Matemáticas

Tercer grado.

TELEsecundaria

Índice

Bloque 2

Las funciones cuadráticas en la construcción

¿Sabías que muchas de las estructuras de acero que se utilizan para sostener el piso de los puentes tienen forma parabólica? Esto se debe a que la parábola permite que la carga se distribuya de manera uniforme.

¿Qué crees que suceda si uno de esos cables se llega a romper? ¿Qué sucederá con el peso que soportaba? ¿Qué pasará con el peso que soportan los demás cables?

En este bloque estudiarás las funciones cuadráticas que dan origen a parábolas y con las que es posible hacer los cálculos necesarios para construir este tipo de puentes.

10. Mínimo común múltiplo y máximo común divisor 1

Sesión 1

Para empezar

Automóvil	Tiempo que tarda en dar una vuelta (en segundos)
A	18
B	20
C	24
D	28

Hay un juego virtual llamado "Carreras de autos" que consiste en lo siguiente.

- Participan dos jugadores, cada uno debe elegir dos automóviles.
- Los cuatro automóviles se colocan en la línea de salida y arrancan al mismo tiempo.
- Gana el jugador cuyos dos automóviles, después de dar varias vueltas a la pista, vuelven a pasar juntos por la línea de salida.

En la tabla de la izquierda se muestran los tiempos en que cada automóvil da la vuelta a la pista.

¿Qué automóviles elegirías para ganar en este juego? ¿Después de cuántos segundos tus dos automóviles volverían a pasar juntos por la línea de salida? ¿Cuántas vueltas habría dado cada uno de los automóviles que elegiste?

Al estudiar esta secuencia, aprenderás a usar el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo para contestar preguntas como las anteriores.

Manos a la obra

Descomposición de números en factores primos

1. Trabajen en pareja. Descompongan en factores cada número, de manera que primero sean dos, después tres, y así sucesivamente, hasta que ya no se puedan descomponer. Anótenlos en cada celda.

180						
600						
3 780						

2. En la actividad anterior, verifiquen que en la última descomposición de cada número sólo aparezcan números primos como factores. Si hay algún factor no primo, todavía se puede descomponer.

3. Ahora lean la siguiente información junto con sus compañeros de grupo y su maestro.

Cualquier número natural se puede descomponer en un producto de números primos. A esta descomposición se le llama *factorización en números primos* o *factorización prima*. Cuando uno o más factores primos se repiten, la descomposición puede expresarse usando potencias.

Por ejemplo, 1890 es un número compuesto. Su descomposición en factores primos y su representación usando potencias se muestran a continuación:

$$1890 = \underbrace{2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7}_{\text{Descomposición en factores con números primos}} = \overbrace{2 \times 3^3 \times 5 \times 7}^{\text{Descomposición usando potencias}}$$

4. Completen la siguiente tabla.

Número compuesto	Factorización en números primos	Representación con potencias
12		
		2×3^2
	$2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5$	
72		
		$2 \times 3^3 \times 5^2$

5. Consideren la factorización en números primos: $2 \times 3 \times 5 \times 7$. Con base en ella, contesten las preguntas.

a) ¿A qué número corresponde? ______________________

b) ¿Cuáles son los divisores primos de ese número? ______________________

c) Expliquen por qué la factorización de números primos muestra que el número es múltiplo de 30. ______________________

____

6. La factorización en primos de un número es $2 \times 3 \times 5^2$. Con base en ella, contesten las preguntas.

   a) ¿Cuáles son todos los divisores de ese número? Deben ser 12. Completen la lista.
   {1, ______________________________}

   b) Los números 2, 3 y 5 son factores primos de 150 y también son parte del conjunto de divisores. Verifiquen que, exceptuando el 1, todos los demás divisores resultan al multiplicar dos o más factores primos. Por ejemplo, el 15 es el producto de 3×5. ¿Cómo se obtiene el 50? ______________ ¿Cómo se obtiene el 75?
   ____

7. Con sus compañeros y con apoyo del maestro, comparen sus resultados, identifiquen los errores y corrijan lo que sea necesario.

Sesión 2

Técnicas para factorizar en primos

1. Trabajen en pareja. En la tabla relacionen la columna de números compuestos con su descomposición prima. Después, contesten.

Números compuestos	Factorizaciones primas
a) 120	( ) $2^2 \times 3 \times 5$
b) 180	( ) $2 \times 3^2 \times 5$
c) 150	( ) $2 \times 3 \times 5^2$
d) 240	( ) $2^3 \times 3 \times 5$
e) 1 225	( ) $2 \times 3^3 \times 5$
f) 60	( ) $2 \times 3 \times 5^3$
g) 270	( ) $2^4 \times 3 \times 5$
h) 147	( ) $2^2 \times 3^2 \times 5$
i) 750	( ) $2^2 \times 3 \times 5^2$
j) 90	( ) $2 \times 3^2 \times 7$
k) 300	( ) 3×7^2
l) 126	( ) $5^2 \times 7^2$

a) El número 120 es el doble de 60. Expliquen en qué se parece y en qué es diferente la factorización de 120 respecto a la de 60. ______________________________
____

b) En la lista anterior de números compuestos, busquen otras dos parejas, tales que un número sea el doble del otro. Verifiquen que sus factorizaciones primas se parecen y se distinguen en lo que escribieron en el inciso anterior. Anótenlas aquí. ______________________________
____

c) La factorización de un número es $2 \times 3^3 \times 7$. ¿Cuál es la del doble de ese número? ______________________________
____

d) La factorización de un número es $2 \times 3^4 \times 5$. ¿Cuál es la del triple de ese número? ______________________________
____

e) La factorización de un número es $3^4 \times 5$. ¿Cuál es la del doble de ese número? ______________________________
____

2. Con sus compañeros y con el apoyo de su maestro, comparen sus resultados, identifiquen los errores y corrijan si es necesario. Después, lean la siguiente información.

Una técnica para descomponer o factorizar cualquier número natural en números primos consiste en dividirlo sucesivamente entre números primos hasta que el cociente sea un número primo. Por ejemplo, para descomponer en factores primos el número 854, se hace lo siguiente:

- ¿854 es divisible entre 2? Sí, entonces se hace la división: $854 \div 2 = 427$
- ¿427 es divisible entre 2? No. ¿Entre 3? No. ¿Entre 5? No. ¿Entre 7? Sí. Entonces, $427 \div 7 = 61$. Como 61 es un número primo, la factorización en primos de $854 = 2 \times 7 \times 61$.

3. Trabajen en equipo. Factoricen en primos los siguientes números.

Número compuesto	Factorización en números primos
132	
230	
543	
615	
864	

4. Otra manera de hacer las divisiones para encontrar los factores primos de un número es la que se muestra enseguida. Analícenla y describan en su cuaderno la manera en que se hace.

492	2	(A 492 se le saca la mitad, que equivale a dividirlo entre 2).
246	2	(A 246 se le saca la mitad, que equivale a dividirlo entre 2).
123	3	(A 123 se le saca tercera, que equivale a dividirlo entre 3).
41	41	(Como 41 es primo, sólo se puede dividir entre 41).
1		

Entonces, $492 = 2 \times 2 \times 3 \times 41$

En su cuaderno, apliquen esa técnica para factorizar los siguientes números compuestos: 90, 150 y 84.

5. Con sus compañeros y con apoyo de su maestro, comparen sus resultados y comenten cuál procedimiento les resulta más claro para factorizar números compuestos.

6. Observen el recurso audiovisual *Descomposición en factores primos*, en el que se muestran las técnicas para descomponer un número compuesto en factores primos.

Sesión 3

Máximo común divisor (MCD)

Dato interesante
Si se considera la suma de los divisores de un número, sin considerarlo a él, entonces: a) si la suma de los divisores es igual que el número, se le llama *perfecto*; b) si la suma de sus divisores es mayor que el número, se le llama *abundante*; c) si la suma es menor al número, se le llama *deficiente*.

1. Trabajen en equipo. Un carpintero quiere cortar en cuadrados iguales, lo más grandes posible, una tira de madera de 180 cm de largo por 108 cm de ancho, sin que sobre ni falte madera. ¿Cuánto debe medir por lado cada cuadrado? ¿Cuántos cuadrados logrará obtener?

   En su cuaderno, tracen un rectángulo y muestren los cortes que se hacen a lo largo y a lo ancho de la tira de madera.

2. Anoten los datos que faltan en la tabla, después contesten lo que se indica.

Medidas del rectángulo	Factorización en números primos
Ancho = 108	
Largo = 180	

a) En una de las factorizaciones, tachen de uno en uno cada factor que se repita en la otra. Éstos son factores primos comunes a 108 y 180.

b) ¿Cuál es el producto de los factores tachados? ____________________

c) Expresen con potencias el producto de los factores tachados. ____________________

____

d) Verifiquen que los dos números, 108 y 180, son divisibles entre el producto de los factores primos comunes.

e) Escriban dos divisores que no sean comunes a 108 y 180. ____________________

f) ¿Habrá un número mayor al producto de los factores primos comunes que sea divisor de 108 y 180? ____________________ Si la respuesta es sí, escríbanlo. ____________________ Si la respuesta es no, expliquen por qué.

____

g) Consideren el problema inicial en el que 108 es, en centímetros, la medida del ancho de la tira de madera, y 180, la medida del largo, ¿cuál es la medida máxima por lado de cada cuadrado que se puede cortar de esa tira, sin que sobre ni falte madera? ______________ ¿Cuántos cuadrados se pueden cortar? ______________

3. Comparen sus respuestas con sus compañeros y, con apoyo de su maestro, identifiquen los errores y corrijan si es necesario. Posteriormente, lean la siguiente información y realicen lo que se les pide.

El mayor divisor común de dos o más números naturales se llama *máximo común divisor* y se denota como MCD.

a) Consideren la factorización en números primos de los números 270 y 252 y tachen en una de las factorizaciones los que son comunes a ambos números.

$270 = 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5$ $\qquad$ $252 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7$

b) Escriban el producto de los factores comunes que tacharon. ____________________

____

c) ¿Cuál es el máximo común divisor de 270 y 252? ____________________

____

4. Completen la tabla para verificar que los tres números, *a*, *b* y *c*, son divisibles entre el producto de los factores primos comunes.

Número compuesto	Factorización en números primos	Factores primos comunes de *a, b* y *c*	Producto de los factores primos comunes	Cociente del número compuesto entre el producto de factores primos comunes
$a = 588$				
$b = 180$				
$c = 700$				

a) ¿Habrá un número mayor al producto de los factores primos comunes que sea divisor de *a*, *b* y *c*? __________ Si la respuesta es sí, escríbanlo. ____________________

Si la respuesta es no, expliquen por qué. ____________________

____

b) ¿Cuál es el máximo común divisor de *a*, *b* y *c*? ____________________

____

5. Completen la tabla de la siguiente página.

Números compuestos	Factorización en números primos	Factores que producen el MCD	Máximo común divisor (MCD)
60 y 90			
315, 525 y 441			
80 y 160			

Expliquen en qué caso el máximo común divisor de dos o más números es uno de ésos y den un ejemplo. ____

____

6. Un electricista necesita colocar lámparas a lo largo de cuatro muros que rodean una casa. El primero mide 18 m; el segundo, 24 m; el tercero, 28 m; y, el cuarto, 36 m. ¿Cuál es la mayor distancia que puede haber entre dos lámparas seguidas, si se quiere que siempre sea la misma? ____

7. Con sus compañeros y con ayuda del maestro, comparen sus resultados, identifiquen los errores y corrijan.

Sesión 4

Mínimo común múltiplo (mcm)

Automóvil	Tiempo que tarda en dar una vuelta (en segundos)
A	18
B	20
C	24
D	28

1. Trabajen en equipo. Regresen al problema de "Carreras de autos" de la sección "Para empezar". Éstos son los datos y se trata de elegir los dos autos que vuelven a pasar por la línea de salida simultáneamente.
   a) Completen la tabla para ver los tiempos de cada auto.

Vueltas / Automóvil	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	18	36								
B	20									
C	24									
D	28									

b) ¿Según la información presentada, ¿cuál es el menor tiempo en el que dos automóviles coinciden? ______

c) ¿A qué automóviles corresponden esos tiempos? ______

Encierren en un círculo rojo esa pareja de autos.

d) ¿Cuántas vueltas dio cada uno de esos autos? ______

e) Indiquen otra pareja de automóviles que pasen la meta al mismo tiempo.

Pareja de automóviles	Tiempos en los que coinciden

f) Anoten la pareja de automóviles que tarda más en pasar por la línea de salida al mismo tiempo. ______

g) ¿Cuál es la pareja de automóviles que conviene elegir para ganar el juego? ______

______

2. Completen la tabla y después escriban los números que se piden.

	× 2	× 3	× 4	× 5	× 6	× 7	× 8	× 9	× n
3									
8									
12									

Un múltiplo común de...

a) 3 y 8: ______ **b)** 3 y 12: ______ **c)** 8 y 12: ______ **d)** 3, 8 y 12: ______

e) ¿Cuánto debe valer n para que la expresión $3n$ sea múltiplo de 3? ______

f) ¿Cuánto debe valer n, para que, al sustituirlo en la expresión $3n$, el número que se obtenga sea múltiplo común de 3, 8 y 12? ______

3. Lean en grupo con su maestro la siguiente información y después resuelvan.

Un número natural a es múltiplo común de b y c, si, al dividirlo entre b y entre c, el residuo es cero.

Por ejemplo, 24 es múltiplo común de 8 y 12 porque

$24 \div 8 = 3$ y sobra cero; así como $24 \div 12 = 2$ y sobra cero.

El número 24 no es el único múltiplo común de 8 y 12, también están el 48, el 72, el 96 y muchos más, pero 24 es el *menor múltiplo común* de 8 y 12.

En general, si un número a, es el *menor múltiplo común* de dos o más números, se dice que a es el *mínimo común múltiplo (mcm)* de esos números.

Consideren los siguientes números y su factorización en primos.

$12 = 2^2 \times 3$ $\quad 30 = 2 \times 3 \times 5$ $\quad 18 = 2 \times 3^2$

a) Tachen los factores que se tendrían que seleccionar para obtener el mcm de 12, 30 y 18. ¿Cuál es el mcm de 12, 30 y 18? ____________________

b) Encierren en un círculo los factores que se tendrían que seleccionar para obtener el MCD de 12, 30 y 18. ¿Cuál es el MCD de 12, 30 y 18? ____________

c) Verifiquen que el mcm que obtuvieron es múltiplo de 12, 30 y 18, y que no hay otro número menor que cumpla esa condición. Comprueben también que el MCD que obtuvieron es divisor de 12, 30 y 18, y que no hay otro número mayor que cumpla esa condición.

4. En la tabla siguiente, anoten la descomposición en factores primos que corresponda a los tiempos que tarda en dar una vuelta cada automóvil.

Automóvil	A	B	C	D
Tiempo que tarda en dar una vuelta (en segundos)	18	20	24	28
Factorización en números primos				

a) ¿Qué factores se consideran para obtener el mcm de los tiempos que representan a los automóviles A y C? ____________ Y, ¿de A y B? ____________ , ¿de A y D? __________ , ¿B y D? ____________________

b) ¿Cuál es el menor de los mcm de las parejas de automóviles? ____________

Sesión 5

Para terminar

De mínimo común múltiplo y máximo común divisor

1. Trabajen en pareja. Factoricen en primos los siguientes números, después encuentren su MCD y su mcm.

48 = $\quad$ 56 = $\quad$ 64 =

MCD de 48, 56 y 64: ____________ $\quad$ mcm de 48, 56 y 64: ____________

2. Con sus compañeros y con apoyo del maestro, comparen sus resultados. Comenten cómo hacer para determinar el MCD y el mcm de dos o más números.

Luego, apliquen su estrategia para completar la tabla.

Números	Factorización en números primos	MCD	mcm
360 y 140	360 = 140 =		
	$2^4 \times 3 \times 7$ $2^3 \times 3^2 \times 5$ $2^3 \times 3 \times 5$		
28 y 25	28 = 25 =		

3. Analicen cada enunciado y determinen si es verdadero o falso. Anoten un ejemplo en la última columna.

Enunciado	V/F	Ejemplo
a) El MCD de dos o más números siempre es menor que cualquiera de los números.		
b) El mcm de dos o más números siempre es mayor que cualquiera de los números.		
c) El MCD de dos o más números es el producto de los factores primos comunes con menor exponente.		
d) El mcm de dos o más números es el producto de los factores primos comunes con mayor exponente.		

4. Con sus compañeros y con apoyo del maestro, comparen sus resultados, identifiquen los errores y corrijan.

5. Trabajen en equipo. Resuelvan los problemas.

a) Un número es múltiplo común de 21 y 35 y tiene cuatro dígitos. ¿Cuál es el menor número que cumple con esta condición? ______________________

b) Dos números primos entre sí son los que no tienen divisores comunes diferentes de 1. ¿Cuáles de los siguientes números son primos entre sí? Márcalos.

11 y 22 15 y 18 21 y 28 8 y 15

6. Utilicen el recurso audiovisual *Problemas que se resuelven con el mcm o con el MCD* para analizar casos en los que se aplican estos conocimientos.

7. Utilicen el recurso informático *Factorización en números primos* para que practiquen ejercicios con esta técnica.

11. Figuras geométricas y equivalencia de expresiones de segundo grado 2

Sesión 1

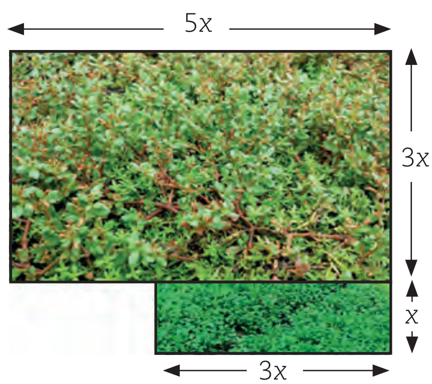
Para empezar

Las chinampas son terrenos rectangulares construidos con lodo y varas sobre el agua. Las podemos encontrar en las zonas de Tláhuac y Xochimilco, en la Ciudad de México. De acuerdo con la Oficina Regional de la FAO (https://bit.ly/2Eg8Rvp), en ellas trabajan alrededor de 12 000 personas que cultivan principalmente hortalizas y flores. Albergan 2% de la biodiversidad mundial y 11% de la biodiversidad nacional que incluye 21 especies de peces, 6 de anfibios, 10 de reptiles, 79 de aves y 23 de mamíferos. Su importancia también se basa en que es una forma de cultivo altamente productiva y sostenible. Las chinampas de la Ciudad de México pertenecen al grupo de áreas naturales protegidas de nuestro país y, desde 2017, fueron reconocidas como Sistema de Patrimonio Agrícola de Importancia Global por la Organización de las Naciones Unidas para la Alimentación y la Agricultura (FAO).

¿Conoces o has oído de los cultivos en chinampas? En la secuencia 3 se mencionó la necesidad de la rotación de cultivos. ¿Sabes cómo se distribuyen y la temporada del año en que se siembran? ¿Cómo determinarías el área que ocupan los cultivos? ¿Cómo calcularías la medida del largo o del ancho de una chinampa si se conoce su área? En esta secuencia calcularás la medida de la superficie de una chinampa cuando se desconoce alguna de sus dimensiones.

Manos a la obra

Chinampas



1. Observa las imágenes, representan la chinampa de Genaro, quien en la sección más grande cultiva verdolaga y en la de menor tamaño, perejil.
   - **a)** Anota la expresión que representa el área de la chinampa donde Genaro cultiva verdolaga. ____________________
   - **b)** ¿Qué expresión representa el área cultivada con perejil? ____________________

c) Escribe la expresión que representa el perímetro de toda la chinampa. ______________________

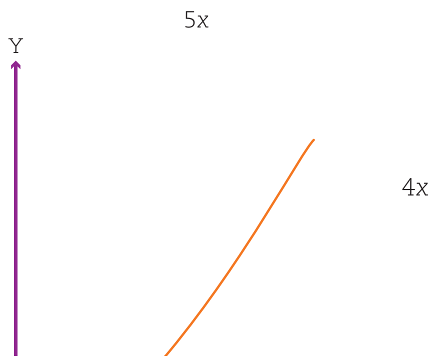
d) Anota una expresión que represente el área total que ocupa la chinampa. ___________________

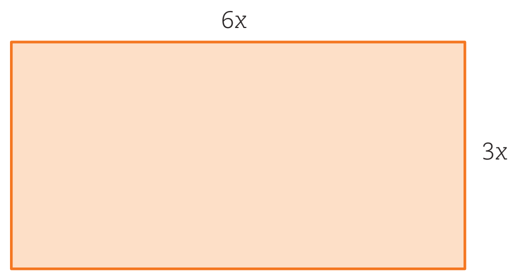
2. Anota expresiones equivalentes a las que escribiste en los incisos anteriores.

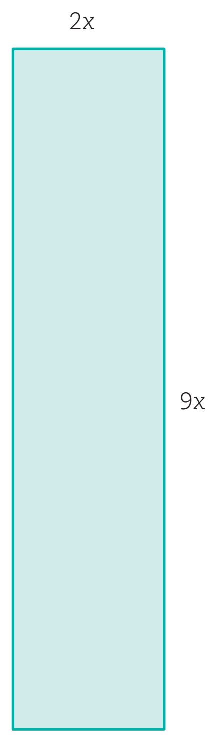
	Expresión anotada	Expresión equivalente
a) Área de la chinampa donde se cultiva verdolaga		=
b) Área cultivada con perejil		=
c) Perímetro de toda la chinampa		=
d) Área total que ocupa la chinampa		=

3. Compara con tus compañeros las expresiones que anotaron y verifiquen si todas son equivalentes.

4. En las siguientes figuras, seleccionen la chinampa cuya área sea equivalente a la de Genaro y dibujen la manera en que quedarían distribuidos los plantíos de verdolaga y perejil.





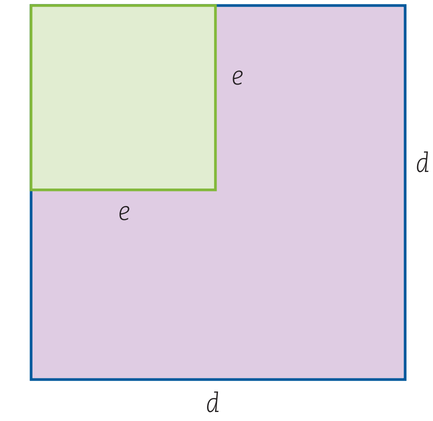


5. Investiga y anota en tu cuaderno qué productos se pueden sembrar en una chinampa y cuáles son las ventajas de esta forma de cultivo. Comenta tu investigación con tus compañeros de grupo en la siguiente sesión.

Superficies para agricultura sustentable

Sesión 2

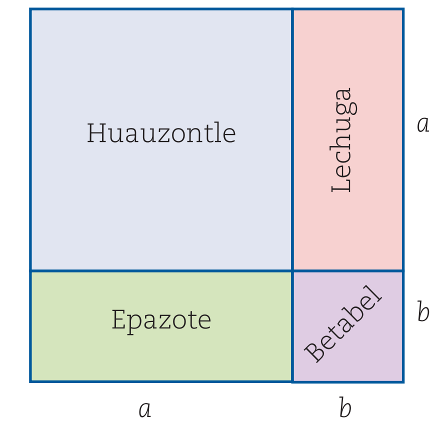
1. Trabajen en pareja. Las ventajas que representa cultivar en chinampas han despertado el interés de mucha gente, por eso se ofrecen talleres para aprender a construirlas en el traspatio o en terrenos destinados para ello. En el primer día de uno de estos talleres se propusieron dos formas de distribuir los plantíos en las chinampas. Los dibujos representan la organización sugerida con diferentes colores.



a) Anoten una expresión que represente el área de la figura verde.

b) Escriban una expresión que represente el área de la figura morada.

c) Escriban una expresión que represente el área de las figuras verde y morada juntas.



2. Rocío y Martha también construyeron su pequeña chinampa con los cultivos que se muestran en el dibujo.

a) Anoten una expresión que represente el área destinada a cada cultivo.

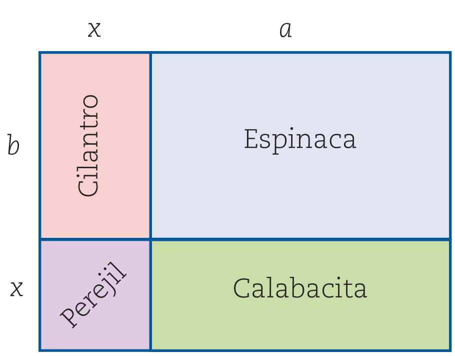
Huauzontle	Lechuga	Epazote	Betabel

b) Anoten dos expresiones equivalentes para representar el área total de la chinampa.

________________ = ________________

c) De acuerdo con el número de términos que tiene cada expresión, anoten su nombre.

Expresión algebraica 1	Expresión algebraica 2



3. Andrés y Elvia construyeron una chinampa cuya siembra distribuyeron como se muestra a la izquierda.

a) Anoten en la tabla la expresión que representa el área destinada a cada cultivo.

Cilantro	Espinaca	Calabacita	Perejil

b) Escriban dos expresiones que permitan conocer el área que ocupa toda la chinampa.

_________________ = _________________

c) ¿Son equivalentes las expresiones que representan el área de las dos chinampas anteriores? ____________ ¿Por qué?

____

____

d) Por la medida de sus lados, escriban a qué figura geométrica se parece la chinampa de Rocío y Martha. ______________

Y, ¿la de Andrés y Elvia? ____________________

____

Dato interesante

Las chinampas representan un gran avance en técnicas de cultivo. Surgieron en el México prehispánico y alcanzaron su máximo desarrollo con la civilización mexica, en éstas se cultivaba el alimento para una de las ciudades más grandes de esa época, Tenochtitlan, con 200 000 habitantes, aproximadamente.

4. Lean la información del recuadro y sigan las indicaciones de su maestro.

Si dos o más expresiones diferentes permiten calcular la misma área, se dice que son *expresiones equivalentes*. Por ejemplo, el área de un cuadrado se puede expresar como el producto de la medida de su lado por sí misma, lo que es equivalente a elevarla al cuadrado. Esto representado en forma general es:

$$(l)\ (l) = l^2$$

Si el lado del cuadrado está expresado con un binomio $(m + n)$, entonces su área se representa como el producto de dos binomios iguales, o bien un binomio elevado al cuadrado: $(m + n)(m + n) = (m + n)^2$

Al hacer las operaciones indicadas se obtienen otras expresiones equivalentes a las anteriores.

$$m^2 + mn + nm + n^2 = m^2 + 2mn + n^2$$

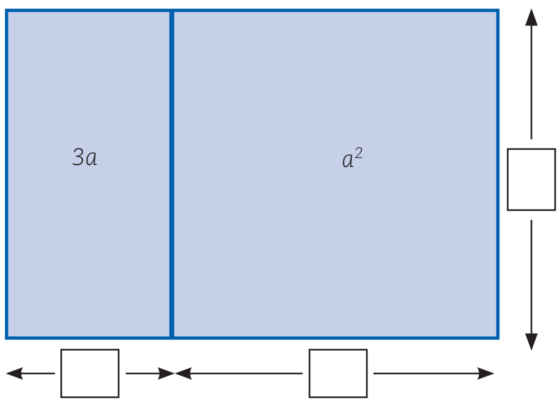
La última expresión, formada por un trinomio, ya no puede reducirse más.

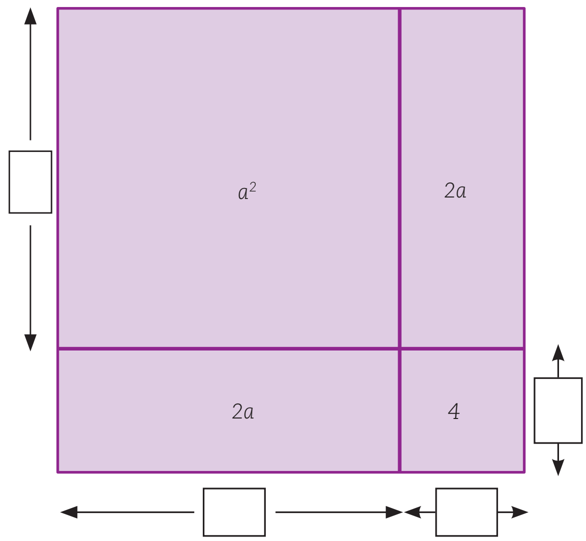
La expresión algebraica que resulta de elevar un binomio al cuadrado se conoce con el nombre de *trinomio cuadrado perfecto*.

Sesión 3

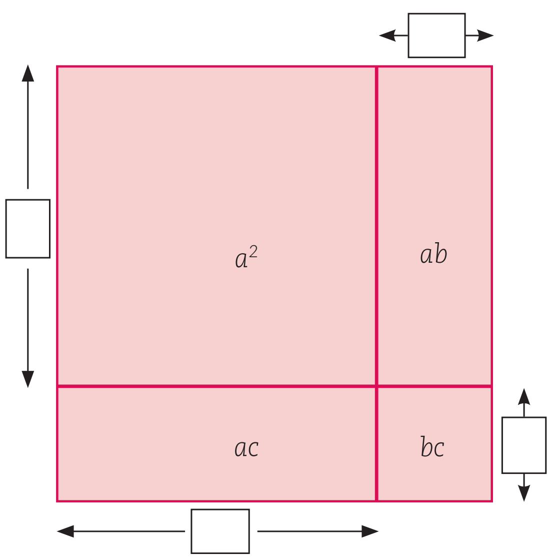
Distribución de superficies para la autosuficiencia alimentaria

1. Trabajen en pareja. La Secretaría de Agricultura y Desarrollo Rural lleva a cabo una estrategia de autosuficiencia alimentaria que consiste en apoyar a productores de pequeña y mediana escala para mejorar sus condiciones de vida. Algunos grupos de productores se organizaron y recibieron apoyo para sembrar. Los dibujos representan su distribución de cultivos. Anoten en la imagen la medida que corresponde a los lados de cada figura.





Dato interesante
La chinampa es una forma de obtener gran diversidad de cultivos sin afectar el medio ambiente.



2. Resuelvan lo que se pide.

a) Anoten la expresión que representa el área total del terreno representado con la figura de color azul.

b) Anoten la expresión que representa el área total del terreno representado con la figura de color morado.

c) ¿Qué expresión representa el área total del terreno representado con la figura de color rojo de la izquierda?

