Matemáticas

Tercer grado.

TELEsecundaria

Matemáticas. Tercer grado. Telesecundaria fue elaborado y editado por la Dirección General de Materiales Educativos de la Secretaría de Educación Pública.

Secretaría de Educación Pública
Esteban Moctezuma Barragán

Subsecretaría de Educación Básica
Marcos Augusto Bucio Mújica

Dirección General de Materiales Educativos
Aurora Almudena Saavedra Solá

Coordinación de contenidos
María del Carmen Larios Lozano

Coordinación de autores
Olga Leticia López Escudero

Autores
Hugo Hipólito Balbuena Corro, Emilio Domínguez Bravo, Fortino Escareño Soberanes, Silvia García Peña, Olga Leticia López Escudero

Supervisión de contenidos
José Alfredo Rutz Machorro, Jessica Evelyn Caballero Valenzuela, Juanita Espinoza Estrada, Esperanza Issa González, Ana Paola Hernández González, Arturo López González, Gustavo Sánchez Arellano

Revisión técnico-pedagógica
Olimpia Figueras Mourut de Montppellier

Coordinación editorial
Raúl Godínez Cortés

Supervisión editorial
Jessica Mariana Ortega Rodríguez

Editora responsable
María Guadalupe Ambriz Rivera

Corrección de estilo
Fannie Emery Othón

Producción editorial
Martín Aguilar Gallegos

Preprensa
Citlali María del Socorro Rodríguez Merino

Iconografía
Diana Mayén Pérez, Irene León Coxtinica, María del Mar Molina Aja, Magdalena Andrade Briseño, María Gabriela Bautista Rodríguez, Fabiola Buenrostro Nava

Portada
Diseño: Martín Aguilar Gallegos
Iconografía: Irene León Coxtinica
Imagen: *El tianguis* (detalle), 1923-1924, Diego Rivera (1886-1957), fresco, 4.60 × 2.37 m (panel central), ubicado en el Patio las Fiestas, planta baja, D. R. © Secretaría de Educación Pública, Dirección General de Proyectos Editoriales y Culturales/ fotografía de Gerardo Landa Rojano; D.R. © 2021 Banco de México, Fiduciario en el Fideicomiso relativo a los Museos Diego Rivera y Frida Kahlo. Av. 5 de Mayo No. 2, col. Centro, Cuauhtémoc, C. P. 06059, Ciudad de México; reproducción autorizada por el Instituto Nacional de Bellas Artes y Literatura, 2021.

Servicios editoriales
Solar, Servicios Editoriales, S. A. de C. V.

Coordinación editorial
Xiluén Yanitze Zenker de la Concha, Elizabeth González González

Formación
Rosa Virginia Cruz Cruz, Roberto Ángel Flores Angulo, Xiluén Yanitze Zenker de la Concha

Diseño
Roberto Ángel Flores Angulo

Ilustración
María Itzel Alcántara Jurado, Roberto Ángel Flores Angulo, Carolina Tovar González

Primera edición, 2021 (ciclo escolar 2021-2022)

ISBN: 978-607-551-513-7

Impreso en México
Distribución gratuita-Prohibida su venta

Agradecimientos
La Secretaría de Educación Pública (SEP) agradece a la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO) por su participación en la elaboración de este libro.

En los materiales dirigidos a las alumnas y los alumnos de Telesecundaria, la SEP emplea los términos: alumno(s), maestro(s) y padres de familia aludiendo a ambos géneros, con la finalidad de facilitar la lectura. Sin embargo, este criterio editorial no demerita los compromisos que la SEP asume en cada una de las acciones encaminadas a consolidar la equidad de género.

Presentación

Este libro fue elaborado para cumplir con el anhelo compartido de que en el país se ofrezca una educación con equidad y excelencia, en la que todos los alumnos aprendan, sin importar su origen, su condición personal, económica o social, y en la que se promueva una formación centrada en la dignidad humana, la solidaridad, el amor a la patria, el respeto y cuidado de la salud, así como la preservación del medio ambiente.

El uso de este libro, articulado con los recursos audiovisuales e informáticos del portal de Telesecundaria, propicia la adquisición autónoma de conocimientos relevantes y el desarrollo de habilidades y actitudes encaminadas hacia el aprendizaje permanente. Su estructura obedece a las necesidades propias de los alumnos de la modalidad de Telesecundaria y a los contextos en que se desenvuelven. Además, moviliza los aprendizajes con el apoyo de materiales didácticos presentados en diversos soportes y con fines didácticos diferenciados; promueve la interdisciplinariedad y establece nuevos modos de interacción.

En su elaboración han participado alumnos, maestras y maestros, autoridades escolares, padres de familia, investigadores y académicos; su participación hizo posible que este libro llegue a las manos de todos los estudiantes de esta modalidad en el país. Con las opiniones y propuestas de mejora que surjan del uso de esta obra en el aula se enriquecerán sus contenidos, por lo mismo los invitamos a compartir sus observaciones y sugerencias a la Dirección General de Materiales Educativos de la Secretaría de Educación Pública al correo electrónico: librosdetexto@nube.sep.gob.mx.

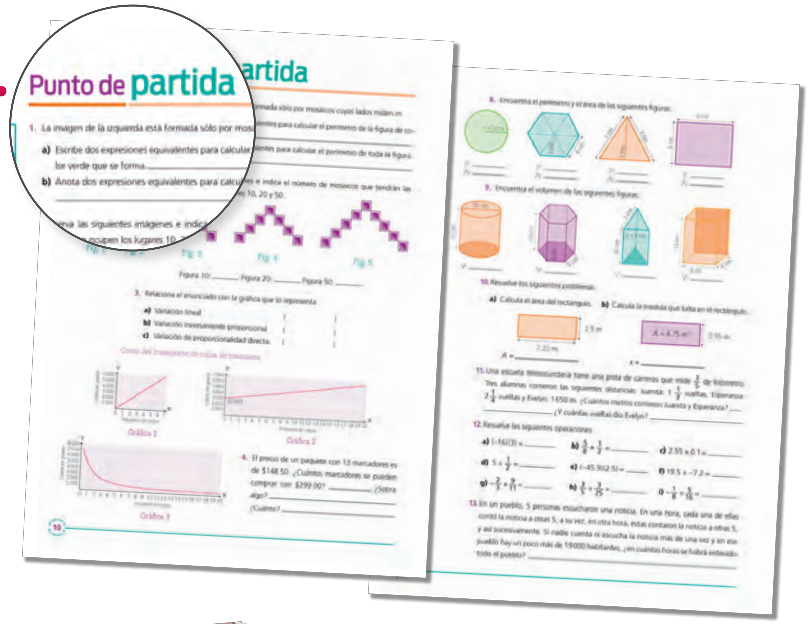
Índice

Conoce tu libro

El libro que tienes en tus manos fue elaborado especialmente para ti.

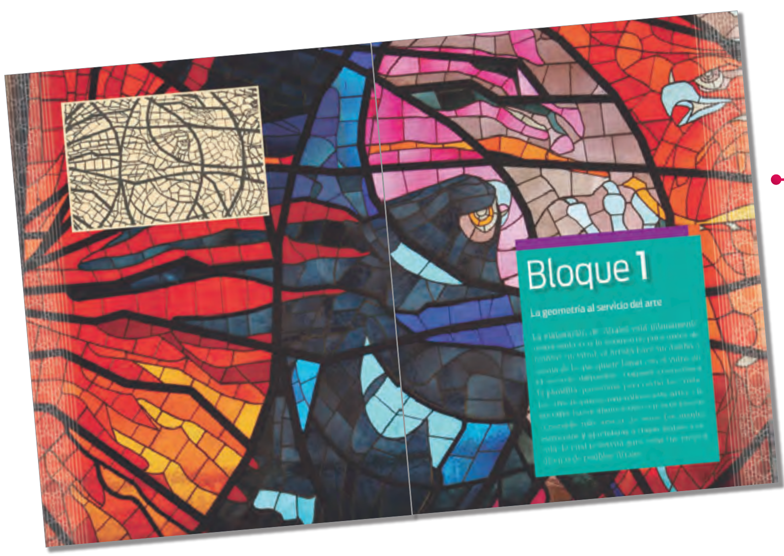
Junto con tus compañeros y el apoyo de tu maestro irás construyendo un saber matemático que se convertirá en una poderosa herramienta para que puedas resolver una diversidad de problemas cotidianos.

Tu libro está organizado de la siguiente manera:



Punto de partida

Es una oportunidad para que identifiques los conocimientos matemáticos con que cuentas y que te van a ser de utilidad para empezar este ciclo.



Entrada de bloque

Al inicio de cada bloque se presenta una ilustración o fotografía, acompañada de un texto, que aluden a la importancia de los conocimientos matemáticos que estudiarás en diversos ámbitos de la vida.

Para empezar

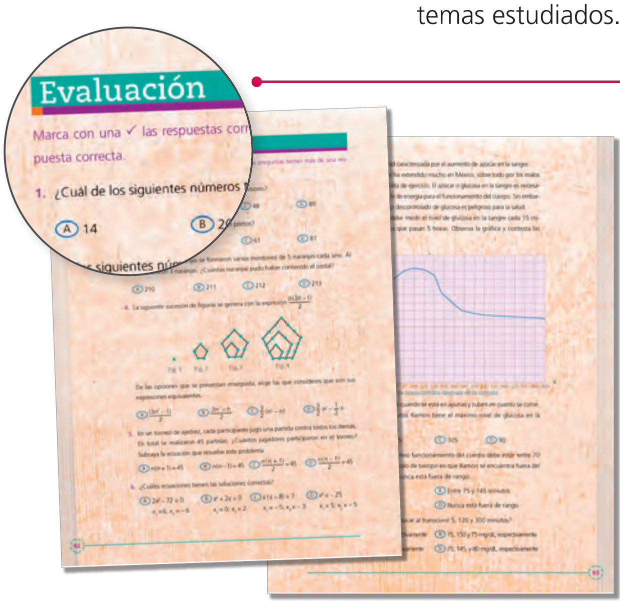
Te proporciona un acercamiento a los conocimientos que aprenderás, mediante situaciones matemáticas o cotidianas.

Manos a la obra

Te ofrece una serie de actividades que te permitirán trabajar y adquirir los aprendizajes esperados.

Para terminar

Contiene actividades para reflexionar, revisar, recuperar y hacer conclusiones sobre los temas estudiados.

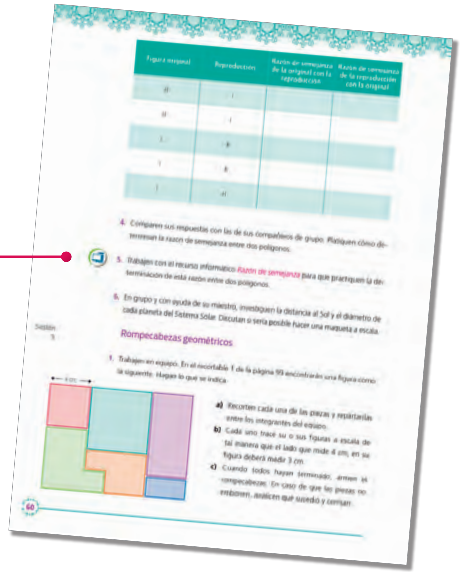


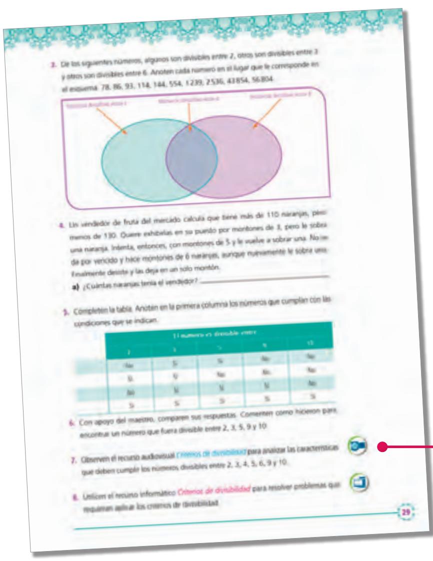
Evaluación

Al final de cada bloque se presentan actividades de evaluación que te ayudarán a valorar el logro de tus aprendizajes.

Recursos informáticos

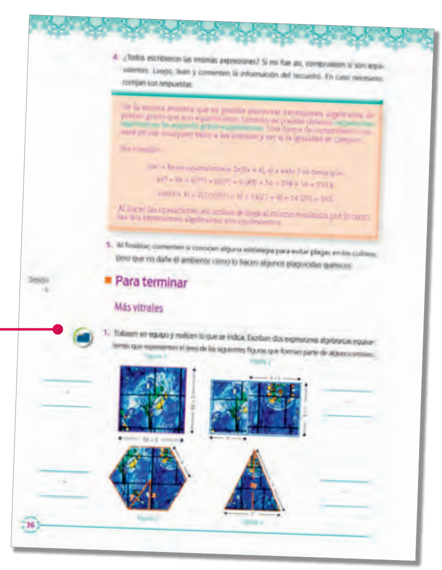
Con esta herramienta tendrás oportunidad de practicar los procedimientos y aplicar los conceptos que aprendiste, a través de un ambiente digital interactivo.





Recursos audiovisuales

Te permiten profundizar, complementar e integrar lo que estás estudiando. Para verlos sólo tienes que conectarte a tu portal de Telesecundaria.



Carpeta

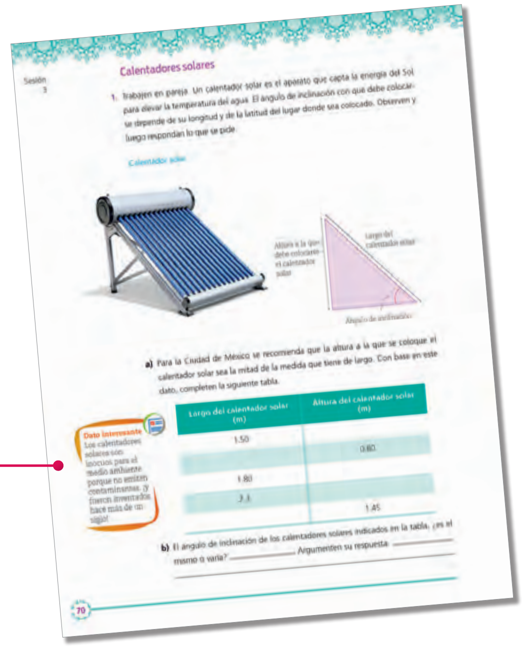
A lo largo del libro hay determinados ejercicios que se señalan con este ícono, a fin de que tengas un registro de tu avance en el dominio y conocimiento de los temas de la asignatura.

Secciones de apoyo

Se trata de textos breves que te ofrecen información que enriquece el contenido del libro o que te ayudarán a comprenderlo mejor:

Vínculo con...

Dato interesante



Calentadores solares

Sesión 3

1. Trabajen en pareja. Un calentador solar es el aparato que capta la energía del Sol para elevar la temperatura del agua. El ángulo de inclinación con que debe colocarse depende de su longitud y de la latitud del lugar donde sea colocado. Observen y luego respondan lo que se pide.

a) Para la Ciudad de México se recomienda que la altura a la que se coloque el calentador solar sea la mitad de la medida que tiene de largo. Con base en este dato, completen la siguiente tabla.

Largo del calentador solar (m)	Altura del calentador solar (m)
1.50	
	0.80
1.80	
2.1	
	1.45

b) El ángulo de inclinación de los calentadores solares indicados en la tabla, ¿es el mismo o varía? Argumenten su respuesta.

70

3. Figuras geométricas y equivalencia de expresiones de segundo grado 1

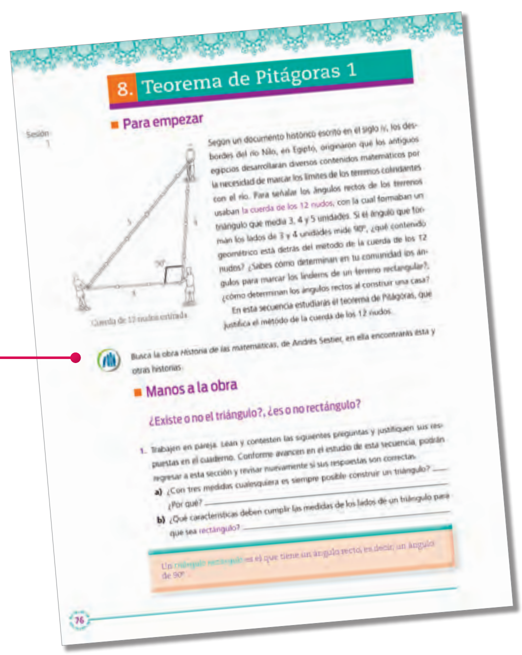
Para empezar

Manos a la obra

Los vitrales

30

Glosario



8. Teorema de Pitágoras 1

Para empezar

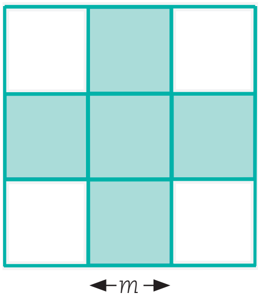
Manos a la obra

¿Existe o no el triángulo?, ¿es o no rectángulo?

76

Visita la biblioteca

Punto de partida



1. La imagen de la izquierda está formada sólo por mosaicos cuyos lados miden *m*.

   a) Escribe dos expresiones equivalentes para calcular el perímetro de la figura de color verde que se forma. ______________________________

   b) Anota dos expresiones equivalentes para calcular el perímetro de toda la figura.

   ____

2. Observa las siguientes imágenes e indica el número de mosaicos que tendrán las figuras que ocupen los lugares 10, 20 y 50.

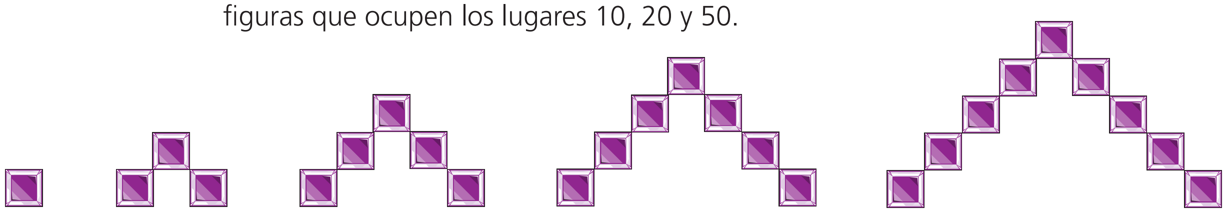


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3 Fig. 4 Fig. 5

Figura 10: ________ Figura 20: ________ Figura 50: ________

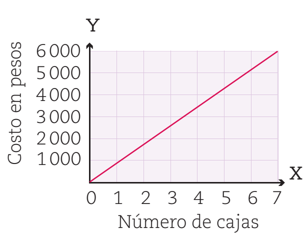
3. Relaciona el enunciado con la gráfica que lo representa.

   a) Variación lineal ( )

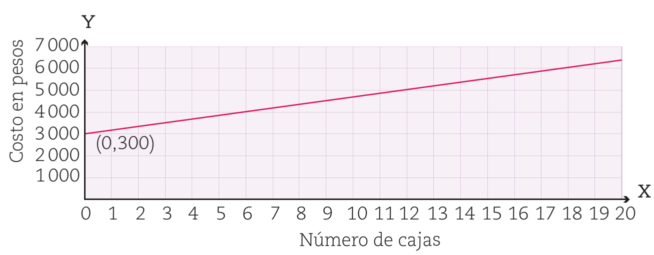
   b) Variación inversamente proporcional ( )

   c) Variación de proporcionalidad directa ( )

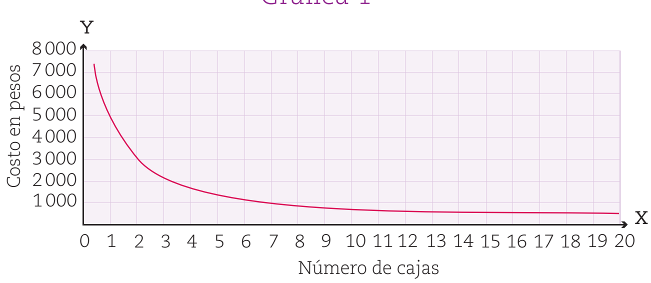
Costo del transporte de cajas de manzana



Gráfica 1



Gráfica 2

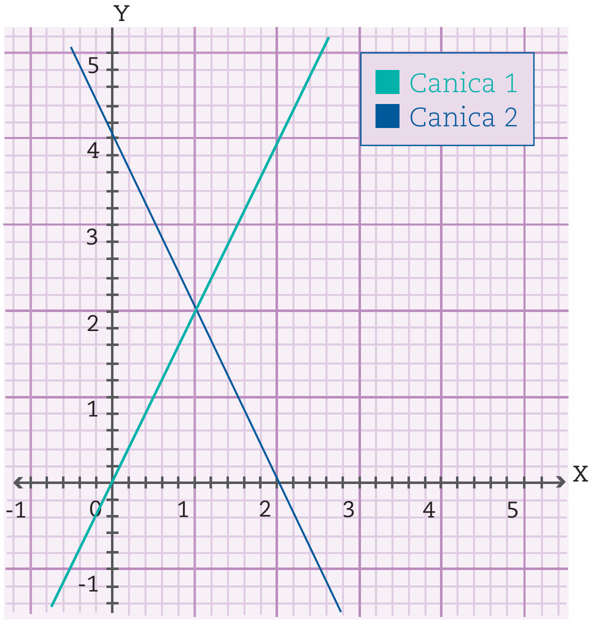


Gráfica 3

4. El precio de un paquete con 13 marcadores es de $148.50. ¿Cuántos marcadores se pueden comprar con $299.00? ____________ ¿Sobra algo? ______________________

   ¿Cuánto? ______________________

5. En un grupo de telesecundaria hay 15 alumnos en total: 10 son mujeres y los demás son hombres. Si seleccionan uno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea un hombre? ____________ ¿Y de que sea una mujer? ______________________________________



6. El movimiento de dos canicas sobre un plano cartesiano se describe por las dos rectas de la derecha, cuyas ecuaciones son $y - 2x = 0$ y $2y + 4x = 8$, respectivamente.

¿En qué punto del plano cartesiano se van a cruzar ambas canicas? ____________________________

7. Se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y = 10 \\ -6x + y = 20 \end{array} \right\}$$

Encierra en un círculo la respuesta correcta.

a) Si se resuelve por el método de igualación, ¿cuál es la igualdad que resulta si se despeja la variable y de ambas ecuaciones?

- $10 + 2x = 60 + 18x$
- $10 - 2x = 60 - 18x$
- $10 - 2x = 60 + 18x$
- $10 + 2x = 60 - 18x$

b) Si se resuelve por el método de sustitución, ¿cuál es la expresión que resulta si se despeja la variable y de la segunda ecuación y se sustituye en la primera?

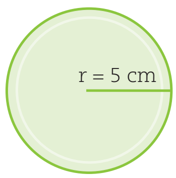
- $-20x = 10 - 60$
- $20x = 10 - 60$
- $-20x = 10 + 60$
- $20x = 10 + 60$

c) Si se resuelve por el método de suma y resta, ¿cuál es la igualdad que resulta si se elimina la variable x de ambas ecuaciones?

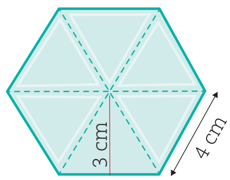
- $10y = 50$
- $10y = -50$
- $-10y = 50$
- $-10y = -50$

d) ¿Cuál es la solución del sistema de ecuaciones? $x =$ ____________ $y =$ ____________

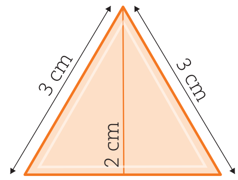
8. Encuentra el perímetro y el área de las siguientes figuras:



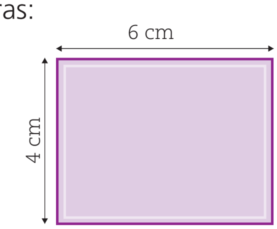
P: ____________
A: ____________



P: ____________
A: ____________

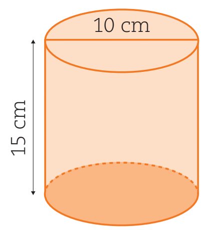


P: ____________
A: ____________

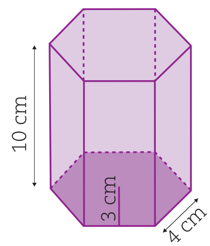


P: ____________
A: ____________

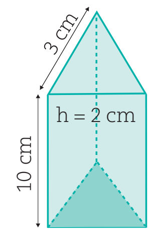
9. Encuentra el volumen de las siguientes figuras:



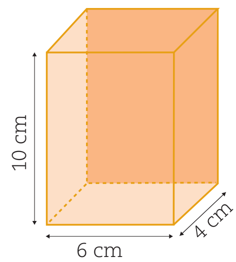
V: ____________



V: ____________



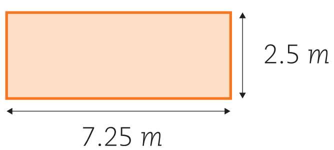
V: ____________



V: ____________

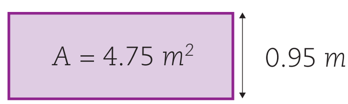
10. Resuelve los siguientes problemas.

a) Calcula el área del rectángulo.



$A =$ ____________________

b) Calcula la medida que falta en el rectángulo.



$x =$ ____________________

11. Una escuela telesecundaria tiene una pista de carreras que mide $\frac{3}{5}$ de kilómetro. Tres alumnas corrieron las siguientes distancias: Juanita: $1\frac{1}{3}$ vueltas, Esperanza: $2\frac{1}{4}$ vueltas y Evelyn: 1 650 m. ¿Cuántos metros corrieron Juanita y Esperanza? ____ ____________________ ¿Y cuántas vueltas dio Evelyn? ____________________

12. Resuelve las siguientes operaciones.

a) $(-16)(3) =$ ________ **b)** $\frac{5}{8} \times \frac{1}{2} =$ ________ **c)** $2.55 \times 0.1 =$ ________

d) $5 \div \frac{1}{2} =$ ________ **e)** $(-45.9)(2.5) =$ ________ **f)** $19.5 \div -7.2 =$ ________

g) $-\frac{2}{3} \times \frac{9}{11} =$ ________ **h)** $\frac{3}{5} \div \frac{3}{25} =$ ________ **i)** $-\frac{1}{8} \div \frac{5}{16} =$ ________

13. En un pueblo, 5 personas escucharon una noticia. En una hora, cada una de ellas contó la noticia a otras 5; a su vez, en otra hora, éstas contaron la noticia a otras 5, y así sucesivamente. Si nadie cuenta ni escucha la noticia más de una vez y en ese pueblo hay un poco más de 19 000 habitantes, ¿en cuántas horas se habrá enterado todo el pueblo? ____

14. Resuelve. ¿Cuánto mide el lado de un cuadrado si su área es de 20 cm^2?

$x =$ ____________________

15. La altura de una persona (en cm), representada por la letra *a*, depende de si es mujer u hombre y de la longitud (en cm) de su fémur, descrita por *L*. Las expresiones que las relacionan son:

Mujeres: $a = 1.94 \times L + 72.8$ Hombres: $a = 1.88 \times L + 81.31$

a) Si la altura de un hombre es 182 cm, ¿cuál es la longitud de su fémur? ____________

b) ¿Y cuál será la longitud del fémur de una mujer de 168 cm de altura? __________

____

16. En un grupo de 25 alumnos se aplicó una evaluación de 100 preguntas y la cantidad de aciertos por alumno está en la siguiente lista:

60, 15, 71, 85, 40, 10, 25, 70, 0, 39, 85, 79, 99,

61, 47, 92, 88, 56, 30, 99, 20, 96, 77, 85, 80

Completa la tabla con las medidas de tendencia central de la información anterior.

Rango	Media	Mediana	Moda

17. En un grupo de telesecundaria se aplicó una evaluación, y con los datos obtenidos se realizó la siguiente gráfica. A partir de ésta, responde las siguientes preguntas.

a) ¿Qué información presenta la gráfica? ______

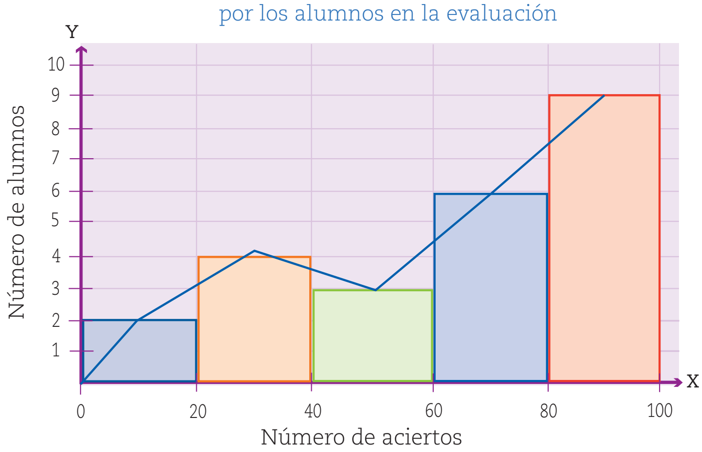
____

b) ¿Qué representa cada número del eje vertical?

