valor de la media aritmética y de la mediana? _____
- g) ¿Cuál de las tres medidas de tendencia central consideran que representa mejor al conjunto de datos? _____

Números de hermanos	Número de alumnos (frecuencia)





3. Resuelve individualmente esta actividad. Analiza el conjunto de datos y responde en tu cuaderno lo que se pide.

Se preguntó a 37 familias acerca del número de computadoras que tienen, los datos obtenidos son:

Número de computadoras	Número de familias (frecuencia absoluta)
0	4
1	8
2	15
3	10

- ¿La media aritmética puede ser de 4 computadoras? Justifica tu respuesta.
- Determina la media aritmética, la mediana y moda del conjunto de datos.
- Describe de qué manera afecta el valor nulo (ninguna computadora) para obtener la media aritmética.
- Escribe tres frases que se refieran al valor de la media, mediana y moda, respectivamente, de manera que des una interpretación a esos valores.
- Con respecto al número de computadoras que una familia tiene, ¿cuál de las tres medidas utilizarías como promedio? Justifica tu respuesta.

4. Comparen sus respuestas en grupo. Luego analicen y comenten la siguiente información.

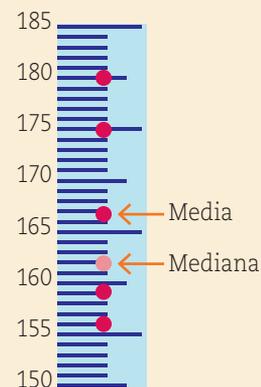
Glosario

Peso drenado:

hay alimentos que se envasan en un medio líquido. En ellos, el peso drenado es el peso del producto sólido una vez que se le ha escurrido el líquido de relleno.

Los valores de la **media aritmética**, la **mediana** y la **moda** se localizan entre los valores máximos y mínimos de los datos e incluso pueden tener un valor igual a uno de los datos.

Por ejemplo, la gráfica de la derecha muestra el registro del peso drenado de 5 latas de atún, junto con el valor del **peso drenado** promedio.



En este caso, el valor de la media aritmética es un valor diferente al de los datos, pero el de la mediana es igual que uno de ellos; ambos valores están entre el dato mínimo y el máximo.

Para calcular la media aritmética se consideran todos los datos, sin importar si se repite un mismo valor o si todos son diferentes o si alguno es cero. Por esa razón, cuando hay algún valor muy grande o pequeño, el valor de la media aritmética varía. En esos casos, la mediana es una mejor opción, porque se mantiene en el centro de los datos.

El valor de la moda siempre es igual que el valor de un dato del conjunto, pues corresponde a la mayor frecuencia, pero no necesariamente es uno de los datos centrales. Cuando todos los datos tienen la misma frecuencia, puede considerarse que no existe moda (o que todos los datos son moda, lo cual no es lógico).

5. Observen el recurso audiovisual [Propiedades de las medidas de tendencia central](#) para complementar y recapitular la información sobre las propiedades de las medidas de tendencia central.
6. En el portal de Telesecundaria encontrarás una referencia a una página web sobre las medidas de tendencia central.



■ Para terminar

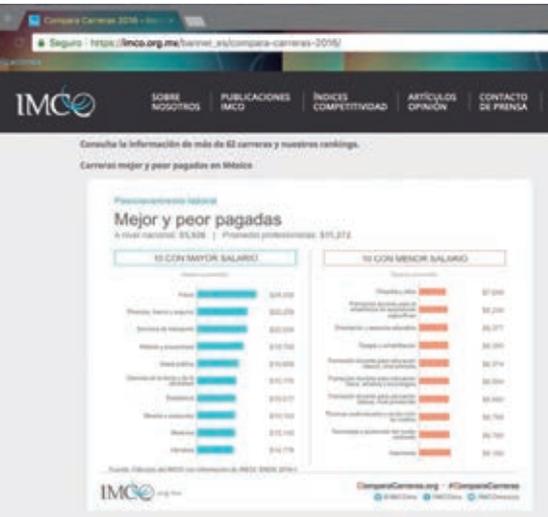
En tu cuaderno resuelve este problema. Se le preguntó a un grupo de personas la cantidad de dinero que habían gastado en la compra de productos para su alimentación. Las respuestas fueron: \$350.00, \$390.00, \$280.00, \$930.00, \$620.00, \$250.00. El valor que corresponde a la media aritmética de estas compras fue \$470.00. Después se agregaron los datos de dos compras por la cantidad de \$1970.00 cada una. ¿Cómo influyen estas dos cantidades en los valores de las medidas de tendencia central? ¿Cuál consideras que es la medida de tendencia central que te conviene utilizar como promedio representativo del conjunto? Justifica tu respuesta y anota la manera en que determinaste cada medida de tendencia central.