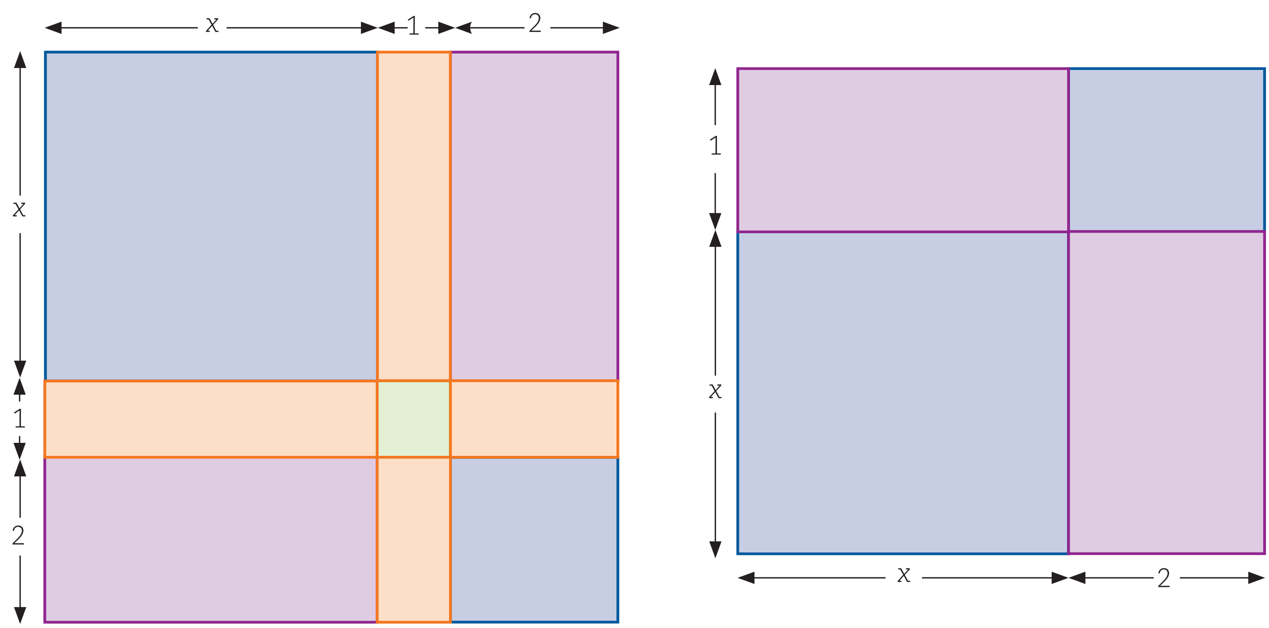
3. Ana y Enrique también son pequeños productores y quieren hacer una chinampa para sembrar elote, quelite, calabaza y chile. En su cuaderno, realicen lo que se solicita a continuación.

   a) La expresión $(y + a)(y + b)$ representa una propuesta de distribución del terreno para sus cultivos. Hagan un dibujo que corresponda a esta distribución y comprueben que el área de su dibujo es igual a: $y^2 + (a + b)y + ab$.

   b) La expresión $(x + 1)(x + 2)$ representa otra distribución posible. Elaboren un dibujo que la represente y comprueben que el área de su dibujo es igual a: $x^2 + 3x + 2$.

   c) Analicen cuál de las dos distribuciones que se presentan de la superficie para los cultivos corresponde a la expresión: $x^2 + 3x + 2$ y enciérrenla en un círculo. Al finalizar, digan por qué descartaron la otra figura.

Dato interesante
Una característica de las calabazas es que 90% de su peso es agua; los elotes, por su parte, son un alimento natural con mucha fibra que ayuda a la óptima digestión.



4. Revisen en grupo las respuestas al trabajo realizado en las dos actividades anteriores y, en su cuaderno, verifiquen que los valores que anotaron como medida de los lados en cada figura les permite obtener la expresión que representa su área total.

5. Cuando una expresión algebraica se escribe en forma de multiplicación, se dice que se *factorizó*. Completen la factorización de las siguientes expresiones algebraicas. Al finalizar, en su cuaderno, hagan la multiplicación expresada para comprobar que obtienen el polinomio correspondiente.

a) $8x^4 - 12x^5 = (4x^4)(2 - \square)$

b) $4a^2 + 8\,ab + 4b^2 = (\square + 2b)(2a + \square)$

c) $10y^3 + 5y^4 - n^2 = (\square)(2 + y) - n^2$

d) $b^5 - bc - bc^2 = (\square)(\square - c - c^2)$

e) $4x^2 + 8xy + 4y^2 = (\square + \square)(2x + \square)$

Vínculo con... Historia

Repasa en tu libro de segundo grado de Historia la importancia de la chinampa para la economía mexica.

6. Revisen con sus compañeros las respuestas y corrijan lo que sea necesario.

7. Lean la siguiente información y, si es necesario, regresen a las actividades anteriores para revisar sus respuestas.

Cuando un polinomio se transforma en un producto de dos factores, se dice que se *factorizó*. La mejor forma de comprobar que la factorización es correcta consiste en realizar la multiplicación y ver si el resultado corresponde al polinomio original.

Por ejemplo:

Factorización

$$6x^4 + 9x^3 = (3x^2)(2x^2 + 3) = 6x^4 + 9x^3$$

Multiplicación

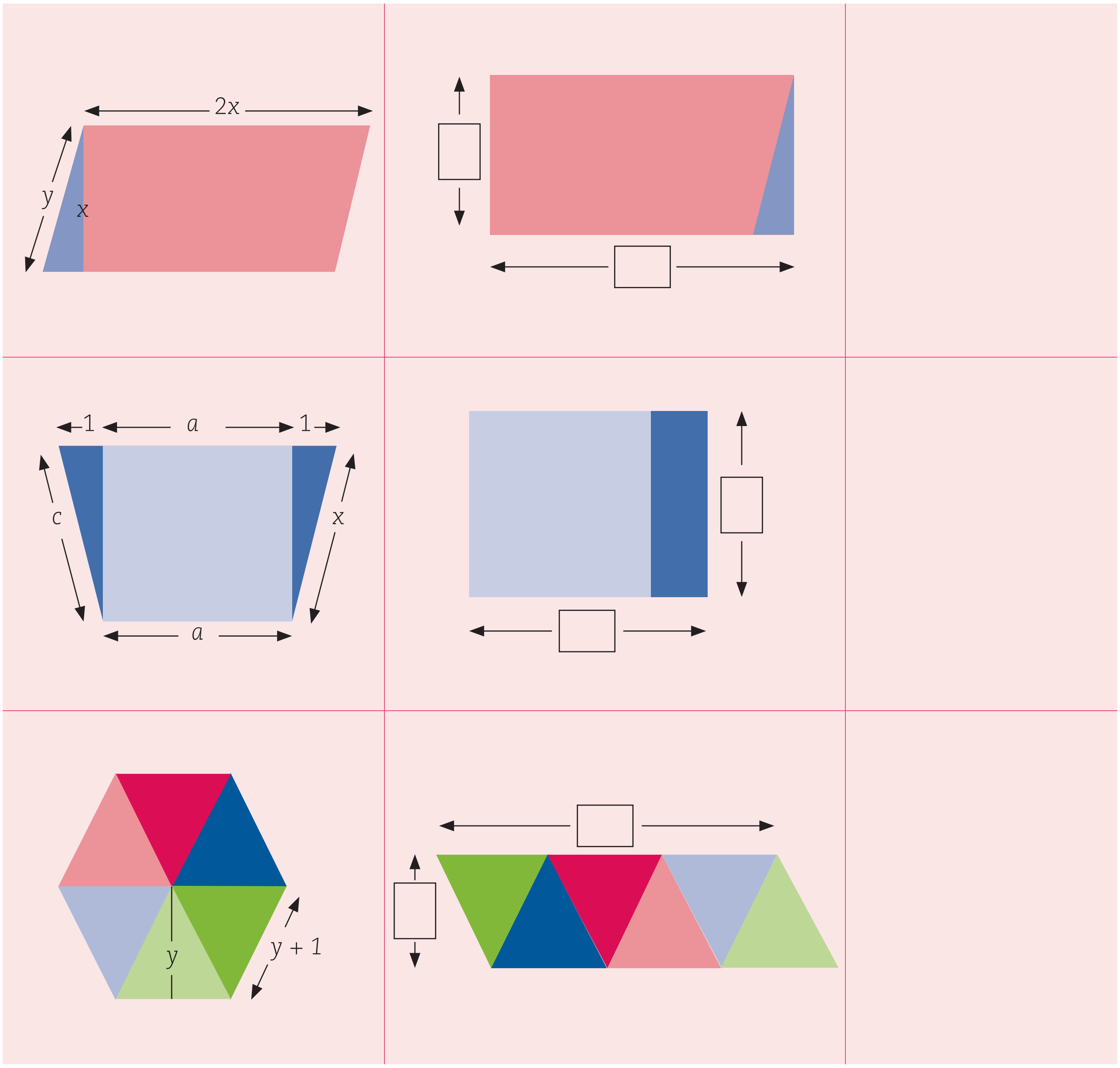
8. Al término de su revisión, platiquen acerca de la posibilidad de crear lo que se conoce como una "azotea verde" si están en un entorno urbano; si su entorno es rural, analicen las ventajas de tener cultivos para el autoconsumo.

Sesión 4

Para terminar

En busca de los factores

1. Observa la tabla de la siguiente página. Las figuras de la izquierda fueron recortadas para formar las que están a la derecha. Anota los datos que se piden en las figuras de la segunda columna. En la tercera, escribe dos expresiones equivalentes que representen su área.



2. Explica en tu cuaderno cómo comprobaste que son equivalentes las dos expresiones que anotaste para representar el área de cada figura.

3. Compara tus respuestas con las de tus compañeros y corrige si es necesario.

4. Observen el recurso audiovisual *Factores de una expresión algebraica de segundo grado* para tener mayor claridad acerca de cómo obtener una expresión equivalente por medio de la factorización.

5. Usa el recurso informático *Factorización de expresiones cuadráticas* para ejercitar los conocimientos aprendidos en esta secuencia.

12. Funciones 2

Sesión 1

Para empezar

Actualmente, los teléfonos celulares forman parte de nuestra vida; han pasado de ser un medio de comunicación a convertirse en herramientas de trabajo, estudio, navegación y entretenimiento. Según datos de la "Encuesta nacional sobre disponibilidad y uso de tecnologías de la información en los hogares" (ENDUTIH) 2018 del Inegi, en México, más de 83 millones de personas contaban con algún teléfono celular en ese año. De éstas, casi 50 millones tenían un teléfono inteligente (*smartphone*). Estas cifras han ido en aumento año con año y cada vez más gente tiene acceso a este tipo de dispositivos electrónicos. ¿Para qué usan tú o tus familiares los teléfonos celulares?

El uso de estos dispositivos también ha traído algunas consecuencias negativas: por ejemplo, el aumento en el número de accidentes vehiculares por distracciones causadas por el uso del teléfono mientras se conduce. ¿Conocen a alguien que use el celular mientras maneja? ¿Alguna vez has visto a algún chofer del transporte público utilizar su teléfono para hablar o mandar mensajes mientras conduce? ¿Cuántos accidentes crees que ocurran en tu localidad o en las carreteras por esta causa? ¿De qué manera piensas que ha variado el número de accidentes vehiculares por el uso del teléfono celular al conducir? ¿Cómo se podría representar esa situación para analizarla?

En esta secuencia aprenderás a resolver problemas que implican el análisis de la variación cuadrática para conocer sus propiedades y características.

Manos a la obra

Los teléfonos celulares

1. Trabajen en pareja. Un organismo internacional realizó un estudio, en 2015, sobre el aumento anual de la cantidad de teléfonos celulares que hay por cada 100 personas en el mundo, tomando como base los datos del periodo de 2000 a 2014. En la siguiente tabla se registran algunos de los resultados obtenidos.

	Número de teléfonos celulares por cada 100 habitantes en el mundo (2000 a 2014)						
Año	2000	2001	2004	2005	2006	2008	2014
Año del estudio	1	2	5	6	7	9	15
Número de teléfonos celulares por cada 100 habitantes	3.7	5.3	12.5	15.7	19.3	27.7	62.5

a) ¿Cuántos teléfonos celulares más hubo por cada 100 habitantes en el segundo año respecto al primer año del estudio? ______________________

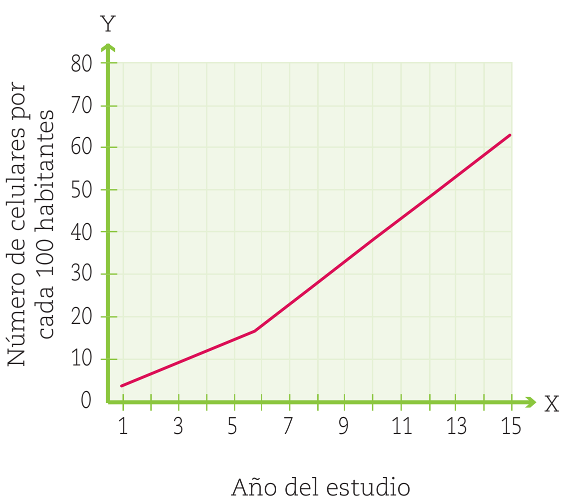
b) ¿Y cuántos más hubo en el sexto año respecto al quinto? ______________

c) Si se considera el aumento de celulares que hay año con año, anoten las cantidades aproximadas para los años 2007 y 2009. Expliquen su razonamiento para calcular el número de teléfonos que había por cada 100 personas en esos años.

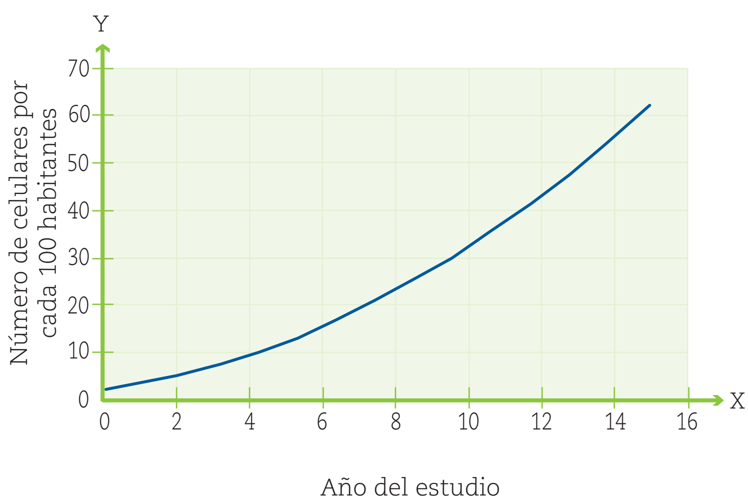
d) ¿Qué significa que haya 62.5 celulares por cada 100 personas en el año 2014? Considerando esto, ¿cuántos habría en 2014 en una población de 30 millones de habitantes? ______________________________

2. Marquen con una ✓ la gráfica que muestra los resultados del estudio anterior.

☐ Gráfica 1 | Número de teléfonos celulares por cada 100 habitantes en el mundo del año 2000 a 2014



☐ Gráfica 2 | Número de teléfonos celulares por cada 100 habitantes en el mundo del año 2000 a 2014



Anoten los argumentos por los cuales eligieron esa gráfica. ______________________

____

3. En grupo y con apoyo del maestro, comenten cuál de las dos gráficas se corresponde mejor con los datos del estudio y sus argumentos. Contesten: ¿qué diferencias encuentran entre las gráficas? ____________________

¿Qué diferencia hay entre los datos del primer y del quinto año en ambas gráficas? ____

____

Sesión 2

¿Cuántos teléfonos celulares habrá?

1. Trabajen en equipo. De acuerdo con el patrón de crecimiento de la gráfica que seleccionaron en la sesión anterior, ¿en qué año el estudio proyecta que habrá 90 celulares por cada 100 habitantes? ____________________

   a) ¿En qué año habrá, según el estudio, un celular por cada habitante? ________

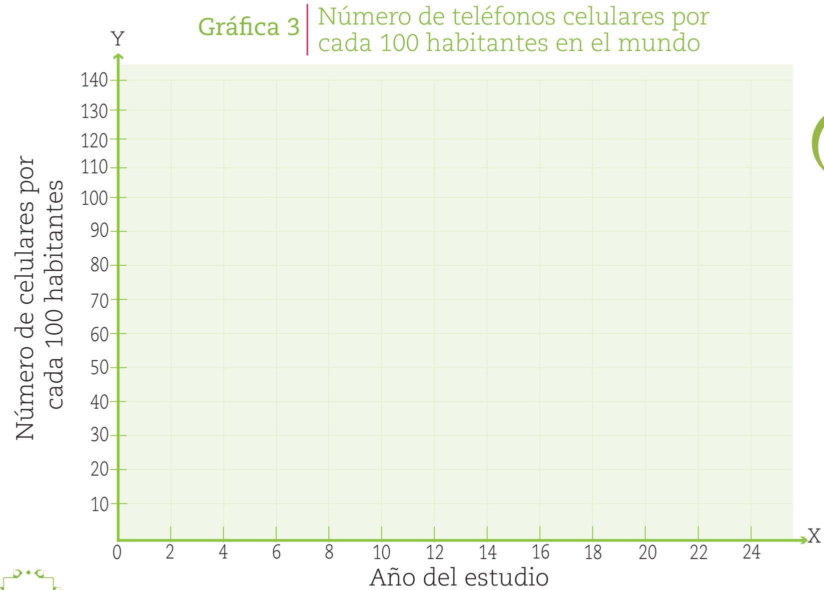
   b) Una de las siguientes expresiones algebraicas modela la situación. Márquenla con una ✓ y argumenten por qué. Consideren que x representa cada uno de los años que duró el estudio, y que y es la cantidad de teléfonos celulares por cada 100 habitantes en cada año.

   ☐ $y = 2x + 1.7$ ☐ $y = 0.2x^2 + x + 2.5$ ☐ $y = \frac{x^2}{2} + 2.5$

2. Utilicen la expresión algebraica que eligieron para completar la siguiente tabla.

	Número de celulares por cada 100 habitantes en el mundo						
Año	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
Año del estudio	16	17	18	19	20	21	22
Celulares por cada 100 habitantes							

Gráfica 3 | Número de teléfonos celulares por cada 100 habitantes en el mundo



3. Con los datos de la tabla de arriba y los de la tabla de la página 117, elaboren la gráfica para modelar el estudio.

4. En grupo y con apoyo del maestro, comparen las respuestas de las actividades anteriores con las de sus compañeros. Analicen en particular las diferentes representaciones de la misma función: ¿cómo se corresponde la gráfica con los valores de la tabla y con la expresión algebraica? ____

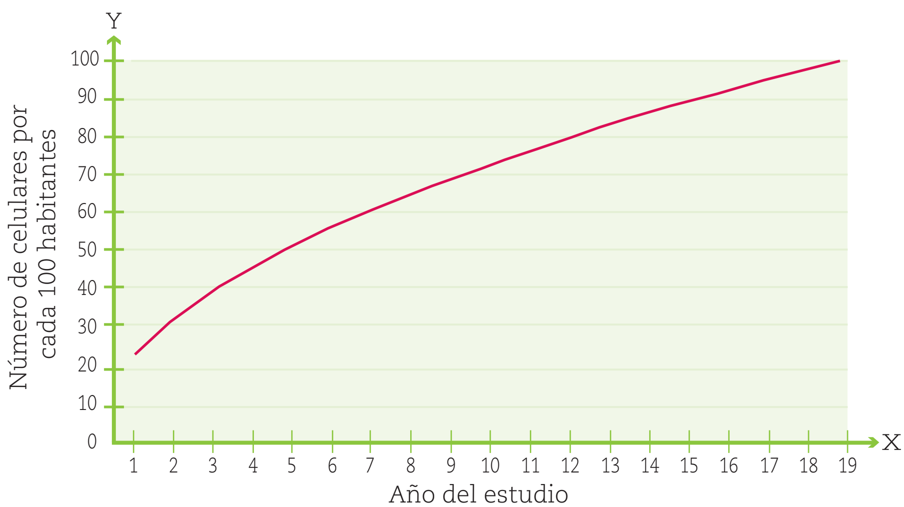
____

5. Trabajen en pareja. En Europa se realizó un estudio similar al del organismo internacional al mismo tiempo. Los resultados mostraron que el comportamiento registrado era diferente al del primer estudio.

a) ¿Cuántos teléfonos celulares había en Europa por cada 100 habitantes en el primer año del estudio?

b) A partir de la gráfica de la derecha completen la tabla.

Gráfica 4 | Número de teléfonos celulares por cada 100 habitantes en Europa



	Proyección del número de celulares por cada 100 habitantes en Europa							
Año	2000		2004	2009	2011		2016	2019
Año del estudio	1		5	10	12		17	20
Celulares por cada 100 habitantes	23	32.5				89		

c) ¿En qué año habrá, según el segundo estudio, un celular por cada habitante de Europa? ______________________________

d) Comparen ambas gráficas. ¿Cuál de las dos crece más rápido en los primeros años del estudio? ____________ ¿Cuáles son las principales diferencias entre ambos estudios? ______________________________

¿Por qué creen que hay tanta diferencia respecto al estudio mundial? ____________

____

____

e) Si las tendencias siguieran igual, ¿qué valores aproximados tendrían ambos estudios en el año 2025? ______________________ ¿Cuál sería el significado de estos resultados en la realidad? ______________________

La gráfica del estudio de la sesión 1 (página 31) es parte de una curva llamada parábola y su relación funcional está dada por una función cuadrática.

En la representación algebraica de una función cuadrática, la variable independiente x aparece elevada al cuadrado y determina su grado. En este caso la expresión algebraica asociada a esta función es:

$$y = 0.2x^2 + x + 2.5$$

Sesión 3

La distancia de frenado al conducir

1. Trabajen en pareja. En el *Reglamento de tránsito en carreteras y puentes de jurisdicción federal* de México, y en el *Manual del conductor* publicados por la Secretaría de Seguridad y Protección Ciudadana se establece que: *El conductor de un vehículo debe respetar las normas de circulación y conservar, respecto del que va adelante, la distancia de seguridad que le garantice su detención oportuna y así evitar accidentes*. Pero, ¿cómo se puede calcular esta distancia de seguridad?

Cartel de una campaña vial que busca evitar accidentes.

a) Comenten cómo influye la velocidad del vehículo y la distancia que debe recorrer para detenerse después de comenzar a frenar.

b) Cuando van en bicicleta o corriendo, si van más rápido, ¿les cuesta más trabajo detenerse? Discutan por qué creen que sucede esto.

2. El cartel de la campaña vial de la página anterior ayuda a los conductores a calcular la distancia de seguridad entre un automóvil y el que se encuentra enfrente para frenar sin ocasionar un accidente; para ello se considera el tiempo de reacción del conductor, desde el instante en que reconoce el evento que lo pone en riesgo, hasta el momento en que logra detener el coche por completo.

a) Un vehículo avanza a 80 km/h. Según la información del cartel, ¿qué distancia debe mantener este auto respecto al vehículo que va adelante? __________

____

b) Si un automóvil circula a 110 km/h, velocidad máxima permitida en autopista, ¿cuánta distancia de seguridad debe dejar éste respecto a los vehículos que van adelante? ______________________________

c) En una carretera, un vehículo circula a 70 km/h; a 40 m de distancia del punto en que circula está detenido un animal, ¿tiene suficiente espacio para detenerse por completo? ______________________________

3. Calculen la distancia de seguridad para cada velocidad que aparece en la tabla y contesten las preguntas.

	Distancia de seguridad para un frenado que evite accidentes								
Velocidad del automóvil (en km/h)	10	20	55	60	75	80	115	130	150
Distancia de seguridad (en m)									

a) De acuerdo con los datos de la tabla, ¿qué cantidad tuvieron que multiplicar para obtener la distancia de seguridad cuando un automóvil viaja a 60 km/h?

____

Y, ¿a 75 km/h? ______________________________

b) ¿Qué operación tienen que realizar para obtener las decenas de la velocidad?

____

c) Si *x* es la velocidad del automóvil, ¿cómo expresas la distancia de seguridad en función de la velocidad que lleva? ______________________________

d) Ana, Ramón y Sofía comparan las expresiones algebraicas que representan la función distancia de seguridad respecto a la velocidad del vehículo. Determinen quién tiene la razón.

Ana:
La expresión algebraica que yo propongo es

$y = x^2$

y es la distancia de seguridad en metros y está en función de x que es la velocidad del automóvil.

Ramón:
La función de la distancia de frenado respecto a la velocidad es

$y = \left(\frac{x}{10}\right)^2$

y es la distancia de seguridad mientras que x es la velocidad del automóvil.

Sofía:
La expresión algebraica que yo usé es

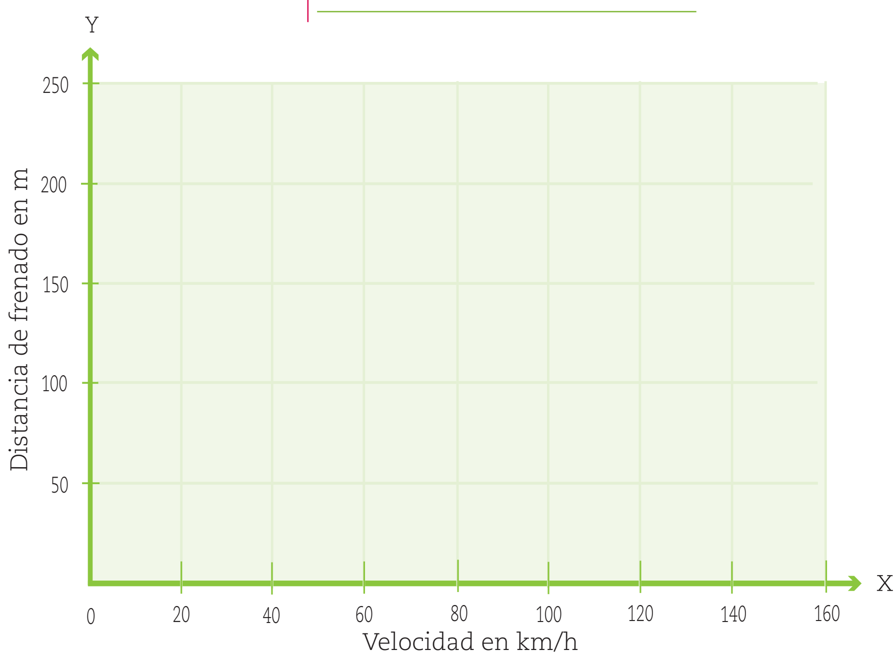
$D(v) = (0.1v)^2$

en donde $D(v)$ es la distancia de seguridad y v es la velocidad del automóvil.

4. En grupo y con apoyo del maestro, comparen las expresiones algebraicas que obtuvieron y analícenlas junto con las de Ana, Ramón y Sofía. Guíen su análisis con estas preguntas: ¿cuál o cuáles expresiones son correctas? ¿Cómo se puede verificar que una expresión algebraica se corresponde o no con la situación que representa, con los datos de una tabla o con la representación gráfica?

5. Utilicen los datos de la tabla y la expresión algebraica obtenida en la actividad 3 para obtener la gráfica que representa la función de la distancia de frenado seguro respecto a la velocidad del automóvil; anoten también un título adecuado a la gráfica.

Gráfica 5 | ______________________



Otras maneras de determinar la distancia de seguridad

1. Trabajen en pareja. En una ciudad han establecido que la manera de determinar la distancia de frenado seguro está definida por la función:

$$D(v) = 0.007v^2 + 0.2v$$

En donde $D(v)$ es la distancia sugerida entre un automóvil y el que se sitúa delante de él; mientras que v es la velocidad del mismo. Utilicen la función para completar la tabla.

	Distancia de seguridad para un frenado que evite accidentes								
v Velocidad del automóvil (en km/h)	30	55	60	75	80	100	115	120	130
$D(v)$ Distancia de seguridad (en m)									

En las funciones siempre se relacionan dos variables que generalmente se representan con letras. En ejemplos anteriores se ha empleado la letra y para representar la variable dependiente y la x para representar la variable independiente.

En la situación anterior, representamos la función como

$$D(v) = 0.007v^2 + 0.2v$$

La notación mostrada es una manera diferente de representar las funciones. En particular, esta notación nos permite identificar cuál es la variable dependiente y cuál es la variable independiente.

En este caso, $D(v)$ es la variable dependiente y representa la distancia recorrida en metros; v es la variable independiente y representa la velocidad a la que circula el automóvil. La función es de segundo grado o cuadrática, ya que el mayor exponente que tiene la variable independiente es 2. La función D es llamada función distancia de seguridad. En resumen, la función nos dice cómo calcular la distancia de seguridad (variable dependiente) a partir de la velocidad que lleva un automóvil (variable independiente).

Las dos maneras más usuales de expresar la función cuadrática son

$$D(v) = 0.007v^2 + 0.2v$$

$$y = 0.007v^2 + 0.2v$$

Gráfica 6

2. En la imagen de la izquierda, grafiquen la función de la distancia de seguridad respecto a la velocidad del automóvil, según la expresión algebraica $D(v) = 0.007v^2 + 0.2v$ y los datos de la tabla de la página anterior.

3. Comparen esta gráfica con la obtenida en la actividad 5 de la página 122.

a) ¿Cómo cambian las distancias de frenado seguras en función de la velocidad?

____

b) ¿Para qué velocidad la distancia de seguridad es la misma? ____________________

____

Sesión 5

Para terminar

El uso del teléfono celular al conducir

1. Trabajen en equipo. En la sesión anterior utilizaron la función $D(v) = 0.007v^2 + 0.2v$, donde el término $0.007v^2$ representa la distancia de frenado y $0.2v$ representa la distancia de reacción.

Esta última distancia, la de reacción, es la distancia recorrida desde que el conductor se da cuenta de un evento peligroso hasta que pisa el freno.

Los cálculos más conservadores estiman que la distancia de reacción cuando se usa el celular es tres veces mayor cuando se lee un mensaje de texto o se contesta una llamada, y hasta seis veces cuando se escribe y envía un mensaje.

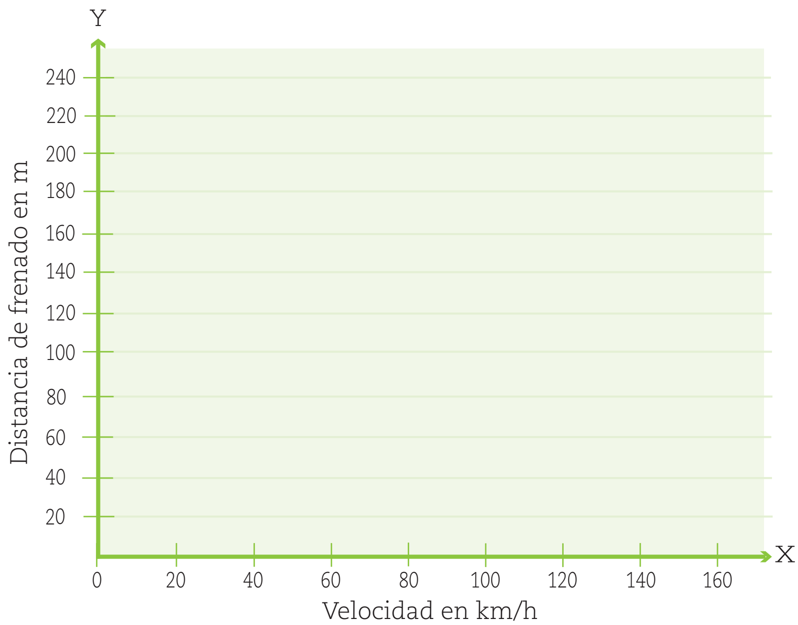
a) En la siguiente página, escriban una expresión algebraica que represente la función de distancia de seguridad respecto a la velocidad cuando se responde una llamada en el teléfono celular y otra para cuando se escribe un mensaje de texto.