____

Y, ¿del eje horizontal? ________________

Número de aciertos obtenidos
por los alumnos en la evaluación



c) ¿Qué tipo de gráfica es? ______________

d) ¿Qué rango tienen sus intervalos? ______

e) ¿Qué representan los puntos medios de cada barra? ________________

____

f) ¿Cuántos alumnos presentaron la evaluación? __________________

____

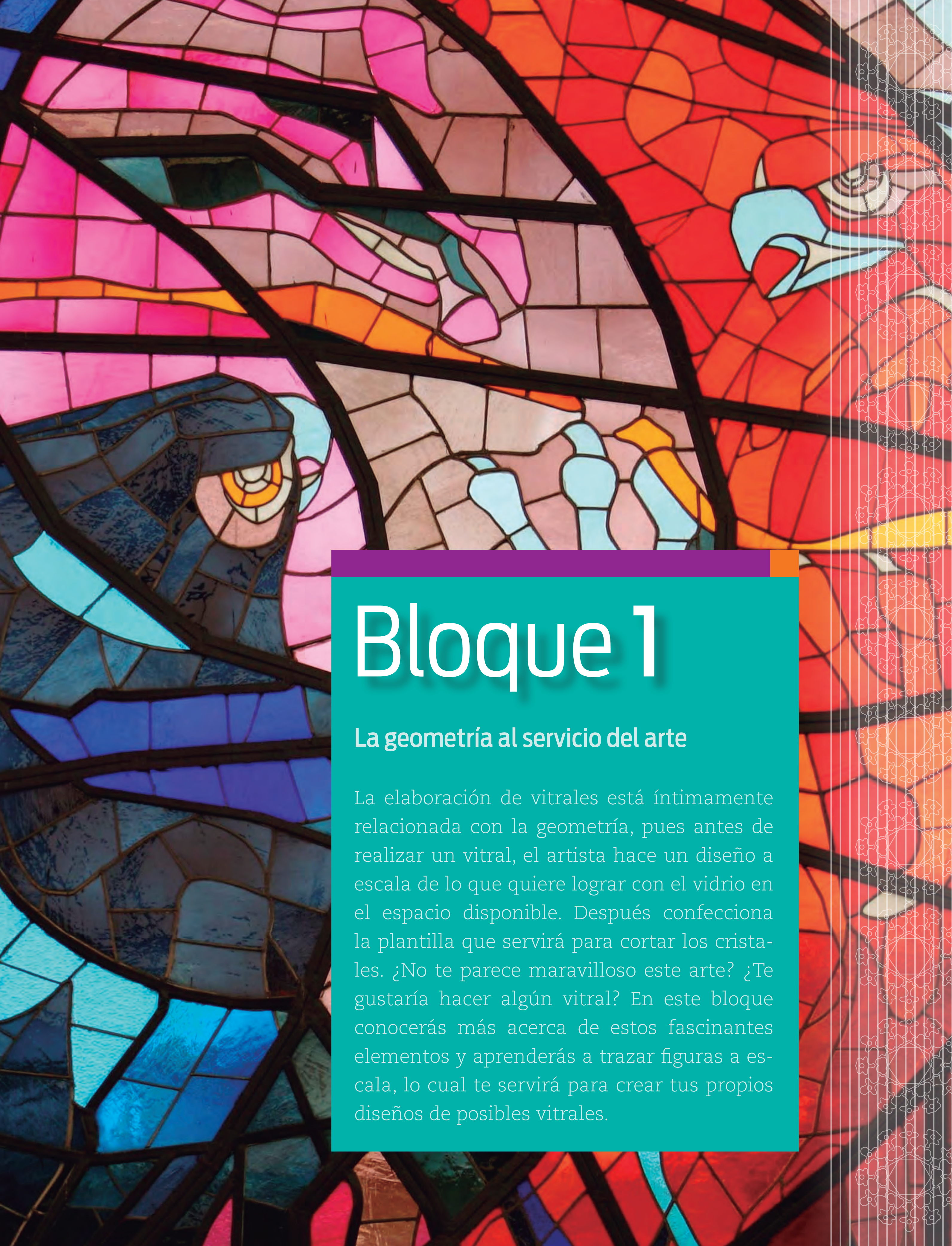
g) ¿Qué intervalo tiene la mayor frecuencia? ____________________

____

¿Y la menor? __________________

____

____



Bloque 1

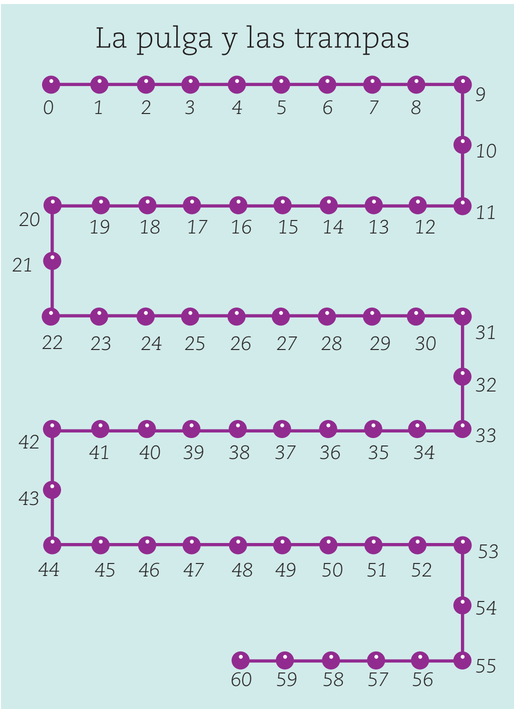
La geometría al servicio del arte

La elaboración de vitrales está íntimamente relacionada con la geometría, pues antes de realizar un vitral, el artista hace un diseño a escala de lo que quiere lograr con el vidrio en el espacio disponible. Después confecciona la plantilla que servirá para cortar los cristales. ¿No te parece maravilloso este arte? ¿Te gustaría hacer algún vitral? En este bloque conocerás más acerca de estos fascinantes elementos y aprenderás a trazar figuras a escala, lo cual te servirá para crear tus propios diseños de posibles vitrales.

1. Múltiplos, divisores y números primos

Para empezar

Sesión 1



¿Conoces un juego matemático que se llama "La pulga y las trampas"? Se juega con una sucesión de números puestos sobre una línea, como la dibujada en el tablero de la izquierda, y dos tipos de objetos, que pueden ser piedritas y clips, unos representan las pulgas y los otros, las trampas. Uno de los jugadores se encarga de poner una o más trampas sobre algunos números, y los demás hacen saltar a las pulgas a su elección, de dos en dos números, de tres en tres, etcétera, procurando que no caigan en alguna trampa.

Imagina que se juega con una sucesión de 0 a 50 y te toca poner una trampa, ¿en qué número la pondrías para atrapar la mayor cantidad de pulgas? ¿Podrías atraparlas a todas? Al estudiar esta secuencia, aprenderás a determinar múltiplos y divisores de un número y a distinguir los números primos de los números compuestos.

Manos a la obra

Divisores de un número

1. Reúnete con tres compañeros para jugar a "La pulga y las trampas" hasta el número 54. Utilicen el tablero que aparece en el recortable 1 de la página 271.
   - **a)** Elijan a un jugador que ponga una trampa sobre uno de los números de la línea del tablero; los demás harán saltar a la pulga.
   - **b)** Antes de hacer saltar a su pulga, cada jugador debe decir la longitud que eligió para sus saltos: de dos en dos, de tres en tres, de cuatro en cuatro, de cinco en cinco o de seis en seis.
   - **c)** Si la pulga es atrapada, se la queda quien puso la trampa. Si no cae, la conserva quien la hizo saltar.
   - **d)** En la siguiente ronda, otro jugador pone la trampa. Y continúan así hasta que todos hayan colocado trampas. Gana quien obtiene más pulgas.

2. Después de jugar varias veces "La pulga y las trampas", contesten lo siguiente y justifiquen sus respuestas.
   a) ¿En qué números conviene poner la trampa para atrapar más pulgas? Den al menos tres ejemplos. ______
   b) Si un jugador pone la trampa en el número 30, ¿qué saltos no conviene elegir?
      ______
   c) Si la trampa está en el número 36 y una pulga logra recorrer toda la línea sin ser atrapada, ¿qué saltos pudo haber elegido? ______
   d) ¿Con cuál de estos números se atrapan más pulgas: 12 o 40? ______

3. Respondan lo siguiente.
   a) Un equipo de jugadores modifica algunos aspectos del juego.
      - La línea va del 0 al 60.
      - Deben colocarse tres trampas.
      - Los saltos pueden ser de dos en dos y hasta de 10 en 10.
   b) ¿En qué números conviene poner cada trampa para atrapar más pulgas? ______
      ______
   c) ¿En cuáles números conviene poner las trampas para atrapar a todas las pulgas?
      ______
   d) ¿Sería posible atrapar a todas las pulgas si sólo se colocaran dos trampas? Argumenten su respuesta.
      ______
      ______

4. En grupo, y con apoyo del maestro, comparen sus respuestas. Si lo consideran necesario, realicen el juego con las reglas que se mencionan en la actividad 3. Luego lean y comenten la siguiente información.

   Los números en los que conviene poner las trampas son aquellos que tienen más divisores. Por ejemplo, conviene más poner la trampa en el 12 que en el 15, porque el 12 atrapa saltos de 2, 3, 4 y 6; mientras que el 15 sólo atrapa saltos de 3 y 5.

El conjunto de divisores de 12 es: {1, 2, 3, 4, 6 y 12}, porque al dividir 12 entre cada uno de sus divisores, el resultado es un número entero y el residuo es cero.

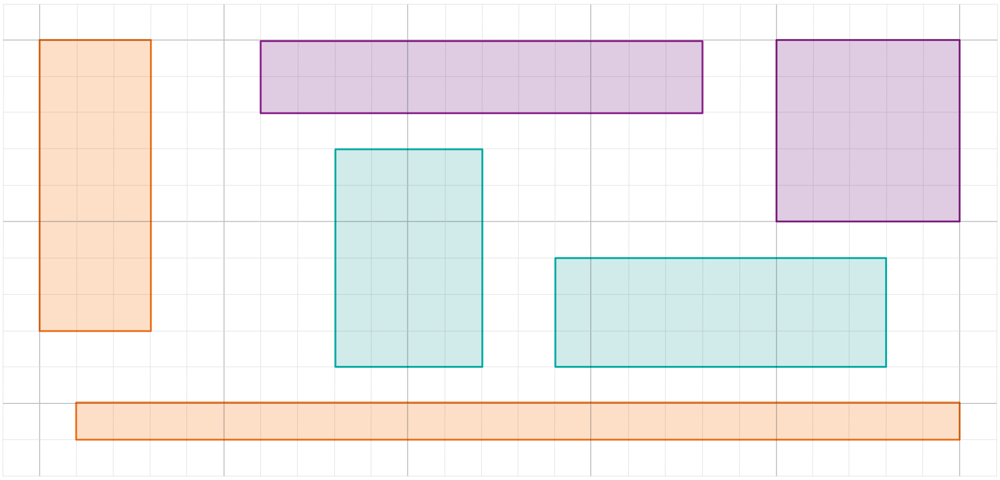
Son divisores de 30: {1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 y 30}.

Sesión 2

Múltiplos y divisores de un número

En pareja, resuelvan la siguiente actividad.

1. Marquen todos los rectángulos que tengan 24 cm^2 de área. Consideren que la cuadrícula está dividida en centímetros cuadrados (cm^2).



2. Como recordarán, el área de un rectángulo se calcula multiplicando largo por ancho. Anoten dentro de cada rectángulo marcado, la multiplicación que corresponde a su área. Después contesten lo que se indica.

a) Los números que intervienen en las multiplicaciones que anotaron son los factores de 24, por ejemplo, en la multiplicación $3 \times 8 = 24$, 3 y 8 son factores de 24. Completen la lista de factores de 24: {1, 2, ________________________ }.

b) ¿Cuántos factores tiene el número 24? ________________________

c) Supongamos ahora que el área es de 36 cm^2. Dibujen en su cuaderno todas las variantes de rectángulos que se podrían construir.

d) ¿Cuántos rectángulos diferentes con un área de 36 cm^2 se pueden trazar, considerando que el largo y el ancho son números enteros? ________________

e) Continúen la lista de los factores de 36: {1, 2, ________________________ }.

f) ¿Cuántos factores tiene el número 36? ________________________

3. Con ayuda de su maestro, comparen sus respuestas. Comenten cómo hicieron para estar seguros de que no les faltó ningún factor. Después, lean la siguiente información.

El conjunto de factores de un número también es el conjunto de divisores de dicho número. Por ejemplo, 3 es divisor de 12 porque divide exactamente a 12, el cociente es 4 y el residuo es cero. De igual forma, 3 es factor de 12 porque al multiplicar 3×4 se obtiene exactamente 12. El conjunto de factores o divisores de 12 es: {1, 2, 3, 4, 6 y 12}. Por otra parte, 12 es múltiplo de cada uno de sus factores o divisores.

4. Trabajen en equipo. Completen la tabla y asegúrense de que no les falta ningún factor o divisor. Después contesten las preguntas.

Número	Conjunto de factores o divisores del número	¿Cuántos factores o divisores son en total?
40		
64		
23		
81		
67		
60		

Algunos números sólo tienen dos factores o divisores distintos: el 1 y él mismo. Estos números se conocen como *números primos*.

a) ¿Cuál es el número que es divisor de cualquier número? ____________

b) De la tabla anterior, ¿cuáles son números primos? ____________

c) ¿Cuáles números de la primera columna son múltiplos de 5? ____________

d) ¿Qué número es, al mismo tiempo, múltiplo y divisor de 60? ____________

e) ¿Qué número es el mayor divisor de cualquier número? ____________

¿Y cuál es el menor divisor? ____________

f) ¿Qué número es múltiplo de sí mismo? ____________

g) Averigua más acerca del descubrimiento del mayor número primo conocido hasta ahora, lo cual se divulgó el 26 de diciembre de 2017.

5. Con tus compañeros, y con ayuda del maestro, comparen sus respuestas. Propongan números al azar y encuentren todos sus factores o divisores, o bien, algunos múltiplos.

Para terminar

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

La criba de Eratóstenes

1. Usa el siguiente tablero para hacer lo que se indica.

a) Encierra en un círculo rojo el número 2 y luego marca con un ✕ todos los múltiplos de 2.

b) Circula con rojo el siguiente número que no está tachado y luego tacha todos sus múltiplos.

c) Repite el paso anterior, hasta que todos los números del cuadrado estén encerrados en un círculo rojo o tachados.

Glosario
Cribar significa separar o seleccionar.

2. El tablero anterior se conoce como la *criba de Eratóstenes* en honor del matemático griego que la inventó, y sirve para seleccionar o cribar los números primos comprendidos entre 2 y 100.

a) En el tablero, ¿cuáles son números primos, los encerrados en círculo o los tachados? Escríbelos a continuación. ______________________________

____

b) Compara tu respuesta con la de otros compañeros y vean si obtuvieron los mismos números primos. En aquellos que no coincidan, busquen la manera de comprobar si son primos o no.

Los números naturales que no son primos se llaman *números compuestos* y son los que tienen más de dos factores o divisores. Por ejemplo, el 28 es número compuesto porque tiene como factores o divisores: {1, 2, 4, 7, 14 y 28}.

c) Escribe debajo de cada número una P si es primo, o una C si es compuesto. Puedes usar calculadora para corroborar tu clasificación.

121	107	123	135	102	111	183	131	29	99

d) Explica cómo hiciste para decidir si un número es primo o es compuesto: ______

____

____

3. En grupo y con ayuda de su maestro, comparen sus resultados y analicen los procedimientos que utilizaron. Corrijan los errores.

4. En pareja, resuelvan los siguientes acertijos numéricos.

a) Es la suma de dos números primos menores que 10 y es múltiplo de 3; además, la suma de sus cifras es 3. ¿Qué número es?

b) Es el producto de dos números primos menores que 10 y tiene cuatro divisores; la suma de sus cifras es mayor que 6. ¿Qué número es?

c) Es un número primo mayor que 170 y menor que 180; la cifra de las unidades también es un número primo. ¿Qué número es?

d) Es un número primo mayor que 500 y menor que 510; la cifra de las unidades es un número compuesto. ¿Qué número es?

5. Indiquen con una ✓ si el enunciado es verdadero o con un ✗ si es falso, en cuyo caso deberán anotar un ejemplo.

Enunciado	Verdadero / Falso	Ejemplo
a) La suma de dos números primos siempre es un número primo.		
b) El producto de dos números primos siempre es un número compuesto.		
c) El sucesor de un número primo siempre es un número compuesto.		
d) Cualquier número compuesto se puede expresar como un producto de números primos.		

6. Observen el recurso audiovisual *Múltiplos, divisores, números primos y compuestos* para analizar otros ejemplos y características de estos números.

7. Utilicen el recurso informático *Algunos múltiplos, todos los divisores* para continuar con el estudio de los múltiplos y divisores de los números naturales.

Dato interesante
Dos números primos son gemelos si su diferencia es 2. Ejemplos de números primos gemelos son 17 y 19, 29 y 31, así como 1 000 000 061 y 1 000 000 063.

2. Criterios de divisibilidad

Sesión 1

Para empezar

Una historia sobre el reparto de un tesoro cuenta que un coronel y tres soldados, identificados como A, B y C, encontraron un baúl enterrado que contenía más de 230 barras de oro, pero menos de 250. El coronel decidió que, al día siguiente, las repartiría entre los 3 soldados para premiar su valentía. Sin embargo, en el transcurso de la noche, el soldado A se adelantó, dividió entre 3 el total del contenido del baúl, tomó una tercera parte y se deshizo de una barra que le sobraba para que la partición fuera exacta. Poco después, el soldado B tuvo la misma idea, contó las barras que había, tomó la tercera parte, y como también le sobraba una barra, se deshizo de ella. El soldado C, al igual que sus compañeros, contó y dividió el oro para tomar lo que le tocaba. A él también le sobró una barra y la desechó para evitar conflictos por la repartición.

A la mañana siguiente, el coronel se dispuso a repartir el tesoro. Él creía que lo que estaba en el baúl era el total del oro, por lo que lo repartió en tres partes iguales y, como le sobró una barra, decidió quedársela. ¿Cuántas barras de oro recibió en total cada soldado?

Con los aprendizajes que obtengas en esta secuencia podrás resolver problemas que implican anticipar si un número es divisible o no entre otro número natural menor o igual que 10.

Manos a la obra

Divisibilidad entre 3

1. Trabajen en equipo. Según la historia de la repartición del oro, respondan lo siguiente. Pueden utilizar calculadora si lo requieren.
   - **a)** Calculen cuántas barras de oro había originalmente. No olviden que eran más de 230, pero menos de 250. ____________________
   - **b)** ¿Podría ser 236 la cantidad original de barras de oro? Argumenten su respuesta. ____________________
   - **c)** ¿Qué características debería tener la cantidad original de barras de oro para cumplir con las condiciones de la historia? ____________________

2. Lean la siguiente información y verifiquen lo que se pide.

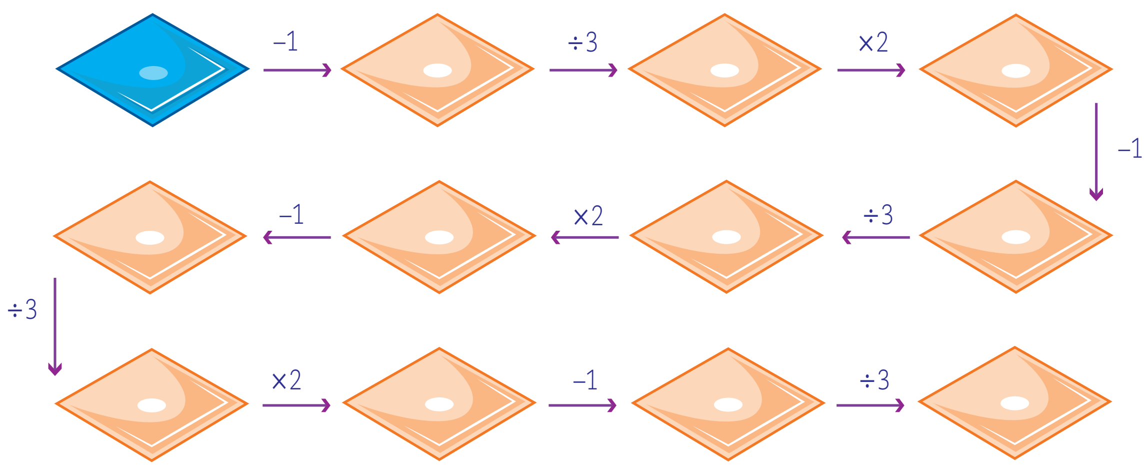
Para resolver el problema de la repartición es útil saber si un número es divisible entre 3 sin tener que hacer la división. Ser divisible significa que el residuo de la división es 0.

a) Verifiquen con algunos casos lo siguiente: es divisible entre 3 todo número que, al sumarse las cifras que lo componen, su resultado sea múltiplo de 3. Por ejemplo, el número 228 es divisible entre 3 porque 2 + 2 + 8 = 12, y 12 es múltiplo de 3. En cambio, 229 no es divisible entre 3 porque 2 + 2 + 9 = 13, y 13 no es múltiplo de 3.

3. En la siguiente sucesión de números de 230 a 250, tachen los que son divisibles entre 3; el sucesor de uno de esos números es la cantidad buscada.

230	231	232	233	234	235	236	237	238	239	
240	241	242	243	244	245	246	247	248	249	250

4. El siguiente esquema puede ayudarles a verificar si la cantidad inicial de barras de oro que encontraron es correcta. Efectúen las operaciones que se indican para hallar la cantidad que va en cada rombo. Comprueben que la cantidad original de barras es la que colocaron en el rombo azul, después contesten la pregunta que está debajo del esquema.



a) ¿Cuántas barras de oro le correspondieron en total a cada soldado?

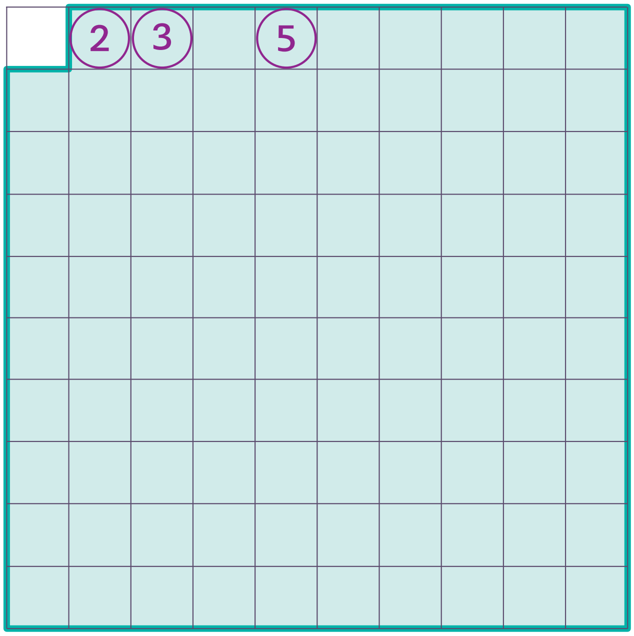
Soldado	A	B	C
Barras de oro			

5. Con apoyo del maestro, comparen sus resultados y, en caso necesario, corrijan.

Sesión 2

Divisibilidad entre 2 o entre 5

1. Trabajen en equipo. En el siguiente esquema, hagan lo que se indica.



a) Anoten todos los múltiplos de 2 en las casillas que les corresponden. Observen en qué se parecen y traten de formular una idea que defina los múltiplos de 2.

____

____

b) Ahora, anoten los múltiplos de 5 (algunos ya estarán anotados porque también son múltiplos de 2). Formulen una idea que defina los múltiplos de 5.

____

____

c) Finalmente, anoten los múltiplos de 3 (algunos ya estarán anotados porque también son múltiplos de 2 o de 5).

2. Las ideas que formularon en los incisos a) y b) dan pie a los criterios de divisibilidad de 2 y 5; anótenlos según se pide.

a) Son divisibles entre 2 todos los números que:

____

____

b) Son divisibles entre 5 todos los números que:

____

____

3. Analicen y resuelvan la siguiente situación. Al número 34 ☐ 2 ☐ le faltan dos cifras; anoten las que sean necesarias para que el número cumpla con la condición que se pide.

- Si es divisible entre 2, entonces es igual a 2 × ________ = 34 ☐ 2 ☐
- Si es divisible entre 3, entonces es igual a 3 × ________ = 34 ☐ 2 ☐
- Si es divisible entre 5, entonces es igual a 5 × ________ = 34 ☐ 2 ☐

4. Con ayuda del maestro, comparen sus respuestas. Vean si los criterios de divisibilidad que escribieron coinciden; si no fuera así, averigüen quiénes tienen razón.

5. Lean y comenten la siguiente información.

Se dice que un número es divisible entre otro si, al hacer la división, el residuo es cero. Para saber si un número es divisible entre otro sin hacer la división, en algunos casos hay que fijarse en qué cifra termina el número. Por ejemplo:

- son divisibles entre 2 los números que terminan en cifra par (0, 2, 4, 6 u 8);
- son divisibles entre 5 los números que terminan en cero o en cinco;
- son divisibles entre 10 los números que terminan en cero.

En otros casos hay que fijarse en la suma de las cifras. Por ejemplo:

- un número es divisible entre 3 cuando la suma de sus cifras es un múltiplo de 3.

Los anteriores son algunos criterios de divisibilidad para facilitar cálculos matemáticos.

6. Usen los criterios de divisibilidad para completar la siguiente tabla. Anoten sí o no en las casillas.

	El número es divisible entre…		
	2	3	5
108			
615			
4 580			
7 523			
15 459			
43 821			

Divisibilidad entre 4 y entre 6

1. Trabajen en equipo. Anoten las cifras que faltan en cada cuadro. Usen una calculadora para verificar que los de la izquierda son divisibles entre 4 y los de la derecha no. Después, contesten las preguntas.

Son divisibles entre 4	No son divisibles entre 4
☐16	☐14
☐☐32	☐☐35
☐☐☐48	☐☐☐46
☐☐☐☐20	☐☐☐☐30

a) ¿Qué característica debe tener un número natural para ser divisible entre 4?

____

b) Con base en lo que escribieron, anoten tres números divisibles entre 4: uno de dos cifras, otro de tres y otro de cuatro.

____

c) Identifiquen, sin hacer la división, los números divisibles entre 4. Subráyenlos.

45 828 57 322 77 340 85 236 123 410 256 300

Dato interesante
Fue Euclides, matemático griego, quien demostró los teoremas de divisibilidad para los números enteros.

2. Con apoyo del maestro, comparen sus respuestas. Verifiquen que obtuvieron las mismas condiciones para establecer cuándo un número es divisible entre 4.

3. Anoten las cifras que consideren convenientes en cada cuadro para cumplir con las condiciones que se indican. Después, contesten las preguntas.

Son divisibles entre 6	No son divisibles entre 6
☐4☐	☐4☐
☐53☐	☐53☐
6☐43☐	6☐43☐
☐8 513☐	☐8 513☐

a) Para que un número natural sea divisible entre 6, debe cumplir dos condiciones: una se refiere a la cifra de las unidades y, la otra, a la suma de las cifras que forman el número.

- ¿Qué condición debe cumplir la cifra de las unidades? _______________
- ¿Qué condición debe cumplir la suma de las cifras que forman el número?

____

b) Con base en lo que escribieron, anoten tres números divisibles entre 6: uno de tres cifras, otro de cuatro y otro más de cinco.

____

c) Identifiquen, sin hacer la división, los números divisibles entre 6. Subráyenlos.

45 720   54 392   68 286   414 528   935 257   1 348 653

d) Con apoyo del maestro, comparen sus respuestas. Verifiquen que obtuvieron las mismas condiciones para establecer cuándo un número es divisible entre 6.

4. Lean la siguiente información y compárenla con lo que encontraron en las actividades anteriores.

- Son divisibles entre 4 los números naturales cuyas dos últimas cifras forman un número divisible entre 4.
- Son divisibles entre 6 los números naturales cuya última cifra es par y la suma de sus cifras es múltiplo de 3. Dicho de otra manera, son aquellos números que son divisibles entre 2 y entre 3 al mismo tiempo.

5. Al número 4 ☐ 83 ☐ le faltan dos cifras. Anoten, en cada caso, las cifras necesarias para que el número cumpla con la condición que se pide.

- Si es divisible entre 2, entonces es igual a 2 × ________ = 4 ☐ 83 ☐
- Si es divisible entre 3, entonces es igual a 3 × ________ = 4 ☐ 83 ☐
- Si es divisible entre 4, entonces es igual a 4 × ________ = 4 ☐ 83 ☐
- Si es divisible entre 5, entonces es igual a 5 × ________ = 4 ☐ 83 ☐
- Si es divisible entre 6, entonces es igual a 6 × ________ = 4 ☐ 83 ☐
- Si es divisible entre 10, entonces es igual a 10 × ________ = 4 ☐ 83 ☐

6. Con apoyo del maestro, comparen sus resultados. Verifiquen que los números que formaron son, efectivamente, divisibles entre el número indicado.

Sesión 4

Para terminar

Algo más acerca de los criterios de divisibilidad

1. Verifica con tu calculadora cuáles son números divisibles entre 9. Enciérralos en un óvalo.

63 648 5 346 91 081 7 452 114 209 203 518

a) ¿Qué características tienen en común los números que son divisibles entre 9?

____

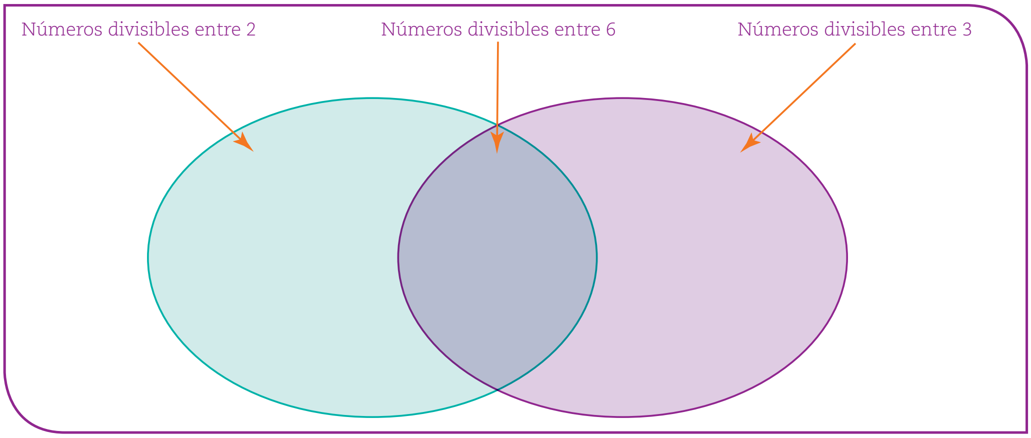
b) Con ayuda de su maestro, establezcan un criterio que les permita determinar cuándo un número es divisible entre 9. Anótenlo. _______________

____

2. Usa los aprendizajes que has adquirido para completar la siguiente tabla.

Enunciado	Verdadero / Falso	Ejemplo
a) Si un número es divisible entre 2, también es divisible entre 4.		
b) Si un número es divisible entre 4, también es divisible entre 2.		
c) Si un número es divisible entre 3, también es divisible entre 6.		
d) Si un número es divisible entre 6, también es divisible entre 3.		
e) Si un número es divisible entre 3, también es divisible entre 9.		
f) Si un número es divisible entre 9, también es divisible entre 3.		
g) Si un número es divisible entre 5, también es divisible entre 10.		
h) Si un número es divisible entre 10, también es divisible entre 5.		

3. De los siguientes números, algunos son divisibles entre 2, otros son divisibles entre 3 y otros son divisibles entre 6. Anoten cada número en el lugar que le corresponde en el esquema: 78, 86, 93, 114, 144, 554, 1 239, 2 536, 43 854, 56 804.



4. Un vendedor de fruta del mercado calcula que tiene más de 110 naranjas, pero menos de 130. Quiere exhibirlas en su puesto por montones de 3, pero le sobra una naranja. Intenta, entonces, con montones de 5 y le vuelve a sobrar una. No se da por vencido y hace montones de 6 naranjas, aunque nuevamente le sobra una. Finalmente desiste y las deja en un solo montón.

a) ¿Cuántas naranjas tenía el vendedor? ______________________________

5. Completen la tabla. Anoten en la primera columna los números que cumplan con las condiciones que se indican.

	El número es divisible entre…				
	2	**3**	**5**	**9**	**10**
	No	Sí	Sí	No	No
	Sí	Sí	No	No	No
	No	Sí	Sí	Sí	No
	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí

6. Con apoyo del maestro, comparen sus respuestas. Comenten cómo hicieron para encontrar un número que fuera divisible entre 2, 3, 5, 9 y 10.