37. Medidas de tendencia central 3

Sesión
1

■ Para empezar



La mayoría de las empresas, instituciones o personas crean y utilizan datos para tomar decisiones; por lo tanto, se espera que tales decisiones se basen en información confiable y verdadera. Veamos un ejemplo: el Instituto Mexicano para la Competitividad (IMCO) en el año 2017 realizó un estudio sobre las profesiones mejor y peor pagadas. Como resultado nos ofrece la información de la izquierda. A través de las siguientes sesiones aprenderás a tomar decisiones bien fundamentadas y te darás cuenta de que una de las herramientas que emplea la estadística para sus análisis son las medidas de tendencia central.

■ Manos a la obra

Media aritmética, ¿la “mejor” medida?

Carreras mejor pagadas

Sueldo promedio nacional: \$6 185.00 Sueldo promedio profesionistas: \$11 961.00

10 CON MAYOR SALARIO

Salario promedio

Química	\$33 266.00
Servicios de transporte	\$17 951.00
Física	\$17 771.00
Minería y extracción	\$17 048.00
Finanzas, banca y seguros	\$16 720.00
Estadística	\$16 674.00
Salud pública	\$16 334.00
Farmacia	\$16 329.00
Ciencias ambientales	\$15 400.00
Medicina	\$15 224.00

Fuente: Cálculos del IMCO con información del Inegi. ENOE 2016-I, ENOE 2016-II ENOE 2016-III, ENOE 2016-IV.

1. Reúnete con un compañero para hacer esta y las dos siguientes actividades. Analicen los datos de la gráfica para completar el cuadro. Pueden usar calculadora.



El mayor salario	
Media aritmética	
Mediana	
Moda	
El menor salario	

- Ubiquen en la tabla anterior los valores de la media aritmética y de la mediana.
- ¿Cuál es la diferencia entre el mejor salario y el del décimo lugar? _____
- En esta situación, ¿qué medida representa mejor al conjunto de datos, la media aritmética o la mediana? _____

- Comparen sus respuestas y analicen qué cambios ocurren con las medidas de tendencia central si no se considera al mejor de los 10 salarios.

Valores sin considerar el valor máximo	
Media aritmética	
Mediana	
Moda	
Valor mínimo	

- Identifiquen cuáles valores de las medidas de tendencia central se mantienen y cuáles cambian. _____
- ¿Cuál es ahora la diferencia entre el salario de la posición 10 y la posición 2? _____

- Marquen con una ✓ cuál o cuáles afirmaciones son verdaderas para ambos casos, es decir, con el mayor salario y sin él.

- La media aritmética de los salarios es de \$18 271.00.
- La diferencia entre los diez mejores salarios llega a ser mayor que el 200%.
- La media aritmética de los mejores salarios se encuentra entre \$16 600.00 y \$16 700.00.





4. Realiza de manera individual esta actividad.

Analiza ahora la información que presenta la gráfica con las 10 profesiones con menor salario y completa el siguiente cuadro. Puedes usar la calculadora.

Valor mínimo	
Media aritmética	
Mediana	
Moda	
Valor máximo	



Fuente: Cálculos del IMCO con información del Inegi. ENOE 2016-I, ENOE 2016-II, ENOE 2016-III, ENOE 2016-IV.

5. En grupo analicen sus respuestas, en particular las del ejercicio 2. Luego lean la siguiente información y, con ayuda del maestro, analíenla.

El valor de los datos mayor y menor de un conjunto de datos sin agrupar se conoce como valor extremo **máximo** y **mínimo**, respectivamente. La diferencia entre esos valores se le llama **rango** y es una medida que indica qué tan alejados están los datos entre sí (**dispersión de datos**). Cuando el valor del rango es grande indica que los datos están muy separados entre sí (**disgregados**). En cambio, mientras menor sea la diferencia, los datos estarán más cercanos, es decir, más agrupados.