Dato interesante
Diversos estudios han encontrado que cuando se usa el teléfono celular al manejar, los conductores tardan más tiempo en detectar y reaccionar a cambios repentinos; esto implica que se requiere de una distancia mayor para frenar sin riesgo.

Función distancia de seguridad respecto a la velocidad cuando se responde una llamada en el teléfono celular	Función distancia de seguridad respecto a la velocidad cuando se envía un mensaje escrito en el teléfono celular

b) Grafiquen las dos funciones obtenidas junto con la de la actividad 2 de la sesión 4, de la página 124.

Gráfica 7



2. En grupo y con apoyo del maestro, comparen las gráficas. Reflexionen cómo afectan las distracciones del conductor para determinar la distancia de seguridad. Respondan las siguientes preguntas: ¿cómo se modifican las distancias de seguridad en función de la velocidad? ¿Qué término de la regla algebraica fue el que se modificó? ¿De qué manera afectan estos ajustes a las gráficas?

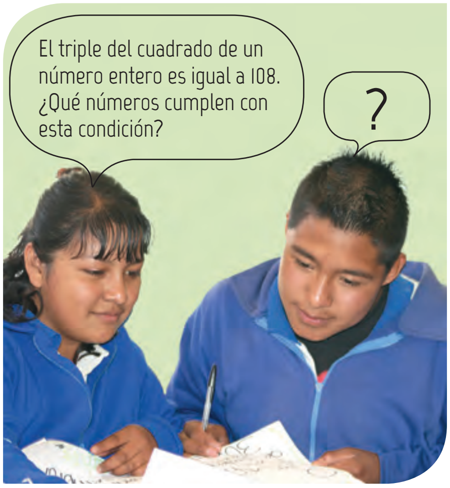
3. Observen el recurso audiovisual *Distancia de seguridad* para analizar por qué las condiciones del clima, las distracciones del conductor o las condiciones del automóvil modifican la función distancia de seguridad.

4. Usen el recurso informático *Análisis de gráficas y expresiones algebraicas de funciones cuadráticas*, que les permitirá aplicar las funciones en la solución de problemas al observar la dependencia del valor de una de las variables respecto de otra en una relación funcional cuadrática.

13. Ecuaciones cuadráticas 2

Sesión 1

Para empezar



Uno de los grandes retos para los matemáticos a lo largo de la historia fue el desarrollo del lenguaje algebraico, considerado como un conjunto de conceptos, expresiones y símbolos que permiten estudiar el conocimiento existente y descubrir uno nuevo. El lenguaje algebraico se inició con los griegos y se le atribuye a Diofanto, en el siglo III, el haber utilizado por primera vez una literal para representar una incógnita en una ecuación. Los griegos se enfocaron en el estudio de la geometría, pero desconocían los números negativos y el cero, por lo que no lograron un mayor avance en el conocimiento algebraico.

Después de los griegos, fueron los matemáticos indios y árabes quienes hicieron aportes importantes al desarrollo del lenguaje algebraico, por ejemplo, el uso de los números negativos y la invención del sistema decimal, que hasta la fecha es la base de nuestro sistema de numeración. Las contribuciones de los matemáticos indios fueron recogidas en una obra del matemático árabe Al-Juarismi (*ca*. 850 n.e.), de cuyo nombre derivan las palabras álgebra y algoritmo.

Fue hasta el siglo XVI cuando aparecieron los primeros ejemplos de álgebra simbólica, en la obra del matemático francés Francisco Vieta (1540-1603).

En esta secuencia aprenderás a distinguir varios tipos de ecuaciones de segundo grado, los casos que se presentan respecto a las soluciones o raíces, y conocerás otros procedimientos para resolver las ecuaciones que te permitirán solucionar problemas de manera más eficiente.

Glosario
Ca. es la abreviatura del término latino *circa*, significa “aproximadamente”, se usa cuando no se tienen fechas exactas.

Manos a la obra

Ecuaciones de la forma $ax^2 + c = 0$

1. Resuelve la siguiente situación, al completar el procedimiento que se indica.

El triple del cuadrado de un número entero es igual a 108. ¿Qué números cumplen con esta condición?

____

a) Representa algebraicamente:

- Un número entero cualquiera: ______________
- El cuadrado de un número cualquiera: ______________
- El triple del cuadrado de un número cualquiera: ______________

b) De acuerdo con la situación planteada, la expresión anterior es igual a 108. Escribe la ecuación que representa esta igualdad.____________________

c) Comparen con sus compañeros de grupo la ecuación que formularon para ver si es la misma. Si no lo es, expliquen a qué se debe y, con ayuda del maestro, decidan quiénes y por qué tienen la razón.

d) Trabajen en equipo. Comenten lo que conviene hacer para resolver la ecuación.

¿Cuáles son las raíces de la ecuación? x_1 = __________ x_2 = __________

Verifiquen, en su cuaderno, si ambas raíces satisfacen la ecuación y comenten si éstas son solución del problema y por qué. ____________________

2. Desarrollen un procedimiento similar al de la actividad 1 para resolver, en su cuaderno, el siguiente problema. Usen 3.14 como valor de π. Después de resolver, contesten las preguntas.

El área de un círculo es 153.86 cm². ¿Cuánto mide el radio del círculo? __________

a) En este caso hay dos expresiones algebraicas equivalentes que representan el área del círculo, ¿cuáles son esas expresiones? ____________________

b) ¿Cuál es la ecuación que permite resolver el problema? ____________________

c) ¿Cuáles son las raíces de la ecuación? r_1 = __________ r_2 = __________

d) Expliquen por qué sólo una de las raíces puede ser solución del problema: __________

____

e) ¿Cuánto mide el radio del círculo? ____________________

3. Con base en el siguiente problema, anoten lo que se pide en la tabla: *El largo de un terreno rectangular mide el triple que el ancho y su área es igual a 588 m². ¿Cuáles son las medidas del terreno?*

Ancho = _______________ Largo = _______________

Para obtener las raíces de la ecuación pueden usar el método de ensayo y error que utilizaron en la secuencia 4.

Representación algebraica de…			Área conocida	Ecuación	Raíces
ancho	largo	área			x_1 = x_2 =

4. En grupo y con la ayuda de su maestro, lean y comenten lo siguiente:

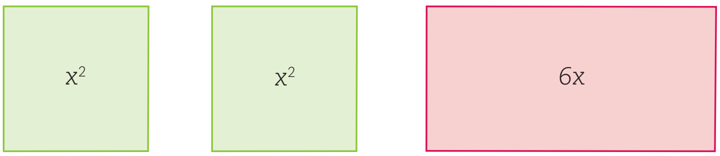
La forma general de las ecuaciones de segundo grado es $ax^2 + bx + c = 0$, que es un trinomio de segundo grado, donde $a \neq 0$, lo que significa que el valor de a no puede ser cero. Cuando a una ecuación de segundo grado le falta alguno de los términos bx o c, se dice que es una *ecuación incompleta*.

Una ecuación cuadrática, como $2x^2 = 50$, no tiene el segundo término (llamado término lineal). Para resolverla, primero se divide entre 2 cada miembro, en este caso resulta $x^2 = 25$. Después, se extrae la raíz cuadrada de ambos miembros y se obtienen las raíces: $x_1 = 5$, $x_2 = -5$

5. De acuerdo con lo anterior, comenten por qué a una ecuación de segundo grado incompleta no puede faltarle el término ax^2.

Sesión 2 Ecuaciones de la forma $ax^2 + bx = 0$

1. Trabajen en equipo. Completen lo que se pide para resolver el siguiente problema: *Se tienen dos cuadrados iguales, de área x^2 cada uno. La suma de las áreas de estos dos cuadrados es igual a un rectángulo de área 6x. ¿Cuánto mide el lado del cuadrado?*



a) ¿Cuál es la expresión algebraica que representa la suma de las áreas de los dos cuadrados? ______________________________

____

b) ¿Cuál es la ecuación que relaciona el área de los dos cuadrados con el área del rectángulo?

____

c) Comparen la ecuación que escribieron con las de otros equipos. Si no es la misma, averigüen a qué se debe y quién tiene razón. ______________________________

d) Busquen un número que satisfaga la ecuación. Anótenlo aquí: x_1 = ______________

e) Anoten en la tabla las medidas que se piden y verifiquen que cumplen con las condiciones del problema.

Lado de un cuadrado	Área de un cuadrado	Área de los dos cuadrados	Ancho del rectángulo	Largo del rectángulo	Área del rectángulo

2. En grupo, comenten la manera en que encontraron las medidas para completar la tabla anterior. Luego, lean y comenten la siguiente información para responder lo que se pide.

A las ecuaciones cuadráticas de la forma $ax^2 + bx = 0$ como $2x^2 = 6x$, que es equivalente a $2x^2 - 6x = 0$ les falta el término c, llamado término independiente.

Un procedimiento para resolver estas ecuaciones, distinto al de ensayo y error, consiste en expresar el primer miembro de la ecuación como un producto de dos factores, es decir, hay que factorizar el primer miembro.

- El primer factor es 2x ya que 2 es el MCD de 2 y 6, mientras que x es el MCD de x^2 y x. Aquí 2x es el MCD de los términos del primer miembro de la ecuación.
- El segundo factor se obtiene al dividir cada término del primer miembro entre el MCD, que es 2x, de donde queda $2x(x - 3) = 0$. Esta ecuación es equivalente a la expresión original. Cuando el producto de dos números es igual a cero, es porque uno de los dos factores es cero. A esto se le conoce como *propiedad del cero en la multiplicación* o *propiedad de producto cero*.

a) La ecuación $2x(x-3) = 0$ expresa una multiplicación de dos factores cuyo resultado es cero. Expliquen por qué al menos uno de los dos factores tiene que ser igual a cero. ______

b) Suponiendo que el primer factor, $2x$, es igual a cero, esto es, que $2x = 0$, ¿cuál es el valor de x?

______

c) Suponiendo que el segundo factor, $x - 3$, es igual a cero, esto es, que $x - 3 = 0$, ¿cuál es el valor de x?

______

d) ¿Cuáles son las raíces de la ecuación $2x^2 - 6x = 0$? $x_1 =$ ______ $x_2 =$ ______

e) Comenten y escriban en su cuaderno si las dos raíces son solución al problema que se planteó al inicio de la actividad 1, de la página 128, o sólo una de ellas; digan cuál y por qué.

3. Trabajen en equipo. Hagan un desarrollo similar al de la actividad 1, de la página 128, para resolver el siguiente problema: *Cuatro veces el cuadrado de un número es igual a ocho veces el mismo número. ¿De qué número se trata?* ______

a) ¿Cuál es la ecuación que representa las condiciones del problema? ______ Escriban nuevamente la ecuación, igualada a cero. ______

b) ¿Cuál es el MCD de los términos de la ecuación? ______

c) Escriban la ecuación como producto de dos factores. ______

d) Igualen a cero cada uno de los factores y obtengan: $x_1 =$ ______ $x_2 =$ ______

e) Verifiquen que las raíces obtenidas satisfacen la ecuación. ¿Con cuáles números se cumplen las condiciones del problema? ______

4. Contesten las preguntas y hagan lo que se indica.

a) ¿En cuál de las siguientes factorizaciones el factor común es el MCD de los términos de la ecuación $3x^2 - 6x = 0$? Coloquen una ✓ en la respuesta correcta.

☐ $x(3x - 6) = 0$ ☐ $3(x^2 - 2x) = 0$ ☐ $3x(x - 2) = 0$

b) ¿En cuál de las siguientes factorizaciones el factor común es el MCD de los términos de la ecuación $5x^2 + 2.5x$? Coloquen una ✓ en la respuesta correcta.

☐ $5(x^2 + x)$ ☐ $2.5x(2x + 1)$ ☐ $x(x^2 + 2.5)$ ☐ $5x(x + 2.5)$

c) Formulen una ecuación de segundo grado cuyas raíces sean: $x_1 = 0$ y $x_2 = 5$. ______

5. Entre compañeros y con apoyo del maestro, comparen sus respuestas, identifiquen los errores y corrijan si es necesario.

6. Observen el recurso audiovisual *Ecuaciones cuadráticas incompletas* para analizar la manera de resolver ecuaciones de segundo grado de la forma $ax^2 + bx = 0$ y $ax^2 + c = 0$.

7. Utilicen el recurso informático *Factorización de ecuaciones cuadráticas incompletas* para practicar el método de factorización con el fin de resolver ecuaciones cuadráticas incompletas.

Sesión 3

Ecuaciones de la forma $x^2 + bx + c = 0$

1. Trabajen en equipo. Hagan lo que se indica y contesten las preguntas que se plantean para resolver el siguiente problema: *El producto de dos números enteros consecutivos es 182. ¿Cuáles son los números?*

   a) Completen la tabla.

Representación algebraica de…			Producto conocido	Ecuación cuadrática
un número entero	el número consecutivo	producto de dos números consecutivos		

   b) Comparen con otros equipos lo que anotaron en la tabla y la solución, que encontraron. Si hay diferencias, averigüen a qué se deben y decidan quiénes tienen razón.

2. Seguramente, la solución que encontraron son dos números enteros consecutivos y positivos cuyo producto es 182. Ahora van a usar otro procedimiento para encontrar tanto la solución positiva, que ya tienen, como la solución negativa. Hagan lo que se indica.

   a) Efectúen las operaciones necesarias para que los tres términos de la ecuación queden ordenados en el primer miembro, como en la forma general: $ax^2 + bx + c = 0$.

   b) Anoten en la tabla lo que se pide.

Ecuación cuadrática ordenada igualada a cero	Valores de los coeficientes		Valor del término independiente
	a	*b*	*c*

   c) Ahora, expresen la ecuación anterior como un producto de dos factores que es igual a cero:

$$(x \qquad)(x \qquad) = 0$$

   Observen que el primer término de cada factor es la raíz cuadrada del primer término de la ecuación. Para encontrar el segundo término de cada factor, hay que buscar dos números, que llamaremos p y q, que cumplan con las condiciones que se muestran en el siguiente esquema.

De acuerdo con los datos de la tabla, donde $b = 1$ y $c = -182$, hay que buscar dos números (p y q) que sumados den 1 y multiplicados den –182. Lo que se quiere es obtener un producto de binomios del tipo $(x + p)(x + q)$.

$$x^2 + \overset{p+q}{\overset{\downarrow}{b}}x + \underset{\underset{pq}{\uparrow}}{c} = 0$$

- ¿Cuáles son los números buscados? ______________________________

d) Con los números anteriores, completen la ecuación expresada como producto de dos factores.

$$(x \qquad)(x \qquad) = 0$$

e) Finalmente, apliquen la propiedad del producto igual a cero y encuentren las dos raíces de la ecuación. $x_1 =$ ______________________ $x_2 =$ ______________________

f) ¿Cuáles son los dos números negativos que solucionan el problema? ______________________

3. Lean lo siguiente y, si es necesario, regresen a revisar lo que trabajaron.

El procedimiento para resolver una ecuación completa de segundo grado mediante su descomposición en dos factores se llama método de factorización y se resume en lo siguiente. Dada una ecuación cuadrática como $ax^2 + bx + c = 0$ con $a = 1$

Paso 1: Se hacen las operaciones necesarias para que la ecuación quede ordenada y con los tres términos en el primer miembro, esto es, en su forma canónica:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Paso 2: Se buscan dos números p y q, tales que, $p + q = b$ y $pq = c$

Paso 3: Se escribe la ecuación como producto de dos factores igual a cero, esto es, en su forma factorizada:

$$(x + p)(x + q) = 0$$

Paso 4: Se aplica la propiedad de producto cero y se obtienen las raíces.

Si $x + p = 0$ entonces $x_1 = -p$ Si $x + q = 0$ entonces $x_2 = -q$

4. Relacionen cada ecuación con la factorización que le corresponde.

Forma canónica	**Forma factorizada**
$x^2 + 2x - 15 = 0$	$(x + 3)(x + 5) = 0$
$x^2 - 2x - 15 = 0$	$(x - 3)(x - 5) = 0$
$x^2 + 8x + 15 = 0$	$(x - 3)(x + 5) = 0$
$x^2 - 8x + 15 = 0$	$(x - 5)(x + 3) = 0$

5. Con apoyo del maestro comparen sus respuestas. Revisen la formalización de la actividad 2c) que se muestra al comienzo de esta página y corrijan si es necesario.

Sesión 4

De la forma factorizada a la forma canónica

1. Trabajen en equipo. La mitad de los integrantes resuelve el problema A, y la otra mitad, el problema B. Cuando encuentren las raíces de cada problema, intercambien para verificar que cada ecuación se satisface con las raíces que anotaron.

Problema A	Problema B
Juan es siete años mayor que Laura. El producto de sus edades es 294 años. ¿Qué edad tiene cada uno?	*La diferencia entre dos números es siete. El producto de esos números es 294. ¿De qué números se trata?*

a) Anoten en las tablas la información que se pide.

Representación algebraica de…			Expresar el problema A en términos de una sola incógnita	Ecuación cuadrática
edad de Laura	Juan es siete años mayor que Laura	el producto de sus edades es 294 años		

Representación algebraica de…			Expresar el problema B en términos de una sola incógnita	Ecuación cuadrática
un número cualquiera	la diferencia entre dos números es siete	el producto de esos números es 294		

b) Resuelvan cada ecuación cuadrática en su cuaderno.

c) ¿Cuáles son las raíces de cada ecuación?

Problema A	Problema B

2. Con tus compañeros y con apoyo del maestro, comparen sus resultados. En particular, comenten por qué en el problema A una de las raíces no es solución del problema, mientras que en el problema B las dos raíces son solución del problema.

3. Consideren la ecuación factorizada $(x - 2)(x + 5) = 0$ para contestar las preguntas que se plantean y hacer lo que se indica.

a) Escriban la ecuación en su forma canónica. ____________________

b) ¿Cuáles son las raíces de la ecuación? x_1 = ____________ x_2 = ____________

c) Verifiquen en su cuaderno que la ecuación se satisface con las raíces que anotaron.

d) En la ecuación factorizada, el término x es común a los dos factores, –2 y 5 son dos términos no comunes. ¿En qué son diferentes las raíces de la ecuación y los términos no comunes? ____________

____

4. Anoten lo que falta en la tabla.

Ecuación factorizada	Ecuación desarrollada	Raíces
$(x-1)(x+2)=0$		
	$x^2-x-2=0$	
		$x_1=4$ $x_2=3$
	$x^2-6x=0$	
$(x-3)(x+4)=0$		
	$x^2+5x-14=0$	
		$x_1=7$ $x_2=-2$

5. Consideren la siguiente ecuación factorizada $(x+3)(x+3)=0$ para contestar las preguntas y hacer lo que se indica.

a) ¿Cuál es la ecuación en su forma canónica? ____________________

b) ¿Cuáles son las raíces de la ecuación? x_1 = ____________ x_2 = ____________

c) ¿Cuáles de las siguientes ecuaciones son equivalentes a $(x+3)(x+3)=0$? Coloquen una ✓ en las que consideren que lo son.

☐ $(x+3)^2=0$ ☐ $(x-3)^2=0$ ☐ $(3+x)^2=0$ ☐ $(3-x)^2=0$

6. Lean y comenten lo siguiente.

El primer miembro de la ecuación $x^2+6x+9=0$ se conoce como trinomio cuadrado perfecto y tiene las siguientes características que permiten reconocerlo.

Primera: una vez que el trinomio está ordenado, los términos primero y tercero tienen raíz cuadrada exacta, en este caso, x y 3.

Segunda: el segundo término es el doble del producto de las dos raíces cuadradas. En este caso, el producto es $3x$ y el doble de este producto es $6x$.

La *factorización de un trinomio cuadrado perfecto* es un producto de dos binomios iguales o, dicho de otra forma, un binomio elevado al cuadrado.

Las ecuaciones cuyo primer miembro es un trinomio cuadrado perfecto tienen dos raíces.

7. Resuelvan los problemas.

a) El cuadrado de un número más seis veces el mismo número es igual a –9. ¿De qué número se trata? ________________ ¿Por qué?____________________________

____

b) ¿Para qué valor de k, la ecuación $x^2 + kx + 16 = 0$ tiene una solución?________
¿Por qué? ____

c) ¿Para qué valor de k, la ecuación $x^2 + kx + 16 = 0$ tiene dos soluciones? ______
¿Por qué?____

____

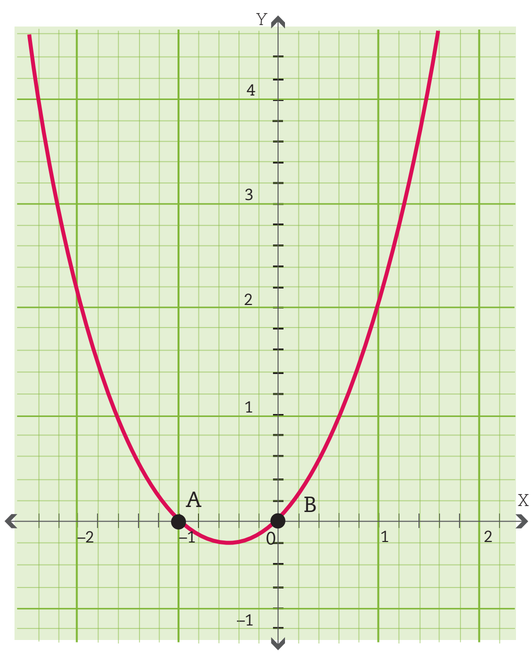
d) ¿Para qué valor de k, la ecuación $x^2 + kx + 16 = 0$ no tiene una solución? ______
Justifiquen su respuesta. ____

8. Con tus compañeros y con el apoyo del maestro comparen sus respuestas, identifiquen los errores y corrijan lo que sea necesario. En particular, comenten cómo pueden inventar ecuaciones de segundo grado a partir de la forma factorizada.

9. Observen el recurso audiovisual *Ecuaciones cuadráticas por factorización* para analizar cómo se resuelven ecuaciones de segundo grado usando este método.

10. Utilicen el recurso informático *Ecuaciones cuadráticas por factorización* para practicar la resolución de ecuaciones cuadráticas usando el método de factorización.

Sesión 5



Para terminar

De la representación gráfica a la expresión algebraica

1. Trabajen en equipo. Analicen la gráfica de la izquierda y contesten las preguntas.

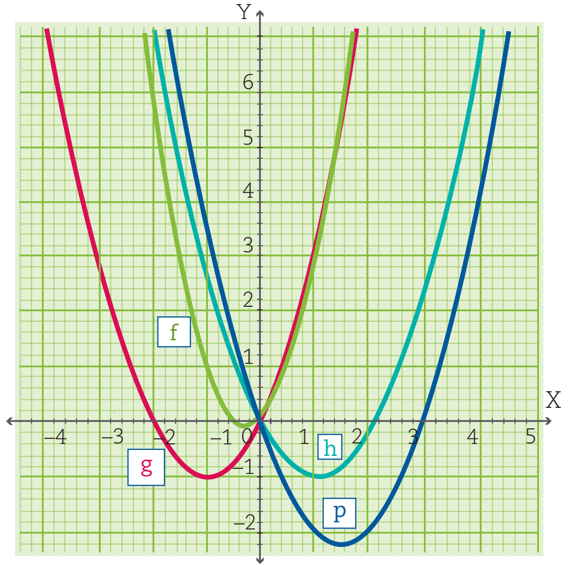
a) ¿Cuáles son las raíces que se muestran en la gráfica?
x_1 = ________________ x_2 = ________________

b) ¿Cuál es la ecuación en forma factorizada?
____

c) ¿Cuál es la ecuación desarrollada? ______________
____

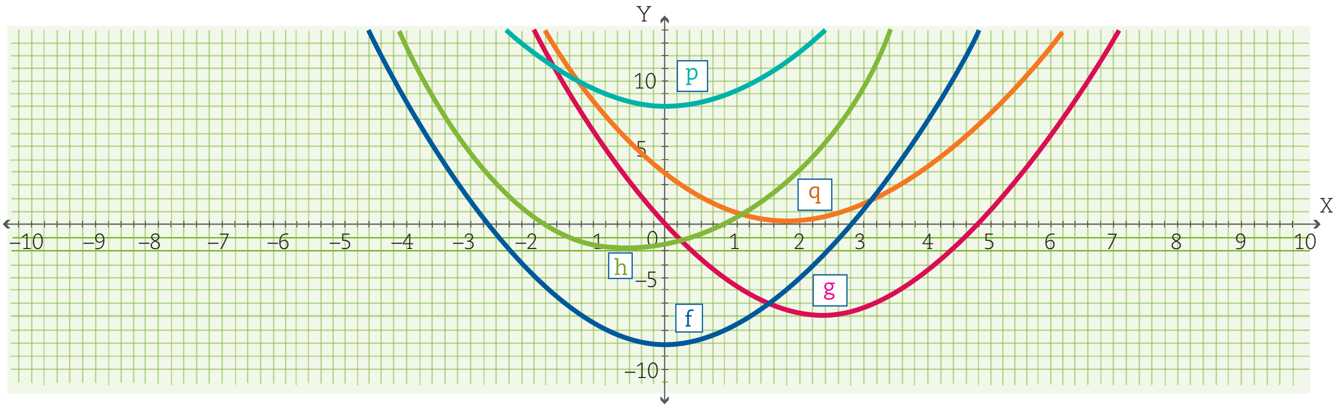
d) La ecuación que anotaron está incompleta. ¿Cuál es el término que le falta? ________________

2. Con base en la gráfica que se muestra, completen la tabla.



Color	Raíces	Ecuación factorizada	Ecuación desarrollada
Azul			
	$x_1 = 0; x_2 = -\frac{1}{2}$		
		$x(x-3) = 0$	
			$x^2 + 2x = 0$

3. Analicen las siguientes gráficas, completen la tabla y contesten las preguntas.



Gráfica	Raíces	Ecuación factorizada	Ecuación desarrollada
h			
	$x_1 = 0; x_2 = 5$		
		No hay factor común	
			$x^2 - 9 = 0$
q			

a) ¿Cuál es la ecuación que tiene una solución?__________ ¿De qué color es su gráfica?

____

b) ¿Cuál es la ecuación que no tiene solución? __________ ¿De qué color es su gráfica?

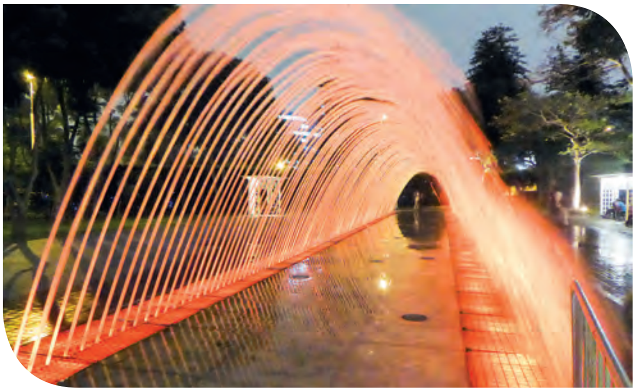
____

4. Con tus compañeros y con apoyo del maestro, comparen sus respuestas, identifiquen los errores y corrijan si es necesario. Comenten cómo se representa en una gráfica una ecuación sin solución.

14. ¿Ecuación o función?

Sesión 1

Para empezar



Existen relaciones de correspondencia comunes en nuestra vida cotidiana. Por ejemplo, la relación entre el número de hojas y de páginas de un libro o algún producto que se vende por kilogramo y el pago que se hace por la cantidad que se compre. En el bloque 1 comenzaste a estudiar un tipo particular de relación: la función cuadrática. Este tipo de función se usa para representar la trayectoria que sigue un objeto en movimiento, por ejemplo, la de una pelota que se lanza hacia arriba y cae, o la del agua al salir de una fuente; ambos efectos se deben a la fuerza de gravedad y se pueden expresar mediante una gráfica, una tabla y algebraicamente.

En la secuencia 11 aprendiste a usar expresiones algebraicas cuadráticas y a encontrar expresiones equivalentes, por ejemplo, para representar el área de una chinampa rectangular. La imagen representa una chinampa cuadrada dividida en dos secciones, una de cultivo y la otra para transitar por ella. ¿Cuál sería el área, en metros cuadrados, de la sección cultivada si el valor de x fuera 3 m, 4 m, 5 m o cualquier otro?

En dicha secuencia también iniciaste el estudio y la resolución de las ecuaciones cuadráticas. En esta secuencia aprenderás a resolver problemas que implican el uso de estas funciones y las ecuaciones asociadas a ellas.

Manos a la obra

Medidas variables

1. Considera las dimensiones de la chinampa de la imagen y responde las preguntas.

a) ¿Con qué expresión algebraica puedes representar el área de la sección rectangular cultivada? ______________________________

b) Si asignas al área de esa región la literal y, la situación puede representarse con una función, ¿cuáles de las expresiones algebraicas de la siguiente página representarían esa función? Márcalas con una ✓.

☐ $y = x^2 - 2$ ☐ $y = x(x - 2)$ ☐ $y = x^2 - 2x$ ☐ $y = 2x - 2$

Compara con un compañero tu respuesta. En caso necesario, corrijan.

c) Si el valor de x es 5 m, ¿cuál es el área de la sección cultivada? ____________

Y, ¿si el valor de x es 10 m? ____________

d) ¿Cuál es el valor menor que puede asignarse a x para que el área tenga sentido en esta situación? ____________

e) Completa la tabla de valores de la función que representa el área de la sección cultivada. En tu cuaderno, traza la gráfica de esta función.

Tabla de valores								
Lado	x	-1	0	1	2	2.5	3	$\frac{11}{3}$
Área cultivada	$y = x^2 - 2x$							

f) ¿Qué representa el punto más bajo de la gráfica respecto a la situación de área que se está modelando? ____________ ¿Tiene sentido ese valor para esta situación? ____________ Explica tu respuesta. ____________

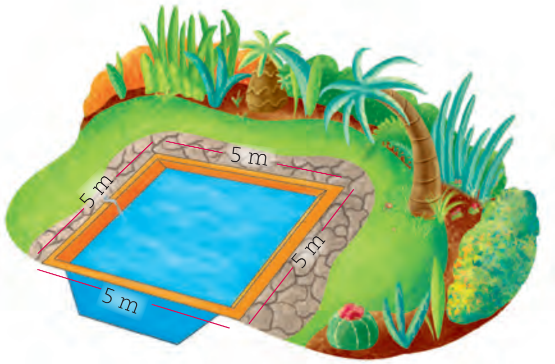
____

g) ¿Cuáles son los valores de las abscisas de los puntos en que la gráfica corta el eje X? ____________ La ecuación cuadrática asociada a esta función es $x(x - 2) = 0$. ¿Se cumple aquí que esos puntos de corte representan la solución de esta ecuación? ____________

h) En grupo y con el apoyo de su maestro, revisen sus respuestas y, en caso necesario, corrijan.

2. Lee el siguiente planteamiento y contesta lo que se pide. *Luis abre las llaves para llenar una alberca cuadrada de 5 m por lado.*

a) En este caso, el volumen y de agua que habrá en la alberca dependerá de la altura x que alcance sucesivamente el agua. ¿Con cuál de las expresiones de abajo puede representarse la variación del volumen respecto del nivel del agua? Márcala con ✓.