7. Observen el recurso audiovisual *Criterios de divisibilidad* para analizar las características que deben cumplir los números divisibles entre 2, 3, 4, 5, 6, 9 y 10.

8. Utilicen el recurso informático *Criterios de divisibilidad* para resolver problemas que requieran aplicar los criterios de divisibilidad.

3. Figuras geométricas y equivalencia de expresiones de segundo grado 1

Sesión 1

Para empezar

Vitral *Artes liberales* del pórtico sur de la fachada de la catedral de San Esteban de Auxerre, en Borgoña, Francia.

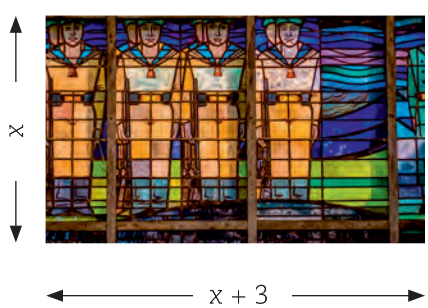
Los vitrales son composiciones de vidrios pintados con esmalte y ensamblados mediante varillas de plomo. Se les llama también vidrieras policromadas y los temas que se plasman en ellas son muy variados, como puedes ver en la imagen. En general, se elaboran con la misma técnica desde su origen. Los colorantes que más se emplean en su elaboración son el óxido de cobre, el fluoruro de calcio, el dióxido de manganeso, el óxido de cobalto y el óxido de hierro, entre otros. Los vitrales pueden tener distintas formas, pero primero se toman las medidas del espacio que ocuparán, luego se traza un patrón y finalmente se cortan los marcos y vidrios. Hay vitrales que cubren superficies muy grandes, como los que se encuentran en el Gran Hotel de la Ciudad de México, los cuales se realizan por partes, generalmente con diferentes formas geométricas. En esta secuencia usarás expresiones algebraicas para expresar la medida de los marcos y de las superficies de algunos vitrales, y seguirás trabajando con expresiones equivalentes que empezaste a estudiar en segundo grado.

Glosario
Policromado se dice de un objeto con diversos colores.

Manos a la obra

Los vitrales

1. Trabajen en pareja para contestar lo que se indica. Hilda elabora vitrales. Uno de ellos se muestra en la imagen.



a) Según las medidas del vitral, ¿qué forma tiene? ______

b) Escriban una expresión algebraica que represente el perímetro del vitral.

______

c) ¿Qué expresión algebraica representa el área que ocupa la superficie del vitral? ______

d) ¿Son equivalentes las expresiones que escribieron en b) y c)? ______
Justifiquen su respuesta. ______

2. Erick también hace vitrales, como el que se muestra a la derecha.

a) ¿Qué forma tiene este vitral, según sus medidas? ____________________

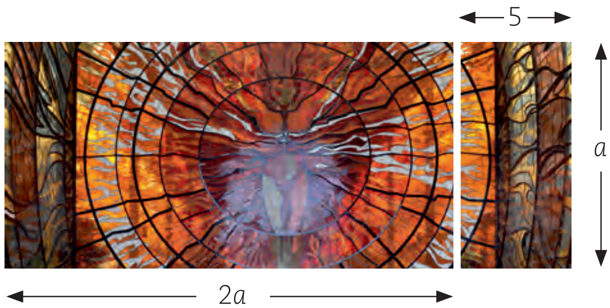
b) Escriban la expresión que representa su perímetro. ____________________

c) ¿Qué expresión representa el área que ocupa la superficie del vitral?

____

d) Un posible comprador dice que los vitrales de Hilda y Erick tienen la misma área. ¿Tiene razón? ______________ Comprueben su respuesta.

3. Observen los siguientes fragmentos del Cosmovitral, localizado en Toluca, capital del Estado de México, y escriban las expresiones que se solicitan.



Vitral 1

Vitral 2

Vitral 3

Vitral	Expresiones que representan el área de cada pieza del vitral	Expresión que representa el área total del vitral
1		
2		
3		

4. Compartan con el grupo las respuestas que obtuvieron de las situaciones anteriores. ¿Todos escribieron las mismas expresiones? ¿Cómo podrían comprobar si las expresiones son o no equivalentes?

En álgebra, los *términos semejantes* son los que tienen la misma parte literal. Los términos semejantes se pueden sumar o restar. Algunos ejemplos de ellos son:

$$z,\ 5z,\ 3.1z,\ 2z;\ 2xy,\ 7xy,\ \frac{1}{2}xy,\ 15xy$$

Las expresiones algebraicas tienen nombre, éste se determina a partir del número de términos no semejantes que tienen.

- *Monomio:* tiene sólo un término. Ejemplos: x, $2a$, y^2, $1.8b$, mn, $5xy$, $\frac{1}{2}a^2b$
- *Binomio:* tiene dos términos. Ejemplos: $x + 2y$; $y^2 + 8y$; $mn - 5$; $ab + \frac{1}{2}a^2b$
- *Trinomio:* tiene tres términos. Ejemplos: $x + 2y^2 - 8xy$; $mn + 9m^2n + 81$
- En general, un *polinomio* tiene dos o más términos.

Término independiente es el número que aparece sin parte literal en una expresión algebraica, por ejemplo en $x + 3$, $5xy + 4$, 3 y 4 son los términos independientes.

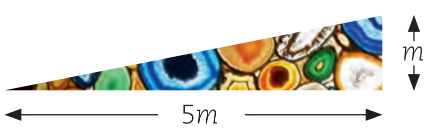
Las *expresiones algebraicas equivalentes* son aquellas que se escriben de manera diferente, pero representan lo mismo.

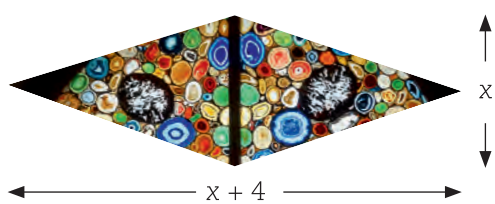
Sesión 2

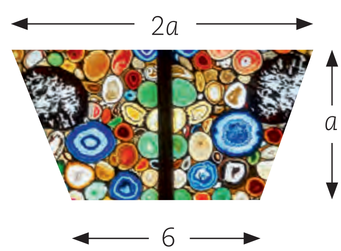
Vitrales y sucesiones

1. Los vitrales pueden variar de forma, pueden ser: triangulares, circulares, de ojiva, de medio círculo, romboidales, entre otras. Los siguientes vitrales son parte de una composición. Trabajen en pareja para realizar lo que se pide.

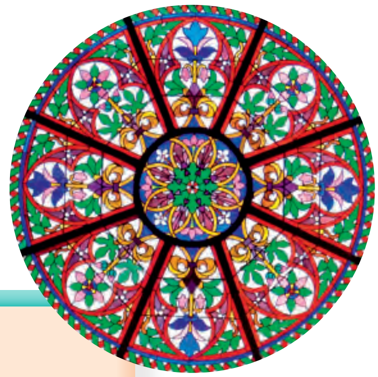
a) Anoten dos expresiones algebraicas equivalentes que representen el área de cada pieza.







2. El diámetro de este vitral está representado por la expresión $6y$.



a) ¿Qué expresión representa su radio? ______________________

b) Escriban dos expresiones equivalentes que representen su área.

____

3. Lean y comenten la información del recuadro con ayuda de su maestro.

Los casos de multiplicación de expresiones algebraicas son:

- Monomio por término independiente. Es cuando se multiplica el coeficiente de un monomio por el término independiente. Ejemplos:

$$x(5) = 5x \qquad (mn)4 = 4mn$$

$$(2a)8 = 16a \qquad (xy)\frac{1}{2} = \frac{1}{2}xy$$

$$(y^2)18 = 18y^2 \qquad (a^2b)7 = 7a^2b$$

- Monomio por monomio. Hace referencia a la multiplicación de los coeficientes y las literales de dos términos. Ejemplos:

$$x(5x) = 5x^2$$

$$(2a)(8b) = 16ab$$

$$y^2(3.1x) = 3.1xy^2$$

- Monomio por binomio. Es la multiplicación de un término por cada uno de los términos del binomio. Ejemplos:

$$x(5x + y) = 5x^2 + xy$$

$$(2a + 3)8b = 16ab + 24b$$

$$y^2(3.1x - 4) = 3.1xy^2 - 4y^2$$

4. Las sucesiones de figuras pueden representar áreas que tienen un patrón de crecimiento. El lugar que ocupa cada término de una sucesión se representa con la letra n, es decir, para encontrar un término específico de la sucesión se sustituye la n en la regla general por el número del lugar que se está buscando. Realicen lo que se pide con base en la siguiente sucesión.

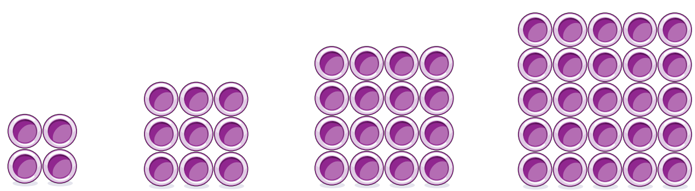


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3 Fig. 4 Fig. 5 …

a) ¿Cuántas fichas tendrá la figura 5? ____________ ¿Y la figura 15? ____________
¿Cuántas fichas tendrá la figura 145? ____________

b) Subrayen las expresiones que representan la sucesión anterior.

n^2 $\qquad$ $2n$ $\qquad$ $(n + 1)^2$ $\qquad$ $n^2 + 2n + 1$

c) ¿Cómo determinaron las expresiones que le corresponden a la sucesión? ____________
____

5. Analicen la siguiente sucesión y respondan lo que se pide.

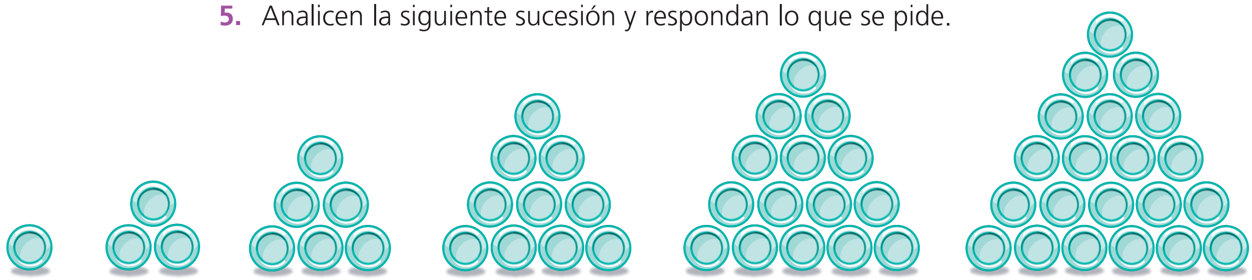


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3 Fig. 4 Fig. 5 Fig. 6

a) ¿Cuántas fichas tendrá la figura 10? ____________

b) ¿Cuántas fichas tendrá la figura 30? ____________

c) Subrayen las expresiones algebraicas que representan la sucesión mostrada arriba.

$n + 2$ $\qquad$ $\dfrac{n(n + 1)}{2}$ $\qquad$ $\dfrac{2n}{2}$ $\qquad$ $\dfrac{n^2 + n}{2}$

d) Expliquen brevemente cómo determinaron las expresiones algebraicas que representan esta sucesión. ____________
____

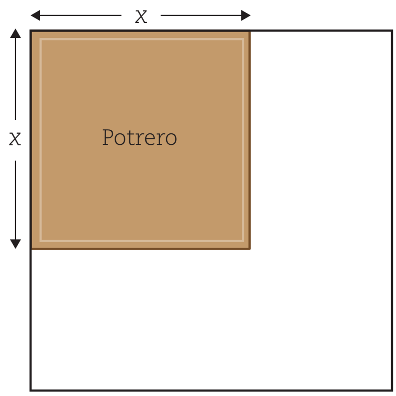
6. Sustituyan las literales de las expresiones de los vitrales con diversos valores para comprobar que son equivalentes. Hagan lo mismo con las expresiones que eligieron en cada sucesión para ver si son equivalentes.

Sesión 3

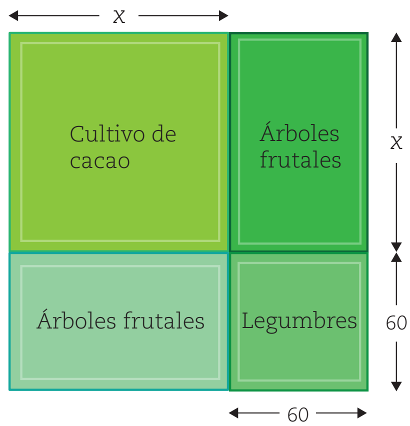
Siembra vida

1. En 2019 surgió una convocatoria dirigida a los habitantes de las zonas rurales de México, en la que se ofrecía apoyo a los campesinos para combinar la siembra tradicional con la de árboles frutales y maderables. Samuel vive en Chiapas y tiene un terreno en esa entidad, decidió usarlo completo para participar en tal proyecto. El dibujo 1 representa la parte del terreno que usaba como potrero; el dibujo 2 muestra la manera en que Samuel distribuyó todo su terreno para sembrar.

Dibujo 1



Dibujo 2



a) Escriban la expresión algebraica que representa el área de la superficie del terreno que ocupaba como potrero. ______________________

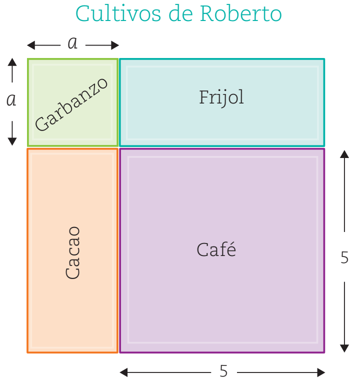
b) Escriban, en la tabla de abajo, la expresión que representa, en el dibujo 2, el área destinada a sembrar cada uno de los productos.

Cacao	Árboles frutales	Legumbres

2. En grupo y con apoyo del maestro, comparen y analicen si todos escribieron las mismas expresiones. Si no fue así, asignen un valor cualquiera a las literales para revisar si las expresiones que anotaron son equivalentes.

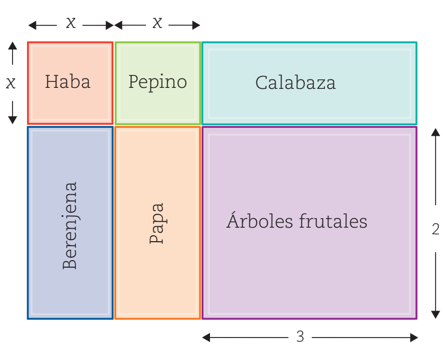
3. Dos amigos de Samuel, Roberto y Lulú, también se animaron a cultivar diferentes productos en sus terrenos. Anoten frente a cada producto una expresión que represente el área que ocuparon con cada cultivo.

Cultivos de Roberto



Café: ______________________
Frijol: ______________________
Garbanzo: ______________________
Cacao: ______________________
Área total del terreno: __________

Cultivos de Lulú



Papa y pepino: ______________________
Berenjena y haba: ______________________
Árboles frutales y calabaza: __________
Haba y pepino: ______________________
Área total del terreno: __________

Dato interesante
Para hacer más eficiente el uso de nutrientes del suelo, es conveniente sembrar diferentes cultivos juntos. Esto ayuda a que disminuyan los problemas causados por plagas. Por ejemplo, en algunos cultivos de leguminosas se siembra ajo alrededor o intercalado, pues ayuda a repeler las plagas de los cultivos vecinos.

4. ¿Todos escribieron las mismas expresiones? Si no fue así, comprueben si son equivalentes. Luego, lean y comenten la información del recuadro. En caso necesario, corrijan sus respuestas.

De la misma manera que es posible encontrar expresiones algebraicas de primer grado que son equivalentes, también es posible obtener expresiones algebraicas de segundo grado equivalentes. Una forma de comprobarlo consiste en dar cualquier valor a las literales y ver si la igualdad se cumple.

Por ejemplo:

$6x^2 + 8x$ es equivalente a $2x(3x + 4)$, si x vale 7 se tiene que

$$6x^2 + 8x = 6(7^2) + (8)(7) = 6\,(49) + 56 = 294 + 56 = 350 \text{ y}$$

$$2x(3x + 4) = 2(7)[(3)(7) + 4] = 14[21 + 4] = 14\,(25) = 350$$

Al hacer las operaciones, en ambas se llega al mismo resultado; por lo tanto, las dos expresiones algebraicas son equivalentes.

5. Al finalizar, comenten si conocen alguna estrategia para evitar plagas en los cultivos, pero que no dañe el ambiente como lo hacen algunos plaguicidas químicos.

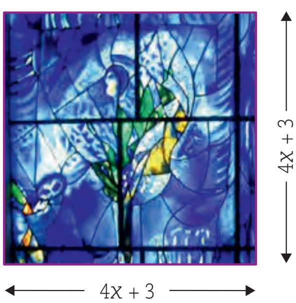
Sesión 4

Para terminar

Más vitrales

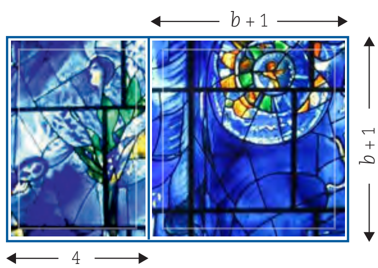
1. Trabajen en equipo y realicen lo que se indica. Escriban dos expresiones algebraicas equivalentes que representen el área de las siguientes figuras que forman parte de algunos vitrales.

Figura 1



=

Figura 2



=

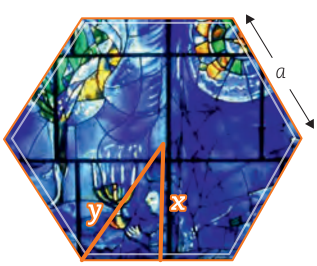


Figura 3

=

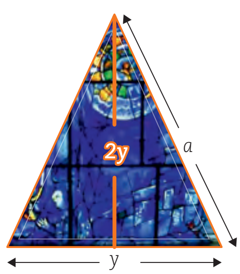


Figura 4

=

2. En su cuaderno, comprueben que las expresiones algebraicas son equivalentes al hacer las transformaciones algebraicas necesarias para cada caso.

3. Tracen una figura cuya área se pueda calcular con las siguientes expresiones algebraicas:

a) $A = 36y^2$

b) $A = (2a + 2)(2a + 3)$

4. Dividan las figuras de la actividad anterior en rectángulos de menor área para encontrar dos expresiones algebraicas que representen el área de la figura completa. Anótenlas.

____

____

5. Lean la siguiente información y coméntenla con sus compañeros y su maestro.

Otra forma de saber si dos expresiones algebraicas son equivalentes consiste en transformarlas por medio de los procedimientos algebraicos que permitan igualarlas.

Por ejemplo: ¿Las expresiones algebraicas $(3x + 4)(3x + 2)$ y $9x^2 + 18x + 8$ son equivalentes? Para saberlo, se realizan las operaciones correspondientes y se aplican las reglas de la igualdad:

$$(3x + 4)(3x + 2) = [(3x)(3x) + (3x)(2)] + [(4)(3x) + (4)(2)] =$$

$$[9x^2 + 6x] + [12x + 8] = 9x^2 + 18x + 8 = 9x^2 + 18x + 8 =$$

$$= 9x^2 + 18x + 8$$

6. Observen el recurso audiovisual *Expresiones cuadráticas equivalentes 1* para que amplíen sus conocimientos acerca del proceso algebraico que permite comprobar que dos expresiones algebraicas son equivalentes.

7. Usen el recurso informático *Expresiones cuadráticas equivalentes 1* para que resuelvan problemas que implican encontrar distintas expresiones algebraicas relacionadas con sucesiones y áreas de composiciones rectangulares.

Dato interesante

La catedral de Colonia, en Alemania, forma parte del Patrimonio Mundial de la Humanidad y tiene gran cantidad de vitrales: aproximadamente 11 500 cuadros de vidrio de 72 colores. En México tenemos el Jardín Botánico de Toluca, conocido como el Cosmovitral, en cuya construcción se usaron 75 toneladas de vidrio soplado y combina 28 colores.

4. Ecuaciones cuadráticas 1

Sesión 1

Para empezar

Se tienen evidencias de que en Babilonia, en el año 1600 a. n. e., se resolvían problemas que implicaban el uso de ecuaciones de segundo grado (representadas de manera distinta a como lo hacemos ahora); y de que éstas se conocieron después en Egipto y, posteriormente, en Grecia. En este último lugar, el gran mérito se le atribuye a Diofanto de Alejandría (aproximadamente 200-284 n. e.), quien, entre otras cosas, dejó resueltos de manera ingeniosa muchos problemas, así como un método para solucionar las ecuaciones de segundo grado, por lo que se le reconoce como el padre del álgebra. En su epitafio puede leerse: "Transeúnte, ésta es la tumba de Diofanto, al terminar de leer esta sorprendente distribución, conocerás el número de años que vivió. Su niñez ocupó la sexta parte de su vida; después, durante la doceava parte, su mejilla se cubrió con el primer bozo. Pasó aún una séptima parte de su vida antes de tomar esposa y, cinco años después, tuvo un precioso niño que, una vez alcanzada la mitad de la edad de su padre, pereció de una muerte desgraciada. Su padre tuvo que sobrevivirle, llorándole, durante cuatro años. De todo esto se deduce su edad". ¿A qué edad murió Diofanto?

En esta secuencia conocerás las características de las ecuaciones de segundo grado y comenzarás a utilizarlas para resolver problemas.

Glosario
Bozo se refiere al vello que aparece en los hombres jóvenes antes de nacer la barba.

Manos a la obra

Ecuaciones de primer y segundo grado

Trabajen en equipo. Analicen los siguientes problemas y resuelvan lo que se pide.

1. Supongan que x es la edad a la que murió Diofanto.

   a) El epitafio habla de tres etapas de su vida; represéntenlas algebraicamente.

Niñez	Etapa en que aparece el bozo en su mejilla	Etapa entre el primer bozo y antes de casarse

   b) Representen algebraicamente la suma de estas tres etapas. ____________

c) Representen algebraicamente los años que vivió el hijo de Diofanto. ____________

____

d) ¿Qué expresión algebraica representa el número de años que vivió Diofanto?

____

e) ¿A qué edad murió Diofanto? ____

2. Con tus compañeros y con ayuda del maestro, comparen sus respuestas. Verifiquen que el valor encontrado corresponde a la edad de Diofanto y que con él se pueden calcular las etapas indicadas en su epitafio.

3. *Todos los alumnos de un grupo de tercero de secundaria enviaron un mensaje a cada uno de sus compañeros para saber cuál es la fruta que más les gusta. Si en total se enviaron 650 mensajes, ¿cuántos alumnos hay en el grupo?*

a) Para comprender mejor la situación, pueden replicarla trabajando por equipo en el salón.

- ¿Cuántos integrantes hay en su equipo? ________________

  ____
- ¿Cuántos mensajes envía cada integrante? ____________

  ____
- ¿Cuántos mensajes se envían en total? ________________

  ____

b) Ahora imaginen que replican la actividad con todo el grupo.

- ¿Cuántos alumnos son en total? ______________________

  ____
- ¿Cuántos mensajes tendría que enviar cada quien? ______

  ____
- ¿Cuántos mensajes se envían en total? ________________

  ____

c) Lean de nuevo la situación planteada. Supongan que x es la cantidad total de alumnos que hay en ese grupo y respondan las preguntas.

- ¿Cómo se representa algebraicamente la cantidad de mensajes que envió cada alumno? ______________________

  ____
- ¿Cómo se representa algebraicamente el total de mensajes enviados en el grupo? ____________________________

  ____

Dato interesante

Entre las ecuaciones más famosas que han servido para dar respuesta a las preguntas que la humanidad se ha hecho están:

- La que representa el teorema de Pitágoras: $a^2 + b^2 = c^2$
- La de Isaac Newton para la ley de la gravitación universal: $F = G\, m_1\, m_2 / r^2$
- La de Albert Einstein para la teoría de la relatividad especial: $E = mc^2$.

d) Con base en la situación anterior, completen la siguiente tabla.

	En tu equipo	En tu grupo	En el grupo de la situación planteada
Número total de alumnos (incógnita)			
Número de mensajes enviados por cada alumno			
Número total de mensajes enviados			650

e) Si se considera que se enviaron 650 mensajes en total, ¿cuál es la ecuación que permite calcular el valor de *x*? ______________ ¿Cuántos alumnos hay en ese grupo? ______________

4. Con el apoyo del maestro, comparen sus respuestas. Verifiquen si todos formularon la misma ecuación. Comenten cómo la resolvieron y en qué se distingue de las ecuaciones que ya conocen.

Sesión 2

Dos soluciones, una solución o ninguna

Trabajen en equipo. Analicen tanto las situaciones presentadas como su proceso de resolución al responder las preguntas que se plantean y resuelvan lo que se indica.

1. *Raúl es 6 años mayor que su hermana. El producto de las dos edades es igual a 315. ¿Qué edad tiene cada uno?*

a) Si la hermana de Raúl tuviera 10 años, ¿cuántos años tendría Raúl? ______________
¿Cuál sería el producto de las dos edades? ______________

b) En el problema planteado inicialmente, ¿consideran que la hermana de Raúl tiene más de 10 años o menos de 10 años? ______________
Argumenten su respuesta. ______________

c) Continúen este razonamiento hasta encontrar las edades de ambos. Verifiquen que el producto es 315. Anoten aquí los resultados.

Hermana de Raúl	Raúl

2. El proceso que realizaron en la actividad anterior también se puede hacer utilizando el lenguaje algebraico. Anoten las expresiones algebraicas que se piden.

La edad de la hermana de Raúl	La edad de Raúl	El producto de las dos edades	El producto conocido de las dos edades
x			315

a) En la tabla hay dos productos que son iguales: uno expresado algebraicamente y el otro con un número. Relaciónenlos con el signo igual para obtener una ecuación.

_______________ = _______________

b) En la ecuación, x representa la edad de la hermana de Raúl. En su cuaderno, sustituyan x por el valor que encontraron en la actividad 1c) y verifiquen que la ecuación se cumple.

Dato interesante
En algunos lugares del país, al hijo menor se le llama xocoyote, del náhuatl *xocotl*, "verde, inmaduro", y *coyotl*, "cachorro". Entre Raúl y su hermana, ¿quién será el xocoyote? Si tú tienes hermanos, ¿quién de ustedes lo es?

3. En grupo y con apoyo del maestro, comparen los resultados obtenidos en equipo; identifiquen si tuvieron errores y corrijan. Luego, lean lo siguiente.

Una ecuación cuadrática o de segundo grado con una incógnita es una ecuación en la cual el mayor exponente de la incógnita es 2.

Algunos ejemplos de ecuaciones cuadráticas son:

$4z^2 = 36$

$r^2 + r = 12$

$y^2 + 3y - 2 = 0$

Ecuación con una incógnita en la cual el mayor exponente es 2

Producto de factores que dan como resultado la ecuación cuadrática: $x^2 + 5x = 6$

$x(x + 5) = 6$

4. Trabajen en equipo y completen la siguiente tabla con las expresiones algebraicas que se piden.

De un número cualquiera	Del sucesor de un número cualquiera	De la suma de dos números consecutivos cualesquiera	Del producto de dos números consecutivos cualesquiera

5. Escriban las ecuaciones que representan los siguientes enunciados.

A. La suma de dos números consecutivos es igual a 93	B. El producto de dos números consecutivos es igual a 210
= 93	= 210

a) Consideren la ecuación que representa cada enunciado. ¿A qué enunciado le corresponde una ecuación cuadrática? ______

b) ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación que representa el enunciado A?

______

c) En el caso del enunciado B, hay un par de números enteros negativos consecutivos cuyo producto es igual a 210. ¿Cuáles son? ______

d) Completen la tabla para encontrar la pareja de números enteros negativos consecutivos (o verifiquen que sí lo son).

x	$x + 1$	$x(x + 1)$
−11	−10	(−11) (−10) =
−13		

6. En grupo y con apoyo del maestro, comparen sus respuestas y, en caso necesario, corrijan. Después, lean y hagan lo que se indica.

Resolver una ecuación es hallar la solución o las soluciones que satisfacen la ecuación. Una *solución* o *raíz de una ecuación* es un valor de la incógnita que, al sustituirse en la ecuación, la satisface.

Las ecuaciones cuadráticas tienen dos soluciones o raíces.

a) Verifiquen que encontraron las dos parejas de números consecutivos cuyo producto es 210.

b) ¿Cuáles son las dos soluciones o raíces de la ecuación cuadrática? ______

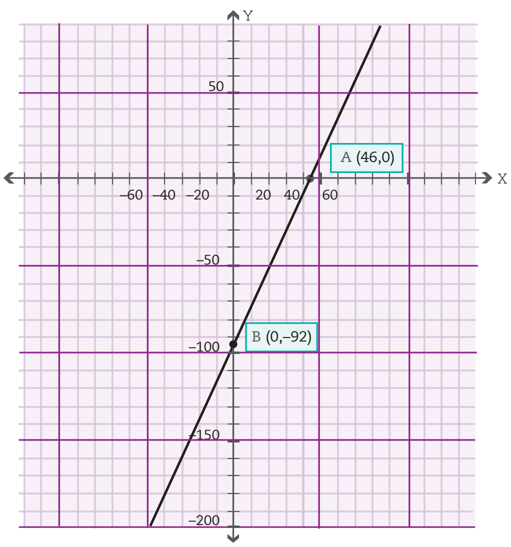
______

Para terminar

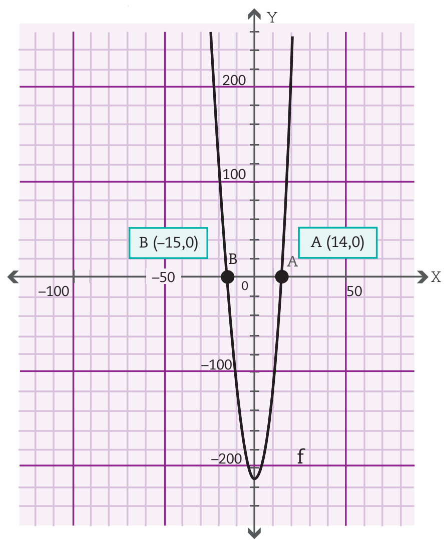
Interpretación gráfica de las soluciones

Sesión 3

1. Trabajen en equipo. A continuación encontrarán las gráficas de las funciones de las cuales se obtienen las ecuaciones de los enunciados A y B de la sesión anterior; analícenlas para responder las preguntas planteadas.



Ecuación: $2x + 1 - 93 = 0$



Ecuación: $x^2 + x - 210 = 0$

a) Consideren la gráfica de la función lineal. ¿Cuál es la abscisa del punto donde se corta la gráfica con el eje X? ____________ ¿Cuál es la solución de la ecuación?