6. Observen el recurso audiovisual *El Inegi* que les permitirá conocer la manera en que se obtienen, organizan y procesan los datos y cómo estos se convierten en estadísticas.

Estadísticas en el servicio médico

1. Forma un equipo para realizar esta actividad y la siguiente.

En un hospital se registra el número de consultas al servicio de urgencias que hay durante cada mes, entre otras razones, para determinar el número de médicos que deben tener para atender la demanda. El siguiente registro diario corresponde a las consultas atendidas en noviembre y diciembre.

Noviembre	Diciembre
3, 1, 13, 4, 2, 4, 5, 6, 7, 3, 4, 5, 3, 2, 5, 6, 15, 21, 4, 3, 6, 40, 13, 6, 17, 13, 6, 6, 12, 26.	10, 5, 13, 14, 12, 14, 5, 16, 17, 13, 14, 5, 13, 12, 25, 26, 15, 21, 24, 13, 16, 100, 13, 16, 17, 13, 26, 26, 12, 26.

a) Organicen los datos y obtengan lo que se pide. Usen calculadora.

Medida	Noviembre	Diciembre	Bimestre
Media aritmética			
Mediana			
Moda			
Rango			

b) ¿En qué mes el rango de consultas es mayor? _____

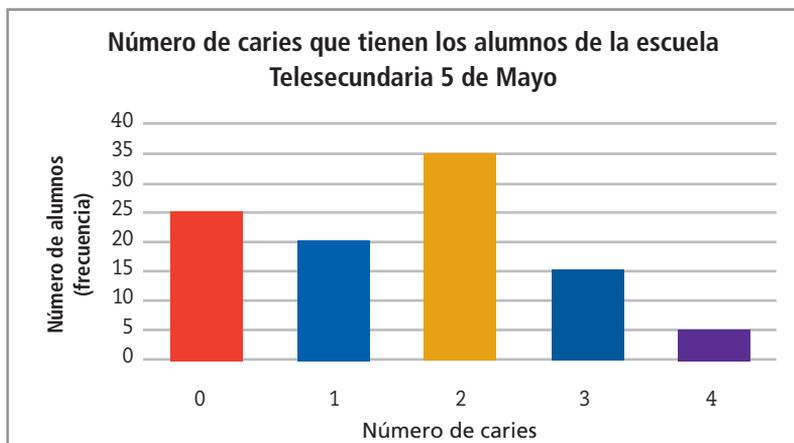
c) ¿Entre qué valores se concentra más el número de consultas? _____

2. Supongan que un médico puede atender adecuadamente hasta ocho pacientes. Si el responsable del servicio debe contratar el número de médicos que atienda a los pacientes lo más pronto posible:

a) ¿Qué medida de tendencia central le conviene considerar para determinar el número de médicos a contratar? _____

b) ¿Cómo conviene contratar a los médicos, por mes o por bimestre? Justifiquen su respuesta. _____

3. Resuelve de manera individual. Un dentista identifica el número de caries en cada uno de los 100 alumnos de una telesecundaria. Los datos registrados se muestran en la gráfica.



- a) ¿Cuál es la media aritmética de caries entre los alumnos? _____
- b) Ubica en la gráfica ese valor.
- c) Calcula la moda y la mediana de los datos. _____
- d) Si el dentista debe contar con suficiente material para atender a los alumnos, ¿qué medida le conviene considerar para prepararlo? _____

4. Con apoyo del maestro revisen todas sus respuestas y analícenlas; en caso de que haya diferentes respuestas determinen por qué.



5. Observen el recurso audiovisual *Las medidas de tendencia central* para saber más sobre las características de los valores de la media, mediana, moda y rango en un conjunto de datos.

Estadísticas en el grupo

1. Reúnete con un compañero para hacer esta actividad.

En la clase de Educación Física se registraron los tiempos de los 10 estudiantes de dos grupos diferentes que corren la distancia de 100 metros planos más rápido.