☐ $y = 5x$ ☐ $y = 5x^2$ ☐ $y = 25x$ ☐ $y = 25x^2$

b) Completa la tabla de valores de la función que representa la variación del volumen respecto del nivel que alcanza el agua en la alberca. Puedes usar calculadora. En tu cuaderno, traza la gráfica de esta función.

Altura de la alberca en metros (x)	0	0.4	0.8	$\frac{5}{4}$	$\frac{8}{5}$	2
Volumen en metros cúbicos (y)						

c) ¿Cuál es el valor de la abscisa del punto en que la gráfica corta el eje X? ______
¿Qué representa este punto respecto a la situación que se está analizando?
____
____

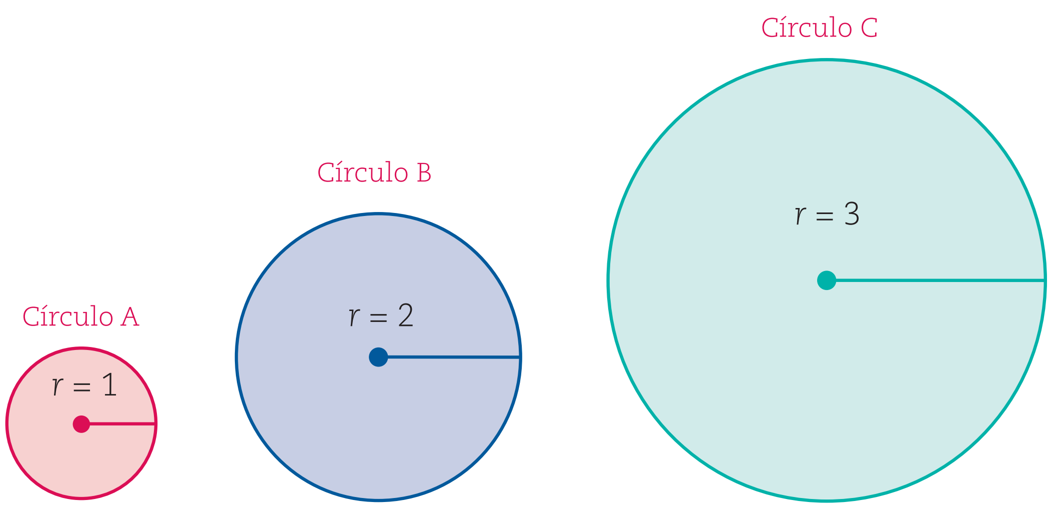
d) La ecuación asociada a esta función es $25x = 0$. ¿Se cumple que ese punto de corte represente la solución de esta ecuación? ______________ Justifica tu respuesta. ______________________________
____

3. En grupo, y con el apoyo de su maestro, revisen sus respuestas y, en caso necesario, corrijan.

Sesión 2

Una familia de círculos

1. Trabajen en pareja. Consideren las imágenes que se muestran y dibujen en su cuaderno los círculos D, E y F con radio de 4, 5 y 6 cm, respectivamente.



2. En grupo y con apoyo de su maestro, comparen sus dibujos y comenten cómo los trazaron. Consideren las dimensiones de cada círculo para obtener su circunferencia y área. ¿Con qué expresión algebraica se puede representar el área de un círculo cualquiera a partir de la medida de su radio? Y, ¿en el caso de la circunferencia?

3. Lean y analicen la siguiente información.

> La circunferencia y el área de un círculo pueden expresarse como funciones del radio de la siguiente manera: $C(r) = \pi(2r)$ y $A(r) = \pi r^2$
>
> Donde r es el radio del círculo y los valores de su circunferencia $C(r)$ y su área $A(r)$ dependen de los que se le asignen a r, que es la variable independiente.

4. Marquen con una ✓ las opciones correctas. Consideren 3.1416 como valor de π.

a) ¿Con cuáles de las siguientes expresiones algebraicas también es posible determinar, aproximadamente, el perímetro de un círculo a partir de la medida de su radio?

☐ $C(r) = 3.1416 \times r$ ☐ $C(r) = 3.1416 \times 2 \times r$

☐ $C(r) = 2\pi r$ ☐ $C(r) = 6.2832r$

b) ¿Con cuáles de las siguientes expresiones también se calcula, aproximadamente, el área de un círculo?

☐ $A(r) = 2 \times 3.1416 \times r$ ☐ $A(r) = 3.1416r^2$

☐ $A(r) = 6.2832r^2$ ☐ $A(r) = 3.1416 \times r \times r$

5. Trabajen en pareja. Calculen las circunferencias y áreas correspondientes para completar la tabla. Pueden utilizar calculadora.

Tabla de valores de la circunferencia y área del círculo en función del radio

Círculo	A	B	C	D	E	F
r en cm	1	2	3	4	5	6
$C(r)$ en cm						
$A(r)$ en cm^2						

a) En su cuaderno, ubiquen los valores de la tabla anterior en un mismo plano cartesiano para mostrar la relación entre el radio r y su circunferencia $C(r)$, así como con su área $A(r)$.

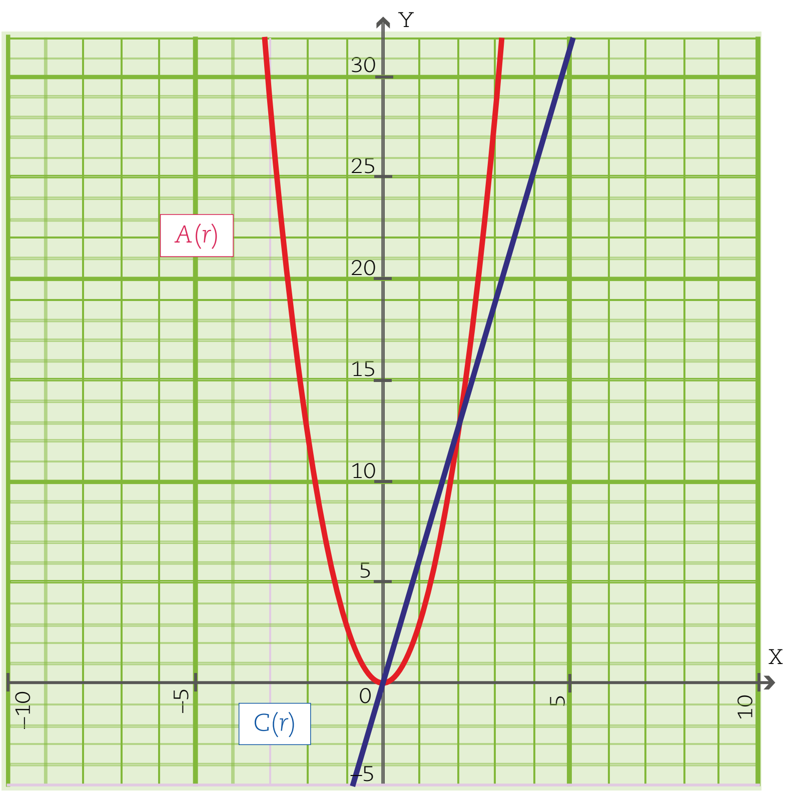
b) Completen las siguientes descripciones de las gráficas en términos de la medida del radio y sus correspondientes circunferencias y áreas.

- *Si el radio mide 4 cm, entonces para el círculo ________________ su circunferencia es ____________, y su correspondiente área es ____________. En las gráficas, estos puntos son (_____, _____) y (_____, _____), respectivamente.*
- *Si un círculo tiene una circunferencia de 31.416 cm, entonces su radio mide ________________ y su correspondiente área es ________________. En las gráficas, estos puntos son (_____, _____) y (_____, _____), respectivamente.*
- *Si el área de un círculo es 113.0976 cm², entonces su radio mide __________ y su correspondiente circunferencia es ____________________. En las gráficas, estos puntos son (______, ______) y (______, ______), respectivamente.*

6. Observen las gráficas de las funciones $C(r) = 2\pi r$ y $A(r) = \pi r^2$ para contestar las siguientes preguntas.

a) ¿Qué tipo de gráfica le corresponde a la función $C(r)$ ______________________
¿Por qué? ____

____



b) ¿Qué tipo de gráfica le corresponde a la función $A(r)$? ________________
¿Por qué? ______________________

____

____

c) ¿Existe un círculo que tenga una circunferencia de 5 cm? ____________

____

¿A qué punto de la gráfica corresponden $r = 0.7957$ y (0.7957,5), si es que aparecen en ésta? ______________

____

d) ¿Habrá dos círculos diferentes que tengan el mismo perímetro? __________
¿Por qué? ______________________

____

____

e) La expresión algebraica de este caso es $2\pi r = 5$, que es una ecuación lineal. ¿Con cuál o cuáles de las siguientes expresiones también es posible obtener la circunferencia de este círculo? Márquenlas con una ✓.

☐ $3.1416r = 5$ ☐ $6.2832r = 5$ ☐ $(2)(3.1416)r = 5$

En su cuaderno, resuelvan las ecuaciones para verificar que es posible obtener el perímetro del círculo, recuerden que $\pi \approx 3.1416$.

f) ¿Existe un círculo que tenga un área de 5 cm²? ____________ ¿A qué punto o puntos de la parábola corresponden? ____________

____

Tracen una línea paralela al eje X en el punto (0,5). ¿En cuántos puntos corta a la gráfica de la función área $A(r)$? ________ Si se considera el contexto del dibujo de una familia de círculos, ¿es posible dibujar dos círculos diferentes que tengan la misma área? ____________ ¿Por qué? ____________

____

g) ¿Cuáles son las ecuaciones que representan un círculo de área 5 cm² en relación con su radio? Márquenlas con una ✓.

☐ $6.2832r^2 = 5 \text{ cm}^2$ ☐ $\pi r^2 = 5 \text{ cm}^2$

☐ $3.1416r = 5 \text{ cm}^2$ ☐ $3.1416r^2 = 5 \text{ cm}^2$

- ¿Qué tipo de ecuaciones son? ____________
  En su cuaderno, resuelvan las ecuaciones para verificar que corresponden a la situación indicada.

7. Con ayuda de su maestro, comparen y comenten sus respuestas de las actividades anteriores y, en caso necesario, corrijan.

8. Comparen el comportamiento de la gráfica *A(r)* (parábola) con los valores de la tabla de la actividad 5 y contesten lo que se pide.

a) ¿En qué punto está ubicado el vértice de la parábola? ____________

____

b) ¿A qué valor corresponderían los valores del radio, la circunferencia y el área en la tabla? ____________

____

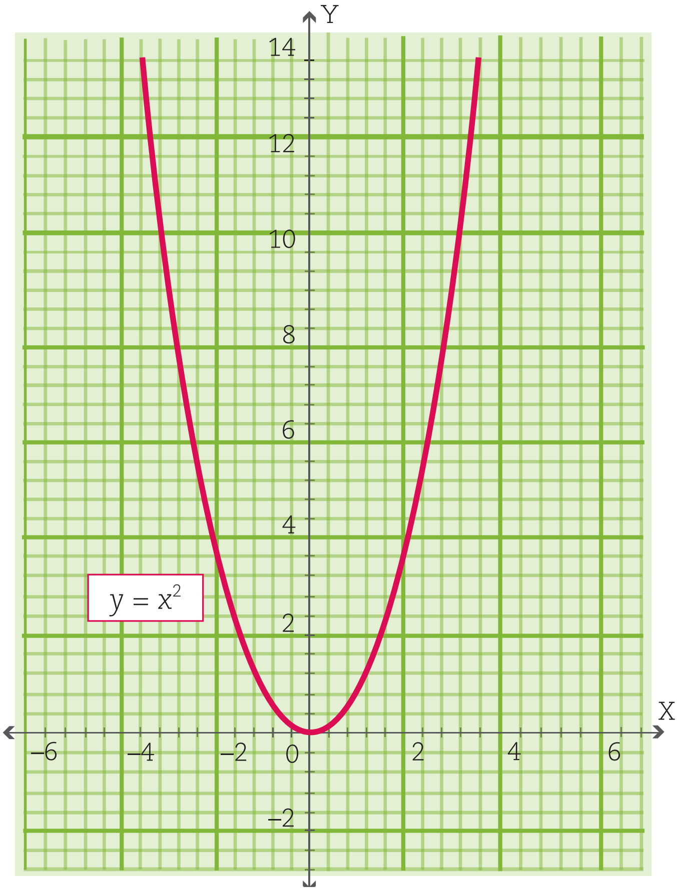
9. Escriban en su cuaderno lo que observan en términos de la medida del radio y el valor de su área y circunferencia.

Sesión 3

Análisis gráfico de $y = x^2$ y $y = x^2 + c$

1. Trabajen en equipo. Contesten las preguntas que se les plantean. La parábola que se muestra es la representación gráfica de la función $y = x^2$.

$y = x^2$



Dato interesante
Se llama *plano o sistema cartesiano* al diagrama de coordenadas que se usa para representar gráficamente funciones matemáticas y ecuaciones de geometría analítica. Fue creado por el filósofo y matemático René Descartes (1596-1650), de donde tomó su nombre.

a) En esta función, cada valor de y se calcula elevando al cuadrado el valor de x. Completen la tabla de valores de esta función.

Tabla de valores de la función $y = x^2$									
x	-4	-3	$-\frac{5}{2}$	-1	0	1	$\frac{5}{2}$	3	4
$y = x^2$									

b) ¿Cuál es el valor de la abscisa del punto en que la gráfica corta el eje X? ________

____

c) La ecuación cuadrática asociada a esta función es $x^2 = 0$. ¿Se cumple que ese punto de corte represente la solución de la ecuación $x^2 = 0$? ________

¿Por qué? ____________________________________

____

2. Hagan la gráfica de $y = x^2 - 4$ en el plano cartesiano en el que ya está dibujada la gráfica de $y = x^2$ y describan en qué se parecen y en qué son diferentes. ________

____

a) Completen la tabla de las funciones descritas en las actividades 1 y 2.

Tabla de valores de las funciones $y = x^2$ y $y = x^2 - 4$

x	-3	$-\frac{5}{2}$	-1	0	1	$\frac{5}{2}$	3
$y = x^2$							
$y = x^2 - 4$							

b) ¿De qué manera se relacionan los valores de la función $y = x^2 - 4$ con los de $y = x^2$? ____________________________________

c) ¿En cuántos puntos corta la gráfica de la función $y = x^2 - 4$ al eje X? ________

¿Cuáles son los valores de las abscisas de esos puntos? ________________

d) ¿Cuáles son las soluciones de la ecuación $x^2 - 4 = 0$ de acuerdo con la gráfica?

$x_1 =$ ________________ $x_2 =$ ________________

e) La ecuación $x^2 - 4 = 0$ es de la forma $ax^2 + c = 0$. ¿Cuál es, en este caso, el valor de a? __________ ¿Cuál es el valor de c? ________________

f) Verifiquen en su cuaderno que la ecuación $x^2 - 4 = 0$ es equivalente a la ecuación $(x + 2)(x - 2) = 0$ y que ambas se satisfacen con las soluciones que muestra la gráfica que trazaron.

3. En grupo, y con ayuda de su maestro, revisen sus respuestas y, en caso necesario, corrijan.

a) Comenten y contesten en su cuaderno.

La función de la cual se obtiene la ecuación $x^2 - 4 = 0$ *es de la forma* $y = ax^2 + c$. ¿Por qué creen que en un caso la expresión $ax^2 + c$ *se iguala a* 0 *y en el otro a la variable* y*? ¿Cuál es la diferencia entre una función y una ecuación?*

b) Lean y comenten lo siguiente.

En general, a una función $f(x)$ se le puede asociar una ecuación cuando interesa estudiar los puntos donde la gráfica de la función interseca con el eje X, esto es, cuando $f(x) = 0$.

4. Observen el recurso audiovisual *¿Función o ecuación?* para continuar analizando representaciones gráficas y tabulares de funciones y cuándo y cómo se establece una ecuación a partir de ellas.

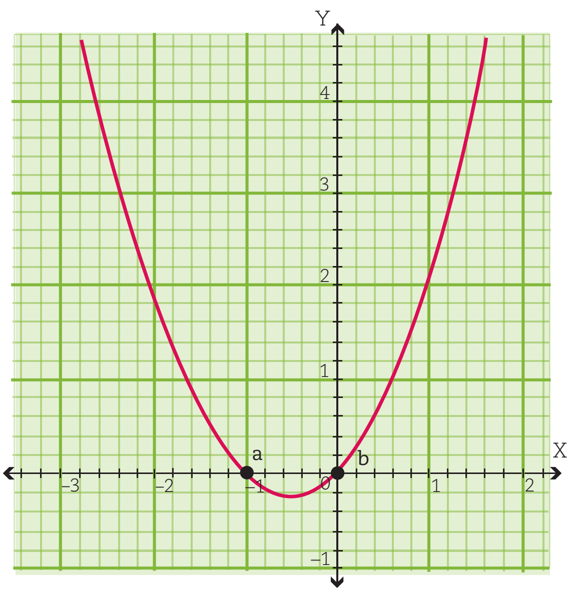
Sesión 4

Para terminar

Funciones con la forma $y = ax^2 + bx$

1. Trabajen en equipo. Contesten las preguntas y hagan lo que se indica. La parábola que se muestra es la representación gráfica de la función $y = x^2 + x$.

$y = x^2 + x$



a) De acuerdo con la gráfica, ¿cuáles son las soluciones (o raíces) de la ecuación $x^2 + x = 0$?

x_1 = ______________ x_2 = ______________

b) La ecuación $x^2 + x = 0$ es de la forma $ax^2 + bx = 0$, es decir, una ecuación incompleta, ¿cuál es el término que le falta? ______________ ¿Cuál es el valor de a? ______________

¿Cuál es el valor de b? ______________

c) Verifiquen en su cuaderno que la ecuación $x^2 + x = 0$ es equivalente a la ecuación en su forma factorizada: $x(x + 1) = 0$ y que ambas se satisfacen con las soluciones que escribieron.

d) La ecuación $x(x + 1) = 0$ se trata de una multiplicación de dos factores cuyo resultado es cero. Expliquen por qué al menos uno de los dos factores tiene que ser igual a cero.

____

e) Si suponemos que el primer factor es $x = 0$, ¿cuál es el valor de x_1? ______________

f) Si suponemos que el segundo factor es $x + 1 = 0$, ¿cuál es el valor de x_2? ______________

____

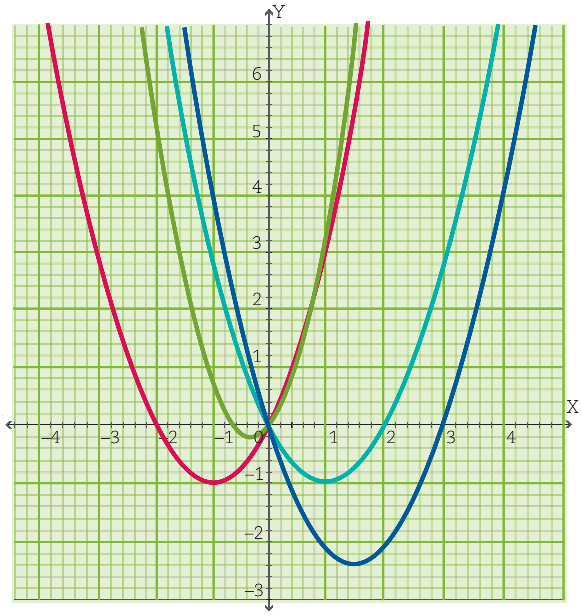
g) Verifiquen que estas soluciones sean las mismas que se aprecian en la gráfica.

h) Describan el procedimiento para resolver una ecuación de segundo grado de la forma $ax^2 + bx = 0$. ______________

2. Con ayuda del maestro, comparen sus resultados y corrijan si es necesario.

3. Trabajen en equipo. Cada una de las parábolas siguientes corresponde a la gráfica de una función.

Funciones con la forma $ax^2 + bx$



Dato interesante
La parábola tiene una presencia importante en la arquitectura. Por ejemplo, en los puentes colgantes, en el diseño de algunas salas de música y en los diseños arquitectónicos de Gaudí.

Escriban delante de cada función el color que le corresponde y la ecuación con sus soluciones.

Función	Color de la gráfica	Ecuación	Soluciones
$y = x^2 - 3x$			x_1 = ______ x_2 =______
$y = 2x^2 + x$			x_1 = ______ x_2 =______
$y = x^2 + 2x$			x_1 = ______ x_2 =______
$y = x^2 - 2x$			x_1 = ______ x_2 =______

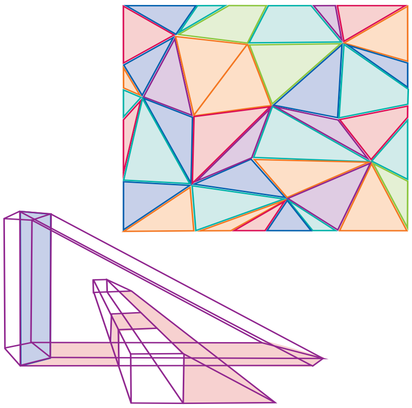
4. Con el apoyo del maestro, comparen sus respuestas y corrijan si es necesario. En particular, traten de explicar por qué en todas las ecuaciones de la forma $ax^2 + bx = 0$, una de las dos soluciones es igual a cero.

5. Utilicen el recurso informático *¿Función o ecuación?* para analizar e interpretar las parábolas asociadas a funciones cuadráticas incompletas e identificar las soluciones de las ecuaciones cuando la función se iguala a cero.

15. Polígonos semejantes 2

Para empezar

Sesión 1



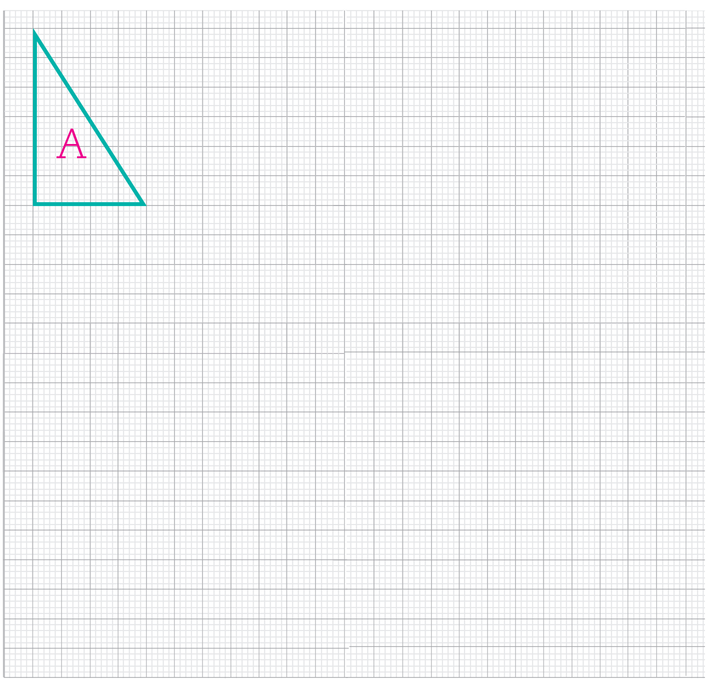
Los triángulos son los polígonos más estudiados, entre otras razones porque cualquier polígono se puede dividir en triángulos. En la secuencia 6 estudiaste que a las figuras hechas a escala unas de otras se les llama figuras semejantes, y que cuando dos polígonos son semejantes, sus ángulos correspondientes son iguales y sus lados correspondientes son proporcionales. ¿Cuántos triángulos identificas en la figura? ¿Cuáles de éstos crees que son semejantes? ¿Por qué?

En esta secuencia establecerás los criterios necesarios y suficientes para determinar si dos triángulos son semejantes o no.

Manos a la obra

¿Semejantes o no semejantes?

1. Trabajen en pareja. En la siguiente cuadrícula, tracen los triángulos B y C, semejantes al A, bajo las siguientes condiciones.



- La razón de semejanza del triángulo B debe ser 3 respecto al A.
- La razón de semejanza del triángulo C debe ser $\frac{1}{2}$ respecto al A.

2. Respondan las siguientes preguntas.

a) ¿Qué significa que la razón de semejanza sea 3? ____________________

____

____

b) ¿Cuánto tienen que medir los catetos correspondientes del triángulo B respecto al A?

____

____

____

c) ¿Qué significa que la razón de semejanza sea $\frac{1}{2}$? ___

___

d) ¿Cuánto tienen que medir los catetos correspondientes del triángulo C respecto al A? ___

e) ¿Cómo es la medida de los ángulos correspondientes del triángulo B respecto a las medidas de los ángulos del triángulo C? ___

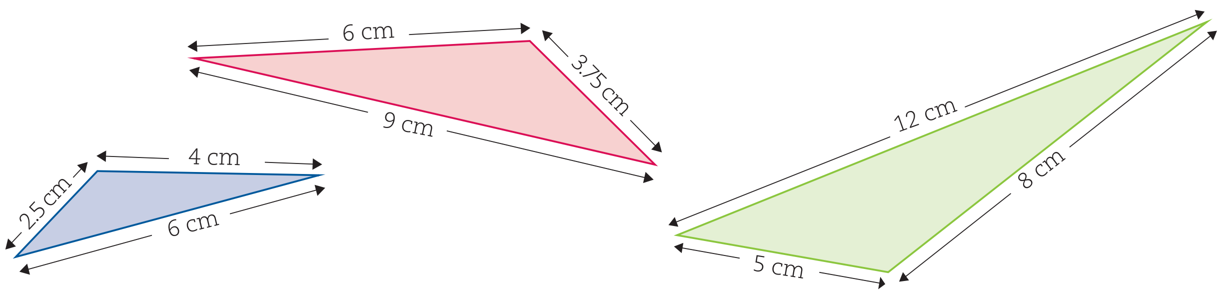
¿Y respecto a los del A? ___

f) ¿Por qué los triángulos B y C también son semejantes entre sí?

___

___

3. Consideren los triángulos semejantes de la imagen y las medidas de sus lados.



a) Identifiquen los lados correspondientes proporcionales y anoten las medidas que faltan para completar la siguiente tabla.

Triángulo rojo	Triángulo verde	Triángulo azul	Relación entre lados
9 cm			Son lados correspondientes
6 cm			Son lados correspondientes
	5 cm		Son lados correspondientes

b) Ahora, completen la tabla con la medida de los ángulos correspondientes faltantes.

Triángulo rojo	Triángulo verde	Triángulo azul	Relación entre ángulos
135°			Son ángulos correspondientes
28°			Son ángulos correspondientes
		17°	Son ángulos correspondientes

c) Anoten en la tabla las razones de semejanza en que se encuentra un triángulo respecto a otro para cada caso.

Triángulo	Azul	Rojo	Verde
Azul			$\frac{1}{2}$
Rojo			
Verde			

4. Comparen sus respuestas con las de sus compañeros de grupo. Comenten con su maestro cómo determinaron la razón de semejanza entre los triángulos.

5. Observen el recurso audiovisual *Lados y ángulos correspondientes* para que conozcan más respecto a la manera en que se deben comparar los triángulos y obtener la razón de semejanza cuando éstos son semejantes.

Sesión 2

Primer criterio de semejanza

1. Trabajen en pareja. Tracen en su cuaderno dos triángulos de diferente tamaño, pero ambos con ángulos de 90°, 45° y 45°.

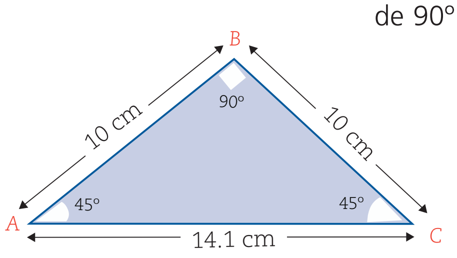
a) Expliquen el procedimiento que siguieron para trazar los triángulos con las condiciones indicadas. ____________________

b) ¿Los triángulos que trazaron son semejantes entre sí? __________ Argumenten su respuesta. ____________________

c) ¿Cuántos de los triángulos que trazaron son isósceles? __________ ¿Por qué resultaron así? ____________________

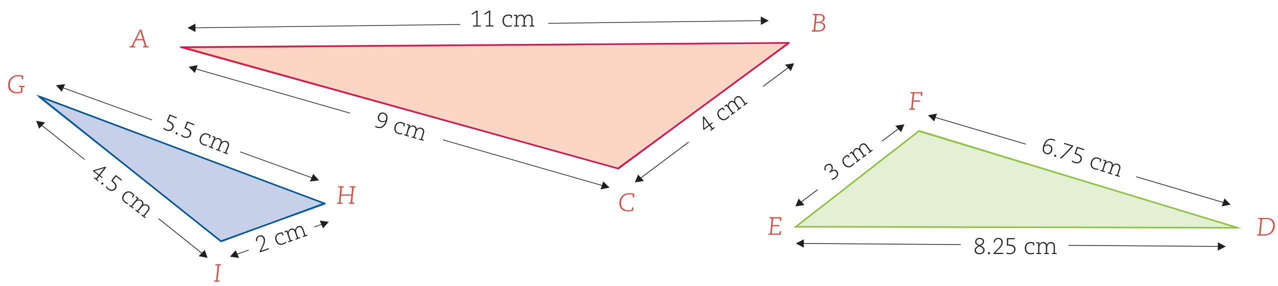
d) Observen el triángulo de la izquierda que tiene dos ángulos de 45° y un ángulo de 90° y digan si los lados correspondientes de los triángulos que trazaron son proporcionales a éste. __________

Expliquen el procedimiento que siguieron para comprobar que los lados correspondientes son proporcionales. ____________________



2. En una telesecundaria se pidió a los alumnos que trazaran un triángulo cuyos ángulos fuesen: 110°, 20° y 50°. Háganlo también ustedes, tracen en su cuaderno un triángulo cuyos ángulos tengan las mismas medidas. Anoten las medidas de los lados: ______________, ______________, ______________.

3. Comparen el triángulo que hicieron ustedes con los siguientes tres triángulos que trazaron los alumnos de telesecundaria.



a) Anoten en cada triángulo la medida de sus ángulos.

b) El triángulo que trazaron, ¿es semejante a alguno de éstos? ______________

Si su respuesta es afirmativa, encuentren la razón de semejanza. ______________

En caso contrario, anoten por qué no son semejantes. ______________

____

____

c) En la telesecundaria concluyeron que los tres triángulos de la imagen son semejantes entre sí. ¿Es correcta esta afirmación? Comenten con el resto de sus compañeros por qué.

d) Completen la siguiente tabla.

Triángulo 1	Triángulo 2	Razón de semejanza del triángulo 1 respecto al triángulo 2	Razón de semejanza del triángulo 2 respecto al triángulo 1
ABC	DEF		
ABC	GHI		
GHI	DEF		
ABC	Mi triángulo		

4. En grupo, y con ayuda de su maestro, comenten cómo son las dos razones que se dan al comparar cada pareja de triángulos.

5. Alina, alumna de telesecundaria, afirmó lo siguiente.

No es necesario conocer la medida de los tres ángulos para saber si son semejantes. Si la medida de dos ángulos correspondientes es igual, entonces los triángulos son semejantes.

a) ¿Crees que Alina tiene razón o no? ¿Por qué?