____

b) Consideren la gráfica de la ecuación cuadrática. ¿Cuáles son las abscisas de los puntos donde se corta la gráfica con el eje X? ________________ ¿Cuáles son las soluciones de la ecuación? ____

2. Comparen sus respuestas y, en caso necesario, corrijan. Después, lean y realicen lo que se pide.

Las soluciones o raíces de una ecuación cuadrática se pueden observar al graficar la función de la cual se obtiene y corresponden a las abscisas de los puntos donde la gráfica se interseca con el eje X; en estos casos, los valores de la ordenada son 0.

a) Subrayen, con color rojo, los valores de las soluciones de las ecuaciones en las gráficas.

3. Analicen el siguiente planteamiento y su proceso de resolución para responder las preguntas que se plantean. Resuelvan lo que se pide.

El área de un rectángulo es de 48 cm². La medida del largo es el triple del ancho.

a) ¿Es posible que la medida del ancho sea 5 cm? ____________ ¿Por qué?

____

Mediante ensayo y error, encuentren las dimensiones del rectángulo.

Ancho: ____________ Largo: ____________

b) En su cuaderno, tracen un rectángulo cuyo largo sea el triple del tamaño del ancho. Si representan con la letra x la medida del ancho, ¿cómo representan la medida del largo? ____________

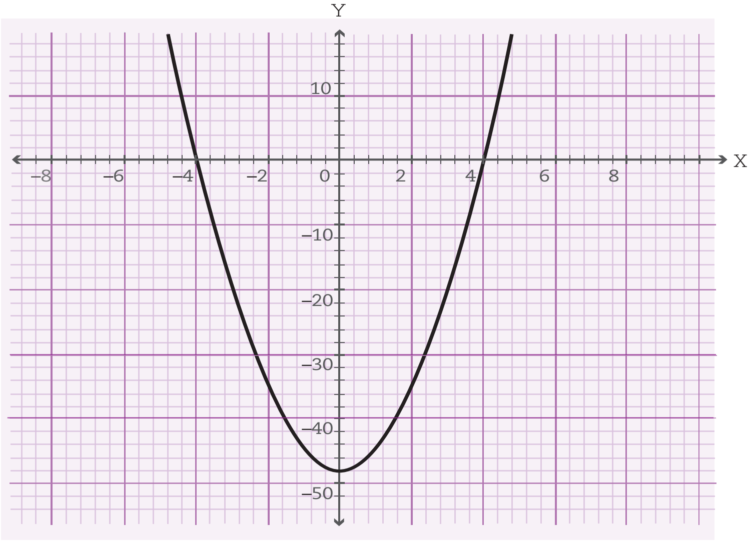
¿Qué expresión algebraica representa su área? ____________

c) De las siguientes ecuaciones, dos de ellas representan la situación descrita arriba. Subráyenlas.

$x(3x) = 48$	$(x + 3x)^2 = 48$	$3x^2 = 48$	$2(x + 3x) = 48$

En esas dos ecuaciones, x representa la medida del ancho del rectángulo. Sustituyan x por el valor que encontraron en el inciso a) y comprueben que la ecuación se satisface.

d) La ecuación $3x^2 - 48 = 0$ está asociada a la siguiente gráfica. Encuentren un valor que satisfaga la ecuación.



e) De acuerdo con la gráfica, el número –4 es una solución de la ecuación. ¿Es posible que ese valor sea la medida del ancho del terreno? ___________________

____

¿Por qué? _______________________________________

____

____

4. Verifiquen con ayuda de su maestro los resultados encontrados. Después lean y comenten la siguiente información.

Para encontrar el valor de x en una ecuación como $x^2 - 36 = 0$, que es equivalente a $x^2 = 36$, es necesario obtener la raíz cuadrada de ambos miembros de la ecuación de la forma $\sqrt{x^2} = \sqrt{36}$, de donde resultan las dos raíces de la ecuación $x = \pm 6$, que es equivalente a decir que

$$x_1 = +6 \quad y \quad x_2 = -6$$

Sin embargo, en algunas ocasiones, una de las dos soluciones de una ecuación cuadrática no es necesariamente la solución de la situación que representa, como ocurre en el caso del área de una figura, donde solamente se consideran los valores positivos de las raíces.

Dato interesante
La ciencia se vale de las ecuaciones para formular leyes; por ejemplo, hay una que, para este momento, ya te es familiar: $a^2 + b^2 = c^2$. Sí, se trata del teorema de Pitágoras.

En una ecuación como $x^2 = 15$, puesto que 15 no tiene raíz cuadrada exacta, el resultado puede expresarse como $x = \pm\sqrt{15}$, o con un valor aproximado de $x \approx \pm 3.87$; sin embargo, lo más conveniente en estos casos es emplear la expresión con radical.

5. Observen el recurso audiovisual *Ecuaciones cuadráticas 1* para analizar las características de las ecuaciones de segundo grado.

6. Utilicen el recurso informático *Análisis de ecuaciones cuadráticas* para continuar analizando gráficas y expresar algebraicamente ecuaciones lineales y cuadráticas.

5. Funciones 1

Sesión 1

Para empezar

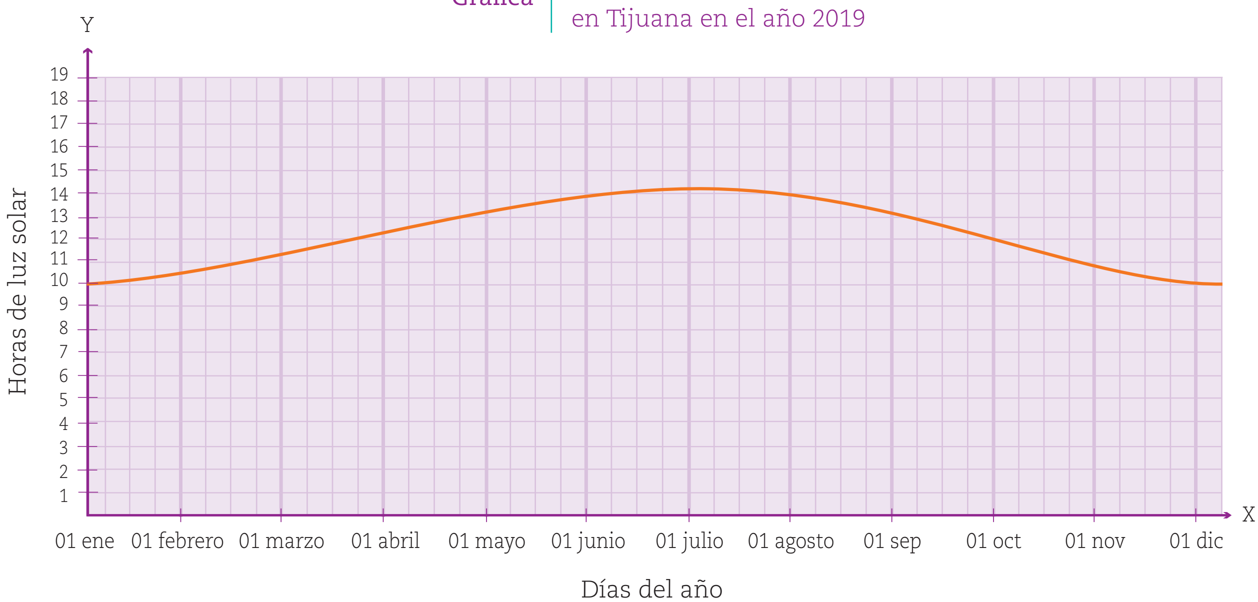
La duración del día, al igual que la de la noche, depende de la época del año y de la parte del mundo en la que nos encontremos. Esto se debe a que, como sabes, la Tierra efectúa un movimiento de traslación alrededor del Sol y otro de rotación sobre su propio eje, que tiene cierta inclinación respecto al Sol. ¿Qué tiene que ver esto con la duración de los días o la diferencia de estaciones a lo largo del año? Si se registrara durante un año la cantidad de horas de luz solar que hay diariamente y se graficaran los datos, ¿qué forma tendría la gráfica? ¿Sería una línea recta o una curva? En esta secuencia aprenderás a analizar casos de variación de manera cualitativa mediante la lectura e interpretación de gráficas o tablas que representan diferentes sucesos.

Manos a la obra

Horas de luz solar en distintos lugares de México y del mundo

1. Trabajen en pareja. Analicen la siguiente gráfica del registro de la cantidad de horas con luz solar diarias en la ciudad de Tijuana durante 2019. Después respondan lo que se pide.

Gráfica | Duración de la luz solar en Tijuana en el año 2019



Fuente: https://bit.ly/2HZFOus

a) ¿Cuándo se hacen más cortos los días? ______

b) ¿En qué mes se encuentran el día más largo y el más corto del año? ______

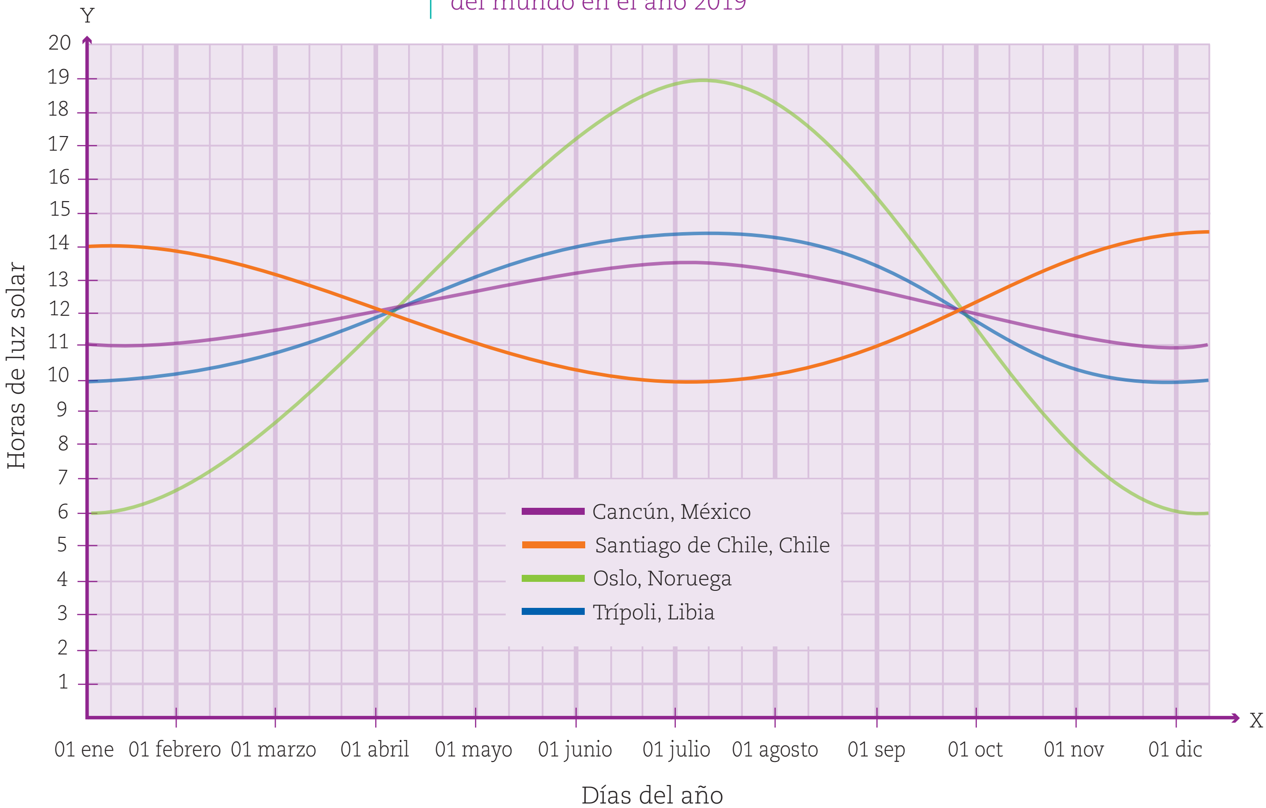
______

c) ¿Cuántas horas de luz solar tiene el día más largo? ______

d) ¿Cuántas horas de luz solar hubo aproximadamente el 31 de diciembre, el 1 de abril y el 30 de octubre? ______

2. En la siguiente gráfica se muestra el flujo del cambio en las horas con luz solar durante los 365 días de 2019 en cuatro ciudades del mundo. Respondan las preguntas con base en los datos que aparecen en ella.

Gráfica | Duración de la luz solar en cuatro ciudades del mundo en el año 2019



Fuente: https://bit.ly/2HZFOus

a) En junio, ¿en qué ciudad dura más el día? ______ ¿En cuál menos? ______

¿A qué se deberá esto? ______

______

b) Si se considera el 31 de diciembre, ¿en qué ciudad dura más el día? ______

¿En cuál menos? ______

c) ¿Aproximadamente, en qué fechas es mayor la diferencia de horas entre las cuatro ciudades? ______ ¿Cuándo es menor? ______

d) ¿En qué fechas se intersecan todas las curvas? ______

e) Considerando las fechas en que la luz de día es la misma en estas ciudades, ¿sucederá lo mismo en todos los lugares del planeta? ______ ¿Por qué?
______

f) ¿En cuál de las cuatro ciudades se parece más la duración del día a la de Tijuana? ______ ¿Por qué sucederá esto? ______

Dato interesante
La latitud es la distancia, medida en grados, que existe entre cualquier paralelo y la línea del Ecuador. Siempre se indica si esta distancia se mide hacia el hemisferio norte o al sur.

3. Investiguen y comenten qué pasa en las fechas en que la duración de la luz solar es igual en las cuatro ciudades y qué sucede cuando la diferencia entre ellas es mayor.

Sesión 2

Día a día

1. Trabajen en pareja. Consideren las gráficas de la sesión anterior para completar la tabla de abajo. Anoten la duración aproximada del día en las fechas solicitadas para cada ciudad.

Ciudad	Enero 1	Febrero 1	Marzo 21	Junio 21	Agosto 1	Septiembre 21	Noviembre 1	Diciembre 21
Tijuana	10 h					12 h		
Cancún	11 h						11 h y 30 minutos	

a) ¿Qué duración tiene el día más largo en Tijuana? ______ Y, ¿en Cancún? ______ ¿Ocurre en la misma fecha para ambas ciudades? ______

b) ¿A qué se deberá que las gráficas de Tijuana y Cancún, aun estando en México, no tengan el mismo comportamiento? ______

2. La curva que representa la variación de luz de día a lo largo de 2019 en Santiago de Chile se comporta diferente a las demás.

a) ¿En qué días la gráfica es decreciente? ______

b) ¿En qué fecha la gráfica comienza a crecer? ______

c) Expliquen cuáles son las principales diferencias entre la gráfica de Santiago de Chile y las del resto de las ciudades. ______
______

d) ¿Cuáles podrán ser las causas? ______
______

3. Ubiquen en un mapamundi las cinco ciudades mencionadas en las gráficas de las páginas 46 y 47 e indiquen cuáles están en la misma latitud.

a) ¿Qué similitudes tienen Trípoli y Tijuana?

b) ¿Cómo influye la ubicación de Santiago de Chile respecto a las otras ciudades en la variación de las horas de día a lo largo del año?

c) Analicen la posición de Oslo en el mapa e intenten dar una explicación al comportamiento de su gráfica.

Vínculo con... Geografía

Revisa el libro de Geografía de primer grado para retomar algunos de sus mapamundis y resolver la actividad 3 de esta página. También puedes encontrarlo en internet en la liga bit.ly/2xhRaIR. Consulta las páginas 67 o 69.

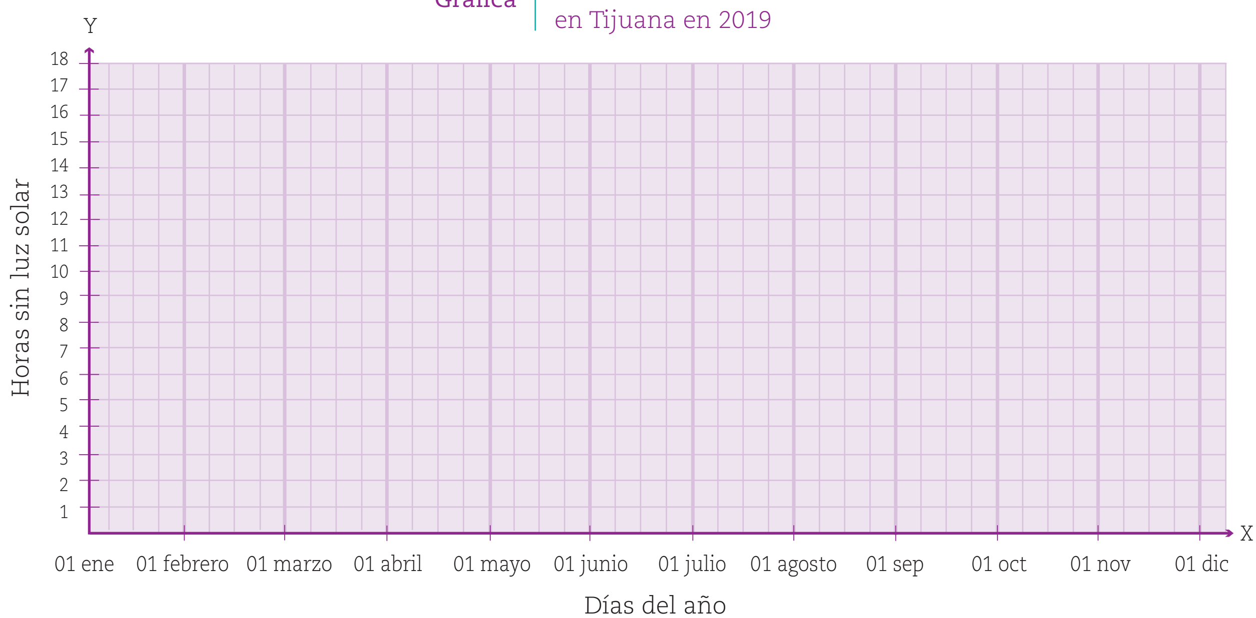
4. En grupo, y con apoyo del maestro, comenten: ¿por qué a cada fecha y a cada ciudad sólo les corresponde un dato de duración de horas en la gráfica?

5. Junto con su maestro, lean y comenten lo siguiente.

En las gráficas y en las tablas de valores suele presentarse una relación de dependencia entre dos variables.

6. Con la información de la actividad 1 de la sesión 1, tracen la gráfica que representa la variación de las horas sin luz solar en la ciudad de Tijuana a lo largo de 2019. Después respondan las preguntas.

Gráfica | Duración de la noche en Tijuana en 2019



a) Cuando la luz solar dura 12 horas, ¿cuántas horas tiene la noche?

b) ¿Cuántos valores se registran como duración de la noche en cada fecha del año?

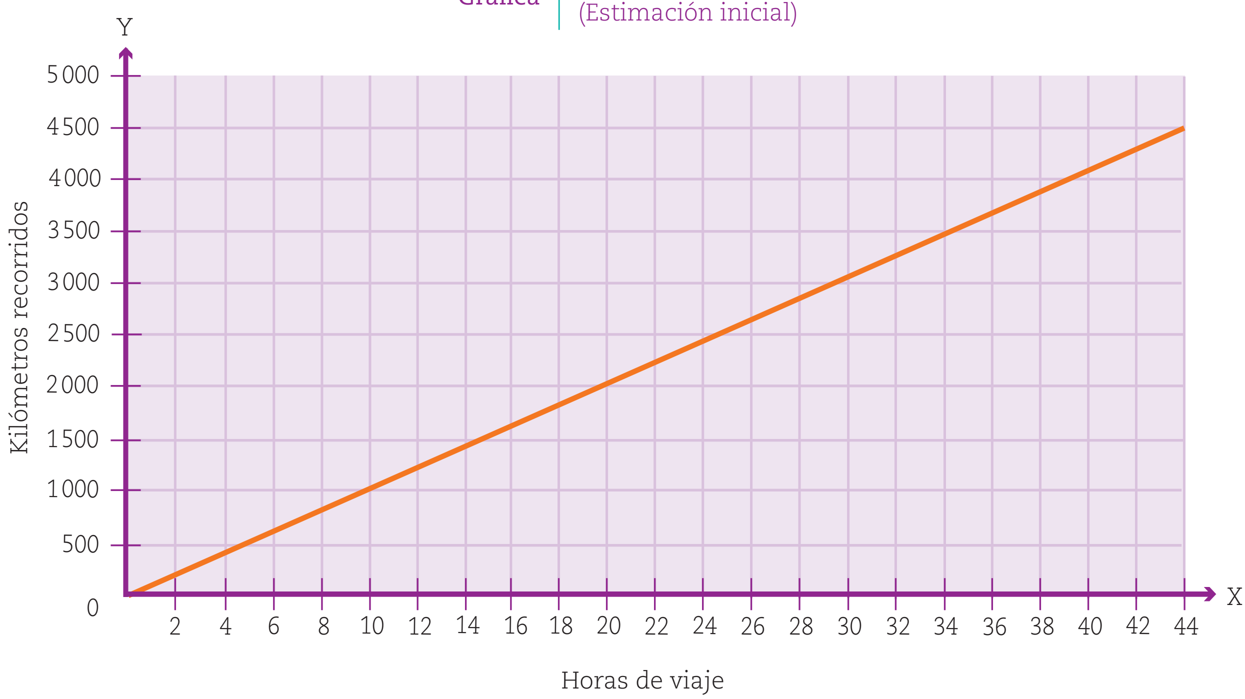
7. En equipo, utilicen un pliego de cartulina o papel bond y tracen la gráfica que represente la duración en horas de cada noche de 2019 para las cuatro ciudades que aparecen en la gráfica de la página 47. Distribuyan el trabajo de tal forma que todos participen en la realización de cada gráfica.
8. En grupo, y con apoyo de su maestro, comenten cómo fue el proceso de elaboración de las gráficas y qué información les fue útil para trazarlas.

Sesión 3

De Tijuana a Cancún

1. Trabajen en pareja las actividades de esta sesión. Amalia y su madre se mudan de Tijuana a Cancún. Para ello, consultan la página de la Secretaría de Comunicaciones y Transportes y encuentran una ruta que implica recorrer 4350 km. Trazan la gráfica que ves aquí y que representa el kilometraje que recorrerán por cada hora de viaje si mantienen una velocidad constante. Con base en ella, respondan las preguntas que aparecen enseguida.

Gráfica | Viaje de Tijuana a Cancún (Estimación inicial)



a) ¿En cuánto tiempo completarán los 4350 km de viaje Amalia y su madre?

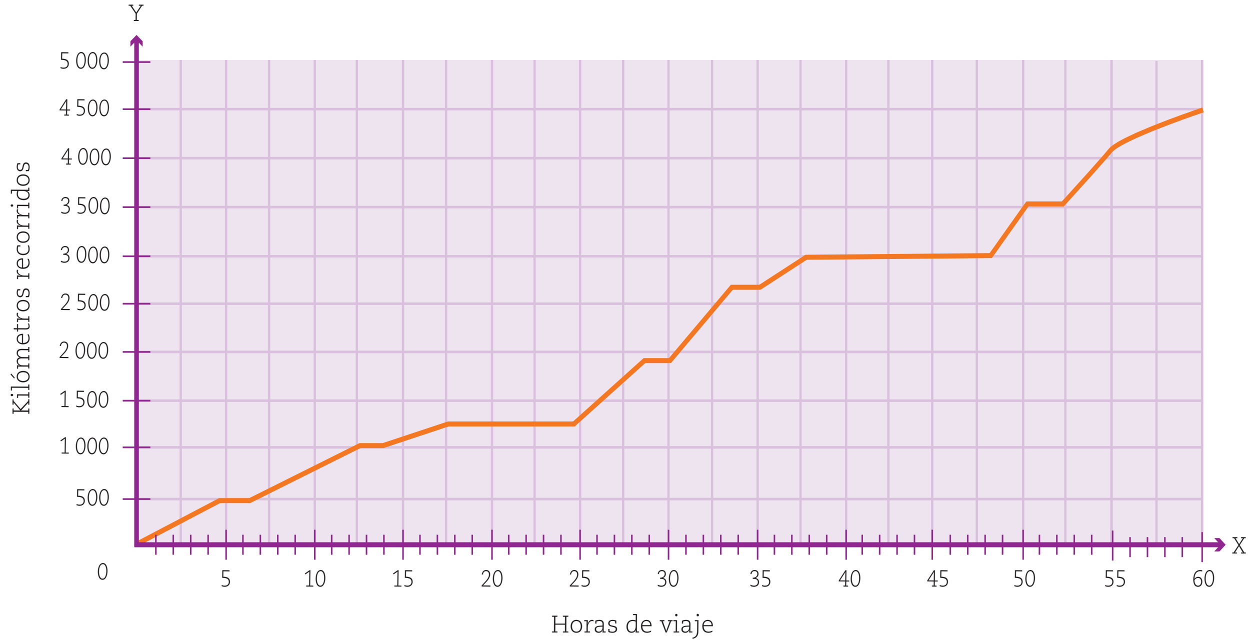
____

b) ¿A qué velocidad promedio estiman viajar? ______________________________

c) Comenten con sus compañeros si los cálculos y la planeación que realizaron Amalia y su madre les permitirán llegar a Cancún en el tiempo estimado.

2. La siguiente gráfica muestra los datos reales del viaje, registrados por Amalia y su madre durante el trayecto a Cancún. Analícenla y después respondan las preguntas.

Gráfica | Viaje de Tijuana a Cancún (Datos reales)



a) ¿En cuántas horas realizaron el viaje a Cancún? ____________________

b) ¿Cuántas horas de diferencia hubo entre el tiempo real de duración del viaje y su estimación? ____________________

c) Expliquen qué significado tienen los segmentos de la gráfica que son paralelos al eje de las abscisas. ____________________

d) ¿Cuánto tiempo en total estuvo detenido el automóvil? ____________________

e) Comparen los trayectos en que el automóvil estuvo en movimiento y expliquen en cuáles viajaron a mayor velocidad. ____________________

f) Cuando llevaban 11 horas de viaje, Amalia y su madre hicieron una parada en Guaymas, Sonora, para cargar gasolina y merendar. ¿A cuántos kilómetros de Tijuana está Guaymas? ____________________

g) La ciudad de Tepic, Nayarit, se encuentra aproximadamente a 2 000 kilómetros de Tijuana. De acuerdo con la gráfica, ¿qué tiempo de viaje llevaban al pasar por ahí? ____________________

3. Comenten con el resto de sus compañeros: ¿en qué tramos llevaban la misma velocidad?, ¿en cuáles hubo cambio de velocidad? Describan qué sucedió en el último trayecto y por qué la gráfica es curva. ____________________

Interior del Museo de las Californias, ubicado en Tijuana, Baja California; forma parte de las instalaciones del Centro Cultural Tijuana (CECUT), construido en 1982.

4. Ahora comenten las diferencias y similitudes entre las dos gráficas anteriores.

____

____

____

____

____

a) ¿A qué velocidad promedio estimaron viajar inicialmente Amalia y su madre?

____

____

b) ¿Cuánto tiempo transcurrió mientras el automóvil estuvo en movimiento?

____

____

Dato interesante

Tijuana es una de las ciudades mexicanas más visitadas y es ejemplo de nuestra diversidad cultural. Se fundó el 11 de julio de 1889. Se sabe que ese lugar lo habitaban los kumiai. En el censo de 2010 se registró que en el estado de Baja California había un total de 381 hablantes de esta lengua indígena.

c) Investiguen cuáles son los principales sitios de atracción turística y las actividades que se realizan en Tijuana y en Cancún. Anótenlas. _______________

____

d) ¿Cuáles podrían ser algunos de los motivos que tiene una persona para viajar de Tijuana a Cancún? _______________

____

5. En grupo, y con su maestro, lean y analicen la siguiente información:

Las gráficas que han leído, interpretado y construido en esta secuencia son una representación de la relación de dependencia que hay entre dos variables. A este tipo de relación se le llama *función* porque a cada valor asignado a la variable independiente le corresponde un único valor de la otra variable, la cual es dependiente de la primera.

Observen en las gráficas anteriores cómo a cada día del año le corresponde una y sólo una duración en horas de la luz solar. Para el caso del viaje de Amalia y su madre, la cantidad de kilómetros recorridos depende del tiempo. Así, en el caso de la duración de la luz solar, la variable independiente es el día del año, y la depediente, el número de horas de luz solar que le corresponde a ese día.

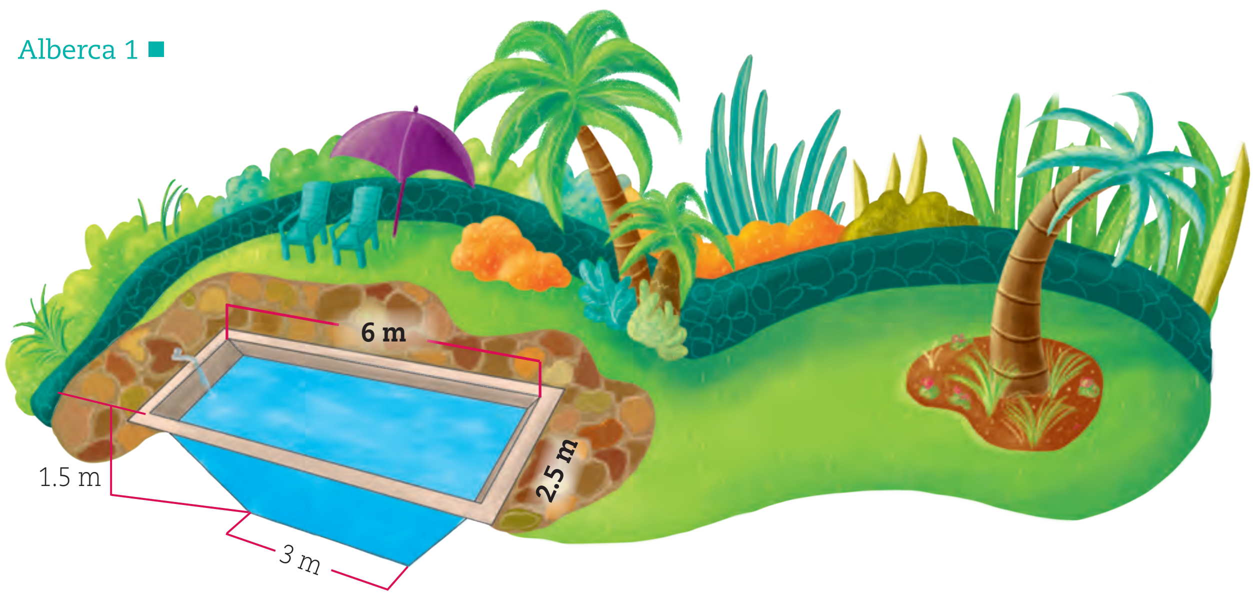
Para terminar

Albercas

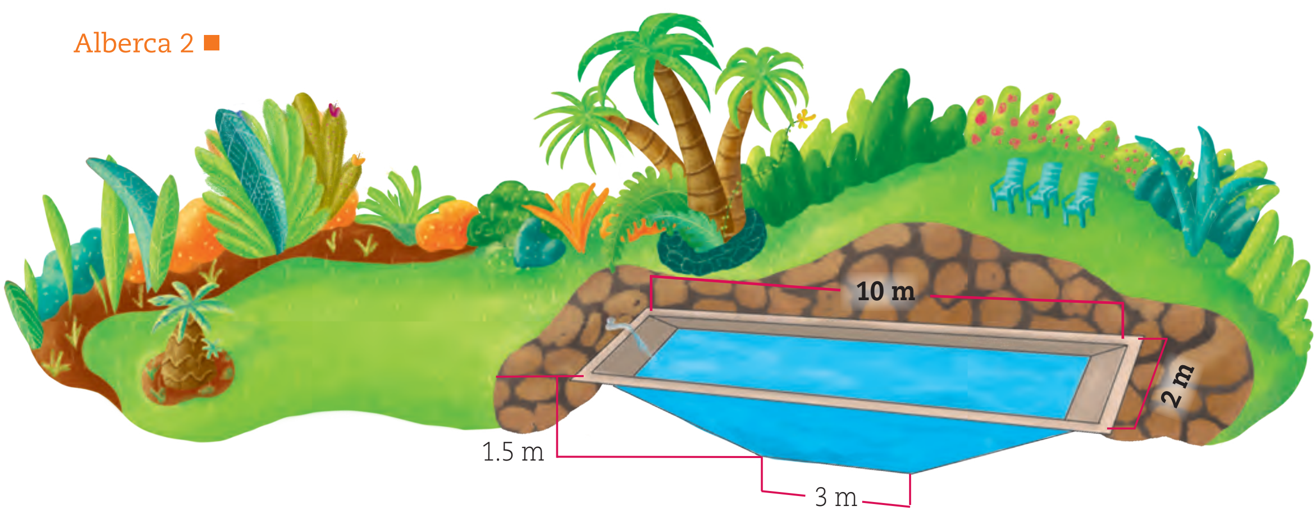
Actualmente, la ciudad de Cancún es uno de los principales centros turísticos de México y del mundo. Genera gran cantidad de empleos y una parte importante de la población del país emigra hacia allá para trabajar. Entre las muchas actividades que se realizan está el mantenimiento a las albercas de casas y hoteles.