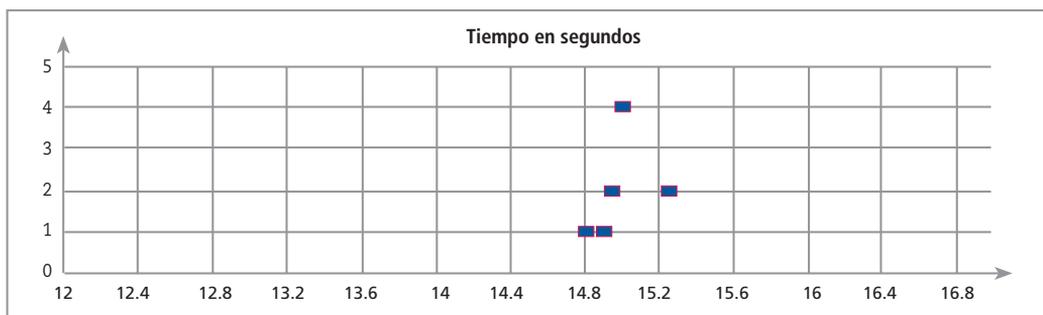
Los tiempos registrados, en segundos, son:

Grupo A	15.25, 14.95, 15.25, 15, 14.8, 15, 14.9, 15, 14.95, 15
Grupo B	12.5, 13.75, 15.95, 14, 14.9, 15, 15.9, 15, 13.75, 14

a) Calculen los valores de las medidas de tendencia central y rango.

Medida	Grupo A	Grupo B
Media aritmética		
Mediana		
Moda		
Rango		

b) Completen la gráfica, ubiquen los diez datos de cada grupo y sus respectivos valores de las medidas de tendencia central.



c) ¿Qué grupo consideran que tiene mejor desempeño al correr los 100 metros?
¿Por qué? _____

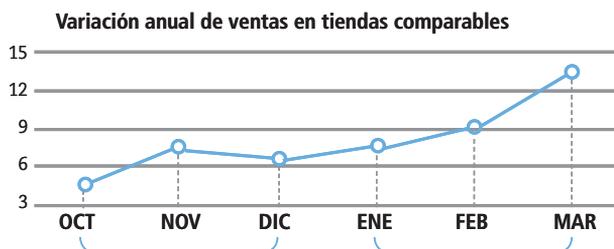
2. Comparen sus respuestas con las de sus compañeros de grupo; si no coinciden, analicen por qué.
3. Observen el recurso audiovisual [Relación entre el rango y la posible dispersión de los datos](#) para conocer más sobre esta relación.
4. Utilicen el recurso informático [Las medidas de tendencia central y el rango](#) para que practiquen la obtención de estos elementos.



■ Para terminar

En tu cuaderno, resuelve el problema y responde las preguntas.

Las ventas de las sucursales de la tienda *Mercadito* crecieron en el mes de marzo, como se muestra en la gráfica.



- a) Obtén las tres medidas de tendencia central de la variación de las ventas, en esos seis meses, para las sucursales del *Mercadito*.
- b) Anota la manera en que obtienes cada medida y cuál es la que consideras que representa mejor la variación de estas ventas, justificando tu respuesta.
- c) ¿Cuál es el rango de la variación entre las ventas de las sucursales en los últimos seis meses?



38. Probabilidad 2

Sesión
1

■ Para empezar

Aunque ya en el siglo XVI, los juegos de azar se comenzaron a estudiar desde un punto de vista científico, el surgimiento de la probabilidad como estudio matemático sistemático se llevó a cabo hasta el siguiente siglo, debido a la inquietud por saber si el azar podría controlarse o preverse. Al evolucionar con el tiempo, la probabilidad se convirtió en una ciencia sobre la que se fundamentan tanto la física de todo el siglo XX como la industria desarrollada por las aseguradoras (seguros de vida, de auto, de hogar, etcétera). A continuación se ofrecen algunos datos de la historia de esa rama de las matemáticas.



1. Los juegos de azar tienen una antigüedad de más de 40 000 años; se utilizaban tanto en ceremonias religiosas como en el juego.



2. En 1520, el matemático italiano Gerolamo Cardano escribió *El libro de los juegos de azar* y se publicó un siglo después.

3. En el siglo XVII, Fermat y Pascal trataron de resolver algunos problemas relacionados con los juegos de azar.



4. En el siglo XVIII se desarrolló una nueva aplicación del cálculo de probabilidades: los seguros marítimos.



5. En el siglo XIX nació la industria de los seguros, la cual requiere un conocimiento exacto del riesgo de perder, con el objeto de poder calcular los contratos, llamados también pólizas.



En las dos siguientes sesiones continuarás analizando los juegos de azar y conocerás el cálculo de la probabilidad frecuencial.

