LIBRO PARA EL MAESTRO

Matemáticas

Tercer grado

TELEsecundaria

Bloque 3

Secuencia 20 Mínimo común múltiplo y máximo común divisor 2

(LT, Vol. II, págs. 108-113)

Tiempo de realización	3 sesiones
Eje temático	Número, álgebra y variación
Tema	Número
Aprendizaje esperado	Usa técnicas para determinar el mcm y el MCD.
Intención didáctica	Que los alumnos identifiquen el máximo factor común en una expresión algebraica de dos o más términos y lo usen para factorizar dicha expresión.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisual** • *Factor común de una expresión algebraica* **Informático** • *Aplicaciones del mcm y del MCD*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recursos audiovisuales** • *Generalización de los conceptos de múltiplo y factor* • *Descomposición factorial prima, MCD y mcm*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Factoricen expresiones algebraicas compuestas por uno o más términos e identifiquen cuál es el factor que es el MCD.
- Sesión 2. Analicen algunos casos en los que el álgebra permite generalizar propiedades de los números y valoren la utilidad del factor común.
- Sesión 3. Usen el MCD de dos o más números o expresiones algebraicas al resolver problemas.

Acerca de...

Con el desarrollo de esta secuencia culmina el estudio del mcm y el MCD que se inició en el bloque 1 con las secuencias 1 y 2, tituladas "Múltiplos, divisores, y números primos" y "Criterios de divisibilidad". La importancia de estos conceptos radica, sobre todo, en el uso que se puede hacer de ellos al resolver una gran variedad de problemas numéricos, algebraicos, geométricos y de medición. Los problemas que se plantean en esta secuencia son sólo una pequeña muestra de ello.

Como se podrá apreciar a lo largo de la secuencia, el trabajo que los alumnos desarrollarán en las actividades les permitirá una mejor comprensión del factor común. Por otra parte, el MCD en expresiones algebraicas se apoya en el estudio que se ha hecho con los números, en el cociente y producto de potencias de la misma base que se estudió en segundo grado y en la equivalencia de expresiones algebraicas que se estudian en este grado.

El programa de estudios no contempla la multiplicación y la división de monomios y polinomios porque esas técnicas no son necesarias para entender lo que es el factor común y el máximo común divisor de una expresión algebraica.

Tampoco señala como propósito que los alumnos hagan demostraciones formales, entre otras razones porque a esta edad no está suficientemente desarrollado el razonamiento deductivo.

Por esta razón, la generalización de algunas propiedades de los números se hace de manera guiada, no con la idea de que los alumnos memoricen los procesos, sino para que aprecien otro tipo de problemas en los que el álgebra resulta útil. También permite destacar algunas propiedades y relaciones entre los números, como ocurre en varios de los problemas de la sección "Para terminar", por ejemplo el inciso b) de la segunda actividad en la sesión 2. Sin duda, los conocimientos que los alumnos adquieran con el estudio de esta secuencia les proporcionarán más elementos para resolver problemas que impliquen usar ecuaciones y funciones.

Sobre las ideas de los alumnos

Se sabe que el uso de un concepto como el de factor común, o cualquier otro, no se transfiere de manera automática de un contexto a otro —por ejemplo, del numérico al algebraico—, pero es absolutamente válido y necesario usar el conocimiento que se tiene y valorar si es o no suficiente para entender lo nuevo. Un ejemplo es que los alumnos saben que una expresión algebraica como $6x^2y^3z$, consta de un coeficiente y una parte literal. Esta expresión es equivalente a $2 \cdot 3 \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y \cdot z$.

Será importante que los alumnos reconozcan que está integrado por un total de ocho factores que ya no se pueden descomponer en más, pero sí agrupar para formar otros factores, por ejemplo, 6, $6x$, $6x^2$, etcétera, aunque no necesariamente en este orden.

Tal vez algunos de los alumnos consideren todavía que un factor sólo puede ser un número, por lo que se pretende que, al finalizar el estudio de esta secuencia, acepten que un número y una o varias literales y sus exponentes pueden representar un factor. Estas ideas básicas, y otras que se mencionaron en el apartado anterior, son las que le dan sustento a los conceptos de factor común, MCD y mcm.

¿Cómo guío el proceso?

Se sugiere que lea junto con los alumnos la sección "Para empezar" y resalte todas las dudas que surjan alrededor de lo que ahí se plantea. Por ejemplo: "¿Por qué estamos seguros de que x y $x + 1$ son dos números consecutivos?"; "¿Por qué x y $x + 2$ no son números consecutivos?"; "¿Cuántos términos tiene la expresión $3x + 3$?"; "¿Por qué x no es un factor común de los dos términos?". Es importante que desde el inicio vea cuáles conceptos no están suficientemente claros y se realice el trabajo necesario para allanar las dudas antes de que se hagan más grandes o sean prácticamente irreversibles y limiten la comprensión de nuevos conocimientos.