1. Trabajen en pareja. Consideren la situación y realicen lo que se les indica.
   Las siguientes imágenes representan las dos albercas que Fabián comienza a llenar a las seis de la mañana mediante un sistema de encendido manual. Cada una tiene su propia llave y ambos sistemas expulsan la misma cantidad de agua.

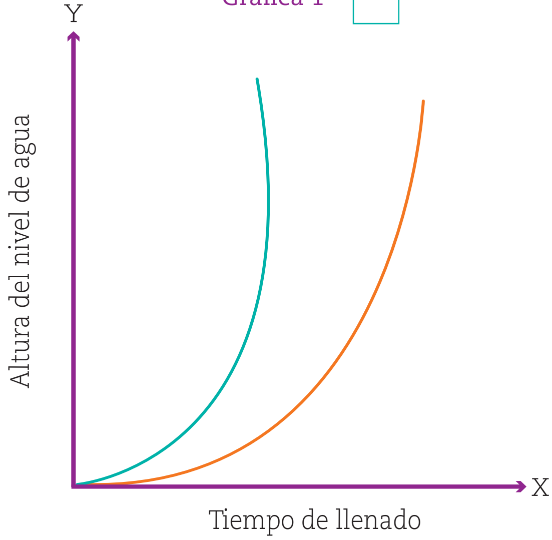
Alberca 1



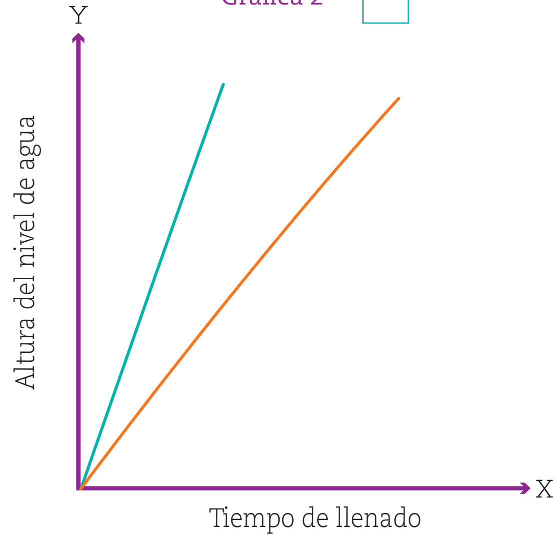
Alberca 2



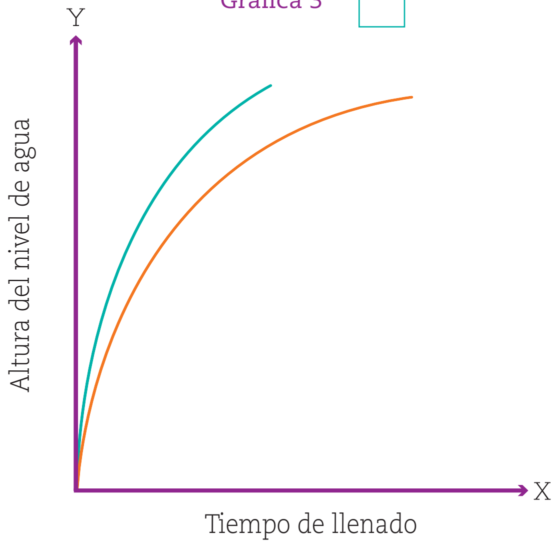
Gráfica 1 ☐



Gráfica 2 ☐



Gráfica 3 ☐



Alberca 1 ■ Alberca 2 ■

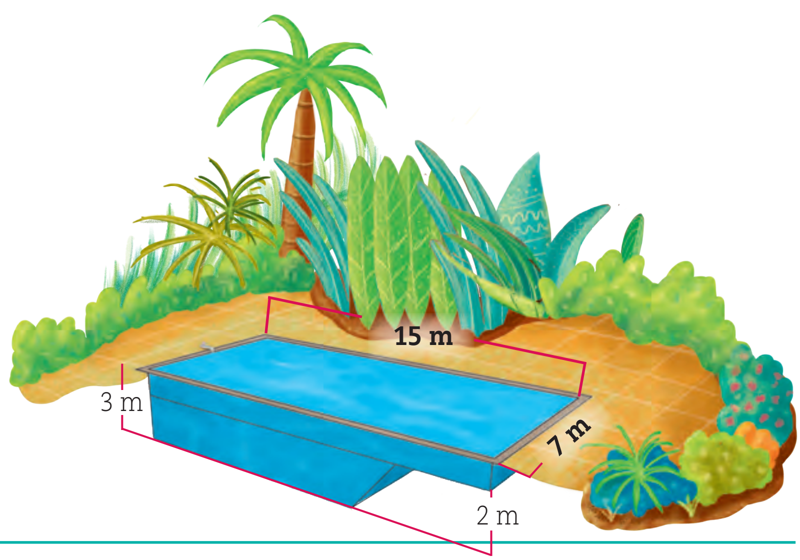
a) Indiquen con una ✓ cuál es la gráfica que representa el comportamiento del llenado de las dos albercas. Justifiquen su elección.

____

____

b) ¿En cuál de las dos albercas se tiene que cortar primero el flujo de agua para evitar que se desborde. ______________________________

2. La siguiente imagen representa la alberca de un hotel. Para llenarla se utiliza una llave que vierte siempre la misma cantidad de agua.



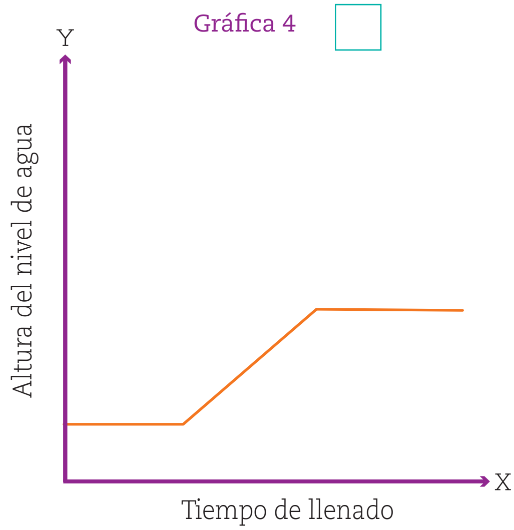
Dato interesante

No todas las piscinas están hechas y recubiertas con el mismo material, por lo que no se puede usar el mismo tipo de cloro para mantenerlas limpias. Por ejemplo, se recomienda usar 10 g de cloro en polvo al 90% por cada 10 000 L de agua en albercas que están recubiertas con pintura.

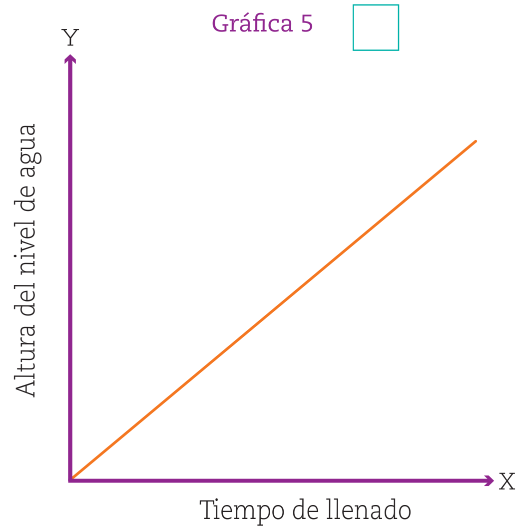
El nivel de agua de la alberca mostrada aumenta conforme el tiempo transcurre. Analicen las siguientes gráficas y seleccionen la que representa la variación del nivel de agua respecto del tiempo de llenado. Márquenla con una ✓. Justifiquen su selección: ____

____

Gráfica 4 ☐



Gráfica 5 ☐



Gráfica 6 ☐

3. Comenten sus respuestas con el grupo y con el maestro. Destaquen la dependencia entre las variables y el tipo de variación que se da.

4. Observen el recurso audiovisual *Llenado de recipientes* junto con su maestro y analicen por qué las características de los recipientes determinan si la gráfica está compuesta por líneas rectas o por curvas.

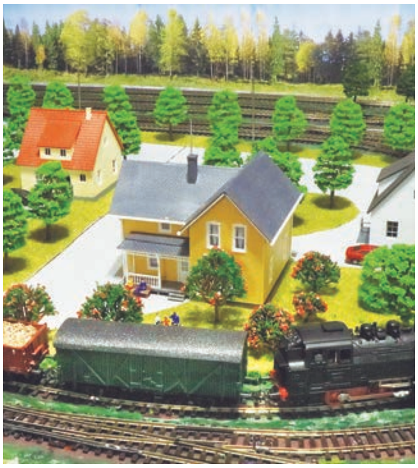
5. Usen el recurso informático *Análisis cualitativo de gráficas de relaciones de variación*, que les permitirá comprender, interpretar y observar la dependencia del valor de una de las variables o cantidades respecto de otra.

Dato interesante
Los cenotes, del maya *dz'onot*, que significa "caverna con agua", son pozos acuíferos que se alimentan de las filtraciones de la lluvia y de los ríos subterráneos. La mayoría se encuentra en la península de Yucatán. Además, algunos de ellos, al estar abiertos, son grandes albercas naturales donde se puede disfrutar de sus aguas cristalinas y refrescantes.

6. Polígonos semejantes 1

Sesión 1

Para empezar



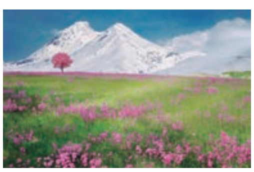
Seguramente has visto las figuras hechas a escala. La fotografía de la izquierda es de una maqueta de trenes hecha a una escala de 1:87. Esta expresión significa que las figuras de la maqueta son 87 veces más pequeñas de lo que son en la realidad. Los planos que los arquitectos hacen de las casas son un ejemplo de objetos trazados a escala. ¿Qué otros ejemplos de este tipo conoces? ¿Sabes cuáles son las características que debe reunir una figura para estar hecha a escala de otra? ¿Sabes, por ejemplo, que es imposible hacer una maqueta a escala del Sistema Solar? ¿A qué crees que se deba? En esta secuencia estudiarás un concepto matemático relacionado con las escalas: la semejanza.

Manos a la obra

Figuras a escala

1. De las siguientes fotografías, dos están a escala una de la otra, ¿cuáles son?

__________ y __________.



1

2

3

4

¿Por qué consideras que esas dos fotografías están a escala?

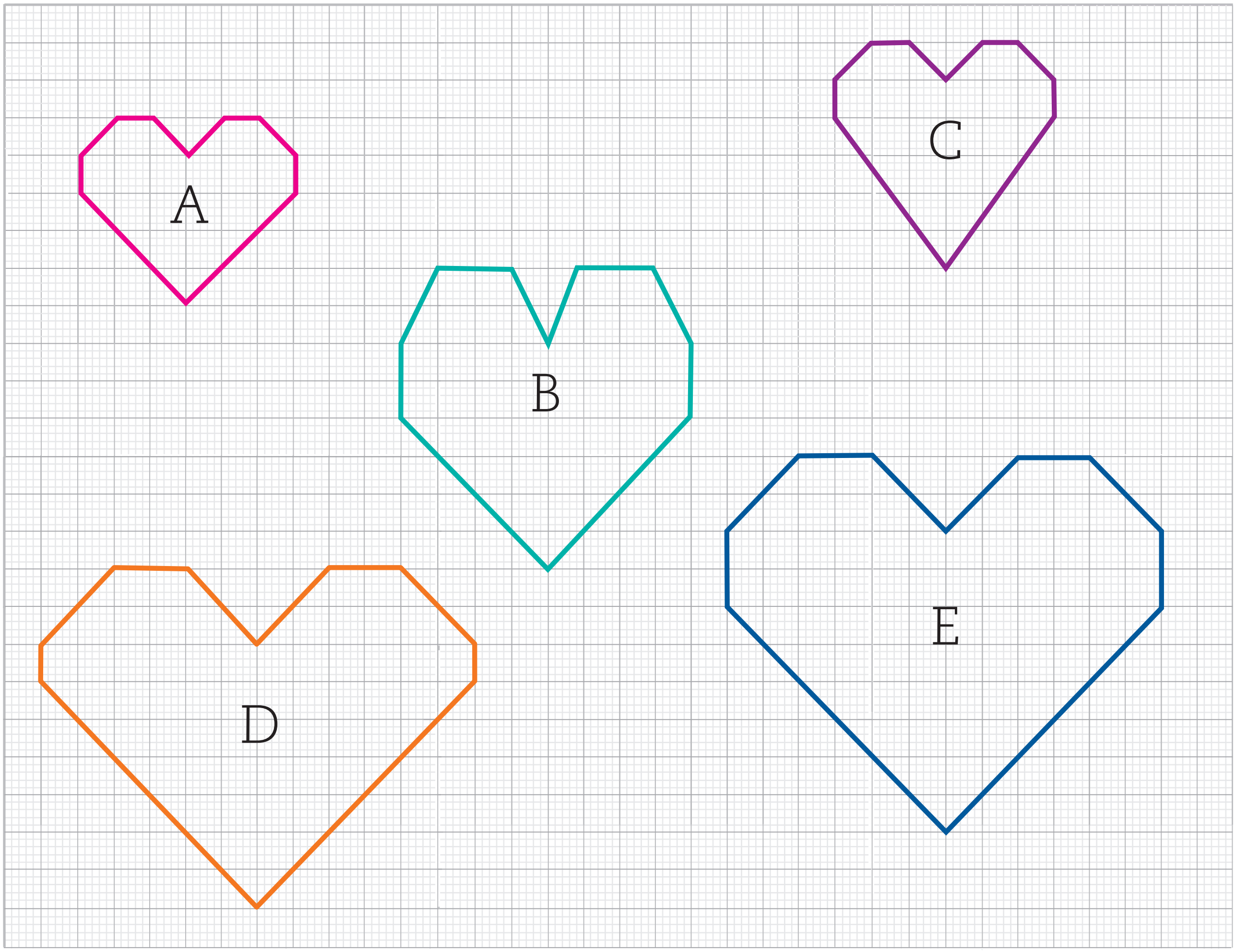
____

____

____

____

2. ¿Cuál figura está hecha a escala de la figura A? ______________________



Argumenta tu respuesta.

____
____
____
____
____
____
____
____
____
____

3. En tu cuaderno traza dos figuras a escala de la figura A y dos a escala de la figura B.

4. Compara tus respuestas con las de tus compañeros. En particular, sus argumentos en las preguntas 1 y 2, y respondan: ¿en qué se fijan para saber si una figura está hecha a escala de otra? Comenten la siguiente información y den ejemplos para cada caso.

En matemáticas, a las figuras que están hechas a escala una de la otra se les llama *figuras semejantes*.

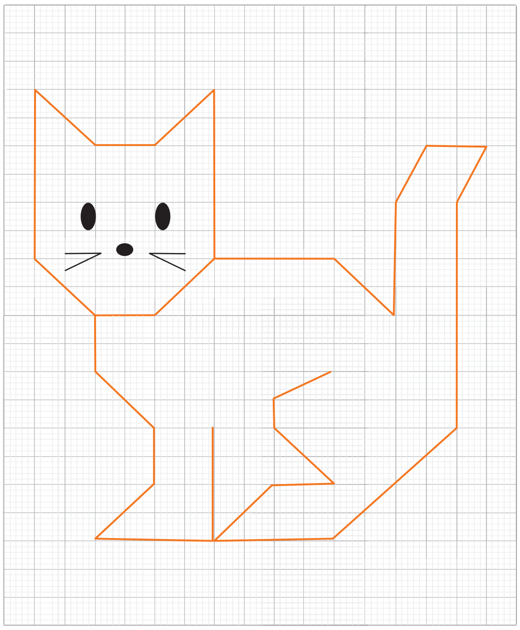
En la vida cotidiana, la palabra *semejante* se usa de otra manera: decimos que es semejante cuando es *parecido*; pero en matemáticas tiene un significado específico: que debe cumplir con ciertas condiciones.

Sesión 2

Escala o razón de semejanza

1. Trabajen en pareja. En su cuaderno, tracen las figuras F y G a escala de la figura del gato, según lo que se indica.

Dato interesante
La escala H0, también conocida como HO, es la escala del modelismo ferroviario más popular.



- Figura F: Los segmentos deben medir el doble.
- Figura G: Los segmentos deben medir la mitad.

a) ¿Cuál es la escala de la figura G respecto a la figura original? ____________
¿Por qué? ____________
____

b) ¿Cuál es la escala de la figura F respecto a la figura original? ____________
¿Por qué? ____________
____

2. Lean la siguiente información y compárenla con las respuestas de las preguntas anteriores:

Cuando una imagen se reproduce más grande o más pequeña que la original, se dice que está hecha a escala. En matemáticas, la escala también se conoce como *razón de semejanza*.

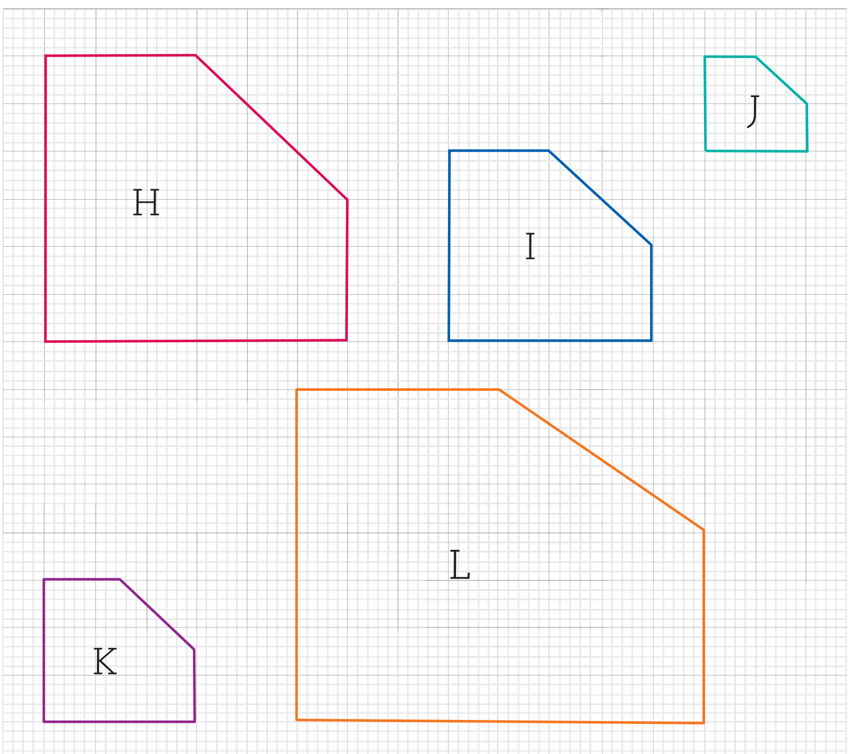
Es decir, cuando la imagen final es el doble del tamaño de la original, se dice que está hecha a escala 2:1 (que se lee como 2 a 1), o bien, que su razón de semejanza es $\frac{2}{1} = 2$.

Por otro lado, cuando la imagen final es la mitad del tamaño de la original, se dice que está hecha a escala 1:2 (que se lee como 1 a 2), o bien, que su razón de semejanza es $\frac{1}{2}$

a) ¿Cuál es la razón de semejanza de la figura G respecto a la figura F? ______________

b) ¿Cuál es la razón de semejanza de la figura F respecto a la figura G? ______________

3. Consideren los siguientes polígonos semejantes y completen la tabla.



Dato interesante
La proyección de Mercator es, en síntesis, un mapamundi. Fue creada para facilitar la navegación a los barcos, trazando sus líneas rectas. A pesar de su gran utilidad, es inexacta, pues África y Sudamérica aparecen reducidos en tamaño.

Figura original	Reproducción	Razón de semejanza de la original con la reproducción	Razón de semejanza de la reproducción con la original
H	J		
H	I		
L	K		
I	K		
L	H		

4. Comparen sus respuestas con las de sus compañeros de grupo. Platiquen cómo determinan la razón de semejanza entre dos polígonos.

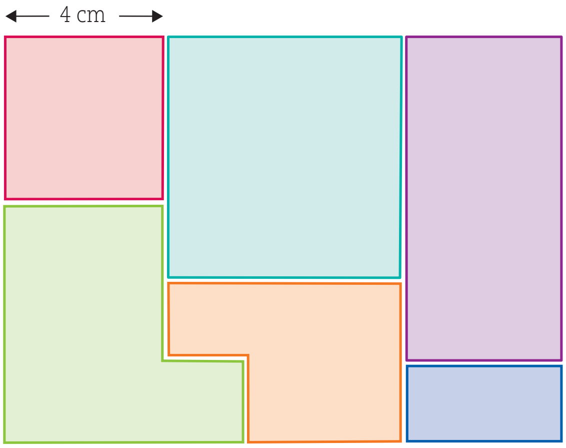
5. Trabajen con el recurso informático *Razón de semejanza* para que practiquen la determinación de esta razón entre dos polígonos.

6. En grupo y con ayuda de su maestro, investiguen la distancia al Sol y el diámetro de cada planeta del Sistema Solar. Discutan si sería posible hacer una maqueta a escala.

Sesión 3

Rompecabezas geométricos

1. Trabajen en equipo. En el recortable 2 de la página 273 encontrarán una figura como la siguiente. Hagan lo que se indica.



a) Recorten cada una de las piezas y repártanlas entre los integrantes del equipo.

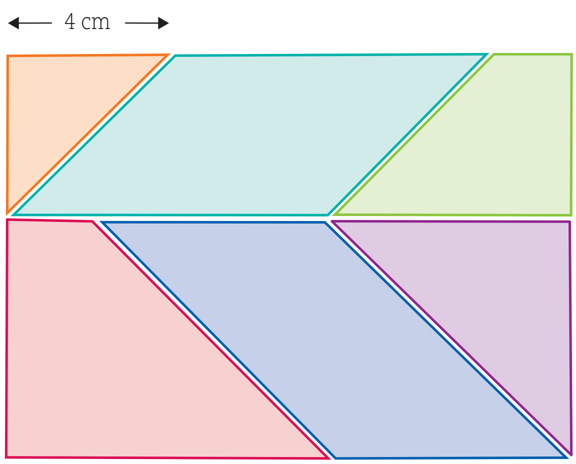
b) Cada uno trace su o sus figuras a escala de tal manera que el lado que mide 4 cm, en su figura deberá medir 3 cm.

c) Cuando todos hayan terminado, armen el rompecabezas. En caso de que las piezas no embonen, analicen qué sucedió y corrijan.

2. ¿Cuál es la razón de semejanza del rompecabezas que hicieron respecto al rompecabezas de su material recortable? ____________________

3. Comenten con los compañeros del grupo si pudieron armar el rompecabezas que trazaron, y, si tuvieron errores, a qué se debieron y cómo los corrigieron. Platiquen cómo determinaron la razón de semejanza.

4. Repitan la actividad anterior con el rompecabezas geométrico que está en su recortable 3 de la página 275. Ahora harán una ampliación de manera que el lado que mide 4 cm, en el suyo mida 5 cm.



a) ¿Cuál es la razón de semejanza del rompecabezas que hicieron respecto al rompecabezas de su material recortable? ____________________

____

b) Además de los lados, ¿qué otro dato se requiere para trazar las figuras semejantes a los romboides de este rompecabezas? ____________________

____

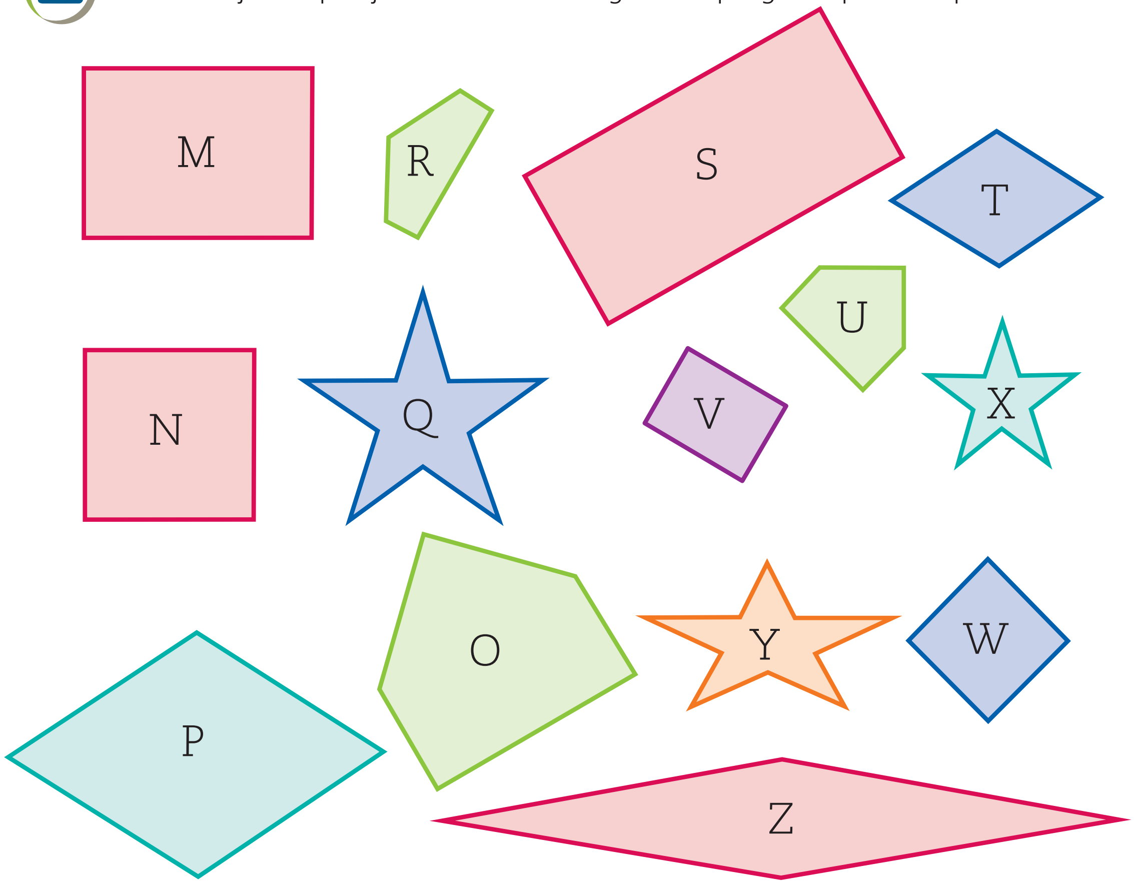
5. Comparen el rompecabezas que trazaron con los de otros compañeros del grupo. Platiquen cuáles fueron los problemas a los que se enfrentaron y si tuvieron necesidad de medir los ángulos.

6. Observen el recurso audiovisual *Construcción de polígonos semejantes*, donde analizarán la proporcionalidad de los lados y la igualdad de sus ángulos correspondientes.

Sesión 4

Polígonos semejantes

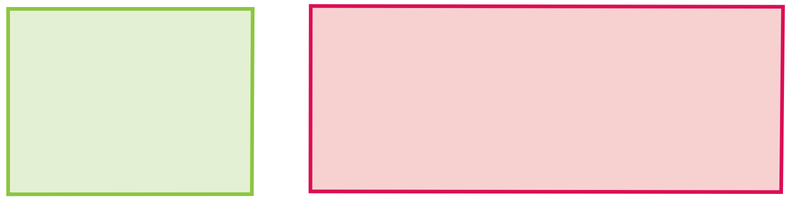
1. Trabajen en pareja. Consideren los siguientes polígonos para completar la tabla.



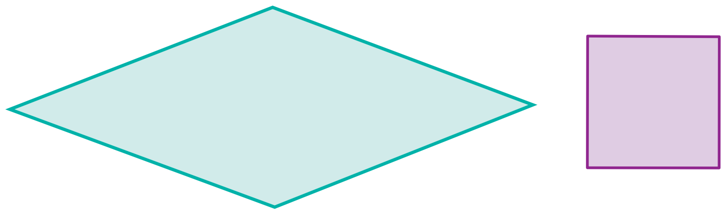
Glosario
Argumento es el razonamiento que prueba o demuestra una afirmación.

Polígono	Es semejante al polígono	Argumento
M		
N		
O		
P		
Q		

2. Consideren los dos polígonos de la derecha.
   a) ¿Son semejantes? ______________________
   b) Argumenten su respuesta. ______________________



3. Consideren los dos polígonos de la derecha.
   a) ¿Son semejantes? ______________________
   b) Argumenten su respuesta. ______________________



4. Dos argumentos respecto a los polígonos de la actividad 3 son los siguientes:
   a) *Son semejantes porque los lados del rombo miden el doble de los lados del cuadrado, la razón de semejanza es 2 a 1.*
   b) *No son semejantes porque, aunque sus lados son proporcionales (los lados de uno miden el doble de los lados del otro), sus ángulos no son iguales.*

   - ¿Con qué argumento están de acuerdo? ______________________
     ¿Por qué? ______________________

5. Comparen sus respuestas y procedimientos con los de otros compañeros; en caso necesario, corrijan. Comenten los argumentos que anotaron para determinar la semejanza de las figuras y observen que ambas condiciones (*igualdad de ángulos y proporcionalidad de lados correspondientes*) son necesarias para que las figuras sean semejantes.