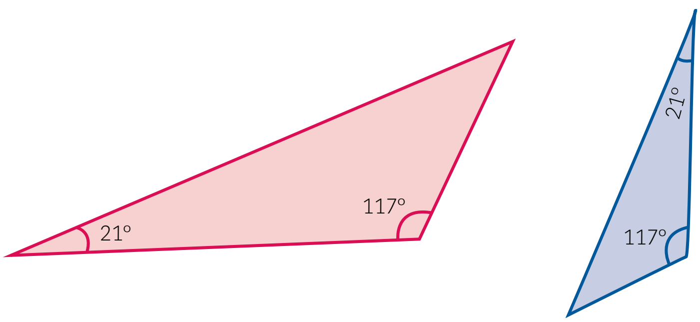
____

____

____

6. Observa los siguientes triángulos y anota la medida del ángulo que falta en cada uno.

Dato interesante
Se le atribuye al filósofo y matemático griego Tales de Mileto (aproximadamente 640 a. n. e.), la forma de calcular la distancia que separa a un barco de la costa con base en la semejanza de triángulos.



7. Con ayuda de su maestro, comenten entre todos por qué los triángulos que tienen la misma medida de dos ángulos correspondientes son semejantes. También comenten por qué, si se conocen dos ángulos de un triángulo, se puede determinar la medida del tercero.

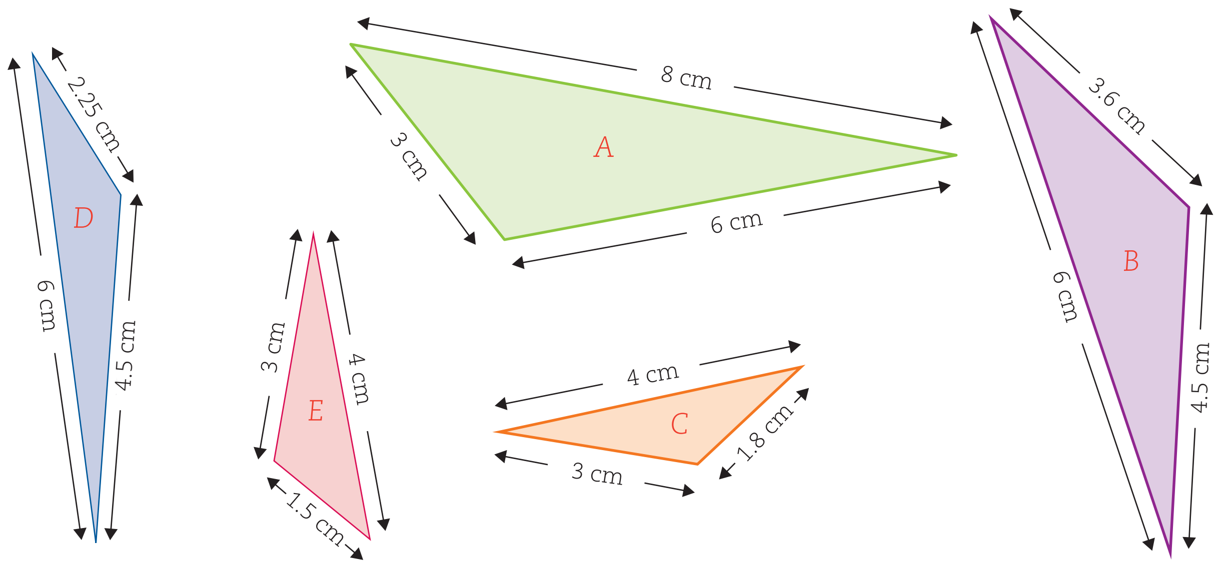
Las condiciones necesarias y suficientes para saber si un triángulo es semejante a otro se llaman *criterios de semejanza*.

Una manera de determinar que dos triángulos son semejantes es ver si sus ángulos correspondientes miden lo mismo. Sin embargo, basta con tener la medida de dos ángulos para determinar la medida del tercero, por lo que el primer criterio de semejanza es *ángulo, ángulo* (AA), ya que la suma de la medida de los tres ángulos interiores de un triángulo es siempre 180°.

Segundo criterio de semejanza

Sesión 3

1. Trabajen en pareja. De la siguiente colección de triángulos, elijan los que sean semejantes entre sí.



a) Expliquen cómo determinaron que los triángulos son semejantes.

b) ¿Por qué el triángulo C no es semejante al A? ____________________

____

c) ¿Es semejante el triángulo E al A? __________ Argumenten su respuesta.

____

____

d) ¿Qué lados convendría comparar de los triángulos A y B para saber si son proporcionales? ____________________

e) ¿Cuál es la medida de los ángulos de los triángulos que son semejantes entre sí?

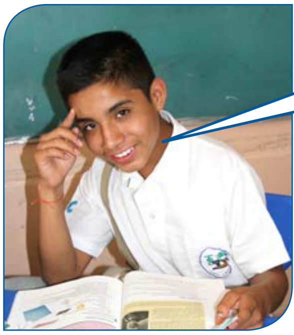
______________, ______________, ______________.

2. Traza en tu cuaderno dos triángulos semejantes al triángulo A de la página 151. El primero con una razón de semejanza igual a 2 y el otro, con una razón de $\frac{1}{2}$ respecto al triángulo A.

a) Anota en tu dibujo la medida de los lados de los triángulos que trazaste.

b) Compara con el resto de tus compañeros las medidas que obtuvieron en los triángulos y verifiquen que sean semejantes al original.

3. Con el resto de tus compañeros y con ayuda de tu maestro, comenten si están de acuerdo o no con lo que Raúl, un alumno de telesecundaria, conjeturó respecto al criterio lado, lado, lado (LLL).



Tal vez no sea necesario conocer la medida de los tres lados para saber si son semejantes. Si la medida de dos lados es proporcional, ¿entonces los triángulos serán semejantes también?

4. Tracen en su cuaderno los triángulos semejantes a E y D, de la página 151, de manera tal que:

- Un lado del triángulo E mida 4 cm y otro 6 cm.
- Un lado del triángulo D mida 9 cm y otro 12 cm.

a) ¿Son proporcionales las parejas de lados de los triángulos E y D? ______

b) ¿Cuál es la razón o constante de proporcionalidad que tienen? ______

c) Midan con su regla la longitud del lado que no conocen en ambos triángulos.

- Medida del tercer lado del triángulo E: ______
- Medida del tercer lado del triángulo D: ______

d) Con su transportador, midan los ángulos de ambos triángulos.

- Medida de los ángulos del triángulo E: ______, ______, ______.
- Medida de los ángulos del triángulo D: ______, ______, ______.

e) Los triángulos que trazaron, ¿son semejantes entre sí? ______

¿Por qué? ______

5. Comparen los triángulos que trazaron con los de sus compañeros para ver si son semejantes. Comenten por qué no es suficiente comparar la medida de dos lados de un triángulo con las medidas de dos lados de otro para determinar que son semejantes.

Otro criterio de semejanza de triángulos es el criterio *lado*, *lado*, *lado* (*LLL*) y ocurre cuando las medidas de los tres lados correspondientes del triángulo son proporcionales.

Tercer criterio de semejanza

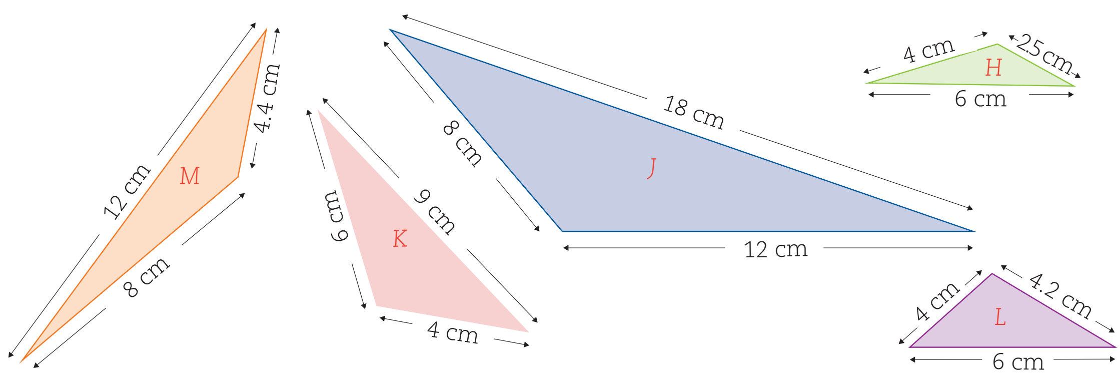
1. Trabajen en equipo. Elijan la pareja de triángulos que trazaron en la actividad 4 de la sesión 3.

a) En su cuaderno, describan paso a paso lo que hicieron para trazar los triángulos.

b) ¿Cuál es la medida del ángulo que forman los dos lados conocidos de cada triángulo? __________

c) El ángulo que formaron esos dos lados, ¿mide lo mismo en todos los triángulos que trazaron? ______ ¿Por qué? __________

2. Observen los triángulos que trazaron los alumnos de telesecundaria.



a) Marquen los triángulos semejantes entre sí.

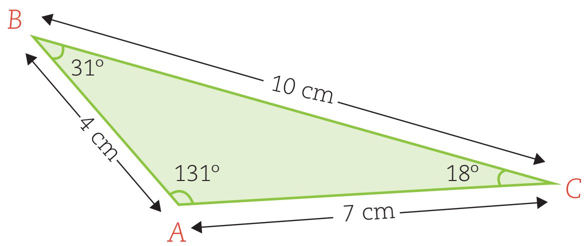
b) Midan el ángulo que se forma con los lados que miden 4 cm y 6 cm y anótenlo en todos los casos.

c) Ahora, midan el ángulo que forman los lados que miden 8 cm y 12 cm y también anótenlos.

d) ¿Qué tienen en común los ángulos de los triángulos que son semejantes? __________

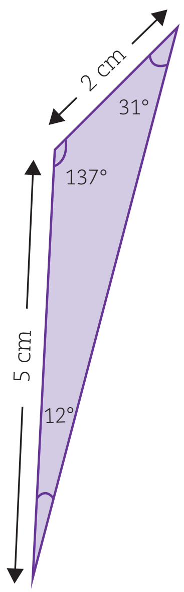
3. En la telesecundaria de Alina jugaron a mandar mensajes. Cada alumno tenía que poner tres datos y la razón de semejanza del triángulo que dibujó para que otro compañero lo trazara.

- Alina trazó el siguiente triángulo y mandó este mensaje:



Tengo un triángulo con un ángulo que mide 31°, un lado que mide 10 cm y otro lado que mide 4 cm. Traza un triángulo semejante a éste a razón de $\frac{1}{4}$ 20:51

- Raúl trazó el triángulo de abajo. Él afirma que cumplió con las condiciones que Alina mandó. Los lados son proporcionales y la razón de semejanza es $\frac{1}{2}$. Además, su triángulo tiene un ángulo cuya medida es 31°.



a) Expliquen las razones por las que son semejantes o no los triángulos de Alina y Raúl. ______________________________

____

b) Los ángulos correspondientes de los dos triángulos, ¿tienen las mismas medidas?

____

c) El lado que aún no mide Raúl, ¿está a razón de $\frac{1}{2}$ respecto al tercer lado del triángulo de Alina? ______________________________

d) Sin agregar más medidas, ¿qué información podría dar Alina para que Raúl pueda construir un triángulo semejante al de ella? ______________________________

____

4. Junto con el resto de sus compañeros y con ayuda de su maestro, analicen el mensaje de Alina y la respuesta de Raúl. Comenten las condiciones que se deben dar para que dos triángulos sean semejantes dando dos lados y un ángulo.

El tercer criterio de semejanza de triángulos es el criterio *lado*, *ángulo*, *lado* (*LAL*) y ocurre cuando la medida de dos lados correspondientes es proporcional y la medida del ángulo que forman es igual.

5. Observen el recurso audiovisual *Criterios de semejanza* para que refuercen lo visto en esta secuencia.

Sesión 5

Para terminar

¿Cuáles triángulos son semejantes?

1. Selecciona, en la siguiente página, los triángulos semejantes a otro con un ángulo de 22° y otro de 110°.

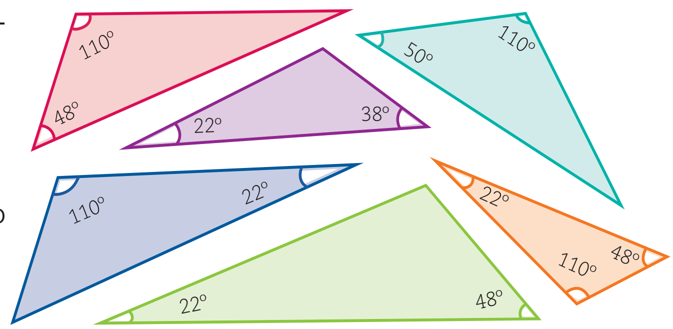
2. Las medidas de dos lados de un triángulo son 13 cm y 7 cm. El ángulo que forman mide 50°. En tu cuaderno, traza un triángulo semejante a éste cuya razón de semejanza sea $\frac{1}{2}$.

a) ¿Cuánto miden los ángulos del triángulo que trazaste? __________, __________, __________.

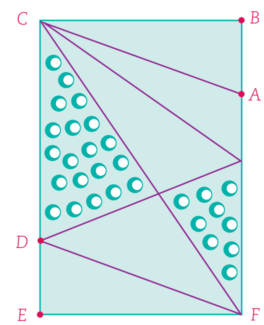
b) ¿Cuánto miden los lados?

__________, __________, __________.

c) Anota la medida del lado faltante del triángulo original. ____________________



3. La imagen de la derecha representa una colcha rectangular hecha con retazos triangulares. Respondan en su cuaderno lo siguiente.



a) ¿Por qué los triángulos de lunares son semejantes? ¿Qué criterio de semejanza se emplea para comparar las figuras?

b) Si el segmento AB = DE, ¿los triángulos ABC y DEF son semejantes? ¿Qué criterio de semejanza se usa para confirmar esto? ¿Cuál es la razón de semejanza de estos triángulos?

4. Trabajen en pareja. Jueguen a los mensajes. Tracen un triángulo, midan los lados y sus ángulos. Anoten en un trozo de papel la razón de semejanza con la cual deben construir el nuevo triángulo con base en las tres medidas del triángulo original, de tal manera que su compañero trace un triángulo semejante al del otro. Consideren los criterios de semejanza que ya conocen para asegurar que esto suceda.

5. En la secuencia 6 estudiaste que, para que dos polígonos sean semejantes, se deben cumplir dos condiciones:

- Sus ángulos correspondientes son iguales.
- Sus lados correspondientes son proporcionales.

¿Recuerdan los ejercicios de comparación entre rectángulos o entre el rombo y el cuadrado? Lean el siguiente texto y, si es necesario, revisen las actividades de esta secuencia.

En el caso de los triángulos, no son necesarias ambas condiciones y es suficiente revisar que se cumple alguno de los tres criterios de semejanza.

- Dos de sus ángulos correspondientes son iguales.
- Las medidas de sus lados correspondientes son proporcionales.
- Las medidas de dos lados correspondientes son proporcionales y la medida del ángulo que forman es igual.

6. Utilicen el recurso informático *Criterios de semejanza* para trazar triángulos semejantes y para determinar si dos o más triángulos son semejantes.

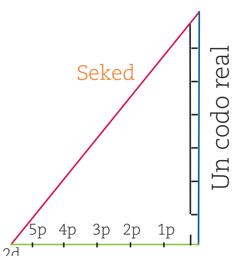
16. Razones trigonométricas 2

Sesión 1

Para empezar

Pirámide de Keops, Egipto.

Se estima que la pirámide de Keops, en Egipto, terminó de construirse en el año 2570 a. n. e. Las monumentales edificaciones egipcias muestran que esta cultura alcanzó un alto grado de conocimientos geométricos. ¿Cómo crees que lograron que la inclinación a lo largo de una de las paredes laterales siempre fuera la misma? Más aún, ¿cómo te imaginas que consiguieron que las cuatro paredes laterales de la pirámide tuvieran la misma inclinación? Los egipcios no usaban los grados para medirla, sino una medida llamada seked, la cual se obtenía de la relación (razón) entre el codo real (formado por siete palmos), y la cantidad de palmos y dedos horizontales, es decir, usaban lo que actualmente se conoce como tangente de un ángulo. En esta secuencia estudiarás ésta y otras razones trigonométricas.



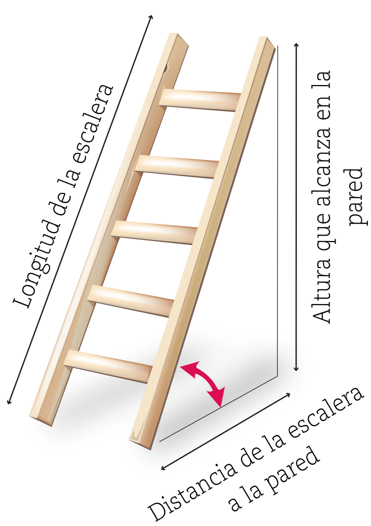
5 palmos
2 dedos

Manos a la obra

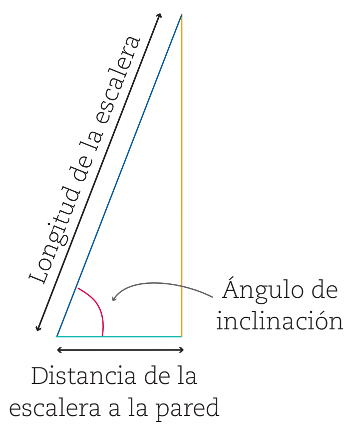
¿Qué cambia y qué no cambia?

1. Trabajen en pareja. En la secuencia 7 se utilizó la imagen de una escalera recargada en una pared, la cual podía representarse mediante un triángulo rectángulo.

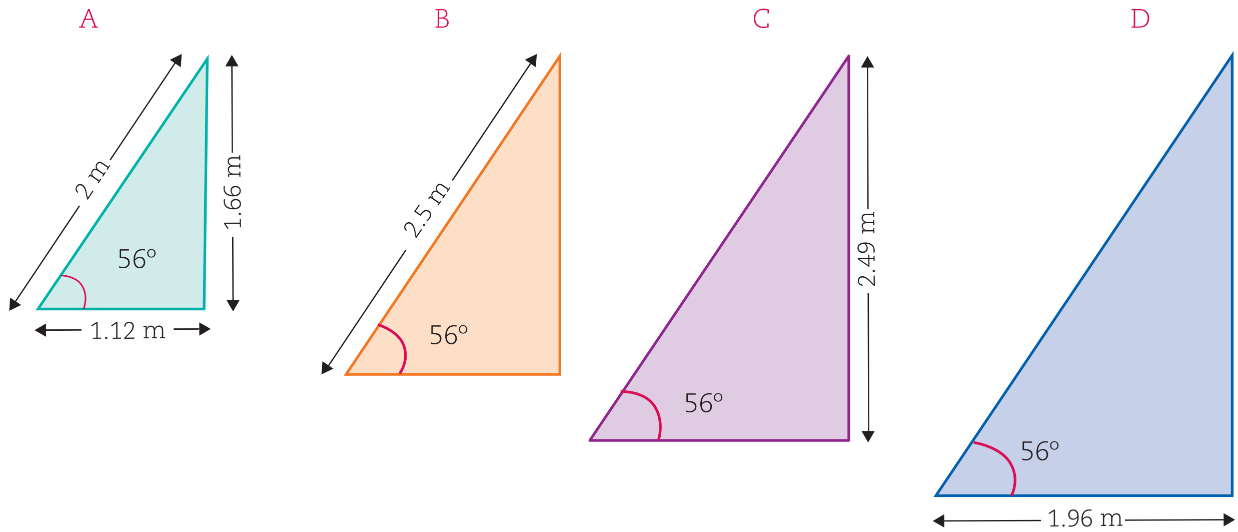
Glosario
Palmo es la longitud formada por cuatro de los dedos de una mano juntos, excepto el pulgar.



El ángulo marcado con rojo es el ángulo de inclinación de la escalera.



Esta situación está representada en las siguientes imágenes. Con base en ellas, respondan las preguntas y completen la tabla, donde *c* significa *cociente*.



¿Por qué son semejantes los triángulos? ____

____

____

	Situación			
	A	B	C	D
Longitud de la escalera				
Distancia de la escalera a la pared				
Altura que alcanza la escalera en la pared				
Ángulo que forma la escalera con el piso				
$c_1 = \dfrac{\textit{altura que alcanza en la pared}}{\textit{longitud de la escalera}}$				
$c_2 = \dfrac{\textit{distancia de la escalera a la pared}}{\textit{longitud de la escalera}}$				
$c_3 = \dfrac{\textit{altura que alcanza la pared}}{\textit{distancia de la escalera a la pared}}$				

2. Comparen sus resultados con los de otros compañeros. Los cocientes que calcularon en la tabla, ¿se mantuvieron constantes en las cuatro situaciones? ____________

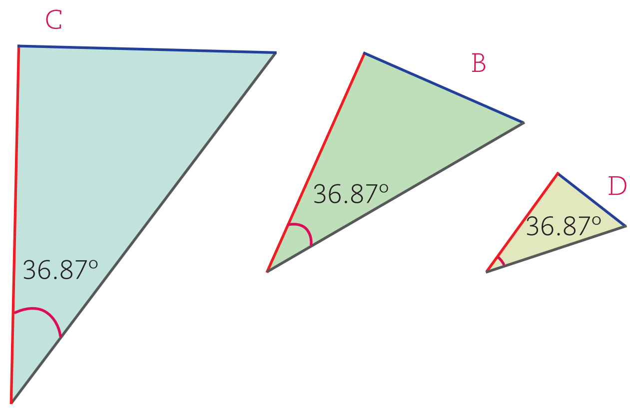
¿Por qué creen que sucedió así? ____

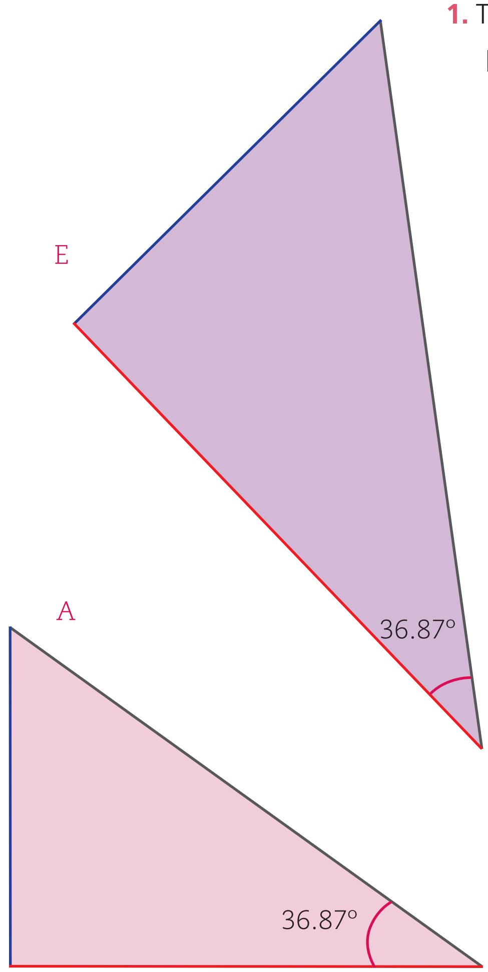
____

Sesión
2

Cateto opuesto, cateto adyacente

1. Trabajen en pareja. Analicen los siguientes triángulos rectángulos y contesten las preguntas





a) ¿Son semejantes entre sí? ________________

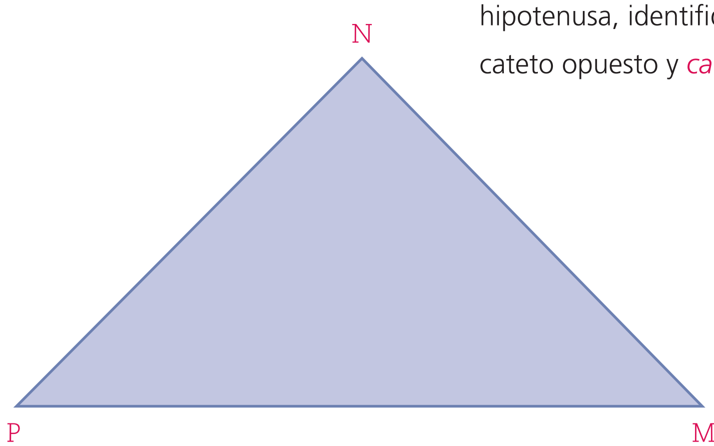
b) Argumenten su respuesta. ________________

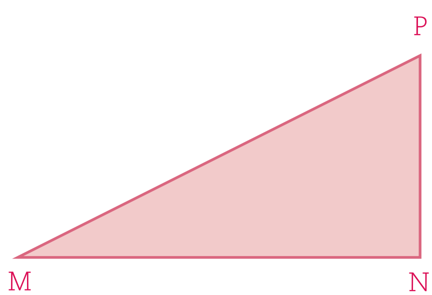
____

2. En cada triángulo se ha marcado con rojo el cateto adyacente al ángulo de 36.87° y con azul el cateto opuesto a dicho ángulo. Analícenlos y escriban con sus palabras lo que se pide. En un triángulo rectángulo, el cateto…

- adyacente a un ángulo es ________________
- opuesto a un ángulo es ________________

3. En los siguientes triángulos, anoten 90° al ángulo recto, *h* a la hipotenusa, identifiquen el ángulo M con un arco y escriban *co* al cateto opuesto y *ca* al cateto adyacente del ángulo M.





4. Tomen en cuenta los triángulos de la actividad 1 de la página 158. Usen las medidas que sean necesarias y completen la tabla. Consideren que el cateto opuesto y el cateto adyacente se refieren al ángulo M, que mide 36.87°.

Triángulo	*co*	*ca*	*h*	$\frac{co}{h}$	$\frac{ca}{h}$	$\frac{co}{ca}$
A						
B						
C						
D						
E						

5. Comparen sus respuestas con otros compañeros. Analicen los resultados obtenidos en la tabla y respondan.
   a) ¿Todos obtuvieron los mismos resultados en los cocientes que calcularon? ______
   b) ¿Resultaron constantes esos cocientes en todos los triángulos? ______________
   ¿Por qué? ____

6. Comparen sus respuestas y, si hubo diferencias, consideren si se debió a errores en las medidas, errores de cálculo o de otro tipo. Establezcan conclusiones.

Razones interesantes e importantes

Sesión 3

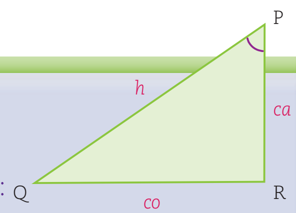
1. Trabajen en pareja. Lean y comenten la siguiente información.

En la sesión anterior calcularon estos cocientes.

$c_1 = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$ $\quad c_2 = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$ $\quad c_3 = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$

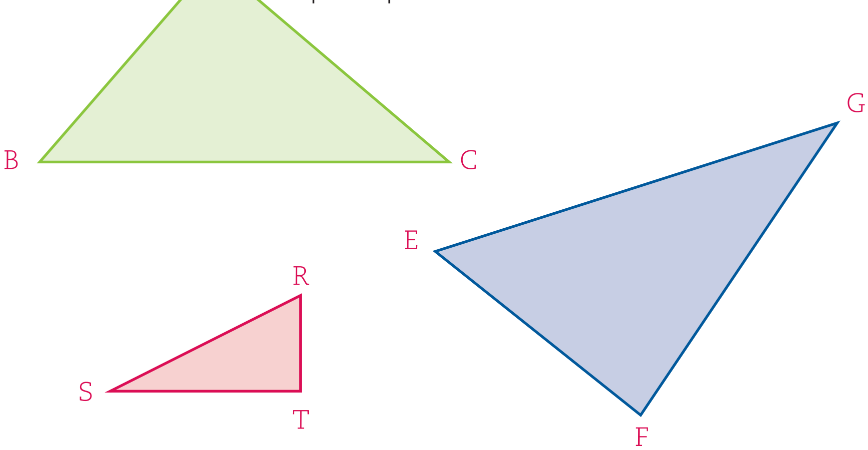
Estos cocientes reciben el nombre de *razones trigonométricas* y cada uno tiene un nombre especial.

Si consideramos el ángulo P, en el triángulo de la derecha, tenemos que:



Razón	Nombre	Se simboliza
$\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$	seno del ángulo P	$sen\ P = \frac{co}{h}$
$\frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$	coseno del ángulo P	$cos\ P = \frac{ca}{h}$
$\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$	tangente del ángulo P	$tan\ P = \frac{co}{ca}$

2. Con base en la información anterior, midan lo que consideren necesario y calculen lo que se pide.



sen S = ______

cos S = ______

tan S = ______

sen C = ______

cos C = ______

tan C = ______

sen G = ______

cos G = ______

tan G = ______

3. En un triángulo rectángulo, identificado como MNP, se sabe que el ángulo recto está en N, que el cateto NP mide 6 cm y que el *sen* M = $\frac{3}{5}$

a) Diseñen en su cuaderno un esquema del problema.

b) ¿Cuánto mide la hipotenusa de este triángulo? ______

Dato interesante
La pirámide sur de Dashur, en Egipto, se caracteriza porque sus paredes laterales cambian de inclinación a cierta altura, como se observa en la imagen.

4. Comparen sus respuestas con otros compañeros del grupo. Si en la actividad 2 no llegaron a resultados iguales, pero sí muy aproximados, comenten a qué se debe esto.

5. En grupo, reflexionen acerca de por qué el seked que usaban los egipcios se refiere a la tangente de un ángulo y cómo es que, con el uso de esta medida, lograban que la inclinación siempre fuera la misma en las paredes laterales de las pirámides. ¿Consideran que la tangente del ángulo de la pirámide de Dashur es mayor o menor que la de Keops? Argumenten su respuesta.