En la actividad 2 de la sesión 1, haga hincapié en que, cuando los términos de una expresión algebraica se separan con el signo más o con el signo menos, las expresiones pueden ser binomios, trinomios o polinomios.

Si no hay uno de estos signos de por medio, se trata de un solo término (un monomio) como ocurre en la actividad 1. Apoye a los alumnos para que distingan entre factor, factor común y mayor factor común, esta última expresión equivale a decir máximo común divisor.

1. Trabajen en pareja. Escriban expresiones equivalentes a cada monomio de manera que sean el producto de dos factores. Anótenlas en cada celda.

Monomios	Expresiones algebraicas equivalentes como producto de dos factores			
$6x^2$	$3(2x^2)$			
$12ab^2$	$2a(6b^2)$			
$8x^2y^3$	$2xy(4xy^2)$			

2. ¿Cuáles son todos los factores comunes de cada binomio y trinomio? Anótenlos en la celda correspondiente. Observen el ejemplo.

$4x^3 + 2x^2$	$12xy^2 - 3y^2$	$8a^2 b^2 - ab^2$	$3x^2 - 6xy$	$3x^2 - 6xy + 9y$
$1, 2, x, 2x, x^2, 2x^2$	$1, y, y^2, 3$	$1, a, b, b^2$	$1, x, 3$	$1, 3$

Cuando hablamos de *factor*, nos referimos a un solo término, por ejemplo, $6x$ es un factor del monomio $6x^2y^3z$, como se señaló en un párrafo anterior. Al decir *factor común*, nos referimos al factor que divide de manera exacta a dos o más términos de una expresión algebraica. Si el factor común es el mayor posible, entonces se trata del máximo común divisor (MCD). Por ejemplo, en la última celda de la tabla de la actividad 2, la expresión $3x^2 - 6xy + 9y$ tiene como factores comunes a 1 y 3, porque las literales x y y sólo aparecen en dos de los tres términos, así que el MCD es 3.

Otro ejemplo, en la actividad 5, un factor común de $5x^2 + 10x$, es 5, porque éste divide exactamente a los dos términos de la expresión y, en este caso, también son x y $5x$, por la misma razón.

En la actividad 1 de la sesión 2 observe si los alumnos logran seguir el proceso para concluir que la suma de dos números impares cualesquiera siempre es un número par. Se inicia con la conjetura de si será cierto o no y se pide probar con varios ejemplos numéricos. Algunos alumnos lo harán de manera espontánea. Hay que enfatizar, una vez más, que en matemáticas los ejemplos no son suficientes para mostrar que una propiedad es cierta, y basta con un contraejemplo para mostrar que es falsa. Así que dé un tiempo razonable y pídales que busquen un contraejemplo.

Un primer asunto en el que conviene ponerse de acuerdo es cómo se representa de manera general un número impar. Seguramente todos estarán de acuerdo en que $2n$ representa un número par, puesto que contiene al 2 como factor. Por lo tanto, un número impar es $2n + 1$, ya que a todo número par le sigue un impar. De manera que la suma de dos números impares puede expresarse como

$$(2n + 1) + (2n + 3);\ (2n + 5) + (2n + 7);$$

en estos ejemplos está expresada la suma de dos números impares diferentes y puede mostrarse que todos los resultados que se obtengan contienen al 2 como factor, con lo que se confirma que la suma de dos números impares es un número par. Por ejemplo,

$$2n + 5 + 2n + 7 = 4n + 12 = 2(2n + 6).$$

En la tabla de la actividad 2 puede haber resultados variados, sólo hay que cumplir la condición de escribir un número de dos cifras diferentes, luego invertir las cifras: la cifra de las unidades pasa a ser de las decenas y viceversa, y luego calcular la diferencia, lo que significa restar, del número mayor, el menor. Primero hay que verificar que todas las diferencias, independientemente de los números que se hayan escrito, sean múltiplos de 9, luego hay que generalizar esta propiedad con el uso del álgebra.

En el caso de que surjan errores en alguno de los pasos que hay que seguir, y usted pueda orientar a los alumnos para corregirlos, a continuación se muestra el procedimiento adecuado:

$$\begin{aligned} 10a + b - (10b + a) &= 10a + b - 10b - a \\ &= 9a - 9b = 9(a - b) \end{aligned}$$

La expresión final incluye el número 9 como factor, entonces no hay duda de que la diferencia siempre será múltiplo de 9.