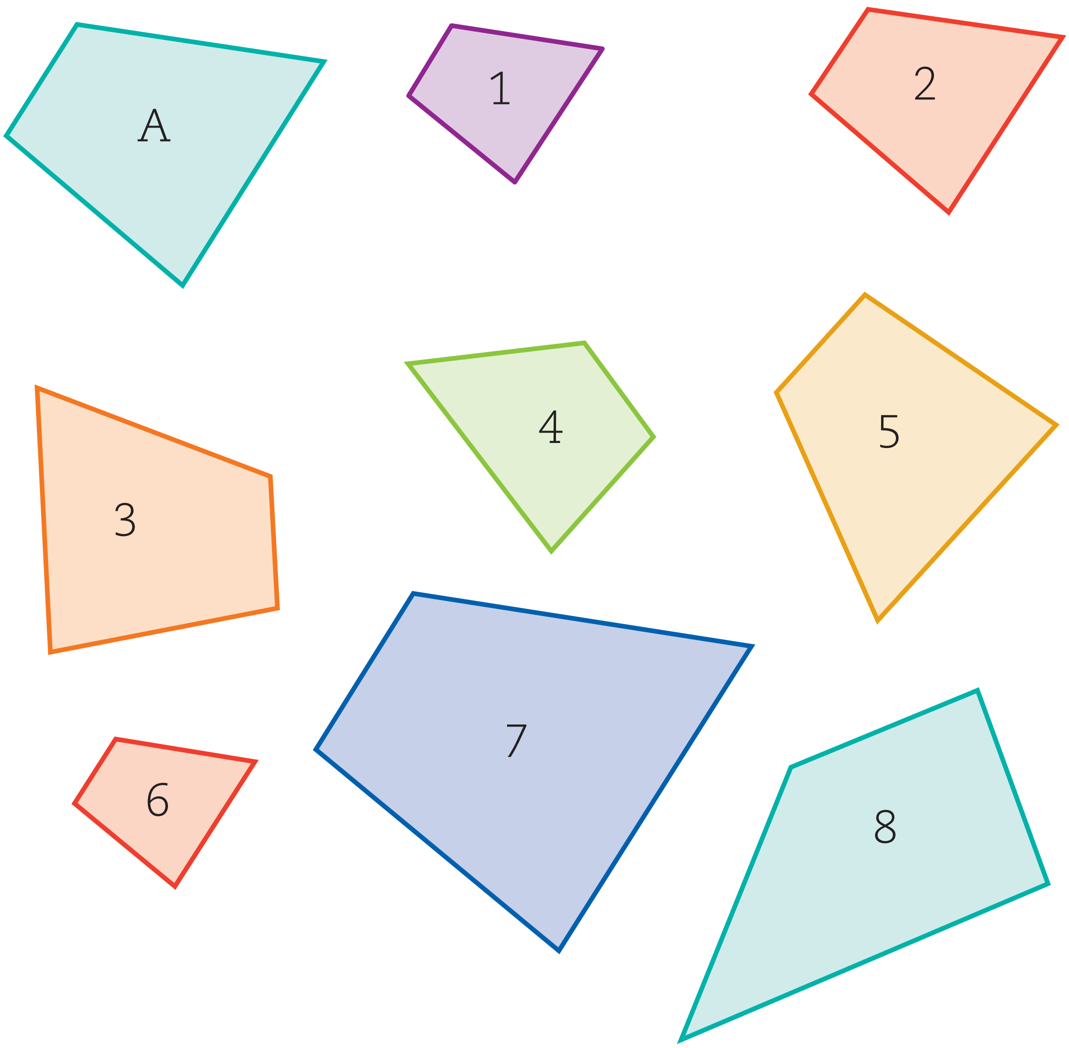
6. Lean y comenten con ayuda de su maestro la siguiente información.

Dos *polígonos son semejantes* si sus ángulos son iguales, respectivamente, y sus lados correspondientes son proporcionales, esto es, si existe entre ellos la misma razón de proporcionalidad.

Para terminar

Semejante o congruente

1. Trabajen en pareja. Consideren los siguientes polígonos.



Se dice que son *polígonos congruentes* cuando dos o más figuras tienen exactamente la misma forma y la misma medida.

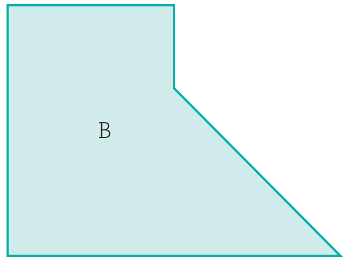
a) ¿Cuáles polígonos son congruentes con el polígono A? ____________________

b) ¿Cuáles polígonos son semejantes al polígono A? ____________________

____

____

2. Tracen lo que se indica.



Un polígono congruente con el polígono B	Un polígono semejante al polígono B, cuya razón de semejanza sea 1

a) ¿Cómo son entre sí los dos polígonos que trazaron? ____________________

b) Anoten sus conclusiones. ____________________________________

____

3. Comparen sus respuestas y sus procedimientos con otros compañeros de grupo y, en caso necesario, corrijan. Comenten si los polígonos 3 y 5, de la página 64, son semejantes, congruentes o ambos respecto al polígono A de la actividad 1 de esa misma página.

4. Platiquen y discutan en grupo y con ayuda de su maestro la siguiente afirmación:

> Todos los *polígonos congruentes* son semejantes entre sí, pero no todos los polígonos semejantes son congruentes entre sí.

5. Observen el recurso audiovisual *Aplicaciones en situaciones reales de la semejanza* para que conozcan más acerca de la semejanza.

7. Razones trigonométricas 1

Sesión 1

Para empezar

Una manera de mejorar las condiciones de vida de las personas es creando un entorno en el que se respeten sus derechos humanos, así como sus necesidades específicas. Esto representa un aspecto de la calidad de vida. Por ejemplo, una ciudad incluyente tiene espacios públicos, como parques, oficinas, puentes peatonales, banquetas, escuelas, hospitales, etcétera, con rampas de acceso para personas que usan silla de ruedas.

¿En los lugares públicos de tu comunidad hay rampas para el acceso con silla de ruedas?, ¿crees que cualquier rampa sirve para que una persona en silla de ruedas la use?, ¿qué características debe tener una rampa para que sea apropiada? Aunque no lo creas, algunas de esas características tienen que ver con la trigonometría, una rama del conocimiento de las Matemáticas que empezarás a estudiar en esta secuencia.

Manos a la obra

Rampas para sillas de ruedas

1. Trabajen en pareja. Observen las medidas que intervienen en una rampa.

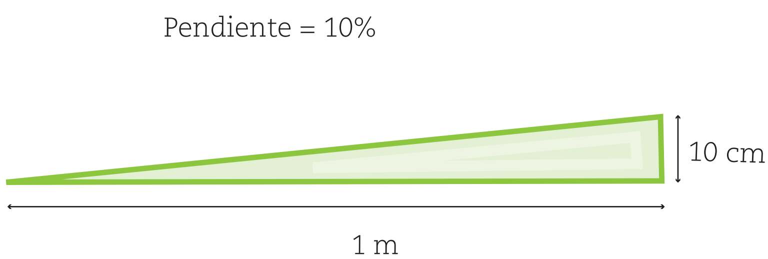
Dato interesante
Según la *Guía básica de accesibilidad para personas con discapacidad en edificios y áreas de atención ciudadana de la Secretaría de Finanzas del Estado de México*, si la longitud de una rampa para silla de ruedas es de hasta 1.50 m, su pendiente máxima debe ser de 12%, si mide entre 1.50 y 3.00 m, debe ser de 10%; hasta los 15 m, la pendiente máxima debe ser de 6%.

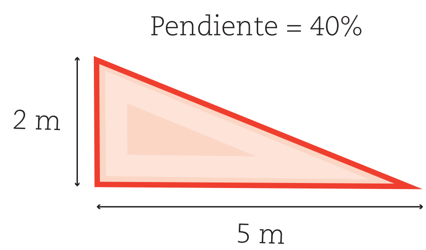
En el lenguaje coloquial se usa la expresión inclinación de la rampa para referirse a lo que, en Matemáticas, llamamos *pendiente* de la rampa.

a) ¿Consideran que la inclinación o pendiente de la rampa depende de la distancia horizontal, de la altura o de ambas? ____________________

¿Por qué? ____________________

2. La pendiente de una rampa se especifica en porcentajes. Los siguientes triángulos representan rampas. Analicen la información y anoten debajo cómo se calculó la pendiente de cada una.





3. Comparen sus respuestas con las de sus compañeros de grupo y, con ayuda de su maestro, verifiquen si son correctas. En particular, comenten lo que anotaron acerca del cálculo de la pendiente de una rampa.

4. Completen la tabla de acuerdo con la pendiente de la rampa que se indica.

Pendiente (%)	Distancia horizontal (cm)	Altura de la rampa (cm)
10	85	
6		6
8	130	
12		18
15	200	

5. Comparen sus respuestas y procedimientos con sus compañeros. Comenten la siguiente información.

La pendiente de una rampa no depende sólo de la distancia horizontal o de la altura, sino de la razón entre ambas.

$$\text{Pendiente de la rampa} = \frac{\text{altura de la rampa}}{\text{distancia horizontal}}$$

Una razón se puede expresar como porcentaje:

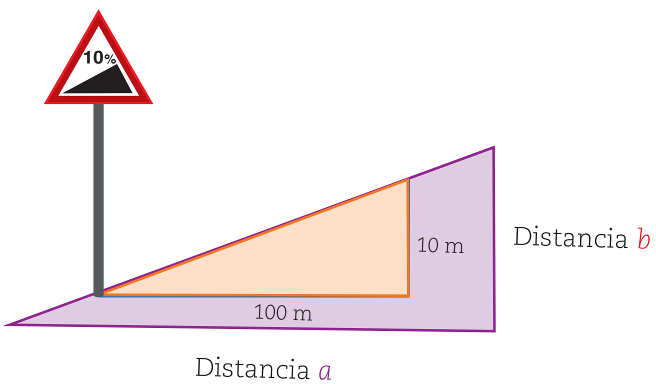
$$\text{Porcentaje de la pendiente de la rampa} = \frac{\text{altura de la rampa}}{\text{distancia horizontal}} \times 100$$

Sesión 2

Pendientes de calles y carreteras

1. Trabajen en pareja. Al igual que las rampas, la pendiente de calles y carreteras también se expresa en porcentajes. En el siguiente esquema, la distancia horizontal se representa con la letra *a* y la vertical con la *b*.

De acuerdo con el siguiente señalamiento de tránsito en la carretera, completen la tabla.



Distancia *a* (m)	Distancia *b* (m)
100	
300	
650	
	150
	225

2. Consideren que en una carretera la distancia *a* es un kilómetro y medio; y la *b*, 90 m; en otra carretera, la distancia *a* es un kilómetro y la *b*, 60 m.

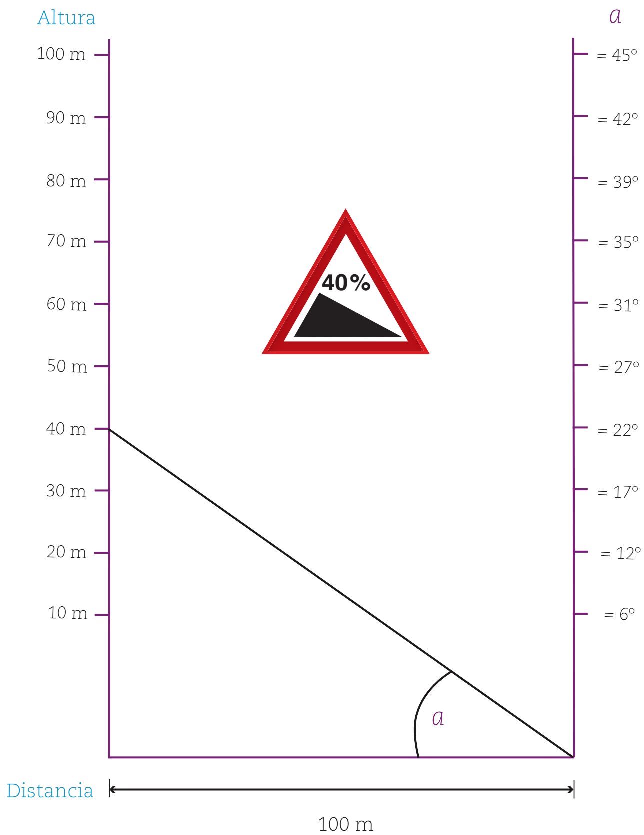
a) ¿Tienen la misma pendiente ambas carreteras? ____________________

Argumenten su respuesta. ____________

____

____

3. En el bloque 2 aprenderán a calcular los ángulos que corresponden a los porcentajes de las pendientes; por ahora, consideren el siguiente diagrama. En él se observa que a una pendiente de 40% le corresponde, aproximadamente, un ángulo de 22°.



Respondan lo siguiente.

a) Aproximadamente, ¿a qué ángulo corresponde una pendiente de 20%?

____

b) Si se tiene un ángulo de inclinación de 17°, ¿a qué porcentaje se refiere aproximadamente? ______________________________

c) La calle más inclinada del mundo se encuentra en Nueva Zelanda; tiene una pendiente de aproximadamente 35%, ¿cuál es su ángulo de inclinación?

____

Dato interesante
El signo ≈ significa aproximadamente.

4. Comparen sus procedimientos y respuestas con los de otros compañeros. Si hay diferencias, lleguen a un acuerdo. Si hay errores, corríjanlos.

5. Practiquen el cálculo de pendientes de rampas y carreteras dando solución a las situaciones que presenta el recurso interactivo *¿Cuál tiene mayor pendiente?*

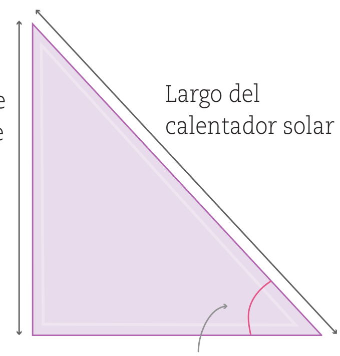
6. Observen el recurso audiovisual *Construcción de rampas de acceso y carreteras* para conocer algunos de sus diseños y planos.

Sesión 3

Calentadores solares

1. Trabajen en pareja. Un calentador solar es el aparato que capta la energía del Sol para elevar la temperatura del agua. El ángulo de inclinación con que debe colocarse depende de su longitud y de la latitud del lugar donde sea colocado. Observen y luego respondan lo que se pide.

Calentador solar



a) Para la Ciudad de México se recomienda que la altura a la que se coloque el calentador solar sea la mitad de la medida que tiene de largo. Con base en este dato, completen la siguiente tabla.

Largo del calentador solar (m)	Altura del calentador solar (m)
1.50	
	0.80
1.80	
2.3	
	1.45

Dato interesante
Los calentadores solares son inocuos para el medio ambiente porque no emiten contaminantes, ¡y fueron inventados hace más de un siglo!

b) El ángulo de inclinación de los calentadores solares indicados en la tabla, ¿es el mismo o varía? ________________ Argumenten su respuesta. ________________

____

2. En el municipio de Álamos, en Sonora, la altura a la que debe colocarse el calentador solar es de $\frac{6}{10}$ de su medida de largo. Tomen en cuenta esta información para completar la siguiente tabla.

Largo del calentador solar (m)	Altura a la que debe colocarse el calentador solar (m)
1.50	
	0.80
1.80	
2.3	
	1.45

Respondan.

a) El ángulo de inclinación de los calentadores solares indicados en la tabla, ¿es el mismo o varía? ______

Argumenten su respuesta. ______

b) El ángulo de inclinación de un calentador solar instalado en la Ciudad de México, ¿es igual al de uno instalado en el municipio de Álamos? ______

Argumenten su respuesta. ______

c) Si su respuesta al inciso b) fue negativa, ¿cuál de los dos ángulos es mayor y cómo lo saben? ______

______

3. En cierto lugar, un plomero instaló correctamente un calentador solar que mide 2 m de largo, a una altura de 30 cm.

a) ¿Cuál es la razón entre la altura y la longitud del calentador solar? ______

b) En este mismo lugar, ¿cuál es la altura a la que se debe colocar un calentador que mide un metro y medio? ______

4. Comparen sus respuestas y procedimientos con los de otros compañeros. Comenten la siguiente información.

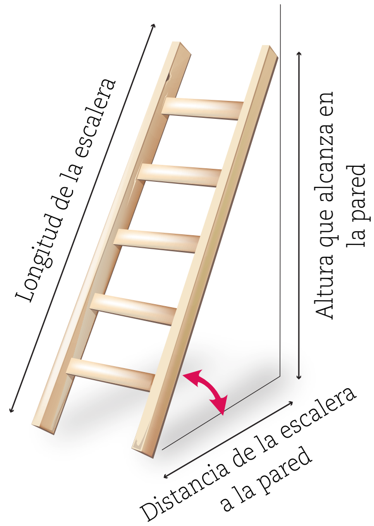
El ángulo de inclinación al que se coloca un calentador solar no depende sólo de su longitud o de su altura, sino de la razón entre ambas, es decir:

$$\textit{Razón para determinar el ángulo de inclinación} = \frac{\textit{altura a la que debe colocarse el calentador}}{\textit{longitud del calentador}}$$

Sesión 4

Escaleras de mano

1. Trabajen en pareja. Observen la imagen de una escalera recargada en una pared.



El ángulo marcado con rojo es el ángulo de inclinación de la escalera.

a) Imaginen que la escalera de la imagen se desliza hacia el frente; completen la tabla en función de lo que pasaría. Usen las siguientes etiquetas.

aumenta | disminuye | queda igual

La distancia de la escalera a la pared…	La altura que alcanza la escalera en la pared…	El ángulo de inclinación de la escalera…

Glosario
Zanca es cada uno de los maderos inclinados que sirven de apoyo a una escalera.

2. En una bodega hay dos escaleras; la escalera A es más larga que la B; ambas están colocadas de modo que sus zancas respectivas están a una distancia de medio metro de la pared.

a) ¿Cuál escalera alcanza mayor altura en la pared? ____________

b) ¿Cuál de las dos escaleras forma un ángulo de inclinación mayor? ____________

____

3. En la bodega hay otro par de escaleras; la M es más alta que la escalera N. Ambas alcanzan una altura de 2 m al recargarse en una pared.

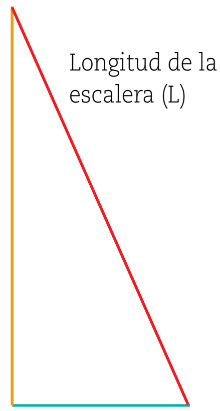
a) ¿Cuál de las dos escaleras está colocada a una distancia mayor de la pared?

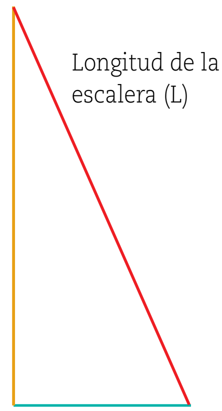
____

b) ¿Cuál escalera forma un ángulo de inclinación mayor? ____________

4. Entre las medidas de seguridad para colocar una escalera de mano se recomienda que la distancia a la pared sea, como mínimo, de $\frac{1}{4}$ de su longitud, y como máximo, de $\frac{1}{3}$. En los siguientes diagramas, el segmento rojo representa la escalera.

Con base en esta información, completen la siguiente tabla.





Escalera	Longitud de la escalera (m)	Distancia mínima a la pared (m)	Distancia máxima a la pared (m)
A	2		
B	2.5		
C	2.8		
D		0.75	
E		0.80	

5. Resuelvan y respondan.

a) Una escalera que mide 2.4 m se ha colocado a 0.7 m de la pared, ¿es recomendable ubicarla a esta distancia? ____________________

Argumenten su respuesta. ____________________

b) Una escalera que mide 2 m se ha colocado a 0.50 m de la pared, y otra que mide 1.6 m se ha puesto a 0.40 m de la pared. ¿Cómo son entre sí los ángulos de inclinación de estas escaleras? ____________________

Argumenten su respuesta. ____________________

6. Comparen sus respuestas y procedimientos con los de sus compañeros con ayuda del maestro. Comenten la siguiente información:

El ángulo de inclinación que la escalera forma con el piso no depende sólo de la longitud de la escalera o de su distancia a la pared, sino de la razón entre ambas:

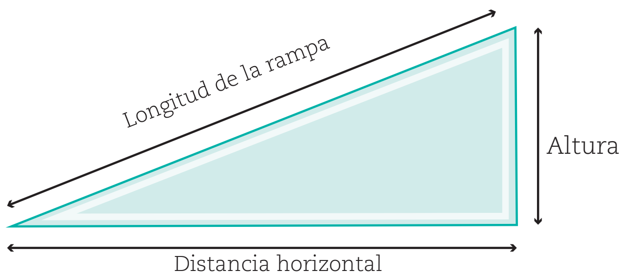
$$\textit{Razón para determinar el ángulo de inclinación} = \frac{\textit{distancia a la pared}}{\textit{longitud de la escalera}}$$

Para terminar

Rampas, calentadores solares y escaleras

1. Trabajen en pareja. En cada caso anoten lo que se pide.

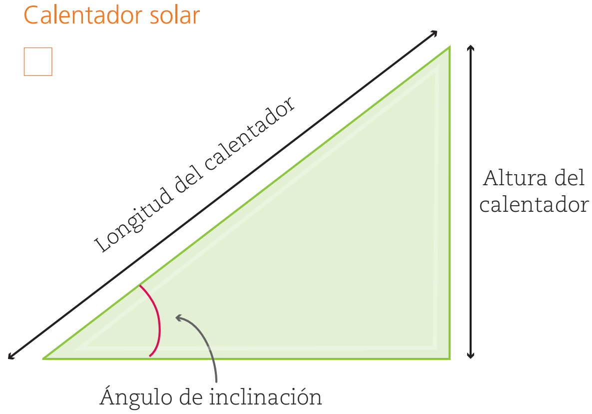
Rampa



a) La rampa A tiene una distancia horizontal de 2 m y una altura de 0.4 m.

La rampa B tiene la misma pendiente que la rampa A y una distancia horizontal de 3 m, ¿cuál es su altura?

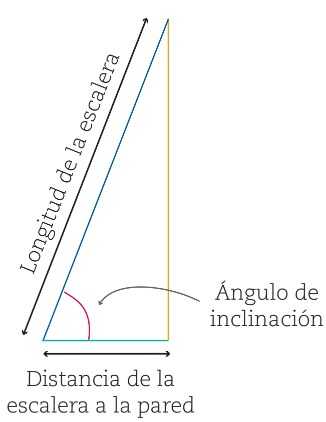
Calentador solar



b) El calentador solar C mide 2.5 m de largo y se ha colocado a una altura de 1.35 m.

El calentador solar D tiene el mismo ángulo de inclinación que el calentador solar C; si se colocó a una altura de 0.8 m, ¿cuánto mide de largo?

Escaleras de mano



c) La escalera de mano E mide 3.5 m de longitud y se encuentra a una distancia de la pared de 0.8 m.

La escalera de mano F está a 0.5 m de la pared y forma con ella un ángulo de inclinación igual al de la escalera E, ¿cuál es la longitud de la escalera F?

2. En cada gráfico anoten dentro del recuadrito anaranjado: 1 para la situación en la que el ángulo de inclinación o pendiente sea el mayor; luego 2, al siguiente, y así sucesivamente, para identificar su jerarquía en función de su ángulo. Si dos ángulos de inclinación son iguales, asígnenles el mismo número.

a) Rampas

Distancia horizontal (m)	Distancia vertical (m)	Pendientes de mayor a menor
0.5	0.25	
0.5	0.2	
1	0.2	
1	0.1	
2	0.1	

b) Calentadores solares

Longitud del calentador solar (m)	Altura a la que se coloca el calentador solar (m)	Ángulo de inclinación de mayor a menor
1	0.5	
1	0.3	
1.5	0.5	
1.5	0.25	
2	0.6	

c) Escaleras de mano

Longitud de la escalera (m)	Distancia a la pared (m)	Ángulo de inclinación de mayor a menor
1	0.25	
1	0.33	
2	0.5	
2	0.33	
2.5	0.5	

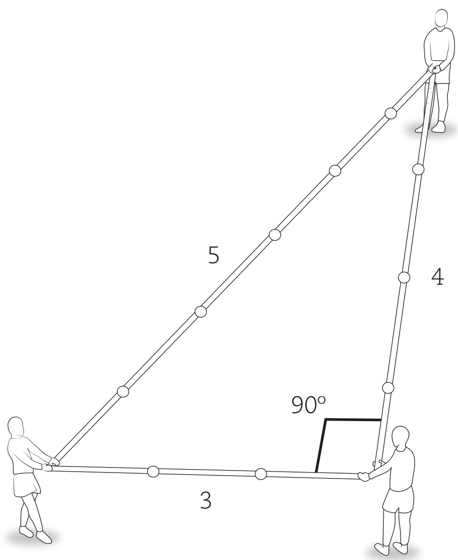
3. Comparen sus resultados con los de sus compañeros de grupo. En particular es importante que comenten cómo determinaron el orden de las pendientes o de los ángulos de inclinación en las situaciones anteriores. Si no llegan a un acuerdo, pueden dejarlo así por el momento; en el bloque 2 seguirán estudiando estas situaciones y podrán comprobar sus respuestas.

4. Observen el recurso audiovisual *Aplicaciones de la trigonometría* para conocer otras aplicaciones de la trigonometría, además de las mostradas en esta secuencia.

8. Teorema de Pitágoras 1

Sesión 1

Para empezar



Cuerda de 12 nudos estirada.

Según un documento histórico escrito en el siglo IV, los desbordes del río Nilo, en Egipto, originaron que los antiguos egipcios desarrollaran diversos contenidos matemáticos por la necesidad de marcar los límites de los terrenos colindantes con el río. Para señalar los ángulos rectos de los terrenos usaban la cuerda de los 12 nudos, con la cual formaban un triángulo que medía 3, 4 y 5 unidades. Si el ángulo que forman los lados de 3 y 4 unidades mide 90°, ¿qué contenido geométrico está detrás del método de la cuerda de los 12 nudos? ¿Sabes cómo determinan en tu comunidad los ángulos para marcar los linderos de un terreno rectangular?, ¿cómo determinan los ángulos rectos al construir una casa?

En esta secuencia estudiarás el teorema de Pitágoras, que justifica el método de la cuerda de los 12 nudos.

Busca la obra *Historia de las matemáticas*, de Andrés Sestier, en ella encontrarás ésta y otras historias.

Manos a la obra

¿Existe o no el triángulo?, ¿es o no rectángulo?

1. Trabajen en pareja. Lean y contesten las siguientes preguntas y justifiquen sus respuestas en el cuaderno. Conforme avancen en el estudio de esta secuencia, podrán regresar a esta sección y revisar nuevamente si sus respuestas son correctas.

a) ¿Con tres medidas cualesquiera es siempre posible construir un triángulo? ____

¿Por qué? ____

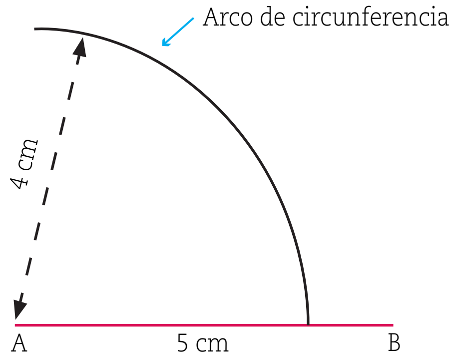
b) ¿Qué características deben cumplir las medidas de los lados de un triángulo para que sea rectángulo? ______________________________

Un *triángulo rectángulo* es el que tiene un ángulo recto, es decir, un ángulo de 90°.

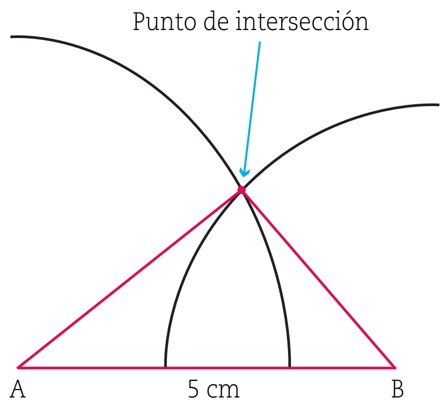
2. Utilicen su juego de geometría para trazar, en el cuaderno, el triángulo de los 12 nudos con medidas 4 cm, 3 cm y 5 cm a partir de los tres pasos siguientes:

Paso 1: Elijan una medida y tracen un segmento de esa medida, por ejemplo, 5 cm.

Paso 2: Tracen un arco de circunferencia con centro en uno de los extremos del segmento, y de radio, otra de las medidas. En este caso, elegimos 4 cm.



Paso 3: Tracen otro arco de circunferencia, ahora con centro en el otro extremo y con radio igual a la medida que falta, en este caso, 3 cm. Unan los extremos del segmento con el punto de intersección de los dos arcos. ¡Y listo! Tienen el triángulo con las medidas indicadas.



3. Respondan en su cuaderno.

a) El triángulo que se obtiene, ¿es rectángulo? ____________________

b) ¿Cómo lo saben? ____________________

c) ¿Qué relación tiene este triángulo con el que se formó con la cuerda de los 12 nudos? ____________________

4. Con el procedimiento anterior, tracen en su cuaderno los triángulos con las medidas indicadas en la siguiente tabla y complétenla.