■ Manos a la obra

El juego de “La escalera”

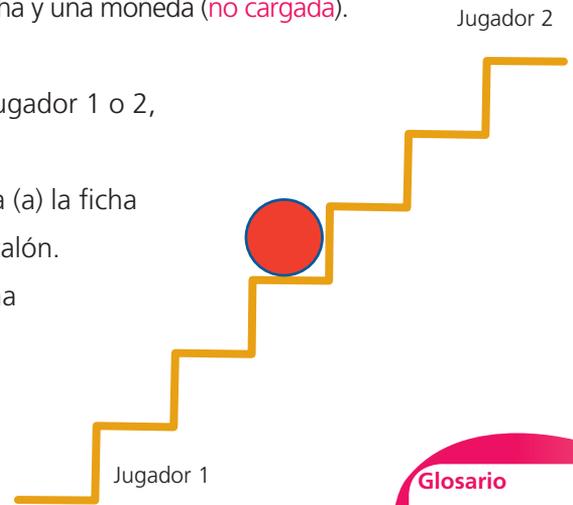
1. Reúnete con un compañero para jugar el juego de la escalera y para hacer todas las actividades de esta sesión. Cada quien requiere de una ficha y una moneda (no cargada).

Instrucciones:

- Cada uno escoge el inicio o el fin de la escalera (jugador 1 o 2, respectivamente).
- Por turnos se lanza la moneda al aire, si cae águila (a) la ficha sube un escalón, si sale sol (s), la ficha baja un escalón.
- Se continúa con los lanzamientos hasta que alguna ficha llegue al extremo contrario al que inició.

Cuando esto suceda, el jugador al que le pertenezca esa ficha gana. Antes de empezar, hagan su predicción.

- ¿Quién creen que gane? _____
- ¿En cuántos lanzamientos creen llegar al inicio o al final de la escalera? _____
- Elaboren en su cuaderno una tabla en la que puedan registrar los resultados de cada lanzamiento (a si es águila o s si es sol). ¡A jugar!



2. Contesten lo que se pide.

- ¿Acertaron a su predicción de quién ganaría? _____
- ¿Acertaron al número de lanzamientos con que terminarían el juego? _____
- ¿Cuántos lanzamientos en total hicieron en el juego? _____
- ¿Cuántas veces cayó el resultado de quien ganó el juego? _____
- ¿Cuántas veces cayó águila? _____
- ¿Cuántas cayó sol? _____

3. Realicen una vez más el juego y anoten en sus cuadernos cada resultado.

- ¿Creen que ocurra lo mismo que en el juego anterior? _____
- ¿Qué creen que ocurra ahora? _____
- ¿Quién ganará y en cuántos lanzamientos lo hará? _____
- ¿Caerá más veces águila que sol, o viceversa? _____
- ¿Pueden observar algún patrón en el número de veces que cae cada lado de la moneda? _____
- En caso afirmativo, ¿podrían decir cuál es? _____

Glosario

Moneda, carta, ficha cargada:

cuando éstas se alteran de alguna forma ilegal para que se favorezca un resultado y éste deje de ser azaroso, se dice que la carta está marcada, el dado está cargado, etcétera.



4. Comparen sus resultados con otras parejas y analicen los resultados de la segunda ronda del juego, para lo cual tendrán que completar la tabla.

Número de pareja	1	2	3	4	5	6
Jugador que ganó						
Número de lanzamientos con que ganó						
Número total de lanzamientos que realizaron						



5. Concentren todos los resultados en el siguiente cuadro y contesten las preguntas con base en ellos.

Número de veces que ganó el jugador 1 (cae águila)		Número de veces que ganó el jugador 2 (cae sol)	
Número total de lanzamientos en el grupo		Número total de lanzamientos en el grupo	

- a) ¿Qué porcentaje del total de lanzamientos (volados) realizados ganó el jugador 1?

- b) ¿Y el jugador 2? _____
6. Comenten todas sus respuestas en grupo, y con ayuda de su maestro, analicen la siguiente información.

Una de las características de los juegos de azar y de los experimentos aleatorios es que cada vez que se lleven a cabo, los resultados pueden ser diferentes a pesar de que las condiciones sean idénticas. Éstos no pueden determinarse de antemano; sin embargo, si el experimento o juego se realiza muchas veces, es posible observar algunas regularidades a partir de su frecuencia. Las tablas de frecuencia sirven para llevar un registro de los resultados.