Después de resolver la actividad 2, se espera que los alumnos no tengan problemas para realizar la actividad 3, observe cómo representan algebraicamente un número de dos cifras en el que la cifra de las unidades es igual a la de las decenas, pueden variar las literales, pero debe ser algo similar a $10a + a$.

La actividad 5 puede ser un buen indicador de hasta dónde los alumnos han captado la idea de factor común, MCD y su diferencia con el mcm.

Es probable que haya diferencias en las respuestas, invítelos a que expresen sus opiniones, pues esto les ayuda a entender mejor.

En el problema 1 de la sesión 3, los alumnos deben usar el factor común para hacer lo que se indica. En esencia, se trata de descomponer la expresión $3x^2 + 6x$ en un producto de dos factores, uno de los cuales representará la medida del ancho y la otra el largo del rectángulo. Las posibles respuestas se resumen en la siguiente tabla.

Ancho	Largo
x	$3x + 6$
3	$x^2 + 2x$
$x + 2$	$3x$

En cualquiera de las opciones, al multiplicar largo por ancho, el producto es el área dada, $3x^2 + 6x$, de manera que, al asignar un valor a x, los alumnos se darán cuenta de que el área es igual, pero si calculan el perímetro usando esas expresiones, se obtienen resultados diferentes en cada caso. Esto último obedece a que las expresiones algebraicas del perímetro no son equivalentes entre ellas.

El problema de la actividad 2 tiene solución única, pues sólo la primera de las tres opciones que aparecen en la tabla da como expresión para el perímetro $8x + 12$. Hay otras opciones que dan este perímetro, pero no cumplen con el área dada.

El problema 4 vincula la factorización numérica con la factorización algebraica. La factorización en primos de $168 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 7$. Para obtener las sumas que se obtendrán en la tabla es necesario agrupar los factores de diferentes maneras y usar el signo + y el signo − convenientemente.

El problema de la actividad 6 permitirá a los alumnos generalizar, con ayuda del álgebra, una de las propiedades de la división de números enteros. Seguramente, para encontrar las primeras divisiones, procederán por ensayo y error, pero se darán cuenta de que si multiplican el divisor por un número natural y al resultado le suman el residuo, obtienen el dividendo. Por ejemplo $12 \times 3 + 5 = 41$, con este resultado se formula la división $41 \div 12 = 3$ y sobran 5. De manera que se puede plantear una infinidad de divisiones que cumplen con la condición establecida, y encontrar los dividendos mediante la fórmula, $12n + 5$, siendo n un número entero.

Para resolver la actividad 7, es muy probable que los alumnos busquen dos números cualesquiera que multiplicados den 2688; dicho de otra manera, que descompongan 2688 en un producto de dos factores. Enseguida, duplican uno de los factores, triplican el otro, los multiplican y obtienen el resultado. Lo anterior equivale a agregar un dos y un tres a la descomposición prima de 2688, que es lo mismo que multiplicar este número por seis. Observe si los alumnos se dan cuenta de este hecho, si no, puede comentarlo al hacer la revisión y dividir.

En la actividad 8, observe si los alumnos comienzan por plantear la suma: $n + 2n + 3n + 4n = 10n$, lo que permite ver que, para cualquier valor entero de n, el número $10n$ será múltiplo de 10 y, por lo tanto, terminará en cero.

En la actividad 9 deje que los alumnos lleven a cabo el proceso que se plantea y observe si las respuestas a la pregunta del inciso d) coinciden en que el resultado es 1. La formulación de la propiedad que se pide en el inciso e) puede ser enunciada de varias maneras, por ejemplo, "si un número se eleva al cuadrado y se le resta el producto del que va antes por el que va después, el resultado siempre es 1".

Finalmente, en la actividad 11 se plantea una generalización más amplia que la que se analiza en la sección "Para empezar". Observe si los alumnos logran formular algebraicamente los casos necesarios para llegar a una conclusión. Al probar con cuatro números consecutivos, verán que la expresión factorizada contiene al 2 como factor $2(2n + 3)$. Con base en esto, algunos dirán que sí es múltiplo de cuatro, pero para $n = 1$ el valor de la expresión es 10, que efectivamente es múltiplo de dos, pero no de cuatro. Al seguir probando con otras sucesiones de números consecutivos, se espera que puedan concluir que esta generalización sólo es válida para sucesiones impares de números consecutivos como 3, 5, 7, es decir, donde n es impar.