Medidas de los lados (cm)	¿Existe el triángulo?	¿Es un triángulo rectángulo?
9, 5, 7		
5, 12, 13		
1, 3, 10		
8, 2, 5		
10, 6, 8		

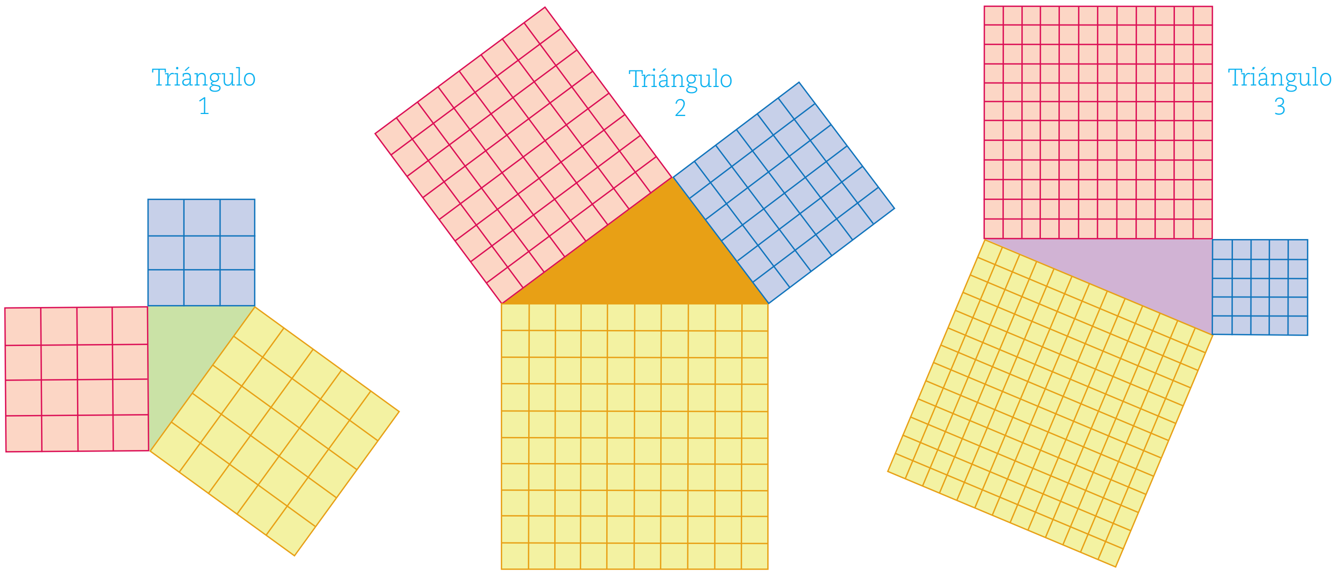
5. Comparen en grupo sus respuestas. Luego, revisen la respuesta que dieron a la primera pregunta de la actividad 1 y, en caso necesario, corríjanla. Para revisar la segunda pregunta, seguiremos investigando en las siguientes sesiones.

6. Comenten cómo determinaron en qué casos el triángulo es rectángulo.

Sesión 2

¡A calcular áreas!

1. Trabajen en pareja y realicen las siguientes actividades.
   a) En la sesión anterior encontraron algunas ternas para las medidas de los lados que forman un triángulo rectángulo. Ahora, tomando como unidad de superficie el cuadrado pequeño ( ), calculen el área de los cuadrados construidos sobre los lados de cada triángulo rectángulo e identifiquen el ángulo recto de cada uno de ellos. Luego, completen la tabla.



En un triángulo rectángulo, los lados que forman el ángulo recto se llaman *catetos* y el lado opuesto al ángulo recto se llama *hipotenusa*.

Triángulo	Área del cuadrado naranja construido sobre un cateto	Área del cuadrado azul construido sobre un cateto	Área del cuadrado amarillo construido sobre un cateto
1			
2			
3			

2. De acuerdo con los resultados de la tabla, subrayen la afirmación que se cumple para los tres triángulos rectángulos de la página anterior.

Afirmación a: La suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos es mayor que el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa.

Afirmación b: La suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos es menor que el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa.

Afirmación c: La suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos es igual que el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa.

3. ¿Creen que la afirmación que subrayaron se cumple para todos los triángulos rectángulos? Pensando en esto, realicen lo siguiente:

a) Completen la tabla.

Área del cuadrado construido sobre un cateto (cm^2)	Área del cuadrado construido sobre el otro cateto (cm^2)	Área del cuadrado construido sobre la hipotenusa (cm^2)
8	5	
	9	13
20		50
1.5	4.5	
8.32		12.45

b) ¿Cuánto miden los catetos y la hipotenusa del segundo triángulo de la tabla anterior? __________

¿Cómo lo supieron? __________

____

____

c) Calculen la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo si sus catetos miden 15 cm y 36 cm. __________

____

Dato interesante
Puedes usar tu calculadora para encontrar la raíz cuadrada de un número usando la tecla $\sqrt{\ }$.

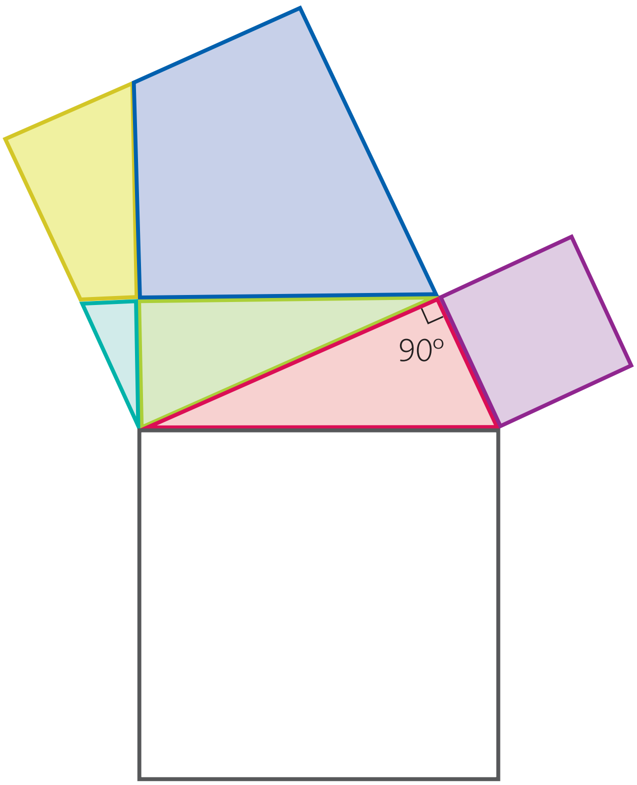
4. Comenten las respuestas con sus compañeros y, con la ayuda de su maestro, observen que la característica que encontraron para los lados de un triángulo rectángulo se cumple para los casos particulares que han estudiado. Ahora falta probar si se cumple para otros triángulos rectángulos, lo cual tendrán la oportunidad de hacer en las siguientes sesiones.

Sesión 3

Armemos rompecabezas

1. Trabajen en pareja. En la sesión 2 pudieron comprobar que en los triángulos rectángulos considerados se cumple lo siguiente.

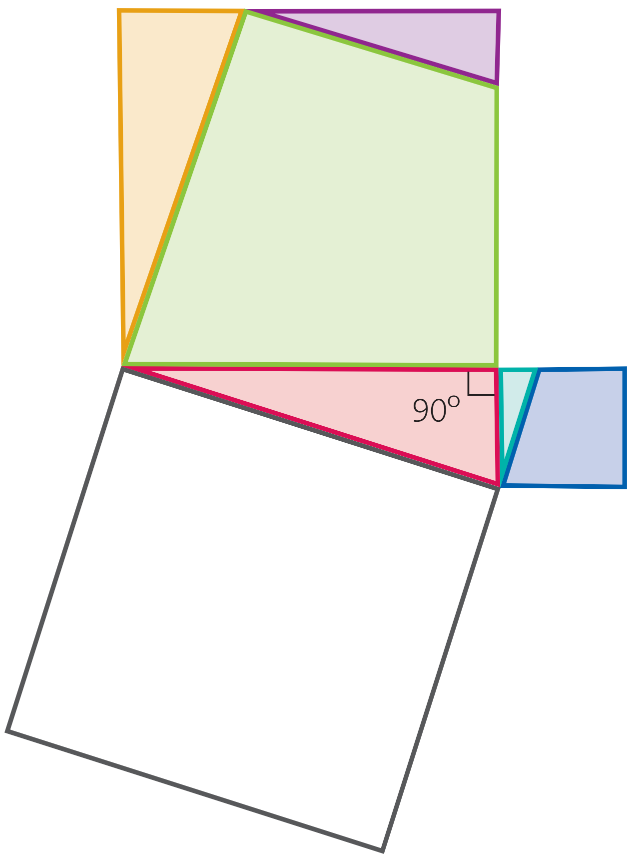
> La suma del área de los cuadrados construidos sobre los catetos de un triángulo rectángulo es igual que el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa. Esta afirmación se conoce como el *teorema de Pitágoras*.



Realicen las siguientes actividades para averiguar si esto se cumple en otros triángulos rectángulos.

a) En el recortable 4 de la página 277 encontrarán una figura como la de la izquierda. Recorten las cinco figuras que forman los cuadrados construidos sobre los catetos del triángulo rojo y, a manera de rompecabezas, formen el cuadrado que tiene por lado la hipotenusa. Cuando lo hayan armado, peguen las cinco piezas sobre él.

b) Repitan la actividad anterior, pero ahora recorten los triángulos que se encuentran en los catetos del triángulo rojo en el recortable 4 de la página 277.



2. En el cuaderno, realicen la siguiente construcción:

Paso 1: Tracen un triángulo rectángulo con tres lados de diferente medida.

Paso 2: Construyan un cuadrado sobre cada uno de sus tres lados.

Paso 3: Encuentren el centro del cuadrado construido sobre el cateto mayor. Tracen una paralela a la hipotenusa que pase por ese centro y corte a los lados del cuadrado.

Paso 4: Tracen una perpendicular a la hipotenusa que pase por ese centro y corte a los lados del cuadrado.

Después de los trazos de los pasos 3 y 4, el cuadrado del cateto mayor ha quedado dividido en cuatro partes; recórtenlas. También recorten el cuadrado del cateto menor y, a manera de rompecabezas, formen el cuadrado de la hipotenusa.

Dato interesante
E. S. Loomis catalogó, en 1927, 371 pruebas diferentes del teorema de Pitágoras, las cuales se pueden consultar en su libro *The Pythagorean Proposition*. En la liga: bit.ly/34C5NTw pueden verse 122 gráficos que comprueban el teorema.

3. Con apoyo de su maestro, comparen sus respuestas y trazos con sus compañeros. Muestren la manera en que armaron el cuadrado construido sobre la hipotenusa a partir de las piezas de los cuadrados de los catetos.

4. Observen y comenten el recurso audiovisual *Pruebas geométricas del teorema de Pitágoras* para conocer otras pruebas geométricas de este famoso teorema.

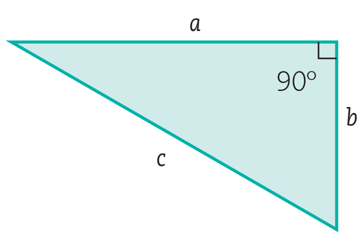
Para terminar

Sesión 4

Pruébalo ahora ¡con álgebra!

1. Trabajen en pareja. En las dos sesiones anteriores exploraron que en un triángulo rectángulo la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos es igual que el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa, lo cual enuncia el teorema de Pitágoras.

Ahora explorarán esta relación usando el álgebra. En esta actividad se nombran como a y b los catetos de los distintos triángulos rectángulos que se presentan, y como c, la hipotenusa.

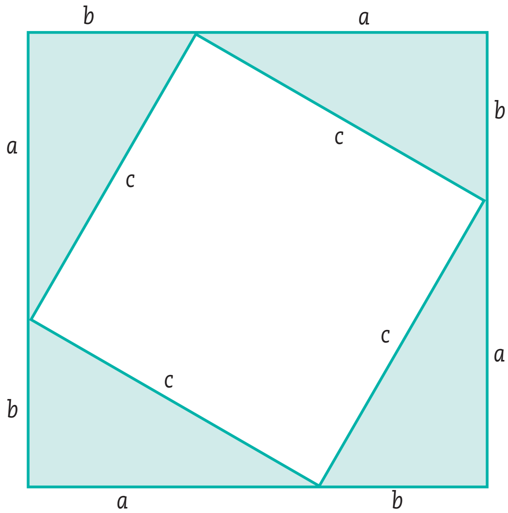


Por el teorema de Pitágoras se tiene que $a^2 + b^2 = c^2$.

En los próximos ejercicios usen cada una de las figuras siguientes para demostrar algebraicamente que $a^2 + b^2 = c^2$.

2. Respondan lo siguiente, según observen en la figura 1.

Figura 1



a) Calculen el área del cuadrado cuyo lado mide $a + b$.	
b) Calculen el área del mismo cuadrado a partir de la suma de las áreas de los cuatro triángulos rectángulos más el área del cuadrado cuyo lado mide c.	
c) Igualen los resultados que encontraron en los incisos a) y b). Luego, simplifiquen (si es necesario revisen lo que estudiaron en la secuencia 3).	

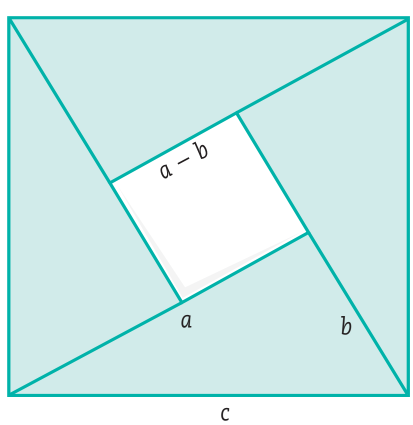
- ¿Qué relación encuentran entre este ejercicio y el teorema de Pitágoras?

____

____

3. A partir de la figura 2, contesten.

Figura 2



a) Calculen el área del cuadrado cuyo lado mide c.	
b) Calculen el área del mismo cuadrado considerando que es la suma de las áreas de los cuatro triángulos rectángulos y el área del cuadrado cuyo lado mide $a - b$.	
c) Igualen los resultados que encontraron en los incisos a) y b). Luego, simplifiquen.	

- ¿Qué relación encuentran entre este ejercicio y el teorema de Pitágoras?

____

____

- ¿Qué relación encuentran entre este ejercicio y el de la figura 1? ______

- ¿Qué relación encuentran entre los ejercicios de las figuras 1 y 2 y el teorema de Pitágoras? ______

Dato interesante
El artículo 27 constitucional protege la integridad de las tierras de las comunidades y la naturaleza jurídica de los ejidos. En las regiones indígenas coexisten tres tipos de tenencia: bienes comunales, ejidos y ejidos que operan según la Ley de la Reforma Agraria.

4. Comparen sus respuestas y procedimientos con otros compañeros y, con ayuda de su maestro, corrijan en caso necesario.

a) Elaboren un apunte en su cuaderno, titúlenlo "Teorema de Pitágoras", anoten lo que éste enuncia e ilústrenlo.

b) Revisen nuevamente sus respuestas de la actividad 1 de la sesión 1 de esta secuencia. ¿Han cambiado sus respuestas? ____ ¿Por qué? ______

5. Utilicen el recurso informático *Otras pruebas del teorema de Pitágoras*, donde practicarán otras maneras de probar este teorema.

6. Observen el recurso audiovisual *El teorema de Pitágoras* para que conozcan más acerca de su historia y algunos de sus usos.

7. En grupo, y con apoyo de su maestro, comenten las respuestas que dieron a la pregunta: "¿Sabes cómo determinan en tu comunidad los ángulos para marcar los linderos de un terreno rectangular?" de la sección "Para empezar".

Particularmente, comenten la manera en que se distribuye el territorio de su localidad: ¿qué áreas son comunitarias, ejidales o privadas? ¿Cómo se trazan y se determina el uso de los terrenos? Comenten los beneficios que tiene cada tipo de terreno, según su punto de vista.

8. Individualmente, investiga si en tu localidad existe algún programa de regularización de propiedades de terrenos e inmuebles y cuál es la importancia de contar con los títulos de propiedad y acreditación de tenencia de la tierra.

9. Eventos mutuamente excluyentes 1

Para empezar

Sesión 1

Un espacio para conocer las tradiciones culturales, recreativas y de entretenimiento en nuestro país son las fiestas y ferias. En ellas se ofrece la oportunidad de vivir lo más representativo de la cultura popular y regional mexicana. La Feria Nacional de San Marcos, también conocida como feria de Aguascalientes, es una de las más importantes. Entre las principales muestras que ofrece se encuentra el Campeonato Nacional de Charrería. ¿Sabes de alguna fiesta o feria que se celebre en tu localidad? ¿Conoces algunas de las actividades culturales y recreativas que se realizan en México?

Una de las atracciones en la mayoría de las ferias son los juegos de azar, como la ruleta y los dados. ¿Has podido probar suerte en alguno de ellos? En esta secuencia jugaremos un poco para analizar los resultados posibles y determinar la probabilidad de ganar.

Manos a la obra

Carreras de caballos

1. Trabajen en grupo. Realicen el juego "Carreras de caballos" considerando las siguientes indicaciones:
   - **a)** Los números del tablero representan a los caballos que participan en la carrera. Cada jugador elige un número y coloca su ficha sobre ese número.
   - **b)** Cada jugador lanza dos dados no trucados y se suman los puntos que caen en la cara superior de cada dado. La suma indica el número del caballo que avanzará una casilla.
   - **c)** El jugador que avanza deberá anotar la pareja de números que le permitió avanzar en la casilla correspondiente. Por ejemplo, si al lanzar los dados caen (5, 4), avanza el caballo 9 y en la primera celda se anota esa pareja de números.
   - **d)** Gana el caballo que primero avance las 10 casillas.

   Antes de iniciar el juego, realicen las siguientes predicciones:
   - ¿Qué caballo es su favorito? ______________________
   - ¿En qué orden creen que llegarán los caballos a la meta? ______________

   Jueguen y no olviden anotar el par de números que suman en la casilla que avanzan.

2. De acuerdo con los resultados que obtuvieron al efectuar el juego, contesten:

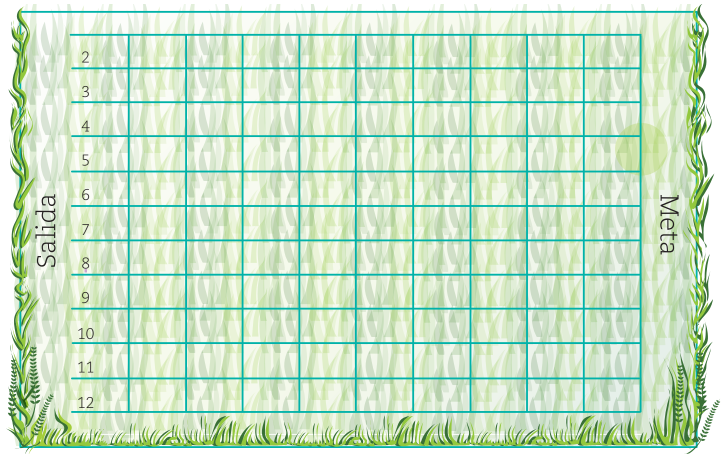
a) ¿Qué caballo ganó? __________

b) En total, ¿cuántas veces lanzaron ambos dados? __________

c) ¿Cuál es la probabilidad frecuencial del evento ganador? __________

d) Consideren los pares de números anotados en las diez casillas que recorrió el caballo ganador. ¿Cuántos resultados diferentes anotaron? __________

Tablero de carreras de caballos



e) ¿Cuántas casillas avanzó el caballo 12? __________

f) ¿Cuántos resultados diferentes anotaron? __________

g) ¿Cuál es la probabilidad frecuencial de que avance el caballo 12? __________

3. Completen la tabla considerando los eventos indicados y los resultados registrados por el equipo que realizó el juego:

Ensayo	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Resultado / **Evento**	**(5, 2)**	**(3, 4)**	**(4, 6)**	**(2, 5)**	**(1, 1)**	**(1, 1)**
A: Avanza el caballo 2	No ocurrió	No ocurrió	No ocurrió	No ocurrió	Ocurrió	Ocurrió
B: Avanza el caballo 7	Ocurrió	Ocurrió	No ocurrió	Ocurrió	No ocurrió	No ocurrió
$P'(A)$: Probabilidad frecuencial del evento *A*	$\frac{0}{1}$	$\frac{0}{2}$			$\frac{1}{5}$	
$P'(B)$: Probabilidad frecuencial del evento *B*	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{3}$			

Observen los resultados registrados cada vez que ocurrió el evento *A* y el evento *B*.

a) ¿Cuántos resultados diferentes corresponden al evento *A*? __________

b) ¿Cuántos resultados diferentes corresponden al evento *B*? __________

c) ¿Cuál es el valor mínimo de la probabilidad frecuencial de los eventos en cualquiera de los casos? __________ ¿Y el máximo? __________

De seguir el juego...

d) ¿Habrá otros resultados diferentes con los que pueda avanzar el caballo 7? __________ En caso afirmativo, ¿cuáles? __________

e) ¿Habrá otros resultados diferentes con los que pueda avanzar el caballo 2? ______
En caso afirmativo, ¿cuáles? ______

4. Revisen sus respuestas con ayuda de su maestro y corrijan en caso necesario. Posteriormente, lean y comenten la información que se les presenta y contesten las preguntas.

Un experimento aleatorio es un proceso repetible cuyo resultado no se conoce de antemano. Si se repite un experimento aleatorio en las mismas condiciones y se registra la frecuencia relativa de un evento, se observará que ésta tiende a estabilizarse alrededor de un número que está entre cero y uno. Este valor recibe el nombre de *probabilidad frecuencial*. Cuando un evento tiene un solo resultado posible se le llama *evento simple*. Si el evento tiene dos o más resultados posibles se llama *compuesto*.

a) Observen los resultados que anotaron en el juego de carreras de caballos, ¿cuántos eventos simples hay? ______
¿Cuántos eventos son compuestos? ______

b) Si realizan nuevamente el juego, ¿creen que gane ese caballo otra vez? ______
Justifiquen sus respuestas. ______

Sesión 2

¿Cuáles son los eventos mutuamente excluyentes?

1. Trabajen en pareja. Completen la tabla 1 considerando los resultados registrados por un equipo que lanzó dos dados en diez ensayos. Utilicen la letra O si ocurrió o, de lo contrario N/O.

Tabla 1

Ensayo	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Resultado / Evento	**(3, 2)**	**(4, 4)**	**(1, 5)**	**(6, 5)**	**(1, 1)**	**(5, 2)**	**(3, 3)**	**(2, 3)**	**(6, 2)**	**(4, 3)**
D: La suma de los números en los dos dados es menor que 6	O	N/O	N/O	N/O	O	N/O	N/O			
F: La suma de los números en los dos dados es mayor que 7	N/O	O	N/O	O	N/O	N/O	N/O			
G: La suma de los números en los dos dados es un número par	N/O	O	O	N/O	O	N/O	O			

Ensayo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Resultado / Evento	**(3, 2)**	**(4, 4)**	**(1, 5)**	**(6, 5)**	**(1, 1)**	**(5, 2)**	**(3, 3)**	**(2, 3)**	**(6, 2)**	**(4, 3)**
P′ (*D*): Probabilidad frecuencial del evento *D*	$\frac{1}{1}$					$\frac{2}{6}$				
P′ (*F*): Probabilidad frecuencial del evento *F*		$\frac{1}{2}$								
P′ (*G*): Probabilidad frecuencial del evento *G*			$\frac{2}{3}$				$\frac{4}{7}$			

Cuando los eventos ocurrieron...

a) ¿Cuántos resultados diferentes registraron para el evento *D*? ________________

b) ¿Cuántos resultados diferentes registraron para el evento *F*? ________________

c) ¿Cuántos resultados diferentes registraron para el evento *G*? ________________

d) Si en un ensayo ocurre el evento *D*, ¿puede ocurrir simultáneamente el evento *G*? ________

Si su respuesta es afirmativa, anoten los resultados. ________________

2. Completen la tabla 2, que contiene los datos obtenidos por el equipo anterior al observar el evento: la suma de los números en los dos dados es menor que 6 y es un número par. Utilicen la letra O si ocurrió o, de lo contrario N/O.

Tabla 2

Ensayo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Resultado / Evento	**(3, 2)**	**(4, 4)**	**(1, 5)**	**(6, 5)**	**(1, 1)**	**(5, 2)**	**(3, 3)**	**(2, 3)**	**(6, 2)**	**(4, 3)**
D y *G*: La suma de los números en los dos dados es menor que 6 y es un número par	N/O	N/O	N/O	N/O	O	N/O	N/O			
P′ (*D* y *G*): Probabilidad frecuencial del evento *D* y *G*	$\frac{0}{1}$					$\frac{1}{6}$				

a) Si en un ensayo ocurre que la suma de los números en los dos dados es menor que 6, ¿también puede ocurrir que la suma sea un número par? ____________

b) Después de 10 ensayos, ¿cuál es la frecuencia relativa del evento (*D* y *G*)?

____

3. Completen la tabla 3, donde el mismo equipo observó y registró los resultados del evento: la suma de los números es mayor que 7 y es un número par. Utilicen la letra O si ocurrió o, de lo contrario N/O.

Tabla 3

Ensayo	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Resultado / Evento	**(3, 2)**	**(4, 4)**	**(1, 5)**	**(6, 5)**	**(1, 1)**	**(5, 2)**	**(3, 3)**	**(2, 3)**	**(6, 2)**	**(4, 3)**
F y *G*: La suma de los números es mayor que 7 y es un número par	N/O	O	N/O	N/O	N/O	N/O	N/O			
P´ (*F* y *G*): Probabilidad frecuencial del evento *F* y *G*	$\frac{0}{1}$			$\frac{1}{4}$						

a) Si en un ensayo ocurre que la suma de los números en los dos dados es mayor que 7, ¿también puede ocurrir que la suma sea un número par? __________

b) Después de 10 ensayos, ¿cuál es la frecuencia relativa del evento (*F* y *G*)?

____

4. Completen la tabla 4, donde se registraron los datos obtenidos por el mismo equipo al observar el evento: la suma de los números es menor que 6 y mayor que 7. Utilicen la letra O si ocurrió o, de lo contrario N/O.

Tabla 4

Ensayo	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Resultado / Evento	**(3, 2)**	**(4, 4)**	**(1, 5)**	**(6, 5)**	**(1, 1)**	**(5, 2)**	**(3, 3)**	**(2, 3)**	**(6, 2)**	**(4, 3)**
D y *F*: La suma de los números en los dos dados es menor que 6 y es mayor que 7	N/O	N/O	N/O							
P´ (*D* y *F*): Probabilidad frecuencial del evento *D* y *F*	$\frac{0}{1}$									

a) Si en un ensayo ocurre que la suma de los números en los dos dados es menor que 6, ¿también puede ocurrir que la suma sea mayor que 7? __________

b) Después de 10 ensayos, ¿cuál es la frecuencia relativa del evento (*D* y *F*)?

____

5. Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Luego, lean y comenten la información de la siguiente página.

Al realizar un experimento aleatorio y observar dos eventos simultáneos elegidos puede suceder cualquiera de las situaciones siguientes:

a) Todos los resultados favorables de uno de los dos eventos son los mismos que todos los resultados favorables del otro evento.
b) Algunos resultados favorables de uno de los dos eventos son los mismos que algunos resultados favorables del otro evento.
c) No existen resultados favorables en común para los dos eventos.
Esto significa que ambos eventos no pueden ocurrir al mismo tiempo, es decir, la frecuencia relativa de ambos es cero. A estos eventos se les llama mutuamente excluyentes o ajenos. Cuando se dan los casos señalados en a) y b) el valor de la probabilidad frecuencial es mayor que 0 y menor que 1.

Por ejemplo, al hacer el experimento de lanzar 10 veces dos dados y observar los números que caen, en un ensayo el resultado fue (1, 1), que puede registrarse tanto en el evento *D* (*la suma de los números en los dos dados es menor que* 6) como en el evento *G* (*la suma de los números en los dos dados es un número par*). Por lo tanto, la frecuencia de ocurrencia simultánea del evento (*D* y *G*) es $\frac{1}{10}$

Por otra parte, si a lo largo de los 10 ensayos ninguno de los resultados registrados es común para observar los eventos *D* (*la suma de los números en los dos dados es menor que* 6) y *F* (*la suma de los números en los dos dados es mayor que 7*), entonces la frecuencia de ocurrencia del evento (*D* y *F*) es 0, lo que significa que *D* y *G* son eventos mutuamente excluyentes.

Los eventos que no tienen resultados favorables que ocurren al mismo tiempo se llaman ***mutuamente excluyentes*** o ***ajenos***.

6. Utilicen los resultados registrados en el tablero de las carreras de caballos que efectuaron e indiquen si los eventos *A* y *B* son mutuamente excluyentes y justifiquen su respuesta.

Sesión 3

Para terminar

Espacio muestral y eventos mutuamente excluyentes

1. En pareja, determinen el espacio muestral de resultados posibles al lanzar dos dados al mismo tiempo. Anótenlo en la siguiente tabla; observen el ejemplo. Después realicen lo siguiente.

- Marquen con color rojo todos los resultados favorables al evento *D*: la suma de los números en los dos dados es menor que 6.
- Utilicen el color azul para marcar los resultados favorables al evento *F*: la suma de los números en los dos dados es mayor que 7.
- Marquen con color verde los resultados favorables al evento *G*: la suma de los números en los dos dados es un número par.

Dado 2						
6						
5		5, 2				
4						
3						
2						
1						
	1	2	3	4	5	6
	Dado 1					

a) ¿Cuántos resultados posibles hay en total? ____________

b) ¿Cuántos resultados favorables tiene el evento *D*? ______

c) ¿Cuántos resultados favorables tiene el evento *F*? ______

d) ¿Y cuántos resultados favorables tiene el evento *G*? ______

e) ¿Cuántos resultados están marcados con color rojo y azul a la vez, es decir, son favorables tanto para el evento *D* como para el *F*? __________ ¿Cuál o cuáles son los resultados favorables en común? ____________________

f) ¿Cuántos resultados están marcados con color azul y verde a la vez, es decir, son favorables tanto para el evento *F* como para el *G*? ______________________ ¿Cuál o cuáles son los resultados favorables en común? ____

g) ¿Cuántos resultados están marcados con color verde y rojo a la vez, es decir, son favorables tanto para el evento *D* como para el *G*? ______________________ ¿Cuál o cuáles son los resultados favorables en común? ____

2. Hay dos tipos de probabilidades de un evento: la *frecuencial*, que se obtiene a partir de ejecutar el experimento o fenómeno aleatorio y registrar los resultados favorables, y la *clásica*, que se obtiene al tomar el número de resultados favorables al evento y dividirlo entre el número de resultados posibles. Obtengan la probabilidad clásica de los eventos siguientes.

Evento	Probabilidad clásica del evento
D: La suma de los números en los dos dados es menor que 6	$P(D) = \dfrac{\text{Número de resultados favorables al evento } D}{\text{Número total de resultados posibles}} =$
F: La suma de los números en los dos dados es mayor que 7	$P(F) = \dfrac{\text{Número de resultados favorables al evento } F}{\text{Número total de resultados posibles}} =$
G: La suma de los números en los dos dados es un número par	$P(G) = \dfrac{\text{Número de resultados favorables al evento } G}{\text{Número total de resultados posibles}} =$
D y *F*: La suma de los números en los dos dados es menor que 6 y es mayor que 7	$P(D \text{ y } F) = \dfrac{\text{Número de resultados favorables al evento } (D \text{ y } F)}{\text{Número total de resultados posibles}} =$
D y *G*: La suma de los números en los dos dados es menor que 6 y es un número par	$P(D \text{ y } G) = \dfrac{\text{Número de resultados favorables al evento } (D \text{ y } G)}{\text{Número total de resultados posibles}} =$
F y *G*: La suma de los números es mayor que 7 y es un número par	$P(F \text{ y } G) = \dfrac{\text{Número de resultados favorables al evento } (F \text{ y } G)}{\text{Número total de resultados posibles}} =$

3. Completen la tabla con los resultados registrados en las actividades de las sesiones que se indican.

Actividad 4 de la sesión 2	Actividad 1 de la sesión 3
Número de veces que ocurrió el evento (*D* y *F*):	Número de resultados favorables del evento (*D* y *F*):
Número de veces que se realizó el experimento:	Número de resultados posibles:
Probabilidad frecuencial *P´* (*D* y *F*):	Probabilidad clásica *P* (*D* y *F*):

a) Comparen el número de veces que ocurrió el evento (*D* y *F*) con el número de resultados favorables, ¿es igual o diferente? ______

b) ¿Qué valor tienen la probabilidad frecuencial y clásica del evento (*D* y *F*)? ______

c) De acuerdo con lo anterior, ¿qué tipo de eventos son *D* y *F*? ______

4. Revisen sus respuestas con ayuda de su maestro y corrijan en caso necesario. Posteriormente, lean y comenten la información que se les presenta y contesten la pregunta.