______

______

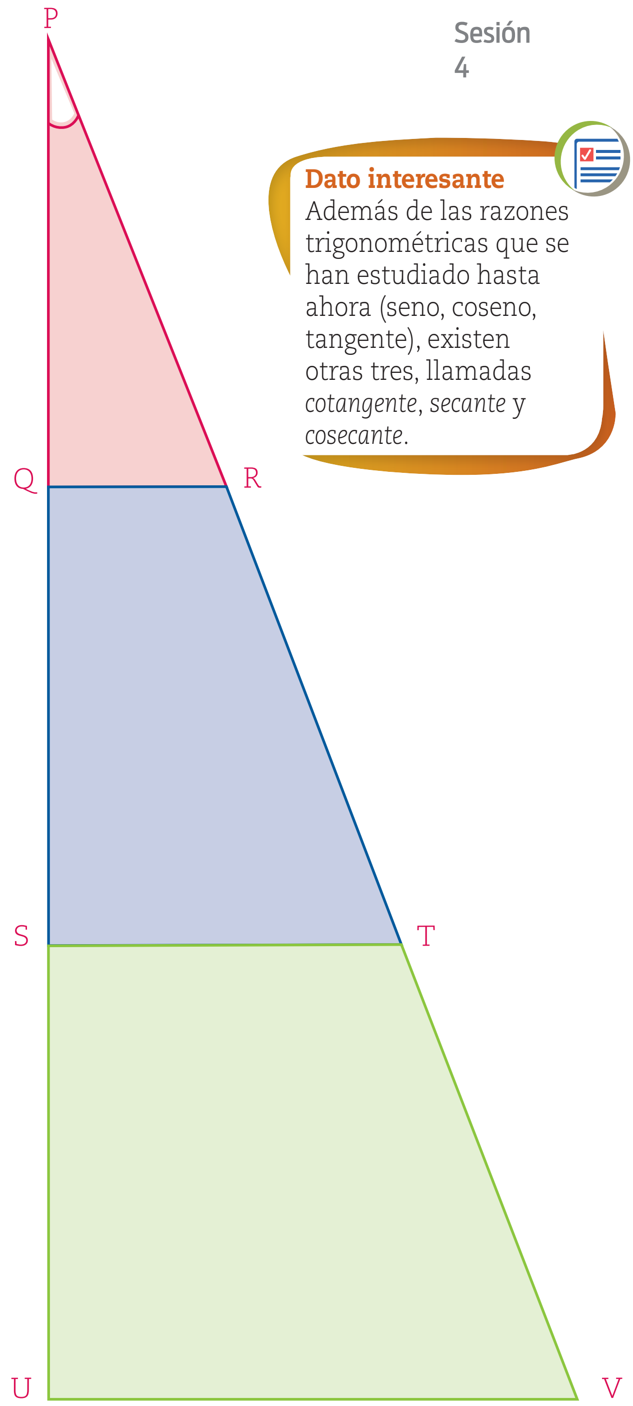
6. Practiquen el cálculo de las razones seno, coseno y tangente de un ángulo en el recurso informático *Cálculo de razones trigonométricas a partir de triángulos rectángulos*.

¿De qué depende?

Sesión 4

1. Trabajen en pareja. Consideren los siguientes triángulos rectángulos, tomen las medidas indicadas y completen la tabla.

Triángulo	PQR	PST	PUV
Medida del co al ángulo P	QR =	ST =	UV =
Medida del ca al ángulo P	PQ =	PS =	PU =
Medida de la hipotenusa			
sen P			
cos P			
tan P			



Dato interesante
Además de las razones trigonométricas que se han estudiado hasta ahora (seno, coseno, tangente), existen otras tres, llamadas *cotangente*, *secante* y *cosecante*.

a) ¿Son semejantes los triángulos? ____________

b) Argumenten su respuesta. ____________

____

c) En su cuaderno, propongan medidas para otro triángulo semejante a los tres anteriores, consideren P como uno de los ángulos agudos y calculen los siguientes valores.

sen P = ____ *cos* P = ____ *tan* P = ____

2. Comparen sus respuestas con las de sus compañeros de grupo. Si no coinciden, averigüen por qué.

a) ¿Se cumplirá esto para cualquier grupo de triángulos rectángulos semejantes? __________ Indiquen por qué. ________________________________

____

____

3. Lean y discutan qué opinan de la siguiente afirmación. Luego, respondan lo que se pide.

El valor de las razones trigonométricas no depende del tamaño del triángulo sino de la medida del ángulo.

a) ¿Es verdadera o falsa? ______________________________

b) Argumenten su respuesta. ______________________________

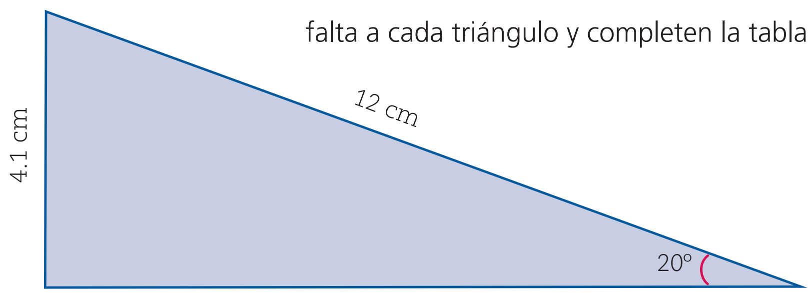
____

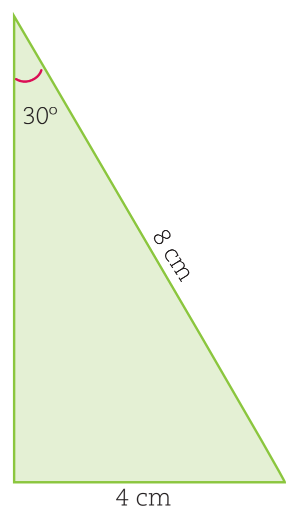
Sesión 5

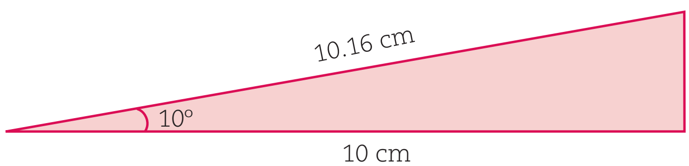
Para terminar

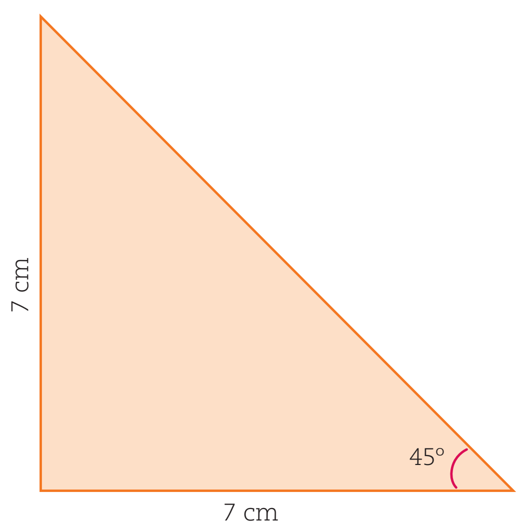
Los valores de las razones

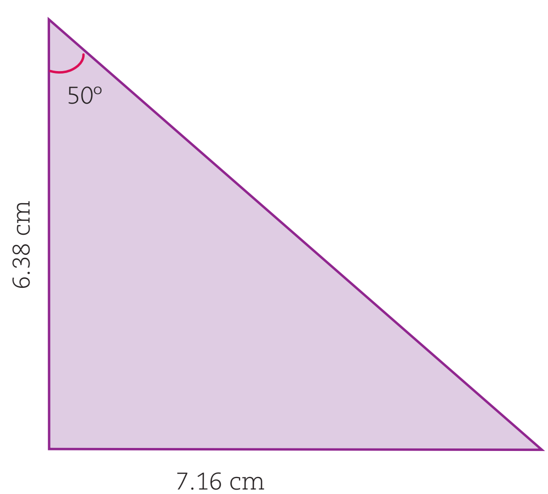
1. Trabajen en pareja para construir una tabla de valores de las razones seno, coseno y tangente de algunos ángulos. Para ello, calculen el valor del lado y del ángulo que falta a cada triángulo y completen la tabla de la siguiente página.











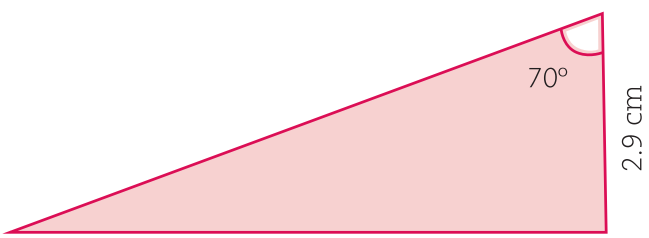
Ángulo	Seno	Coseno	Tangente
10°			
20°			
30°			
45°			
50°			

2. Del siguiente triángulo rectángulo sólo se conoce la medida del cateto adyacente al ángulo de 70°. Planeen la manera de calcular la medida del otro cateto y de la hipotenusa. Cuando lo hayan hecho, anoten su procedimiento y el resultado. ______________

____

____

____



Dato interesante
Las técnicas de triangulación también se utilizan para medir distancias entre estrellas próximas y en los sistemas de localización satelital.

3. Comparen su resultado y procedimiento con los de sus compañeros de grupo. En particular, comenten: ¿usaron alguna o algunas razones trigonométricas?, ¿cuál? o ¿cuáles?

4. Observen el recurso audiovisual *A veces Pitágoras no es suficiente*, donde conocerán la utilidad de las razones trigonométricas cuando sólo se conoce un lado del triángulo rectángulo y la medida de los ángulos agudos.

17. Teorema de Pitágoras 2

Sesión 1

Para empezar

Una de las ventajas de estudiar matemáticas es que desarrollamos conocimientos y habilidades que nos permiten anticipar el resultado de una situación. Por ejemplo, cuando se quiere pasar un espejo, un sofá o cualquier otro mueble por la entrada de una habitación, usamos nuestra intuición matemática, la cual nos ayuda a saber de antemano si pasará o no sin necesidad de trasladarlo para verificarlo.

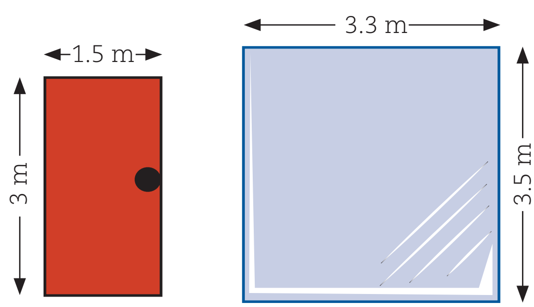
Si una puerta tiene 2.4 m de altura y 1.8 m de ancho, ¿se podrá pasar por ahí un espejo cuadrado que mide 2.9 m de lado? Una manera de saber si pasa o no es usando el teorema que estudiaste en la secuencia 8 del bloque 1, ¿lo recuerdas? ¡Claro! El teorema de Pitágoras. En esta secuencia resolverás problemas que implican su uso.

Manos a la obra

¿Cabe el espejo?

1. Trabajen en pareja. En cada caso, consideren las medidas de la puerta y concluyan si un espejo con las medidas indicadas puede o no pasar por ella. A la derecha, anoten las operaciones y el resultado.

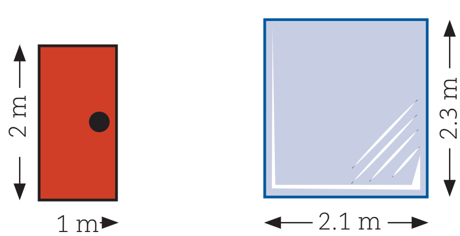
a)



¿Puede pasar? __________

¿Por qué? __________

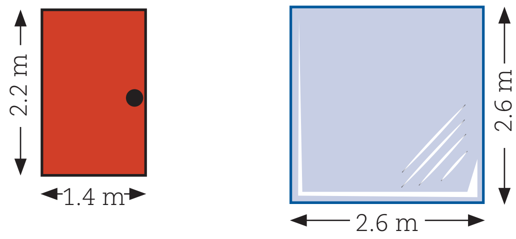
b)



¿Puede pasar? __________

¿Por qué? __________

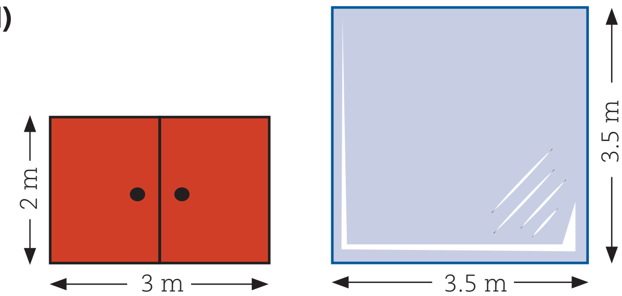
c)



¿Puede pasar? ___________

¿Por qué? ______________

d)

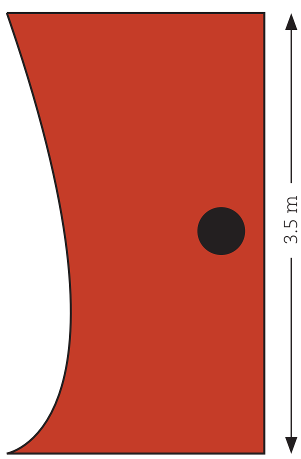


¿Puede pasar? ___________

¿Por qué? ______________

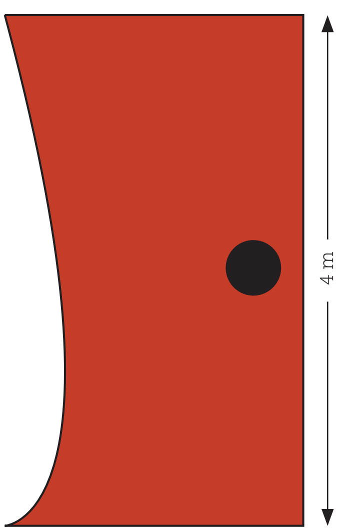
2. En la siguiente imagen se ven sólo fragmentos de puertas. ¿Cuál es el ancho mínimo que deben tener éstas para que por ellas pueda pasar un vidrio cuadrado que mida 5 m por lado?

a)



Ancho mínimo ______________

b)



Ancho mínimo ______________

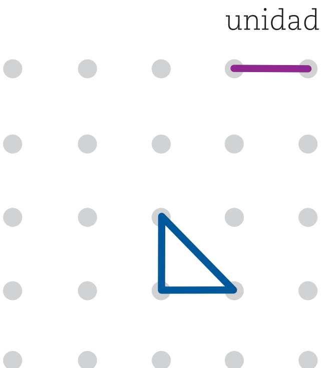
Dato interesante

Actualmente los espejos se elaboran con polvo de aluminio, sin embargo, en la antigüedad, los egipcios utilizaban cobre pulido porque dicho metal se asociaba con la diosa Hathor. Por su parte, los aztecas empleaban la obsidiana y consideraban que Tezcatlipoca los usaba para cruzar del reino terrenal al inframundo.

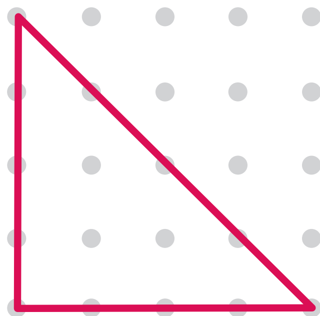
3. Comparen sus respuestas y procedimientos con los de sus compañeros de grupo. En particular, comenten si usaron el teorema de Pitágoras y de qué manera lo hicieron, por ejemplo, ¿qué datos tenían y cuál debían obtener?

Perímetros

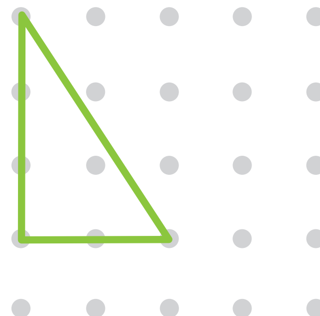
1. Trabajen en pareja. Calculen el perímetro de los siguientes polígonos.



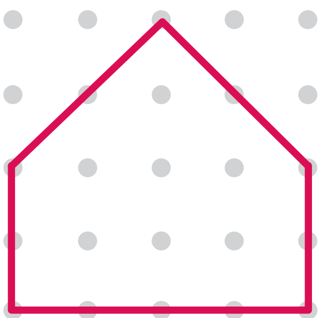
Perímetro ____________



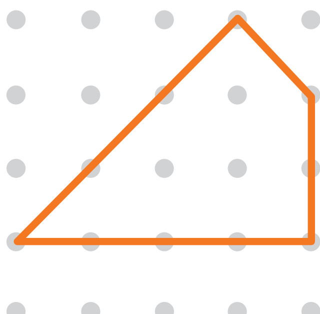
Perímetro ____________



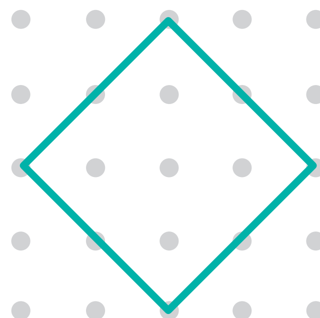
Perímetro ____________



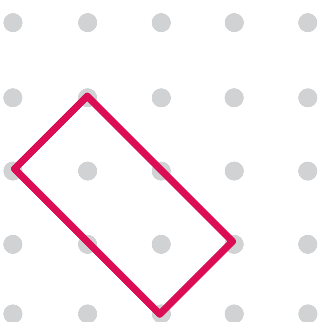
Perímetro ____________



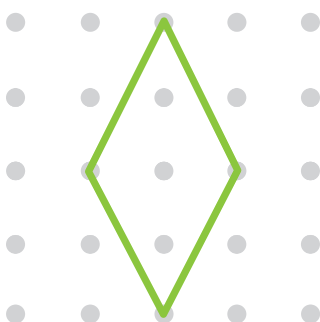
Perímetro ____________



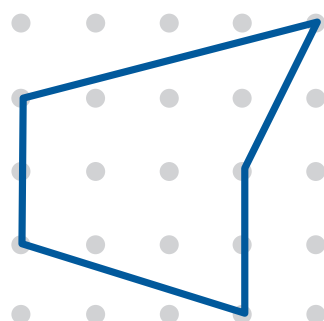
Perímetro ____________



Perímetro ____________



Perímetro ____________



Perímetro ____________

Describan en su cuaderno de qué manera determinaron el perímetro de cada polígono.

2. En los siguientes conjuntos de puntos, tracen el cuadrilátero con el área indicada y calculen su perímetro.

Área = 1 unidad cuadrada

Perímetro = ____________

Área = 9 unidades cuadradas

Perímetro = ____________

Área = 2 unidades cuadradas

Perímetro = ____________

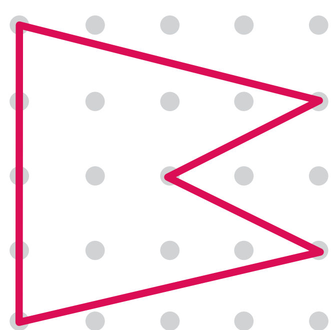
Área = 5 unidades cuadradas

Perímetro = ____________

Dato interesante

El diseño de muebles multifuncionales ha sido una estupenda alternativa para los espacios pequeños en los que un banco para sentarse puede ser también un cajón para guardar objetos.

3. Calculen el perímetro del polígono siguiente y en el segundo conjunto de puntos tracen un polígono que tenga mayor perímetro.



Perímetro = ____________

Perímetro = ____________

Glosario

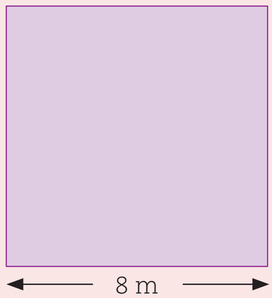
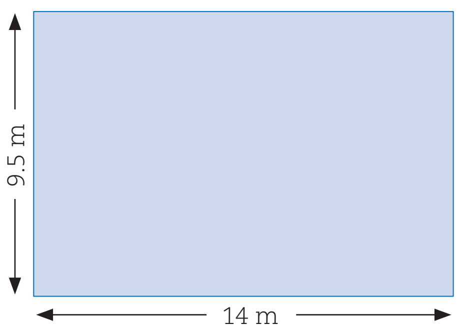
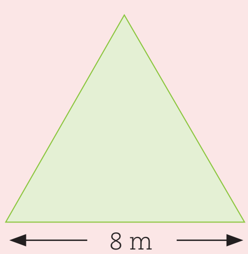
Polígono proviene del griego *polygonos*, de *poli*, “muchos”, y *gono*, que significa “ángulo”.

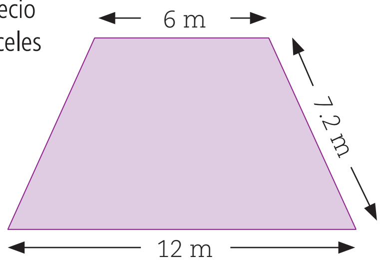
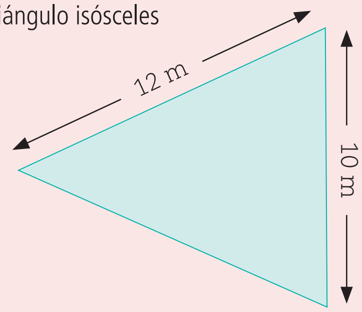
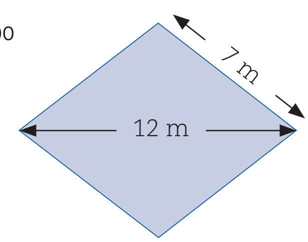
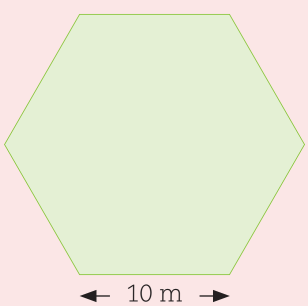
4. Comparen sus respuestas y procedimientos con los de otros compañeros de grupo. Analicen qué hizo la pareja que trazó un polígono con perímetro mayor en la actividad 3.

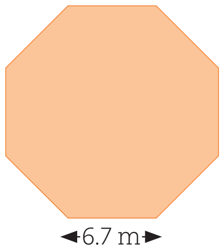
Sesión 3

Teorema de Pitágoras y área

1. Trabajen en pareja. Calculen el área de los siguientes polígonos y en la segunda columna anoten los cálculos que hicieron. Después, anoten 1 al polígono con mayor área, 2 al siguiente y así sucesivamente en la tercera columna.

Forma y medidas	Cálculos y área	Orden de las áreas
a) Cuadrado  *Área* = *lado* × *lado*		
b) Rectángulo  *Área* = *base* × *altura*		
c) Triángulo equilátero  $\text{Área} = \dfrac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$		

Forma y medidas	Cálculos y área	Orden de las áreas
d) Trapecio isósceles  Área = $\frac{\textit{(base mayor + base menor)} \times \textit{altura}}{2}$		
e) Triángulo isósceles  Área = $\frac{\textit{base} \times \textit{altura}}{2}$		
f) Rombo  Área = $\frac{\textit{diagonal mayor} \times \textit{diagonal menor}}{2}$		
g) Hexágono regular  Área = $\frac{\textit{perímetro} \times \textit{apotema}}{2}$		

Forma y medidas	Cálculos y área	Orden de las áreas
h) Octágono regular  $\text{Área} = \dfrac{\text{perímetro} \times \text{apotema}}{2}$		

2. Comparen sus resultados y procedimientos con los de sus compañeros de grupo. En particular, comenten en cuáles casos fue necesario usar el teorema de Pitágoras y argumenten por qué.

3. Practiquen el uso del teorema de Pitágoras con el recurso informático *Uso del teorema de Pitágoras en las figuras geométricas*.

Sesión 4

Para terminar

Cálculo de distancias

1. Trabajen en pareja. Resuelvan los siguientes problemas.

a) Paula salió de su casa rumbo al trabajo. Avanzó 8 km al este y 12 km al norte. Si hubiera un camino recto desde la casa de Paula a su trabajo, ¿qué distancia recorrería por ese camino? __________ ¿Cómo la calcularon? __________

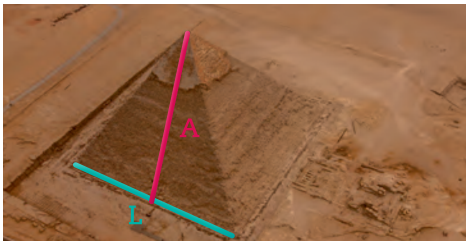
____

____

b) Investiguen en la sesión 4 de la secuencia 7, "Escaleras de mano", cuáles son la menor y mayor distancia a la que es conveniente colocar una escalera, pues Juan va a usar una que mide 3 m y necesita ayuda. Respondan las siguientes preguntas.

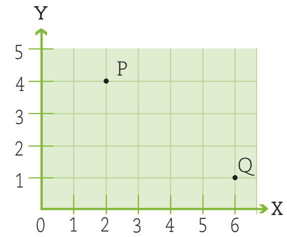
- Para el caso de la distancia mínima:
  ¿Cuánto mide el ángulo que forma el piso con la escalera? __________
  ¿Qué altura alcanza ésta en la pared? __________
- Para el caso de la distancia máxima:
  ¿Cuánto mide el ángulo que forma el piso con la escalera? __________
  ¿Qué altura alcanza ésta en la pared? __________

c) La imagen muestra la gran pirámide de Guiza, también conocida como pirámide de Keops. ¿Cuánto medirá la longitud A, marcada con rojo en la imagen, si se sabe que la medida del lado del cuadrado de la base (L) es de 230.36 m y la altura de la pirámide mide 138.8 m?

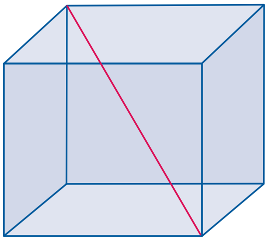


____

d) En la gráfica de la derecha, ¿cuál es la distancia entre los puntos P y Q? ______________



e) ¿Cuál es la medida de la diagonal del cubo de abajo cuyos lados miden 5 cm? ______________



f) Se tiene un triángulo cuyos lados miden 1.2 cm, 1.3 cm y 0.5 cm. ¿Es un triángulo rectángulo? ______________ ¿Cómo lo saben? ______________

____

____

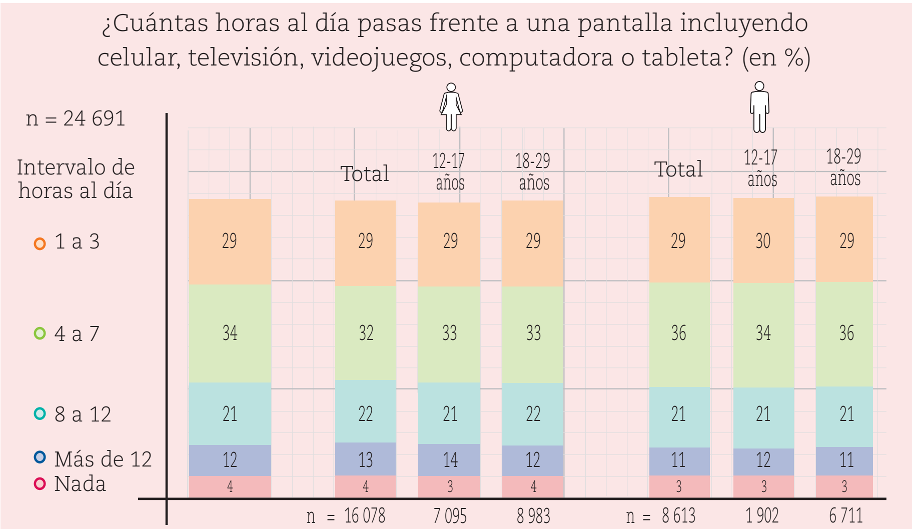
2. Comparen sus resultados y procedimientos con los de sus compañeros de grupo, si hay diferencias, analicen por qué y corrijan lo que sea necesario. Comenten en qué otras situaciones podrían aplicar el teorema de Pitágoras.

3. Observen el audiovisual *Aplicaciones del teorema de Pitágoras*, donde tendrán la oportunidad de analizar otros problemas en los que se usa.

18. Tendencia central y dispersión de dos conjuntos de datos 1

Sesión 1

Para empezar



Fuente: Texto y gráficas elaborados con base en el documento publicado por la CDMX, "Encuesta de tendencias juveniles 2018".

La estadística está vinculada con la salud, economía, tecnología, entre otras áreas. La mayoría de las actividades y organizaciones requieren de datos numéricos para responder a diversas preguntas de interés y tomar decisiones.

Un ejemplo en el área de salud es cuando se requiere encontrar el mejor tratamiento para una enfermedad; una vez planteada la pregunta de interés, se recurre a las herramientas estadísticas disponibles para buscar soluciones. ¿Y por qué la estadística? Porque ésta permite expresar hechos en términos numéricos a partir de algunos valores, como la media aritmética y la desviación media que ya conoces. Además, la estadística permite analizar y procesar grandes cantidades de datos y hacer predicciones.

En esta secuencia compararás las medidas de tendencia central y de dispersión de dos conjuntos de datos estadísticos para analizar situaciones que implican tomar decisiones de manera informada.

Manos a la obra

¿Cuántas horas al día pasas frente a una pantalla?

1. Trabajen en pareja. Analicen la gráfica que muestra los resultados de una pregunta de interés en la "Encuesta de tendencias juveniles 2018. Ciudad de México" para contestar lo siguiente.
   a) ¿Qué información se presenta? ______
   b) ¿Cómo se organizaron los datos para presentarlos? ______

c) En total, ¿cuántas personas contestaron la pregunta de interés? ______

d) ¿Cuál es el porcentaje máximo de horas al día que los jóvenes pasan frente a una pantalla? ______

e) ¿Es posible conocer el promedio del número de horas al día que los jóvenes pasan al frente de la pantalla de algún dispositivo? ______

f) ¿Quiénes pasan más horas frente a una pantalla, las mujeres o los hombres? ______ ¿En qué intervalo de edad se concentra la mayoría? ______ ¿Qué tan dispersos están esos datos? ______

g) ¿Con qué propósito creen que interesa conocer esta información? ______

h) ¿Creen que si hacen esta pregunta a los jóvenes de su escuela o localidad obtendrán resultados similares? ______

2. Trabajen en equipo. Consideren la siguiente situación para contestar y hacer lo que se indica. Si lo requieren, pueden utilizar calculadora.

En una telesecundaria se preguntó a dos grupos de 25 alumnos cada uno por la cantidad de horas al día que pasan frente a una pantalla de televisión, celular, computadora, videojuego u otro dispositivo. A continuación, se muestran los datos registrados.

Número de horas al día frente a una pantalla de televisión, celular, computadora, entre otros dispositivos electrónicos	
Grupo A	**Grupo B**
0, 2, 0, 15, 9, 5, 2, 12, 12, 4, 13, 5, 0, 6, 10, 0, 11, 8, 7, 3, 7, 7, 5, 5, 15	13, 5, 0, 4, 12, 0, 6, 2, 6, 4, 12, 11, 2, 10, 11, 2, 4, 15, 10, 4, 13, 3, 12, 13, 9

a) ¿En cuál de los dos grupos los alumnos pasan más tiempo al día frente a la pantalla de algún dispositivo? ______ ¿Por qué? ______

b) ¿Cómo se podrían comparar los datos de estos dos grupos? ______ ¿Por qué? ______

c) En su cuaderno, hagan una tabla de frecuencia que muestre la distribución de cada grupo.

d) ¿Qué significa que un joven dé como respuesta 0 horas? ______

e) De acuerdo con lo que indicaron los alumnos del grupo B, ¿cuál es el número más frecuente de horas al día que pasan frente a un dispositivo? ______ Y, ¿en el grupo A? ______ Justifiquen sus respuestas. ______

f) ¿Cuál es el promedio del número de horas al día que los jóvenes del grupo A pasan frente a la pantalla de algún dispositivo? ______ Y, ¿del grupo B? ______

g) En el grupo A, ¿cuál es la diferencia entre el número máximo de horas al día que pasan frente a una pantalla y el mínimo? ______ Y, ¿en el grupo B? ______

h) ¿Cuál de los dos grupos analizados muestra mayor variabilidad en los datos? ______

3. En grupo y con la ayuda de su maestro, revisen la manera en que organizaron los datos en su cuaderno y las respuestas a las preguntas. Comenten cuáles son las medidas de tendencia central y de dispersión que requirieron calcular para dar respuesta a cada pregunta. En caso necesario, corrijan sus respuestas. Consideren lo siguiente.