7. Observen el recurso audiovisual *Probabilidad frecuencial en los juegos* mediante el cual conocerán algunos ejemplos en donde se muestra este concepto.

1. Trabajen en equipo todas las actividades de esta sesión. Para esta actividad requieren dos monedas. Emma y Joel juegan a los “volados”. Cada uno lanza, al mismo tiempo, una moneda al aire, ven qué resultado cae y lo registran. Emma gana la ronda si ambas monedas caen en la misma cara, si son diferentes Joel gana.

- a) ¿Quién creen que gane y por qué? _____
- b) ¿Los dos jugadores tienen la misma oportunidad de ganar? ¿Por qué? _____

2. Prepárense para realizar 20 rondas en el juego.

- a) ¿Cuántas veces esperarían que caigan caras diferentes en las monedas durante las 20 rondas? _____
- b) Utilicen la tabla para registrar los resultados que obtengan al lanzar sus monedas. Escriban la letra “a” si obtuvieron águila y la letra “s” si cayó sol en cada ronda.

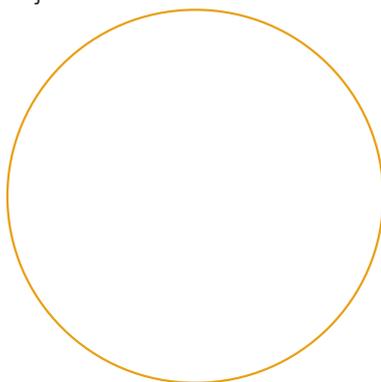
Ronda	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
Jugador 1																					
Jugador 2																					
Ganador de la ronda																					

3. Completen la tabla reuniendo todos los resultados del grupo.

Resultado	Frecuencia	Frecuencia relativa	Porcentaje
Caen la misma cara			
Caen caras diferentes			
Total de volados			



4. Elaboren una gráfica circular que muestre los resultados obtenidos en el grupo en términos de porcentaje.



5. Contesten las preguntas.
- ¿Qué creen que suceda si este juego continúa? _____
 - ¿Habrá cambios en los porcentajes? _____
 - Si su respuesta es afirmativa, ¿cuánto creen que cambiará? _____
 - Si este juego continúa y se lanzan cientos de volados más, ¿qué puede esperarse que ocurra con la frecuencia de que salgan caras iguales? _____

6. Ahora Emma y Joel juegan con dados. Cada uno lanza un dado y si cae el mismo número en los dos dados gana Joel y si caen números diferentes gana Emma. Contesten las preguntas.

- ¿Tendrán la misma probabilidad de ganar ambos? _____
- Si creen que no tienen la misma probabilidad, entonces, ¿quién podría ganar? ¿Por qué? _____
- ¿La probabilidad de que caiga el mismo número es la misma que en el caso de las monedas? ¿Por qué? _____

7. Para esta actividad, necesitarán dos dados legales. Realicen el juego anterior haciendo al menos 30 rondas. Elaboren en su cuaderno una tabla como la anterior para registrar sus resultados. Completen el siguiente cuadro con sus resultados.

Resultado	Frecuencia	Frecuencia relativa	Porcentaje
Caen números iguales			
Caen números diferentes			
Total			

Dato interesante

Dado legal es aquel que está equilibrado en cuanto a peso y la suma de los puntos en sus caras opuestas es 7.

8. En grupo comparen sus respuestas. Luego comenten y analicen la información.

La frecuencia relativa con la cual ocurre un evento se llama **probabilidad frecuencial**. En el juego de los volados, observamos dos eventos: caen caras iguales o caen caras diferentes. La frecuencia relativa de cada evento es la probabilidad frecuencial que les corresponde a cada uno. La probabilidad de un evento es el resultado de realizar el experimento o juego y se simboliza como **$P'(\text{evento}) = \text{frecuencia relativa del evento}$** expresada en fracción o decimal y se lee probabilidad frecuencial del evento.

De acuerdo con lo anterior, completen lo siguiente:

P' (caras iguales) =

P' (caras diferentes) =

9. Observen el recurso audiovisual *Probabilidad frecuencial de un evento* para conocer más sobre el concepto de este tipo de probabilidad.



10. En el portal de Telesecundaria encontrarás una referencia a una página web sobre los conceptos básicos de la estadística y la probabilidad.