Dos eventos son mutuamente excluyentes si los resultados favorables para cada evento son distintos.

Por ejemplo, si se definen los siguientes tres eventos al lanzar un dado:

C: El número es mayor que 3.   *E*: El número es impar.   *J*: El número es menor o igual que 3.

Los resultados favorables de cada evento son:

$C = \{4,5,6\}$; $E = \{1,3,5\}$; $J = \{1,2,3\}$

Al comparar los resultados favorables de los eventos C y E, se observa que el resultado 5 es común en ambos conjuntos, entonces la probabilidad de lanzar un dado y obtener un número que sea mayor que 3 e impar es un sexto y se expresa:

$$P\ (C \text{ y } E) = \frac{1}{6}$$

Al comparar los resultados favorables de los eventos C y J, no hay resultados en común, por lo tanto, son mutuamente excluyentes y la P (C y J) = 0.

¿Qué tipo de eventos son *E* y *J*? Justifiquen su respuesta. ______

______

5. Investiguen en su comunidad si se realiza alguna feria y si entre las actividades hay algunos juegos de azar. De ser posible, describan en qué consisten e identifiquen si hay eventos simples, eventos compuestos o eventos mutuamente excluyentes.

6. Para determinar si los eventos son simples, compuestos o mutuamente excluyentes utilicen el recurso informático *Eventos simples, compuestos y mutuamente excluyentes*.

7. Observen el recurso audiovisual *Eventos simples, compuestos y mutuamente excluyentes* para distinguir estos eventos en otros experimentos aleatorios.

Evaluación

Marca con una ✓ las respuestas correctas. Algunas preguntas tienen más de una respuesta correcta.

1. ¿Cuál de los siguientes números tiene más divisores?

Ⓐ 14 Ⓑ 20 Ⓒ 48 Ⓓ 89

2. De los siguientes números, ¿cuáles son primos?

Ⓐ 21 Ⓑ 41 Ⓒ 61 Ⓓ 81

3. De un costal de naranjas se formaron varios montones de 5 naranjas cada uno. Al final sobraron 3 naranjas. ¿Cuántas naranjas pudo haber contenido el costal?

Ⓐ 210 Ⓑ 211 Ⓒ 212 Ⓓ 213

4. La siguiente sucesión de figuras se genera con la expresión $\frac{n(3n-1)}{2}$

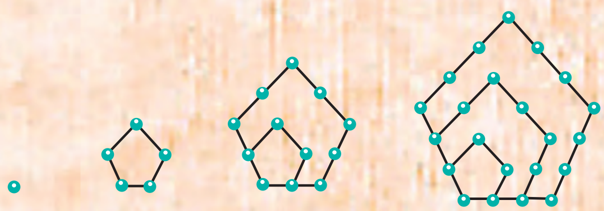


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3 Fig. 4

De las opciones que se presentan enseguida, elige las que consideres que son sus expresiones equivalentes.

Ⓐ $\frac{(3n^2-1)}{2}$ Ⓑ $\frac{3n^2-n}{2}$ Ⓒ $\frac{3}{2}(n^2-n)$ Ⓓ $\frac{3}{2}n^2-\frac{1}{2}n$

5. En un torneo de ajedrez, cada participante jugó una partida contra todos los demás. En total se realizaron 45 partidas. ¿Cuántos jugadores participaron en el torneo? Subraya la ecuación que resuelve este problema.

Ⓐ $n(n+1)=45$ Ⓑ $n(n-1)=45$ Ⓒ $\frac{n(n+1)}{2}=45$ Ⓓ $\frac{n(n-1)}{2}=45$

6. ¿Cuáles ecuaciones tienen las soluciones correctas?

Ⓐ $2x^2-72=0$, $x_1=6;\ x_2=-6$

Ⓑ $x^2+2x=0$, $x_1=0;\ x_2=2$

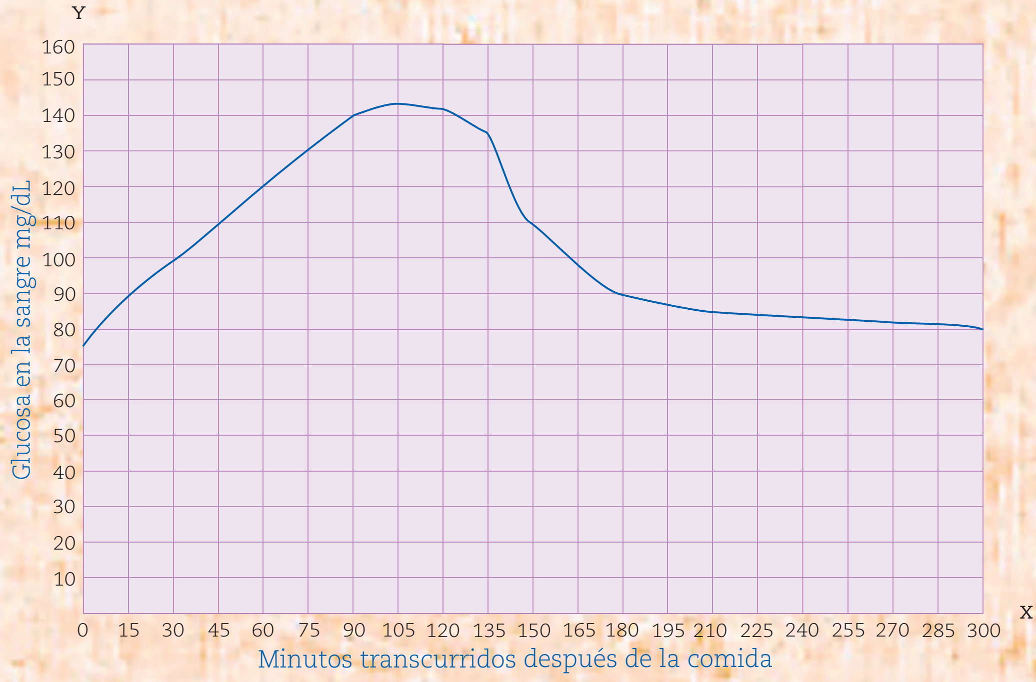
Ⓒ $x(x-8)=7$, $x_1=-5;\ x_2=-3$

Ⓓ $x^2=-25$, $x_1=5;\ x_2=-5$

7. La diabetes es una enfermedad caracterizada por el aumento de azúcar en la sangre.

En los últimos años ésta se ha extendido mucho en México, sobre todo por los malos hábitos de alimentación y la falta de ejercicio. El azúcar o glucosa en la sangre es necesaria, ya que es la principal fuente de energía para el funcionamiento del cuerpo. Sin embargo, cuando hay un incremento descontrolado de glucosa es peligroso para la salud.

Ramón es diabético y se debe medir el nivel de glucosa en la sangre cada 15 minutos desde que come hasta que pasan 5 horas. Observa la gráfica y contesta las siguientes preguntas.



Los niveles de azúcar son más bajos cuando se está en ayunas y suben en cuanto se come.

a) ¿Después de cuántos minutos Ramón tiene el máximo nivel de glucosa en la sangre?

(A) 300 (B) 135 (C) 105 (D) 90

b) El rango normal para el óptimo funcionamiento del cuerpo debe estar entre 70 y 140 mg/dL. Indica el intervalo de tiempo en que Ramón se encuentra fuera del rango óptimo, o bien si él nunca está fuera de rango.

(A) Entre 0 y 300 minutos (B) Entre 75 y 145 minutos

(C) Entre 90 y 125 minutos (D) Nunca está fuera de rango

c) ¿Cuáles son sus niveles de azúcar al transcurrir 5, 120 y 300 minutos?

(A) 80, 145 y 80 mg/dL, respectivamente (B) 75, 150 y 75 mg/dL, respectivamente

(C) 80, 145 y 0 mg/dL, respectivamente (D) 75, 145, y 80 mg/dL, respectivamente

8. Se tienen dos cuadrados: uno de 10 cm y otro de 7 cm por lado. ¿Cuál es la razón de semejanza del segundo cuadrado respecto al primero?

(A) -3 (B) 3 (C) $\frac{7}{10}$ (D) $\frac{10}{7}$

9. Respecto a la semejanza de figuras geométricas, completa la siguiente afirmación con la figura geométrica que la haga verdadera.

Todos los ________________ son semejantes entre sí.

(A) Rombos (B) Rectángulos (C) Trapecios isósceles (D) Triángulos equiláteros

10. Se están utilizando cuatro escaleras telescópicas, todas tienen un extremo recargado sobre la misma pared y el otro, a cierta distancia de ella. En cada opción de respuesta, la primera medida se refiere a la longitud de la escalera, y la segunda, a su distancia hacia la pared. ¿Cuál de ellas forma el mayor ángulo con el piso?

(A) 2 m, 1 m (B) 2 m, 0.5 m (C) 3 m, 2 m (D) 4 m, 2 m

Hombre en escalera telescópica.

11. La rampa A tiene una distancia horizontal de 4 m y alcanza una altura de 0.5 m. En cada opción de respuesta, el primer número corresponde a la distancia horizontal, y el segundo, a la altura que alcanzan otras cuatro rampas. ¿Cuál de ellas tiene la misma pendiente que la rampa A?

Rampa A

(A) 1 m, 0.20 m
(B) 2 m, 0.25 m
(C) 2 m, 1 m
(D) 3 m, 1.5 m

12. ¿Para qué tipo de triángulos se cumple el teorema de Pitágoras? Para…

(A) todos (B) los escalenos
(C) los rectángulos (D) los acutángulos

13. En un triángulo rectángulo, el área del cuadrado construido sobre un cateto mide 3 cm^2 y el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa mide 10 cm^2. ¿Con cuál expresión se calcula el área del cuadrado construido sobre el otro cateto?

(A) $\left(\frac{3}{10}\right) cm^2$ (B) $\left(\frac{10}{3}\right) cm^2$ (C) $10\ cm^2 + 3\ cm^2$ (D) $10\ cm^2 - 3\ cm^2$

14. Se lanza un dado legal y se observa el número de la cara superior que cae. Tres eventos que pueden ocurrir son:

a) Cae número par **b)** Cae un múltiplo de 3 **c)** Cae un número impar

Al comparar los resultados favorables de los eventos, ¿cuáles de éstos son mutuamente excluyentes?

b y c a y b a y c c y b

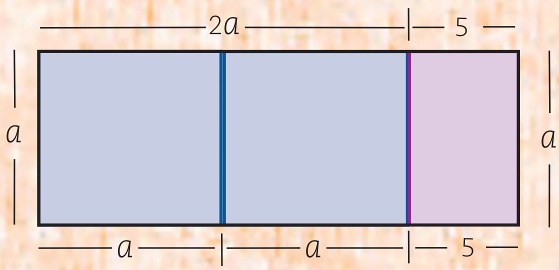
Resuelve lo que se pide.

1. Anota en cada número la cifra que falta para que el primero sea divisible entre 2; el segundo, entre 3; el tercero, entre 5; y el cuarto, entre 6.

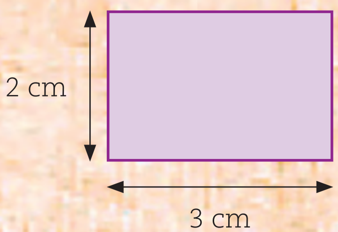
438☐ 438☐ 438☐ 438☐

2. Escribe tres expresiones equivalentes que representen la superficie del rectángulo dibujado con líneas negras.

Expresión algebraica 1	
Expresión algebraica 2	
Expresión algebraica 3	



3. Construye un rectángulo semejante al siguiente, de tal manera que el lado que aquí mide 2 cm, en el que vas a construir sea de 3 cm.



4. Para colocar un calentador solar en cierto lugar, se indica que la razón entre la altura a la que se sitúe y su longitud sea de $\frac{2}{5}$. Si el calentador mide 2 m, ¿a qué altura debe colocarse? ____________________

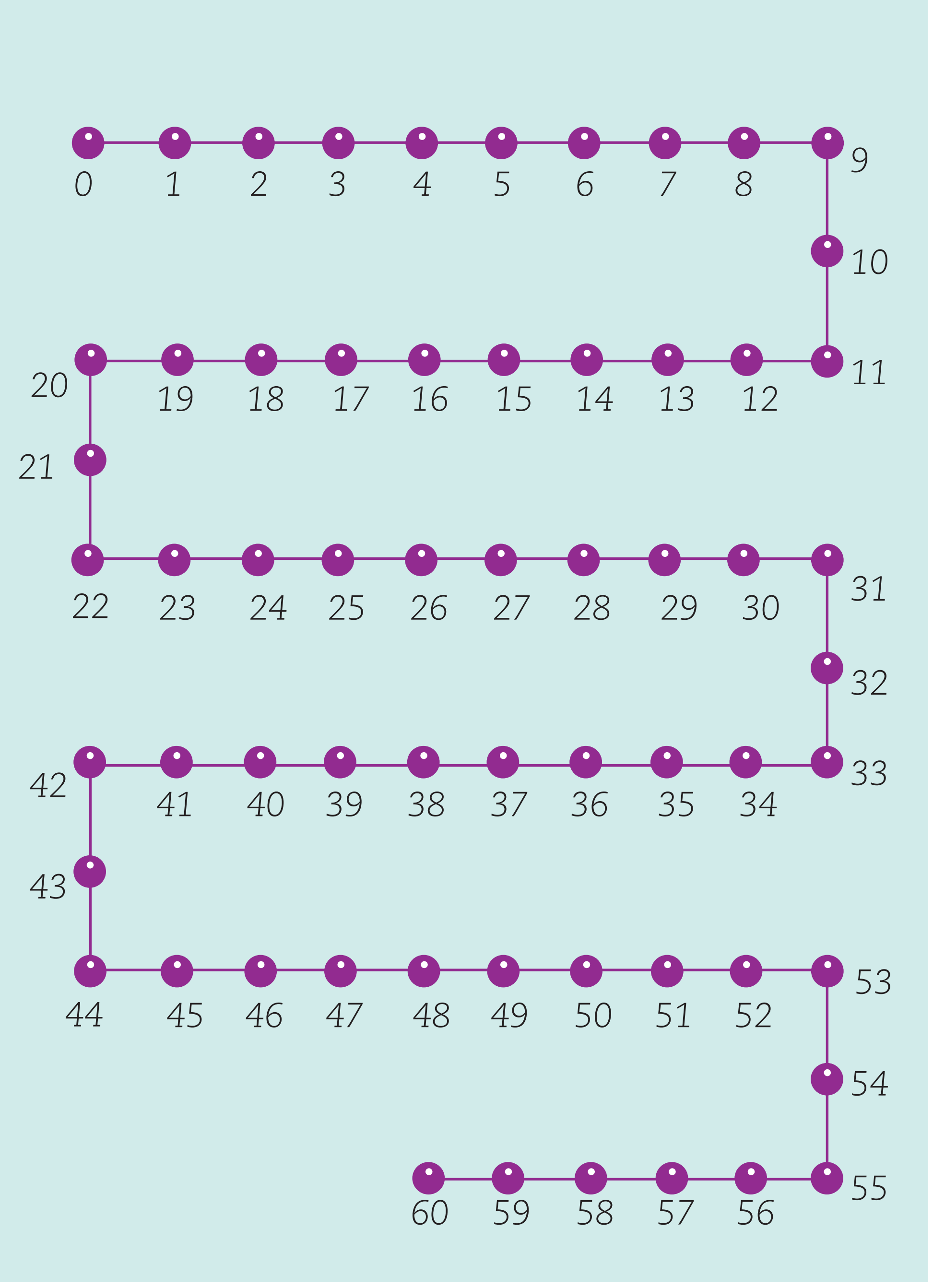
5. Se realiza una rifa de 400 boletos para ganar una pantalla. En una urna se revuelven los boletos y se selecciona uno al azar para elegir al ganador. Si una persona compró 25 boletos, ¿cuál es la probabilidad que tiene de ganar la rifa? ____________

Tablas trigonométricas

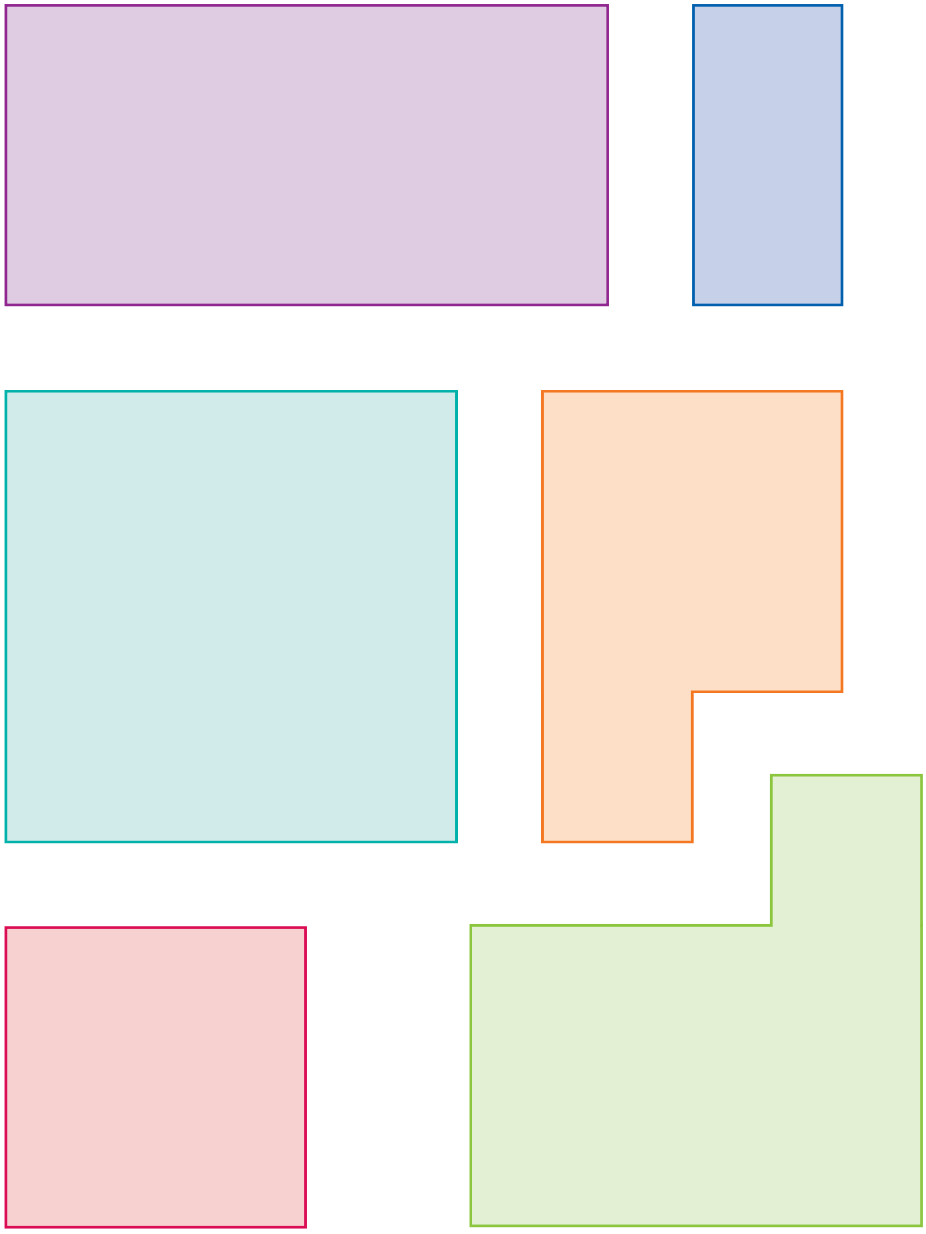
Ángulo	Seno	Coseno	Tangente
1°	0.0175	0.9998	0.0175
2°	0.0349	0.9994	0.0349
3°	0.0523	0.9986	0.0524
4°	0.0698	0.9976	0.0699
5°	0.0872	0.9962	0.0875
6°	0.1045	0.9945	0.1051
7°	0.1219	0.9925	0.1228
8°	0.1392	0.9903	0.1405
9°	0.1564	0.9877	0.1584
10°	0.1736	0.9848	0.1763
11°	0.1908	0.9816	0.1944
12°	0.2079	0.9781	0.2126
13°	0.2250	0.9744	0.2309
14°	0.2419	0.9703	0.2493
15°	0.2588	0.9659	0.2679
16°	0.2756	0.9613	0.2867
17°	0.2924	0.9563	0.3057
18°	0.3090	0.9511	0.3249
19°	0.3256	0.9455	0.3443
20°	0.3420	0.9397	0.3640
21°	0.3584	0.9336	0.3839
22°	0.3746	0.9272	0.4040
23°	0.3907	0.9205	0.4245
24°	0.4067	0.9135	0.4452
25°	0.4226	0.9063	0.4663
26°	0.4384	0.8988	0.4877
27°	0.4540	0.8910	0.5095
28°	0.4695	0.8829	0.5317
29°	0.4848	0.8746	0.5543
30°	0.5000	0.8660	0.5774
31°	0.5150	0.8572	0.6009
32°	0.5299	0.8480	0.6249
33°	0.5446	0.8387	0.6494
34°	0.5592	0.8290	0.6745
35°	0.5736	0.8192	0.7002
36°	0.5878	0.8090	0.7265
37°	0.6018	0.7986	0.7536
38°	0.6157	0.7880	0.7813
39°	0.6293	0.7771	0.8098
40°	0.6428	0.7660	0.8391
41°	0.6561	0.7547	0.8693
42°	0.6691	0.7431	0.9004
43°	0.6820	0.7314	0.9325
44°	0.6947	0.7193	0.9657
45°	0.7071	0.7071	1.0000

Ángulo	Seno	Coseno	Tangente
46°	0.7193	0.6947	1.0355
47°	0.7314	0.6820	1.0724
48°	0.7431	0.6691	1.1106
49°	0.7547	0.6561	1.1504
50°	0.7660	0.6428	1.1918
51°	0.7771	0.6293	1.2349
52°	0.7880	0.6157	1.2799
53°	0.7986	0.6018	1.3270
54°	0.8090	0.5878	1.3764
55°	0.8192	0.5736	1.4281
56°	0.8290	0.5592	1.4826
57°	0.8387	0.5446	1.5399
58°	0.8480	0.5299	1.6003
59°	0.8572	0.5150	1.6643
60°	0.8660	0.5000	1.7321
61°	0.8746	0.4848	1.8040
62°	0.8829	0.4695	1.8807
63°	0.8910	0.4540	1.9626
64°	0.8988	0.4384	2.0503
65°	0.9063	0.4226	2.1445
66°	0.9135	0.4067	2.2460
67°	0.9205	0.3907	2.3559
68°	0.9272	0.3746	2.4751
69°	0.9336	0.3584	2.6051
70°	0.9397	0.3420	2.7475
71°	0.9455	0.3256	2.9042
72°	0.9511	0.3090	3.0777
73°	0.9563	0.2924	3.2709
74°	0.9613	0.2756	3.4874
75°	0.9659	0.2588	3.7321
76°	0.9703	0.2419	4.0108
77°	0.9744	0.2250	4.3315
78°	0.9781	0.2079	4.7046
79°	0.9816	0.1908	5.1446
80°	0.9848	0.1736	5.6713
81°	0.9877	0.1564	6.3138
82°	0.9903	0.1392	7.1154
83°	0.9925	0.1219	8.1443
84°	0.9945	0.1045	9.5144
85°	0.9962	0.0872	11.4301
86°	0.9976	0.0698	14.3007
87°	0.9986	0.0523	19.0811
88°	0.9994	0.0349	28.6363
89°	0.9998	0.0175	57.2900
90°	1.0000	0.0000	Infinito

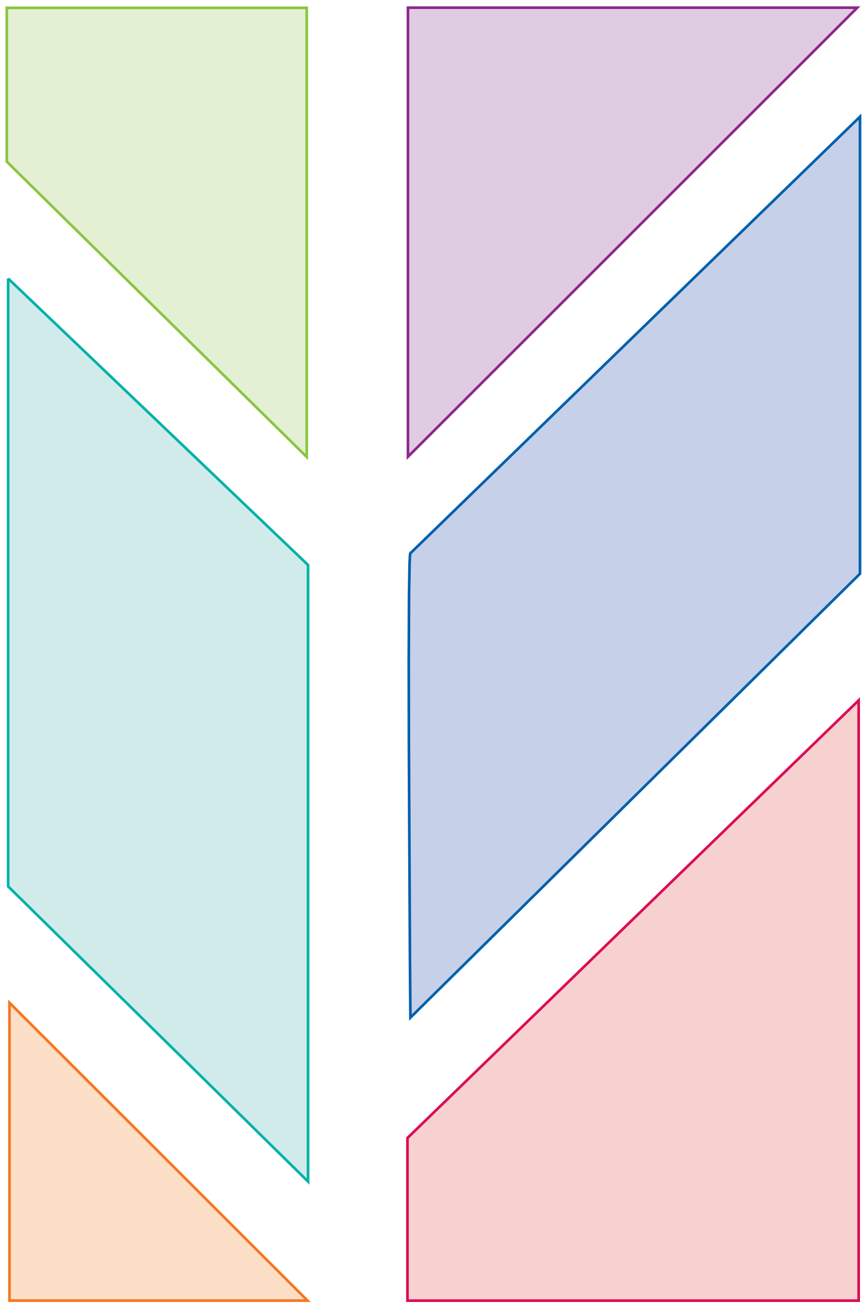
Recortable 1



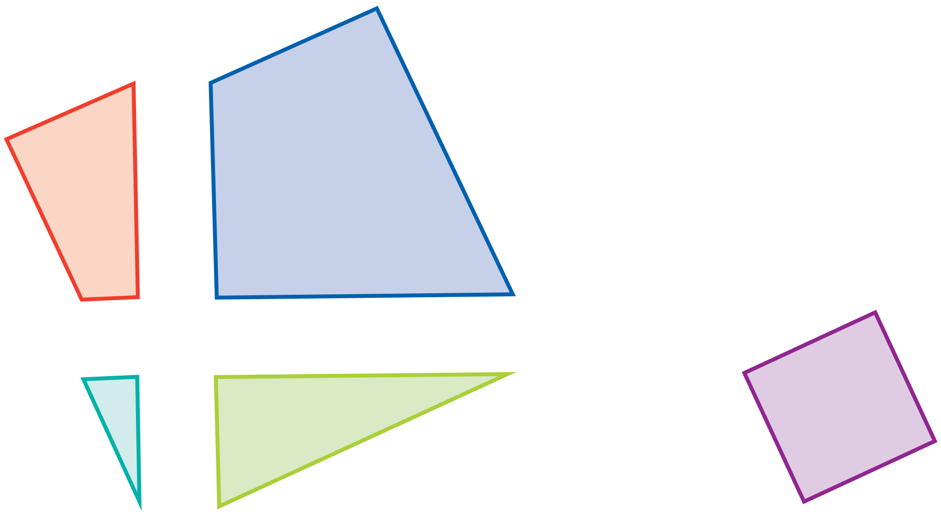
Recortable 2

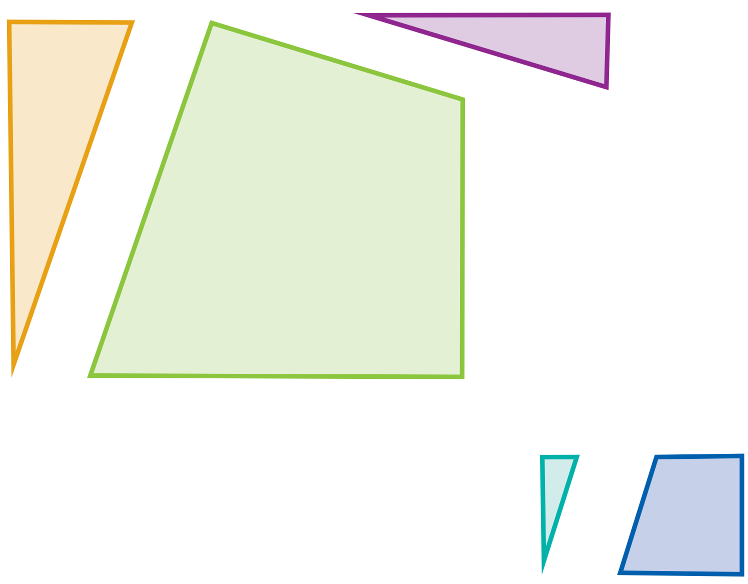


Recortable 3



Recortable 4





Recortable 5