> La *desviación media* es una medida de dispersión relacionada directamente con la media aritmética. Para conocerla, primero se requiere calcular la media aritmética, luego se obtiene la diferencia entre ésta y cada uno de los datos y, finalmente, se suman los valores absolutos obtenidos de estas diferencias y el resultado se divide entre el número total de datos del conjunto.

4. Con la información obtenida de estos grupos, ¿consideran que estos alumnos de telesecundaria pasan demasiado tiempo frente a una pantalla, ya sea mirando televisión o usando un celular? ______________________________

____

Justifiquen su respuesta. ______________________________

____

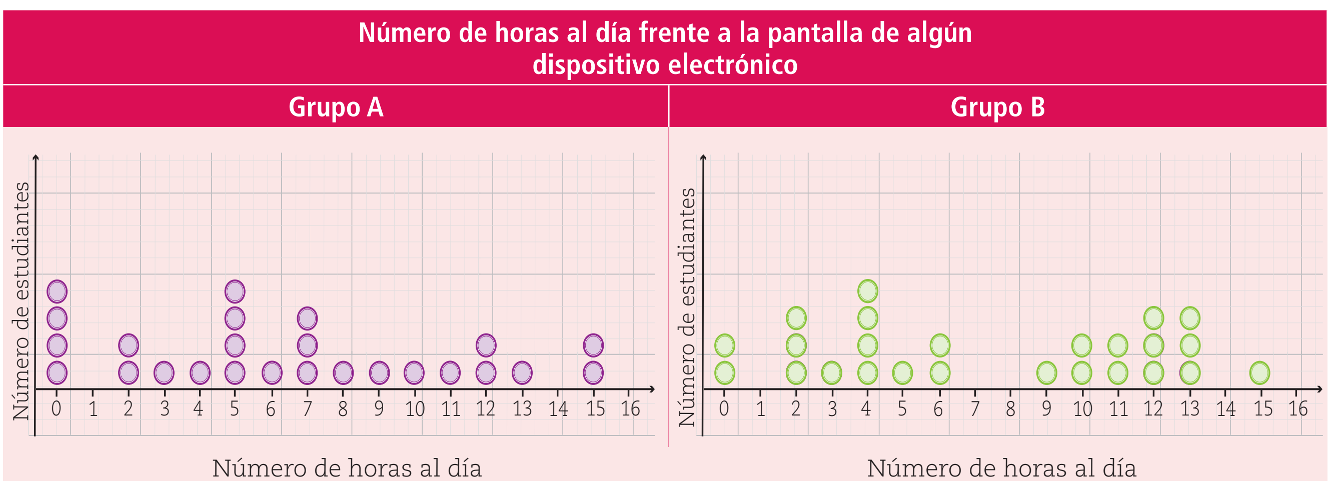
____

____

Sesión 2

En busca de los datos

1. Trabajen en pareja. Emma y su equipo elaboraron las siguientes gráficas de puntos para mostrar la distribución de los datos de la sesión anterior.



a) Interpreten las gráficas y completen la tabla de la siguiente página.

Pregunta	Gráfica grupo A	Gráfica grupo B
¿Se forma algún bloque de datos? ¿Dónde?		
¿Hay algún hueco o corte? ¿Dónde?		
¿Hay valores atípicos de los datos? ¿Cuáles?		

Glosario
Valor atípico es el valor de los datos que está más lejos de los demás por ser inusualmente mayor o menor que el resto. En inglés se dice *outlier*.

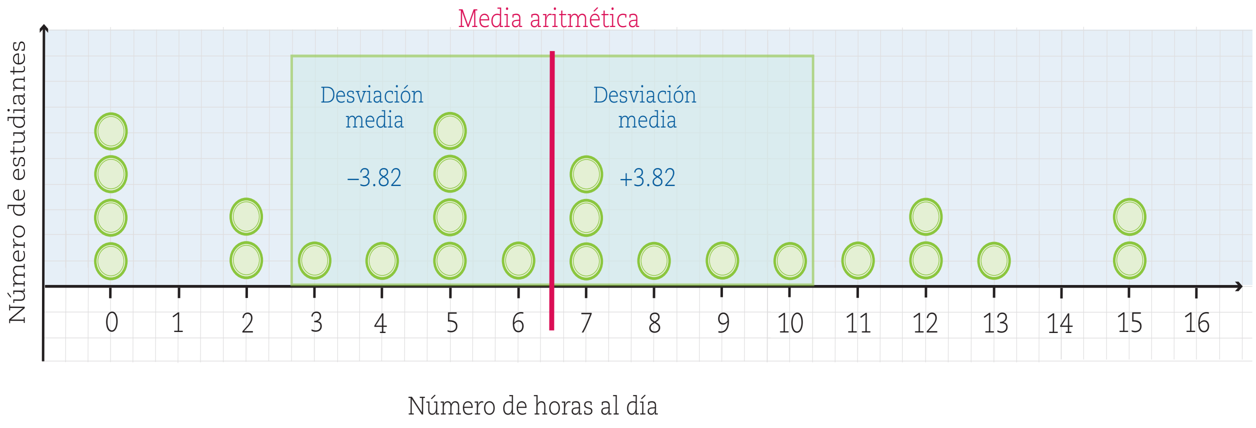
b) En grupo y con apoyo de su maestro, comparen sus respuestas y, si encuentran diferencias, analicen el porqué. Comenten la importancia de la correcta interpretación de las gráficas.

2. En pareja, ubiquen en cada gráfica el número que representa la media aritmética de horas al día que pasan frente a una pantalla los alumnos de cada grupo. Márquenlas en color rojo y, con base en ellas, tracen una línea perpendicular al eje horizontal que divida a los datos en dos partes.

a) De manera semejante, ubiquen el valor de la mediana del número de horas al día que pasan frente a una pantalla los alumnos de cada grupo. Márquenla en color verde.

b) Consideren el valor obtenido en la sesión 1 de la desviación media y, a partir del valor de la media aritmética, marquen a la derecha e izquierda tantos tramos como se puedan formar. Observen el siguiente ejemplo que corresponde al grupo A.

Gráfica | Grupo A



c) En la gráfica del grupo A, ¿cuántos datos quedan juntos, considerando el primer tramo a la izquierda y a la derecha de la media? ________________ ¿Entre qué valores se encuentran estos datos? ________________________________

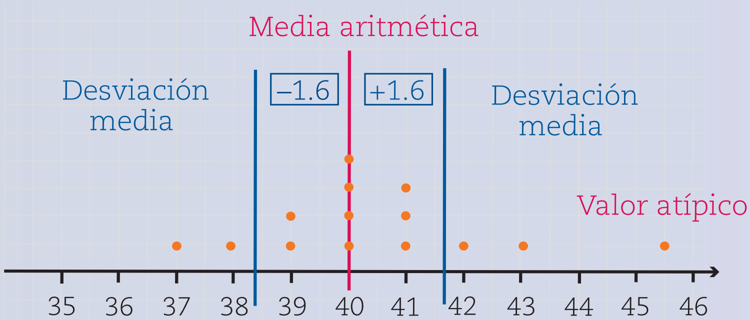
d) En la gráfica del grupo B, ¿cuántos datos quedan juntos, considerando el primer tramo a la izquierda y a la derecha de la media? ________________ ¿Entre qué valores se encuentran estos datos? ________________________________

e) Al comparar lo que ocurre en cada una de las dos gráficas, ¿en cuál se presentan más datos concentrados alrededor del valor de la media aritmética y los tramos que se forman a la derecha e izquierda de ella? ______________________

3. Con el apoyo de su maestro, expongan y argumenten en el grupo sus respuestas, procedimientos y cálculos. Después, lean y comenten lo siguiente.

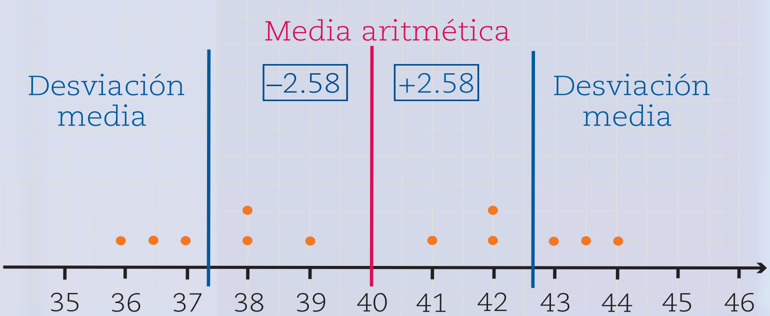
Los valores de las medidas de tendencia central y de dispersión resumen la distribución y variabilidad de un conjunto de datos. Particularmente, la media aritmética nos indica el valor central que representa la mayoría de los valores de los datos y la desviación media nos dice qué tan alejados o cercanos están los datos respecto al valor de la media aritmética. Si se consideran ambos valores, comprenderemos mejor, al comparar dos o más conjuntos, cuál tiene mayor variabilidad (menos datos alrededor de la media aritmética) o menor variabilidad (más datos alrededor de la media aritmética), lo cual se puede apreciar con el valor de la desviación media.

Gráfica | Temperaturas máximas mensuales de 1971 a 2000 en la ciudad A (°C)



Menor variabilidad entre los datos

Gráfica | Temperaturas máximas mensuales de 1971 a 2000 en la ciudad B (°C)



Mayor variabilidad entre los datos

4. Emma le comentó a su familia la situación que analizaron en clase. En su familia hay ocho personas y les preguntó cuántas horas al día pasan frente a la pantalla de algún dispositivo, ya sea televisión, computadora, celular, etcétera. Si la media aritmética de los ocho valores fuera de cinco horas, ¿cuáles son los valores que podrían representar el tiempo que pasa cada integrante frente a la pantalla de un dispositivo? ____________

____

____

a) ¿Hay más de un conjunto de ocho cantidades con una media aritmética de cinco horas? ______________

____

____

Si su respuesta es afirmativa, anoten uno o dos ejemplos. Si es negativa, justifiquen por qué. __________

____

____

____

b) Cuando Emma le contó a su padre lo que había hecho, él le preguntó cómo podrían cambiar los valores si la media fuera de cinco horas y la mediana de cuatro horas. Anoten un ejemplo de ocho datos que cumplan con lo anterior. ______

______

c) ¿Hay más de un conjunto de ocho datos que satisfaga ambas condiciones? ______

______

En caso afirmativo, anoten un ejemplo del conjunto. Si su respuesta es negativa, expliquen por qué. ______

______

d) La mamá de Emma le pidió escribir ocho valores con una media aritmética de cinco horas y un rango de siete horas. Anoten un ejemplo. ______

______

e) Escriban ocho posibles cantidades de tiempo transcurrido frente a una pantalla que tengan una media aritmética de cinco horas, una mediana de cuatro horas y un rango de siete horas. ______

______

f) ¿Hay más de un conjunto de datos que satisfaga todas las condiciones? ______ ______ En caso afirmativo, anoten un ejemplo de conjunto. Si la respuesta es negativa, expliquen por qué. ______

______

5. Comparen sus respuestas y comenten las estrategias que siguieron para obtenerlas.

Comparación de estadísticas

Sesión 3

1. Trabajen en equipo. Completen la tabla de abajo para organizar los datos de la sesión 1 en forma de intervalos. En la tabla de la siguiente página, anoten las medidas de tendencia central y de dispersión.

Intervalo de horas al día	Grupo A	Grupo B	Total (en ambos grupos)
☐ De 1 a 3			
☐ De 4 a 7			
☐ De 8 a 12			
☐ Más de 12			
☐ Nada			

Medidas	Grupo A	Grupo B	Total (en ambos grupos)
Media aritmética			
Desviación media			
Mediana			
Moda			
Rango			

2. Consideren la información de las tablas anteriores y completen la siguiente conclusión.

   Los alumnos del grupo A pasan ________________ *horas al día,* ________________ *que el grupo B*
   (más / menos)
   frente a la pantalla de algún dispositivo.

   En conjunto, los alumnos de los dos grupos de esa telesecundaria pasan ________________ *horas al*
   (media aritmética)
   día frente a una pantalla en promedio con una desviación media de ________________ *horas al día.*

   a) ¿Cuál de los dos grupos pasa más tiempo frente a una pantalla? ________________ ¿En cuál grupo los datos son menos dispersos, es decir, son más consistentes? ________________

   b) Si los padres de los alumnos observaran la información anterior, ¿creen que llegarían a la conclusión de que los alumnos del grupo A y B pasan demasiado tiempo mirando televisión? ________________
   ¿Por qué? ________________

3. Conocer cuánto tiempo al día pasan los jóvenes frente a la pantalla de algún dispositivo es un aspecto importante para conocer cuál es el consumo de contenidos audiovisuales que tiene una población; otro aspecto importante es conocer qué contenidos ven o consultan mientras están frente a una pantalla.

4. Realicen una encuesta a máximo 50 personas y pregunten: ¿cuántas horas al día pasan frente a la pantalla de un dispositivo? Registren sus resultados en el cuaderno. No olviden registrar el género de las personas.

Sesión 4

Para terminar

Presentación de resultados

1. Reúnanse con el equipo con que trabajaron en la sesión anterior para realizar lo que se les pide. Organicen los datos que recolectaron en su encuesta mediante tablas y gráficas como las que analizaron en las sesiones anteriores.

2. Obtengan las medidas de tendencia central y de dispersión y escríbanlas en su cuaderno.

3. Completen la tabla siguiente con los datos que obtuvieron y den una conclusión en su cuaderno sobre los resultados finales.

Intervalo de horas al día	Mujeres	Hombres	Total
☐ De 1 a 3			
☐ De 4 a 7			
☐ De 8 a 12			
☐ Más de 12			
☐ Nada			

Medidas	Mujeres	Hombres	Total
Media aritmética			
Desviación media			
Mediana			
Moda			

4. Ciertos datos obtenidos en una encuesta señalan que las personas pasan en promedio 45 minutos diarios escuchando música grabada. Los siguientes 30 datos corresponden a un grupo de personas que contestaron cuál es la cantidad de minutos al día que lo hacen.

10, 90, 5, 10, 0, 30, 5, 45, 120, 90, 60, 30, 15, 100, 0, 35, 15, 0, 90, 60, 45, 10, 60, 10, 45, 0, 60, 60, 60, 90

a) Anoten la media aritmética, moda y mediana de este grupo. ____________

b) Calculen la desviación media y el rango. ____________

c) ¿Parecen coincidir estos resultados con la media que menciona la encuesta? ____________ ¿Por qué? ____________

5. Observen el recurso audiovisual *Comparación de dos conjuntos de datos estadísticos* para conocer otras situaciones en las que se comparan dos o más conjuntos de datos estadísticos sobre la misma pregunta de interés a partir de los valores de la media aritmética, mediana, moda y desviación media.

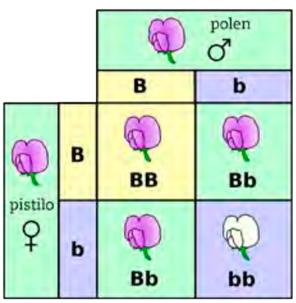
6. Utilicen el recurso interactivo *Memorama: tus derechos* para conocer los derechos que tienes como audiencia de los medios de comunicación disponible en el micrositio de Somos Audiencias en la siguiente liga: https://bit.ly/2UTZzLw.

19. Eventos mutuamente excluyentes 2

Sesión 1

Para empezar

Reginald Crundall Punnett.



Cuadro de Punnett. Muestra los resultados de la cruza de semillas.

Una manera útil de tomar decisiones consiste en examinar la información que se tiene y considerar la probabilidad de que ciertos eventos ocurran, algo que han aprovechado tanto científicos como empresarios. Por ejemplo, a mediados del siglo XIX, en el libro *Experimentos sobre hibridación de plantas*, Gregor Mendel (1822-1884) registró una de las primeras aplicaciones de la teoría de la probabilidad a las ciencias naturales; esta obra representa también el inicio del estudio de la genética.

Entre los primeros genetistas también está el inglés Reginald Crundall Punnett (1875-1967), quien creó una herramienta para predecir las proporciones de los genotipos y fenotipos de la descendencia de una cruza, la cual todavía se utiliza: el cuadro de Punnett. Se trata de una tabla de doble entrada que representa cómo se pueden realizar las combinaciones aleatorias de una descendencia.

El gráfico de la izquierda es de Punnett y muestra una cruza de semillas de una misma especie de flor, pero de diferente color. Los retoños mostrarán la coloración morada dominante en una proporción de 3:1; esto en términos de probabilidad equivale a decir que aproximadamente 75% de los retoños será de color morado. ¿Cuál es la probabilidad de que uno de los retoños tenga el genotipo *Bb*? Si se definen los eventos: "el retoño será de color blanco" y "el retoño tendrá genotipo *BB*", ¿qué tipo de eventos son?, ¿cómo calcularías la probabilidad de que uno de los retoños tenga genotipo *Bb* o *bb*?, y ¿la probabilidad de que los retoños sean de color morado o de genotipo *BB*? ¿Cuáles de estos eventos son mutuamente excluyentes?, ¿cuáles no?

Con lo que aprenderás en esta secuencia, podrás calcular la probabilidad de los eventos mutuamente excluyentes y de los no excluyentes mediante la regla de la suma.

Glosario

Genotipo es el conjunto de genes que hay en el núcleo celular de cualquier ser vivo.

Fenotipo es el conjunto de caracteres visibles que un ser vivo presenta como resultado de la interacción entre su genotipo y el medio.

Manos a la obra

Resultados de la prueba de laboratorio

1. Trabajen en pareja. La siguiente tabla muestra los resultados de una prueba de laboratorio realizada para la detección de infecciones causadas por la bacteria estafilococo áureo o dorado (*Staphylococcus aureus*) resistente a varios antibióticos comunes, en la cual participó un grupo de 1 850 personas.

Intervalo de edad (años)	Infectados	No infectados	Total de resultados
Menor o igual que 30	490	70	
Mayor que 30	160	1 130	
Total			

Utilicen los datos de la tabla anterior para contestar las siguientes preguntas.

a) ¿Cuántas personas mayores de 30 años participaron en la prueba? ______
¿Cuántas personas de 30 años o menos participaron en la prueba? ______

b) ¿Cuántas personas están infectadas por la bacteria estafilococo dorado? ______
¿Cuántas personas no están infectadas? ______

c) ¿Qué representa el número 70 en la tabla? ______

d) Si se selecciona una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que esté infectada por esta bacteria? ______

2. Completen la siguiente tabla de probabilidades con las razones y el cociente que corresponda.

Intervalo de edad (años)	Infectados	No infectados	Total de resultados
Menor o igual que 30	$\frac{490}{1\,850} =$		
Mayor que 30		$\frac{1\,130}{1\,850} =$	
Total			$\frac{1\,850}{1\,850} = 1$

Consideren los siguientes eventos que pueden ocurrir al seleccionar al azar a una persona de la muestra.

A: "Que la persona esté infectada por la bacteria estafilococo dorado".

B: "Que la persona sea mayor de 30 años".

C: "Que la persona tenga 30 años o menos y no esté infectada por la bacteria estafilococo dorado".

Con base en lo anterior, respondan lo que se pide

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la persona seleccionada al azar esté infectada por la bacteria estafilococo dorado? P (Que la persona esté infectada por la bacteria estafilococo dorado) = $P(A)$ = ____________________

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la persona seleccionada al azar sea mayor de 30 años? P (Que la persona sea mayor de 30 años) = $P(B)$ = ____________

c) ¿Cuál es la probabilidad de que la persona seleccionada al azar tenga 30 años o menos y no esté infectada por la bacteria estafilococo dorado? P (Que la persona tenga 30 años o menos y no esté infectada por la bacteria estafilococo dorado) = $P(C)$ = ____________________

d) Si se selecciona al azar a una persona mayor que 30 años, ¿puede ocurrir que esté infectada por la bacteria estafilococo dorado? ____________

e) ¿Son mutuamente excluyentes los eventos A y B? ____________

¿Por qué? ____________________

____

f) Si se selecciona al azar a una persona que esté infectada por la bacteria estafilococo dorado, ¿puede ocurrir que también tenga 30 años o menos y no esté infectada por dicha bacteria estafilococo dorado? ____________

g) ¿Son mutuamente excluyentes los eventos A y C? ____________

¿Por qué? ____________________

____

3. ¿Cuál o cuáles de las siguientes parejas de eventos son mutuamente excluyentes? En todas las parejas de eventos se selecciona una persona al azar. Marquen con una ✓ sus respuestas.

- ☐ La persona seleccionada resultó mayor de 30 años o es una persona de 30 años o menos que no está infectada por la bacteria estafilococo dorado.
- ☐ La persona tiene 30 años o menos o la persona no está infectada por la bacteria estafilococo dorado.
- ☐ La persona está infectada por la bacteria estafilococo dorado o la persona es mayor de 30 años y no está infectada por la bacteria.

4. De manera grupal comparen sus respuestas y, con apoyo de su maestro, comenten cómo determinaron qué eventos son mutuamente excluyentes.

5. Con su maestro, lean y comenten la siguiente información.

Si dos eventos son *mutuamente excluyentes*, significa que si ocurre uno no puede ocurrir el otro y, por lo tanto, no tienen resultados favorables en común.

Vínculo con...

Lengua materna

Los conectores son palabras que sirven para unir o relacionar elementos en una oración o en un párrafo. Por ejemplo, la letra o se conoce en matemáticas como conectivo u operador lógico e indica que se deben considerar todos los elementos de los conjuntos involucrados.

6. De manera grupal, contesten lo siguiente.

a) ¿Cuál consideran que es la probabilidad de seleccionar a una persona que sea mayor de 30 años o que no esté infectada por la bacteria estafilococo dorado y tenga 30 años o menos?

____

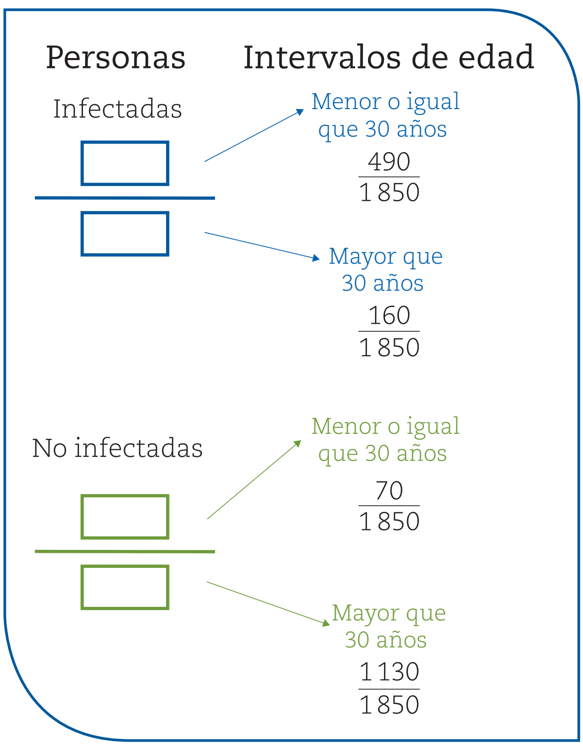
b) ¿Cómo obtuvieron la respuesta anterior? ________________

____

Cálculo de la probabilidad de eventos mutuamente excluyentes

Sesión 2

1. Trabajen en pareja. Consideren la tabla de la actividad 2 de la sesión anterior para completar el diagrama de árbol y responder las preguntas.



a) ¿Cuántas personas están infectadas por estafilococo dorado o tienen 30 años o menos y no están infectadas? ________________

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la persona seleccionada al azar esté infectada por estafilococo dorado o tenga 30 años o menos y no esté infectada? Es decir, $P(A \text{ o } C)$ =

____

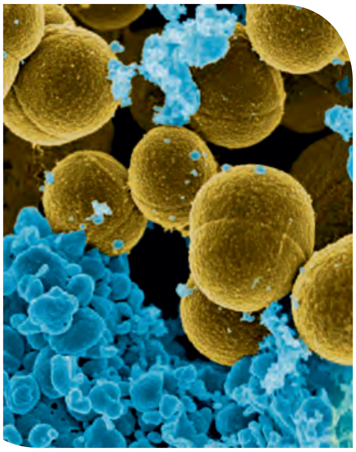
c) Completen la tabla.

$P(A)$	+	$P(C)$	=	

d) Comparen el valor de la probabilidad que obtuvieron en el inciso b) y el de la suma de las probabilidades del inciso c). ¿Son iguales o diferentes? __________

e) ¿Cuántas personas están infectadas por estafilococo dorado y tienen más de 30 años? __________

f) ¿Cuántas personas están infectadas por estafilococo dorado o tienen más de 30 años? No consideren a las personas que cumplen con ambos eventos a la vez. __________


Bacteria *Staphylococcus aureus* vista en el microscopio.

g) ¿Cuál es la probabilidad de que la persona seleccionada esté infectada por estafilococo dorado o sea mayor de 30 años? $P(A \text{ o } B)$ = __________

Completen la tabla.

P (*A*)	+	*P* (*B*)	=	

h) Comparen el valor de la probabilidad que obtuvieron en el inciso f) con la suma de la probabilidad del evento *A* y del *B*. ¿Son iguales o diferentes? __________

Si son diferentes, ¿cuál es la diferencia? __________

¿A qué valor corresponde esa diferencia? __________ ¿Por qué consideran que se obtiene esa diferencia? __________

2. Con ayuda de su maestro, comparen sus respuestas con las de sus compañeros del grupo y comenten de qué manera calcularon las probabilidades de los incisos anteriores.

3. En grupo, lean y comenten lo siguiente.

Cuando los eventos no son mutuamente excluyentes, la probabilidad de que ocurra uno u otro se obtiene sumando las probabilidades de cada evento menos la probabilidad de que ocurran los dos eventos al mismo tiempo.

$$P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ y } B)$$

A esta expresión se le conoce como *regla de la suma de las probabilidades.*

Cuando dos eventos son mutuamente excluyentes, la probabilidad de que ocurra uno u otro de los eventos es igual a la suma de las probabilidades de los eventos.

$$P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B)$$

Esto es debido a que la probabilidad de que haya resultados favorables comunes es cero, es decir, no hay resultados que cumplan con las dos condiciones al mismo tiempo. Esto se representa como

$$P(A \text{ y } B) = 0$$

A formar números

1. Trabajen en equipo. Con los cuatro primeros números primos (2, 3, 5 y 7), formen números de tres cifras con la condición de no repetir ninguno; por ejemplo, 232 o 755 no forman parte de la lista.

a) En total, ¿cuántos números creen que se pueden formar? ____________________

b) Observen los ejemplos a la derecha y elaboren un listado con todos los números.

2	3	5

3	5	7

5	7	2

7	2	3

c) Seleccionen aleatoriamente uno de esos números de 3 cifras y definan los siguientes eventos.

A: "El número elegido es múltiplo de 3."

B: "El número elegido es mayor que 500."

C: "El número elegido es menor que 200."

D: "El número elegido tiene 2 en la primera cifra."

d) ¿Cuántos resultados favorables tiene el evento *A*? __________ ¿Cuáles son? ____________________

____

e) ¿Cuántos resultados favorables tiene el evento *B*? ____________________

¿Cuáles son? ____

____

f) ¿Cuántos resultados favorables tiene el evento *C*? ____________________

¿Cuáles son? ____

g) ¿Cuántos resultados favorables tiene el evento *D*? ____________________

¿Cuáles son? ____

2. Comparen sus respuestas con las de otros equipos, revisen si formaron los mismos números con tres cifras diferentes y si no hay números repetidos en cada equipo.

3. Consideren el conjunto de números y los eventos definidos de la actividad anterior. Seleccionen al azar un número de tres cifras. Marquen con una ✓ los eventos que son mutuamente excluyentes.

☐ "El número es múltiplo de 3" o "es mayor que 500".

☐ "El número es múltiplo de 3" o "es menor que 200".

☐ "El número es múltiplo de 3" o "tiene 2 en la primera cifra".

☐ "El número es mayor que 500" o "tiene 2 en la primera cifra".

4. Consideren los números y eventos de la actividad 1 de esta sesión para seleccionar la fórmula que les permita calcular la probabilidad del evento indicado en cada caso, y aplíquenla. Marquen con una ✓ sus respuestas.

a) ¿Cuál es la probabilidad del evento (A o B)?

☐ $P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B)$ ☐ $P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ y } B)$

b) ¿Cuál es la probabilidad del evento (A o C)?

☐ $P(A \text{ o } C) = P(A) + P(C)$ ☐ $P(A \text{ o } C) = P(A) + P(C) - P(A \text{ y } C)$

c) ¿Cuál es la probabilidad del evento (B o C)?

☐ $P(B \text{ o } C) = P(B) + P(C)$ ☐ $P(B \text{ o } C) = P(B) + P(C) - P(B \text{ y } C)$

d) ¿Cuál es la probabilidad del evento (A o D)?

☐ $P(A \text{ o } D) = P(A) + P(D)$ ☐ $P(A \text{ o } D) = P(A) + P(D) - P(A \text{ y } D)$

e) ¿Cuál es la probabilidad del evento (C o D)?

☐ $P(C \text{ o } D) = P(C) + P(D)$ ☐ $P(C \text{ o } D) = P(C) + P(D) - P(C \text{ y } D)$

5. De manera grupal, comparen sus respuestas de las actividades 3 y 4 y expliquen cómo determinaron si los eventos son mutuamente excluyentes o no, así como la forma en que calcularon la probabilidad cuando ambos eventos ocurren al mismo tiempo, por ejemplo, $P(A \text{ y } D)$.

6. Definan dos eventos, M y N, uno que sea mutuamente excluyente con el evento A y otro que sea mutuamente excluyente con el evento D. Descríbanlos en su cuaderno. Posteriormente, calculen la probabilidad del evento (A o M) y (D o N).

7. Con ayuda de su maestro, comparen sus respuestas y comenten en qué situaciones de la vida cotidiana podrían determinar si algunos eventos son mutuamente excluyentes o no, e indiquen cómo calcularían la probabilidad de ocurrencia de los mismos.

Sesión 4

Para terminar

Población y probabilidad

1. Trabajen en pareja. Resuelvan los siguientes problemas. En el sitio oficial de la Organización de las Naciones Unidas (ONU) se publica lo siguiente respecto a la población mundial.

Dato interesante
Se espera que en 2027 India supere a China como el país más poblado del mundo. Por el contrario, se estima que China reduzca su población en 31.4 millones (2.2% menos) entre 2019 y 2050.
Fuente: https://bit.ly/2V70p7K

Los países más poblados: China e India

Un 61% de la población mundial vive en Asia (4 700 millones), 17% en África (1 300 millones), 10% en Europa (750 millones), 8% en Latinoamérica y el Caribe (650 millones) y 5% restante en América del Norte (370 millones) y Oceanía (43 millones). Por su parte, China (1 440 millones) e India (1 390 millones) continúan siendo los países con mayor población, ya que cuentan con más de 1 000 millones de personas y representan 19% y 18% de la población mundial, respectivamente.