■ Para terminar

Realiza el juego lanzando veinte veces tres monedas iguales al mismo tiempo. Pierde aquel cuya cara de la moneda salga distinta de las otras dos. ¿Quién crees que perderá más veces?

En tu cuaderno, elabora una tabla para registrar los resultados y contesta las siguientes preguntas.

- ¿Fue correcta tu suposición?, ¿por qué?
- ¿Cuáles son todos los resultados posibles al lanzar tres monedas al aire? Haz una lista de todos ellos.
- De acuerdo con tus resultados, ¿cuál es el resultado que más ocurre?
- Si nuevamente realizas el juego, ¿crees que se obtengan las mismas frecuencias? ¿Por qué?



Evaluación

Marca la respuesta correcta en cada caso.

1. Dada la expresión: $-0.25x + \frac{1}{4}x - x$
¿Cuáles valores puede tener x para que el resultado sea un número positivo?
a) x puede ser cualquier número positivo. b) x es igual que 0.
c) x puede ser cualquier número negativo. d) x puede ser cualquier número entero.
2. Un vestido cuesta \$232 ya con el 16% de IVA incluido, ¿cuánto cuesta sin IVA?
a) \$200.00 b) \$208.80 c) \$255.20 d) \$269.12
3. La distancia d recorrida por un automóvil que viaja con velocidad constante en un cierto tiempo t , está representada por la expresión algebraica $d = 3t + 5$. ¿Cuál es la razón de cambio?
a) d b) 5 c) 3 d) t
4. ¿Cuál es el valor de x en la ecuación $2.624 + x = 31.2$?
a) 11.890 b) 28.576 c) 29.424 d) 33.824
5. ¿Cuál es la expresión que te permite encontrar cualquier término de la sucesión 4, 8, 12, 16, 20, ...?
a) $n + 4$ b) $n - 4$ c) $4n$ d) $\frac{n}{4}$
6. Una caja en forma de prisma rectangular tiene 10 cm^3 de volumen. Si la longitud de cada arista se multiplica por 4, ¿cuál será el volumen de la caja?
a) 40 cm^3 b) 80 cm^3 c) 320 cm^3 d) 640 cm^3
7. Una caja en forma de prisma rectangular tiene $1\,000 \text{ cm}^3$ de volumen, ¿cuál es su capacidad?
a) 1000 L b) 100 L c) 10 L d) 1 L
8. Cuatro amigos juegan al *Disparejo* y lanzan al mismo tiempo sus monedas al aire. ¿Qué resultado es menos probable que suceda?
a) 4 soles b) 3 soles y 1 águila c) 2 soles y 2 águilas d) 1 sol y 3 águilas

Realiza lo que se indica en cada caso.

9. El rectángulo representa el 75% de un terreno. Dibuja lo que haga falta para tener el 100%.



10. ¿Es posible trazar un cuadrilátero cuyos ángulos midan 25° , 55° , 100° y 120° ? Argumenta tu respuesta. En caso negativo, indica las medidas con las que se pueda trazar. _____

11. Se preguntó a 33 familias acerca del número de hijos que tienen, las respuestas obtenidas son:

Número de hijos por familia	0	1	2	3
Número de familias que contestaron	4	8	11	10

- a) Elabora una gráfica circular que represente las respuestas que dieron las familias.
b) Obtén la media aritmética, la mediana y moda del conjunto de datos.

12. Las temperaturas máxima y mínima en la ciudad de Durango del 24 de marzo al 2 de abril del 2018 fueron:

Sáb 24	Dom 25	Lun 26	Mar 27	Mié 28	Jue 29	Vie 30	Sáb 31	Dom 1	Lun 2
30° 11°	31° 11°	30° 10°	28° 10°	25° 7°	24° 7°	26° 8°	28° 10°	29° 10°	29° 9°

- a) ¿Cuál es la media aritmética de las temperaturas máximas en ese período? _____
- b) ¿Cuál es la temperatura mínima más frecuente en cada conjunto? _____
- c) Si un día la temperatura máxima fuese 40°C , ¿cómo influiría ese valor en la media aritmética de las temperaturas máximas? _____
- d) Si la temperatura mínima fuera 0°C , ¿cómo afecta a la media aritmética de las temperaturas mínimas? _____
- e) ¿Cuál es la medida de tendencia central que mejor representa a cada uno de los dos conjuntos de datos? _____
- f) ¿Cuál es el rango de las temperaturas máximas y mínimas? _____
- g) ¿Cuál de los dos conjuntos de temperaturas tienen mayor dispersión? _____