9. Consideren tres números enteros consecutivos cualesquiera y hagan en su cuaderno lo que se indica.

a) Representen algebraicamente los tres números.

n, $n + 1$, $n + 2$

b) Eleven al cuadrado el número de en medio.

$(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$

c) Obtengan el producto del primer número por el tercero.

$n(n + 2)$, $n^2 + 2n$

d) Al cuadrado del número de en medio, réstenle el producto del primero por el tercero. ¿Cuál es el resultado?

$(n^2 + 2n + 1)$, $(n^2 + 2n) = 1$

e) Describan la propiedad anterior.

Son número primos relativos, y su máximo común divisor es uno.

Dato interesante
En matemáticas aún falta mucho por descubrir, por ejemplo, la conjetura de Collatz que dice: “Dado cualquier número natural, se aplica una de estas dos sencillas reglas: si es par, se divide entre dos; si es impar, se multiplica por 3 y se le suma 1. Al número restante se le aplican las mismas reglas, y así hasta terminar. Los últimos números terminarán irremediablemente en 4, 2 y el final en 1”. ¿Por qué ocurre esto?

Pautas para la evaluación formativa

Observe y registre si los alumnos logran:

- Identificar el mayor factor común en una expresión algebraica de dos o más términos.
- Factorizar una expresión algebraica de dos o más términos, extrayendo el mayor factor común.
- Completar razonamientos para generalizar propiedades de los números.

¿Cómo apoyar?

Es probable que algunos alumnos necesiten repasar contenidos que ya se han estudiado, como el producto y cociente de potencias de la misma base o la equivalencia de expresiones algebraicas. Recuerde que siempre es recomendable regresar hasta donde sea necesario para que los alumnos puedan entender lo nuevo. En general, no basta con unos pocos ejemplos, es necesario realizar actividades que se pueden encontrar en secuencias anteriores de este grado o de grados anteriores.

Una actividad que puede plantear para el caso de la sesión 1, es la expresión

$$5x^4y + 2x^3y^2 - x^2y^3 + xy^4,$$

que es un polinomio que consta de cuatro términos. ¿Cuál es el MCD de los términos de este polinomio?

¿Cómo extender?

Puede plantear otras preguntas con la idea de que los alumnos usen el álgebra para obtener conclusiones. Por ejemplo, ¿qué características tiene la suma de un número par con un impar?

También puede plantearles, para el caso del problema 4 de la sesión 3, que vincula la factorización numérica con la factorización algebraica, que obtengan diferencias entre los factores. Por ejemplo, el 82 se obtiene con los mismos factores de la primera fila, pero el 84 debe ser positivo y el 2 negativo, así el producto es −168.

Para obtener −26 en la última columna, la forma de agrupar los factores es $2 \times 2 \times 3 = 12$ y $2 \times 7 = 14$, y ambos sumandos deben ser negativos, pues la suma es −26 y el producto 168. Esto se puede resolver también al formular la ecuación de segundo grado $x^2 - 26x + 168 = 0$. Al factorizarla se tiene

$$(x - 12)(x - 14) = 0$$

y sus raíces son $x_1 = 12$ y $x_2 = 14$.

Secuencia 21 Figuras geométricas y equivalencia de expresiones de segundo grado 3

(LT, Vol. II, págs. 114-119)

Tiempo de realización	3 sesiones
Eje temático	Número, álgebra y variación
Tema	Patrones, figuras geométricas y expresiones equivalentes
Aprendizaje esperado	Formula expresiones de segundo grado para representar propiedades del área de figuras geométricas y verifica equivalencia de expresiones, tanto algebraica como geométricamente.
Intención didáctica	Que los alumnos manipulen expresiones algebraicas, ya sea factorizadas o expresadas como el producto realizado y comprueben su equivalencia al hacer las operaciones necesarias. Que los alumnos sustituyan las literales por valores arbitrarios y obtengan resultados iguales al hacer las operaciones indicadas.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisual** • *De la geometría al álgebra en la matemática de los antiguos griegos* **Informático** • *Expresiones algebraicas cuadráticas*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recursos audiovisuales** • *Expresiones equivalentes y no equivalentes* • *Factorización de expresiones algebraicas de segundo grado*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Factoricen expresiones algebraicas de segundo grado y comprueben su equivalencia.
- Sesión 2. Verifiquen que son equivalentes las expresiones algebraicas que representan el área de dos figuras iguales, aunque las partes que las forman estén organizadas de diferente manera.
- Sesión 3. Usen la trasposición de términos para comprobar que dos expresiones algebraicas son equivalentes cuando representan la misma área.

Acerca de...

El armado de rompecabezas es una actividad lúdica que no es exclusiva sólo de los niños pequeños, sino que es atractiva e interesante para las personas adultas.