Fuente: https://bit.ly/2V70p7K

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona sea de Asia o de América del Norte? ____________________

b) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona sea china o india? ____________________

c) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona viva en el continente americano? ____________________

2. Si en una comunidad 62% de las personas ve televisión abierta, 27% usa internet y 7% usa ambos, ¿cuál es la probabilidad de que una persona de esa localidad, tomada al azar, vea al menos televisión abierta o use internet? ____________________

3. Consideren el cuadro de Punnett de la sección "Para empezar" que muestra una cruza de semillas de una misma especie de flor, pero de diferente color.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que uno de los retoños tenga el genotipo *Bb*? ____________________

b) Si se definen los eventos: "el retoño será de color blanco" y "el retoño tendrá genotipo *BB*", ¿qué tipo de eventos son? ____________________ ¿Cómo calcularían la probabilidad de que uno de los retoños tenga genotipo *Bb* o *bb*? ____________________ ¿Y la probabilidad de que los retoños sean de color morado o de genotipo *BB*? ____________________

4. Con ayuda de su maestro, revisen los procedimientos y resultados que obtuvieron para calcular las probabilidades que se piden y, si hay diferencias, analicen en qué consistieron.

5. Observen el recurso audiovisual *Probabilidad de eventos mutuamente excluyentes* para analizar más situaciones aleatorias en las que se calcula la probabilidad de eventos mutuamente excluyentes.

6. Usen el recurso informático *Probabilidad de eventos mutuamente excluyentes* para calcular la probabilidad de otros eventos que son mutuamente excluyentes en diferentes situaciones.

Evaluación

Subraya la opción correcta.

1. La descomposición en factores primos del número 472.

   (A) $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$ (B) $2 \times 2 \times 2 \times 59$

   (C) $2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 11$ (D) $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 11$

2. Para combatir una enfermedad, una persona debe tomar tres medicamentos al día. El primero cada 2 horas, el segundo cada 3 y el tercero, cada 4. Si tomó los tres medicamentos a las 9 de la mañana, ¿después de cuántas horas los volverá a tomar juntos?

   (A) 2 horas (B) 6 horas (C) 12 horas (D) 24 horas

3. Subraya la ecuación que permite resolver el problema y contesta la pregunta. El perímetro de una lona rectangular mide 30 m y su área 50 m².

   (A) $x(15 - x) = 50$ (B) $x(15 + x) = 50$

   (C) $x(30 - x) = 50$ (D) $x(30 + x) = 50$

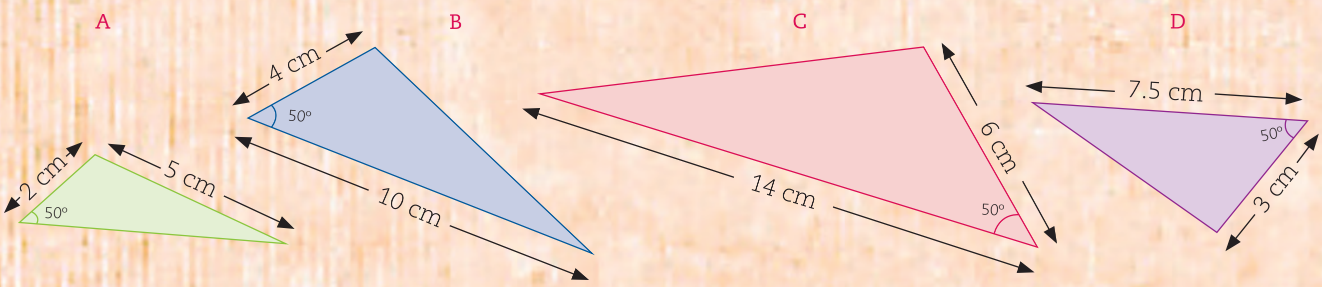
   ¿Cuáles son las medidas de la lona? Largo = ______ Ancho = ______

4. Los lados de un triángulo miden 5 cm, 9 cm y 12 cm. Si se traza un triángulo semejante a éste, cuya razón de semejanza es de 2.5, ¿cuál es la medida de los lados del nuevo triángulo trazado?

   (A) 2 cm, 3.6 cm, 5 cm (B) 12.5 cm, 22.5 cm, 30 cm

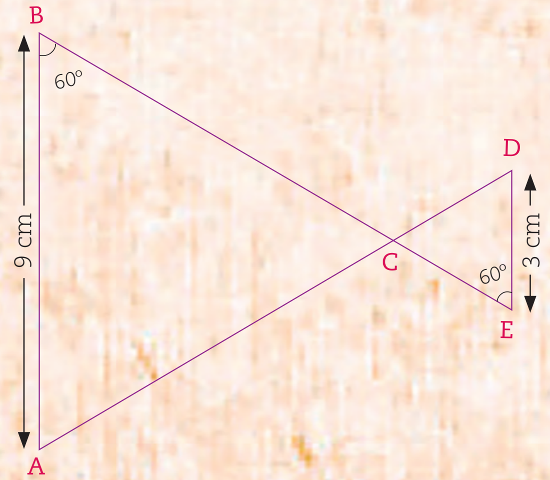
   (C) 10 cm, 18 cm, 24 cm (D) 12.5 cm, 22.5 cm, 32.5 cm

5. De los siguientes triángulos, ¿cuáles son semejantes entre sí? Subráyalos.



   (A) A, D (B) A, C (C) B, D (D) B, C

6. ¿Qué criterio de semejanza sirve para determinar que los siguientes dos triángulos son semejantes?



Ⓐ LLL

Ⓑ LAL

Ⓒ AA

Ⓓ LA

7. Los puntos A y B están en un plano cartesiano, sus coordenadas son A (2, 3) y B (6, 6). ¿Cuál es la distancia entre ellos?

Ⓐ 3 Ⓑ 4 Ⓒ 5 Ⓓ 6

8. Una escalera que mide 3 m está recargada en una pared, si el pie de la escalera está a 1 m de distancia de ésta, ¿qué altura alcanza, aproximadamente?

Ⓐ 1.41 m Ⓑ 2 m Ⓒ 2.83 m Ⓓ 3 m

9. ¿Cuánto mide la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyo cateto opuesto al ángulo de 30° mide 1.05 cm? El $sen\ 30° = \frac{1}{2}$

Ⓐ 0.525 cm Ⓑ 2.010 cm Ⓒ 2.01 cm Ⓓ 2.1 cm

10. Si $cos\ A = \frac{3}{5}$, ¿cuánto vale la tangente de A?

Ⓐ $\frac{3}{4}$ Ⓑ $\frac{3}{5}$ Ⓒ $\frac{5}{3}$ Ⓓ $\frac{4}{3}$

11. ¿Cuáles de los siguientes eventos son mutuamente excluyentes?

a) Tres monedas son lanzadas al aire. El evento A es que aparezcan dos soles y el B, que aparezcan menos de 3 soles. ¿Cuál es la probabilidad de que ocurran los eventos A y B al mismo tiempo?	**b)** Tres monedas son lanzadas al aire. El evento A es que aparezcan dos soles y el B que aparezca 1 o más soles. ¿Cuál es la probabilidad de que ocurran los eventos A y B al mismo tiempo?	**c)** Tres monedas son lanzadas al aire. El evento A es que aparezcan dos soles y el B que aparezcan 3 soles. ¿Cuál es la probabilidad de que ocurran los eventos A y B al mismo tiempo?	**d)** Tres monedas son lanzadas al aire. El evento A es que aparezcan dos soles y el B que no aparezcan águilas. ¿Cuál es la probabilidad de que ocurran los eventos A y B al mismo tiempo?

Lee cada situación y realiza lo que se pide.

1. Considera los siguientes números y su factorización en primos para contestar las preguntas.

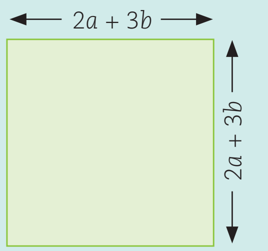
$420 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7$ $630 = 2 \times 3^2 \times 5 \times 7$ $330 = 2 \times 3 \times 5 \times 11$

a) ¿Cuál es el MCD de los tres números? ____________________

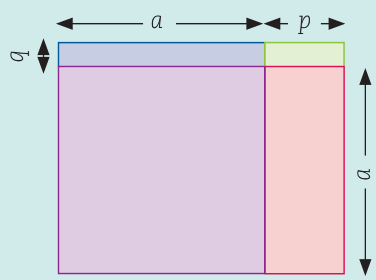
b) ¿Cuál es el mcm de los tres números? ____________________

2. Escribe tres expresiones algebraicas equivalentes para representar el área de las siguientes figuras.

a)



b)



Expresión 1	Expresión 2	Expresión 3	Expresión 1	Expresión 2	Expresión 3

3. En el recuadro, haz un dibujo que represente la distribución de un área cuya expresión algebraica es: $x^2 + 5x + 4$ y enseguida del dibujo anota esta expresión como un producto de dos factores.

4. Relaciona cada ecuación con las raíces que le corresponden.

a) $x^2 + 2x - 15 = 0$ ( ) $x_2 = 5$

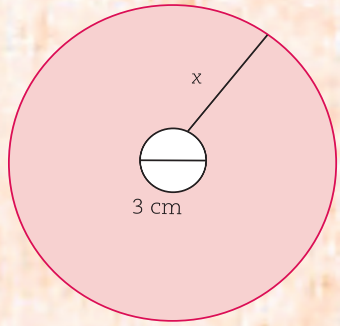
b) $x^2 - 25 = 0$ ( ) $x_2 = -5$

c) $x^2 - 5x = 0$ ( ) $x_2 = -5$

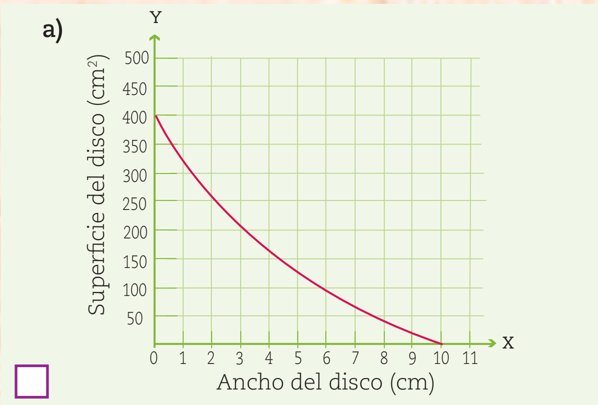
5. Se quiere hacer varios discos de madera para un juego de niños. Cada disco debe tener superficies distintas, pero el agujero central debe ser siempre de 3 cm de diámetro.

La expresión algebraica que modela la superficie de cada disco en función del valor de x es: $y = 3.14\,x^2 + 9.42x$

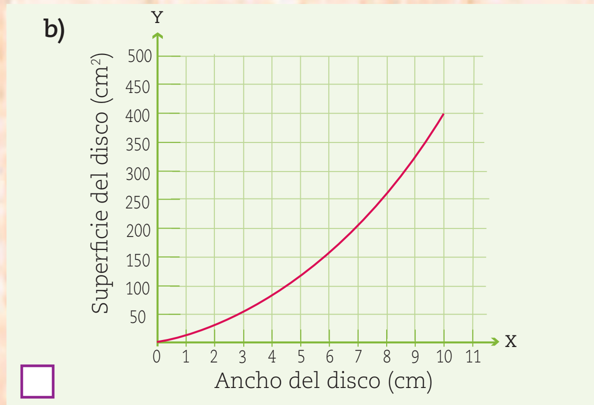
¿De las 4 gráficas de abajo, cuál es la representación de la superficie del disco en función de su ancho? Márcala con una ✓.



a)

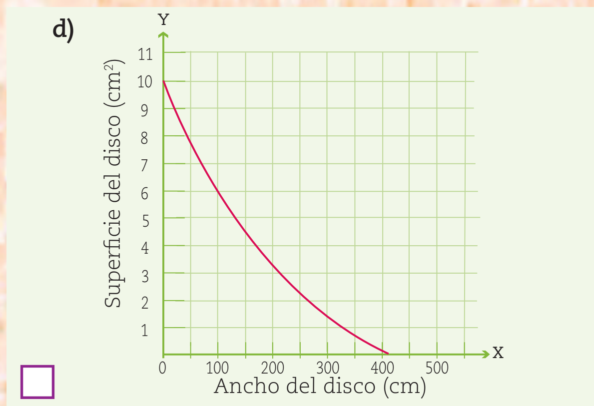


b)



c)

d)



6. Si el área de un disco mide 56.52 cm², ¿cuál es la medida del ancho? Plantea la ecuación y resuelve. ______________________________

7. Los siguientes datos corresponden a la cantidad de automóviles que llegan a dos casetas de cobro diferentes en intervalos de 10 minutos cada uno.

Caseta de cobro A	Caseta de cobro B
20, 19, 15, 21, 35, 24, 28, 31, 31, 32	26, 26, 58, 24, 22, 22, 15, 33, 19, 30

a) ¿En qué caseta es mayor el promedio de automóviles que llegan? ____________

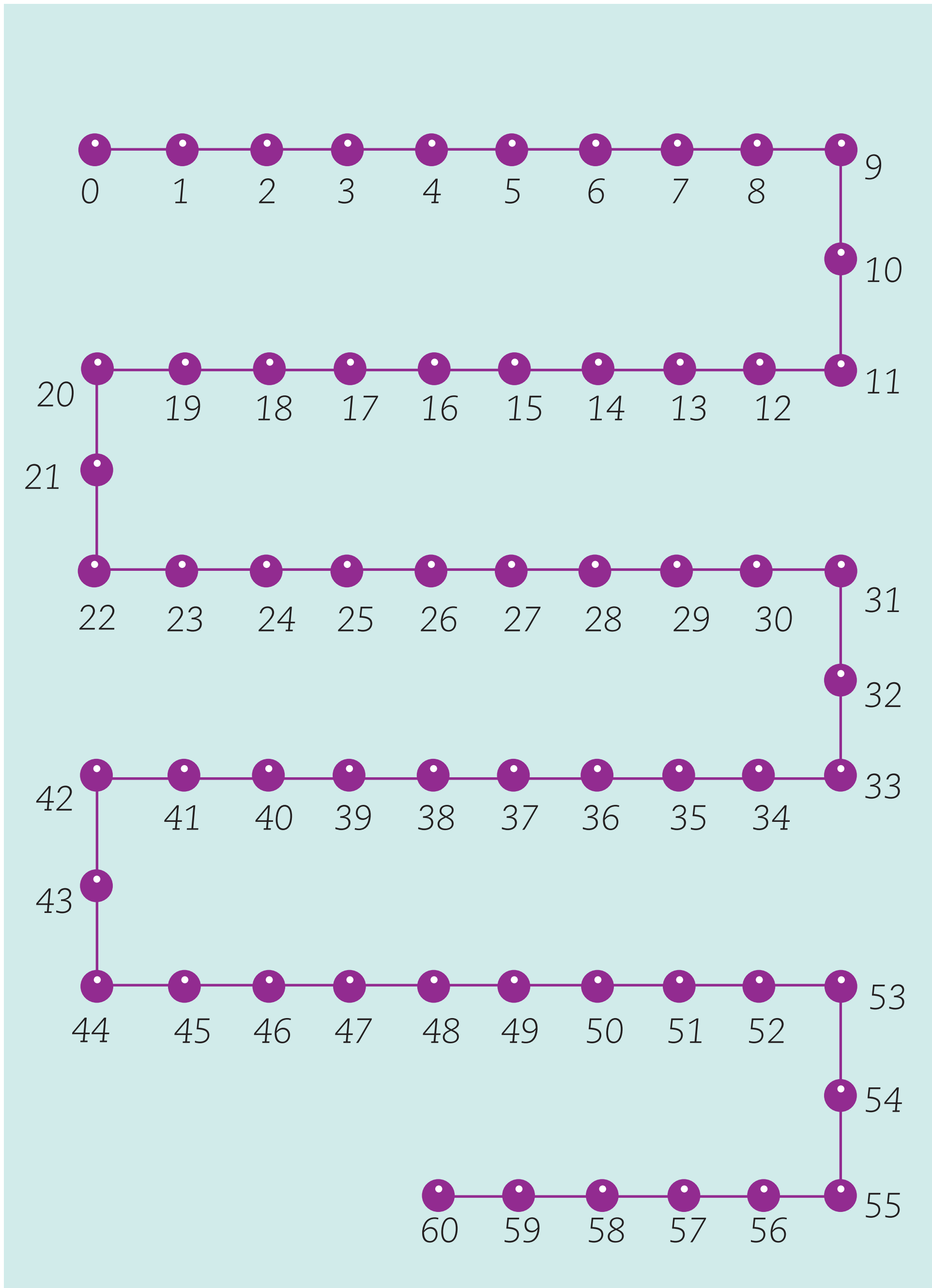
b) ¿En qué caseta es mayor la dispersión de los automóviles que llegan? ____________

Tablas trigonométricas

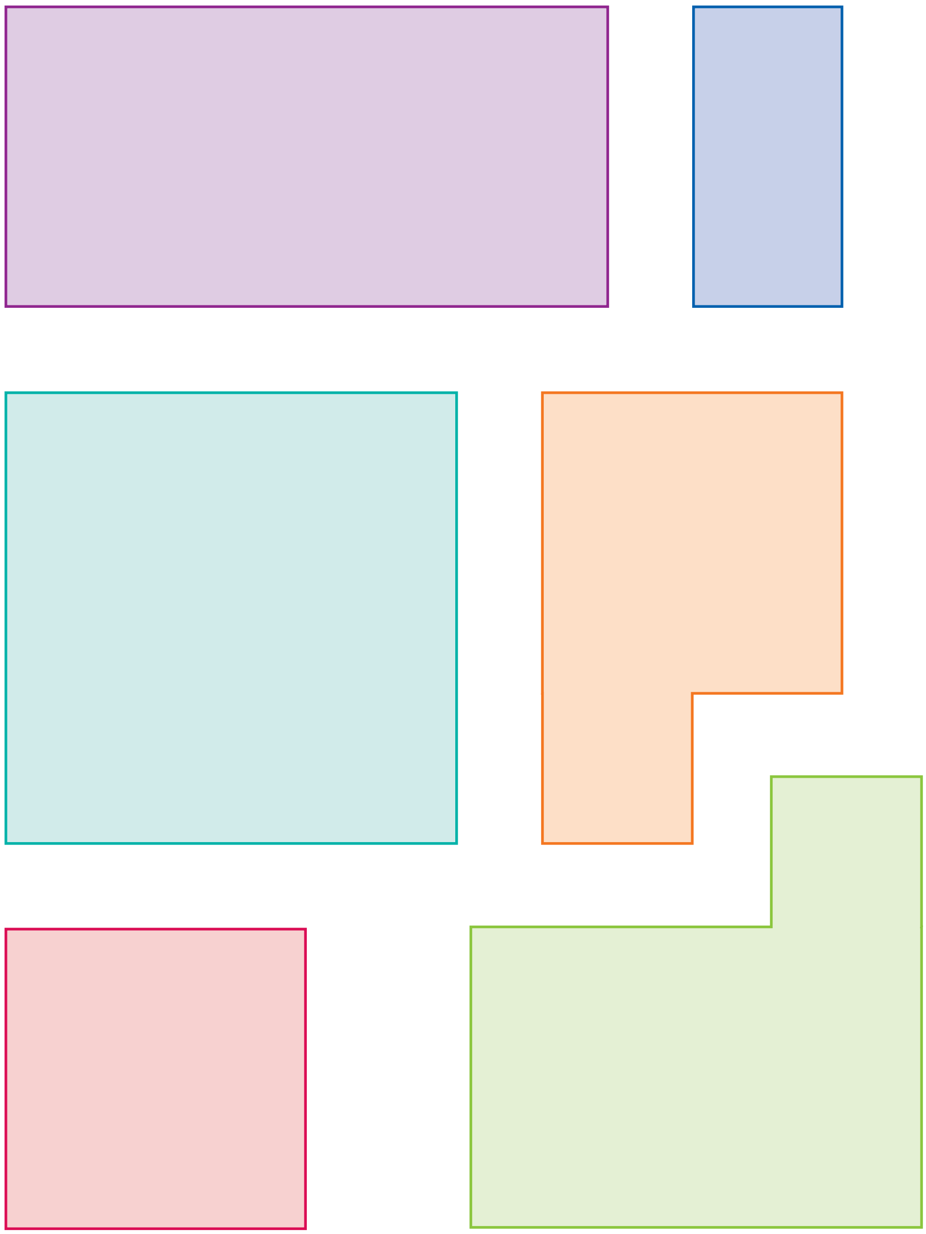
Ángulo	Seno	Coseno	Tangente
1°	0.0175	0.9998	0.0175
2°	0.0349	0.9994	0.0349
3°	0.0523	0.9986	0.0524
4°	0.0698	0.9976	0.0699
5°	0.0872	0.9962	0.0875
6°	0.1045	0.9945	0.1051
7°	0.1219	0.9925	0.1228
8°	0.1392	0.9903	0.1405
9°	0.1564	0.9877	0.1584
10°	0.1736	0.9848	0.1763
11°	0.1908	0.9816	0.1944
12°	0.2079	0.9781	0.2126
13°	0.2250	0.9744	0.2309
14°	0.2419	0.9703	0.2493
15°	0.2588	0.9659	0.2679
16°	0.2756	0.9613	0.2867
17°	0.2924	0.9563	0.3057
18°	0.3090	0.9511	0.3249
19°	0.3256	0.9455	0.3443
20°	0.3420	0.9397	0.3640
21°	0.3584	0.9336	0.3839
22°	0.3746	0.9272	0.4040
23°	0.3907	0.9205	0.4245
24°	0.4067	0.9135	0.4452
25°	0.4226	0.9063	0.4663
26°	0.4384	0.8988	0.4877
27°	0.4540	0.8910	0.5095
28°	0.4695	0.8829	0.5317
29°	0.4848	0.8746	0.5543
30°	0.5000	0.8660	0.5774
31°	0.5150	0.8572	0.6009
32°	0.5299	0.8480	0.6249
33°	0.5446	0.8387	0.6494
34°	0.5592	0.8290	0.6745
35°	0.5736	0.8192	0.7002
36°	0.5878	0.8090	0.7265
37°	0.6018	0.7986	0.7536
38°	0.6157	0.7880	0.7813
39°	0.6293	0.7771	0.8098
40°	0.6428	0.7660	0.8391
41°	0.6561	0.7547	0.8693
42°	0.6691	0.7431	0.9004
43°	0.6820	0.7314	0.9325
44°	0.6947	0.7193	0.9657
45°	0.7071	0.7071	1.0000

Ángulo	Seno	Coseno	Tangente
46°	0.7193	0.6947	1.0355
47°	0.7314	0.6820	1.0724
48°	0.7431	0.6691	1.1106
49°	0.7547	0.6561	1.1504
50°	0.7660	0.6428	1.1918
51°	0.7771	0.6293	1.2349
52°	0.7880	0.6157	1.2799
53°	0.7986	0.6018	1.3270
54°	0.8090	0.5878	1.3764
55°	0.8192	0.5736	1.4281
56°	0.8290	0.5592	1.4826
57°	0.8387	0.5446	1.5399
58°	0.8480	0.5299	1.6003
59°	0.8572	0.5150	1.6643
60°	0.8660	0.5000	1.7321
61°	0.8746	0.4848	1.8040
62°	0.8829	0.4695	1.8807
63°	0.8910	0.4540	1.9626
64°	0.8988	0.4384	2.0503
65°	0.9063	0.4226	2.1445
66°	0.9135	0.4067	2.2460
67°	0.9205	0.3907	2.3559
68°	0.9272	0.3746	2.4751
69°	0.9336	0.3584	2.6051
70°	0.9397	0.3420	2.7475
71°	0.9455	0.3256	2.9042
72°	0.9511	0.3090	3.0777
73°	0.9563	0.2924	3.2709
74°	0.9613	0.2756	3.4874
75°	0.9659	0.2588	3.7321
76°	0.9703	0.2419	4.0108
77°	0.9744	0.2250	4.3315
78°	0.9781	0.2079	4.7046
79°	0.9816	0.1908	5.1446
80°	0.9848	0.1736	5.6713
81°	0.9877	0.1564	6.3138
82°	0.9903	0.1392	7.1154
83°	0.9925	0.1219	8.1443
84°	0.9945	0.1045	9.5144
85°	0.9962	0.0872	11.4301
86°	0.9976	0.0698	14.3007
87°	0.9986	0.0523	19.0811
88°	0.9994	0.0349	28.6363
89°	0.9998	0.0175	57.2900
90°	1.0000	0.0000	Infinito

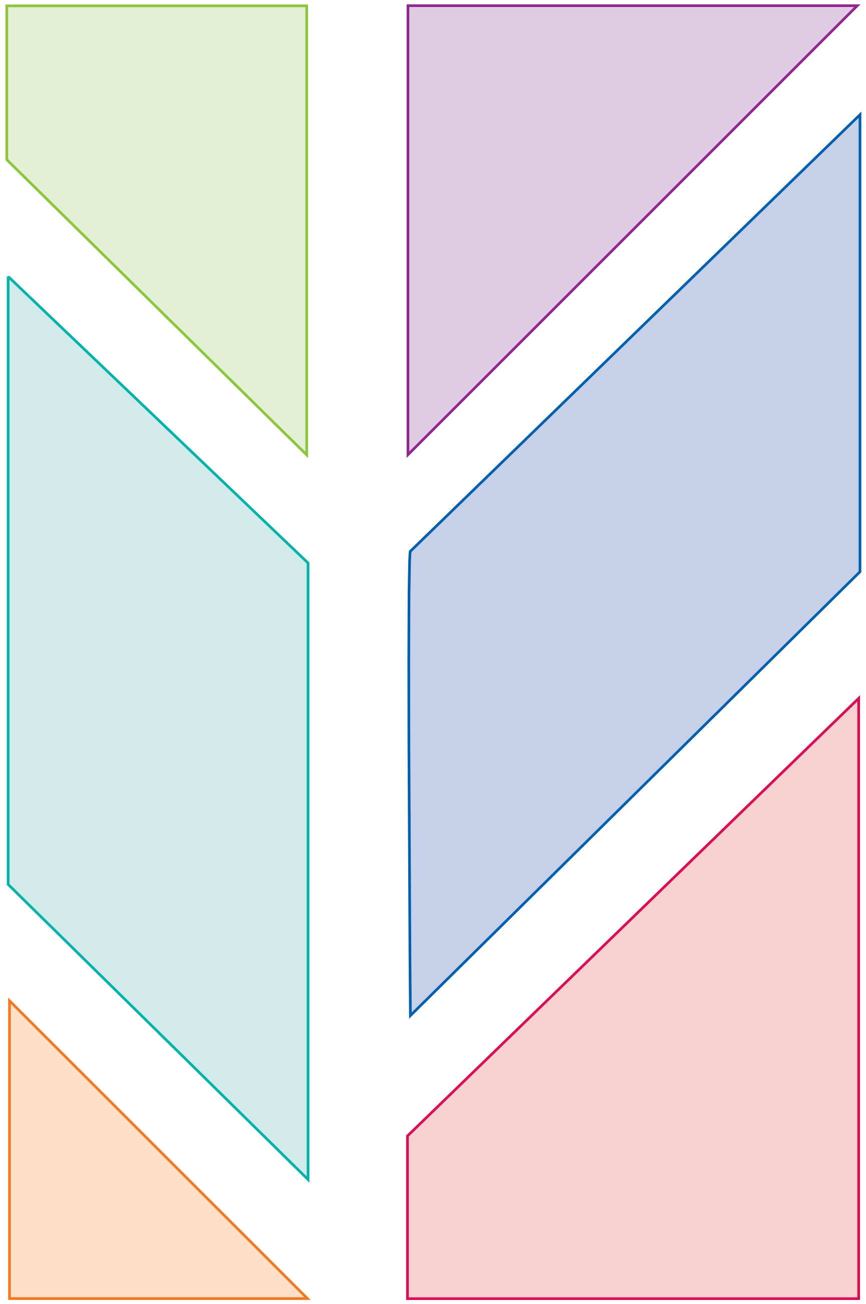
Recortable 1



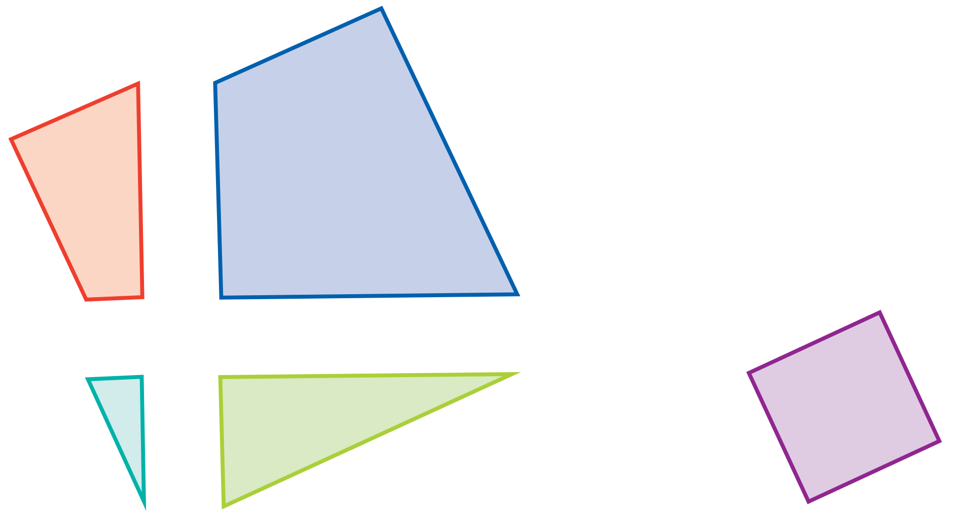
Recortable 2

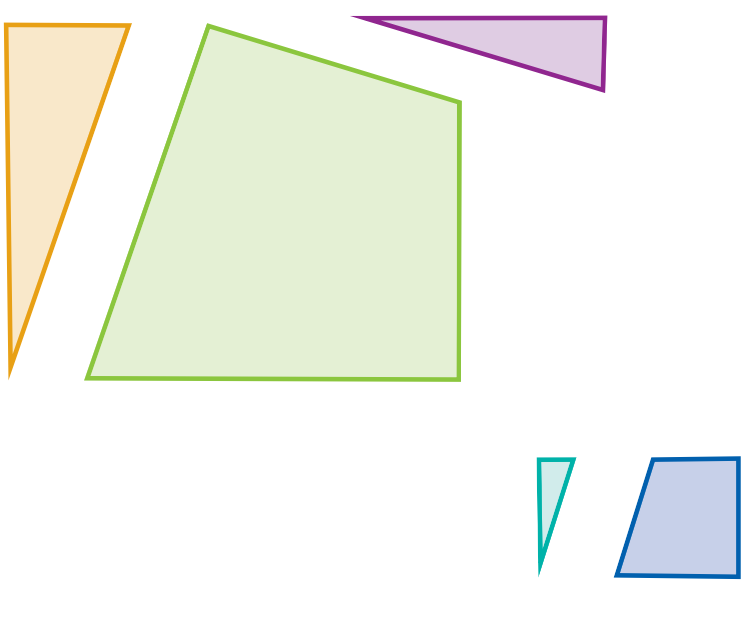


Recortable 3



Recortable 4





Recortable 5