Bibliografía

- Blatner, D., et al. (2003). *El encanto de Pi*, México, SEP-Aguilar (Libros del Rincón).
- Bosch, C. et al. (2002). *Una ventana a la incertidumbre*, México, Santillana (Biblioteca juvenil ilustrada).
- ____ (2004). *Una ventana a las formas*, México, Santillana (Biblioteca juvenil ilustrada).
- ____ (2002). *Una ventana a las incógnitas*, México, Santillana (Biblioteca juvenil ilustrada).
- ____ (2002). *Una ventana al infinito*, México, Santillana (Biblioteca juvenil ilustrada).
- Castelnuovo, E. (2001). *De viaje con la matemática. Imaginación y razonamiento matemático*, México, Trillas.
- Cottin, M. (2007). *La doble historia de un vaso de leche*, México, Ediciones Tecolote, 2007.
- Crilly, T. (2014). *50 cosas que hay que saber de matemáticas*, Barcelona, Ariel, 2014.
- Hernández Garcíadiego, C. (2002). *La geometría en el deporte*, México, Santillana (Biblioteca juvenil ilustrada).
- ____ (2002). *Matemáticas y deportes*, México, Santillana (Biblioteca juvenil ilustrada).
- Jiménez, D. (2010). *Matemáticos que cambiaron al mundo. Vidas de genios del número y la forma que fueron famosos y dejaron huella en la historia*, Providencia, Chile, Tajamar Editores.
- Jouette, A., *El secreto de los números*, Barcelona, Ediciones Robinbook.
- Marván, L. M. (2002). *Andrea y las fracciones*, México, Santillana (Biblioteca juvenil ilustrada).
- ____ (2008). *Representaciones numéricas*, México, Santillana (Biblioteca juvenil ilustrada).
- Moreno, Ricardo (2008). *Una historia de las matemáticas para jóvenes*, Madrid, Nivola Libros y Ediciones.
- Noreña, F., et al. (2002). *El movimiento*, México, Santillana (Biblioteca juvenil ilustrada).
- Noreña, F. (2002). *La energía*, México, Santillana (Biblioteca juvenil ilustrada).
- ____ (2002). *La medición y las unidades*, México, Santillana (Biblioteca juvenil ilustrada).
- Ogawa, Y. (2004). *La fórmula preferida del profesor*, libro electrónico descargable en: <https://pitacoradeclase.files.wordpress.com/2013/01/la-formula-preferida-del-profesor-yoko-ogawa1.pdf> (Consultado el 7 de octubre de 2017).
- Peña, J. A. de la (2002). *Geometría y el mundo*, México, Santillana (Biblioteca juvenil ilustrada).
- ____ (2002). *Matemáticas y la vida cotidiana*, México, Santillana (Biblioteca juvenil ilustrada).
- Perelman, Y. (2003). *Matemáticas recreativas*, México, Planeta.
- Reid, C. (2008). *Del cero al infinito: Por qué son interesantes los números*, México, Consejo Nacional para la Cultura y las Artes.
- Ruiz, C., et al. (2002). *Crónicas algebraicas*, México, Santillana (Biblioteca juvenil ilustrada).
- Ruiz, C. (2002). *Crónicas geométricas*, México, Santillana (Biblioteca juvenil ilustrada).
- ____ (2003). *El pirolo matemático. De los números a las estrellas*, México, SEP-Lectorum.
- Sánchez, J. D. (2012). *Recreamáticas. Recreaciones matemáticas para jóvenes y adultos*, Madrid, Rialp.
- Tahan, M. (2005). *El hombre que calculaba*, México, SEP-Limusa.

SITIOS DE INTERNET

- GeoGebra, www.geogebra.org (Consultado el 7 de octubre de 2017).
- Instituto Nacional de Estadística y Geografía (Inegi): <http://www.inegi.org.mx/default.aspx> (Consultado el 10 noviembre de 2017).
- Roger, A. (s.f). Math is the hidden secret to understanding the world. En TED, Ideas worth spreading, https://www.ted.com/talks/roger_antonsen_math_is_the_hidden_secret_to_understanding_the_world (Consultado el 3 de abril de 2018. Selecciona lengua (español) para seguir la traducción.)