En esta secuencia se usa el rompecabezas de Arquímedes como recurso para trabajar nuevamente con el uso de expresiones algebraicas equivalentes para representar áreas. Además, se aprenderá a relacionar las expresiones algebraicas de segundo grado con una expresión factorizada.

Para lograrlo, los alumnos tendrán que retomar y usar ideas y conceptos estudiados en secuencias y grados anteriores, entre los cuales se encuentran el concepto de diagonal, las alturas de los triángulos, la correspondencia de lados y la congruencia de triángulos, el teorema de Pitágoras y las propiedades de la igualdad.

Se continúa el trabajo de factorizar expresiones algebraicas y comprobar que las expresiones obtenidas son equivalentes al dar un mismo valor a las literales que son iguales en las expresiones empleadas. Para realizar las comprobaciones se recurre al uso de la trasposición de términos.

Finalmente, el estudio del contenido de esta secuencia coloca el foco tanto en la transformación y operación de expresiones algebraicas, como en el empleo de la geometría para que los alumnos comprendan el uso de la literal como número general.

Sobre las ideas de los alumnos

Una idea errónea entre los alumnos consiste en pensar que cuando una figura se recorta para armarla de manera diferente, cambia su área; o bien, que si cambia la expresión con la cual se representa el área, la superficie cambia. En el trabajo que desarrollen en esta secuencia podrán observar que, aunque armen de diferente manera el rompecabezas, su área se conserva.

El uso de las literales no es algo simple, y la realización de operaciones con ellas tampoco es sencillo. Muchos alumnos tienen dificultades o confusiones para distinguir cuando las literales se usan como incógnitas en una ecuación o como variables en una función o en cualquier expresión algebraica como un número general.

¿Cómo guío el proceso?

Este contenido puede relacionarse con la asignatura de Historia, ya que se hace referencia al matemático griego Arquímedes. Se sugiere realizar una lectura comentada de la sección "Para empezar", señalando las aportaciones de los antiguos filósofos y matemáticos griegos, las cuales han llegado hasta nuestros días, y resaltando cómo han trascendido a través de los siglos.

Se sugiere que se detengan para responder las preguntas planteadas en esta introducción, o bien para expresar algunas hipótesis al respecto que después podrán someter a comprobación.

En la actividad 1 de la sesión 1 se solicita que factoricen dos expresiones, cada una como producto de dos factores. Es muy probable que, en el inciso a), algunos alumnos escriban: $(x + y)^2$, o bien $x(x + 2y) + y^2$. Aunque no son incorrectas estas expresiones, es necesario hacerles ver que se requiere obtener dos factores, por lo que la respuesta sería $(x + y)(x + y)$. Para la expresión del inciso b) será $(x + a)(x + b)$.

En ambos casos, tenga presente que si a los alumnos no se les ocurre comprobar sus respuestas antes de esperar la revisión colectiva, usted debe invitarlos a validar lo que hicieron buscando la manera de justificarlo.

En estos casos puede suceder que igualen las expresiones dadas con lo que escribieron y efectúen las operaciones necesarias para observar si la igualdad se cumple, o, de forma más sintética, que asignen valores a las literales. Esto mismo se les puede proponer en la actividad 2.

En la sesión 2 se trabaja con el rompecabezas de Arquímedes (incluido también en el recortable de la página 181). Al respecto, se sugiere pedir que los alumnos lo lleven al aula ya recortado.

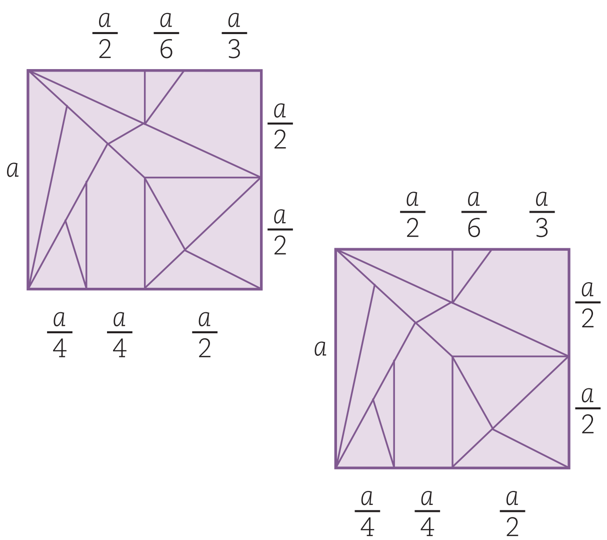
En el inciso a) de la actividad 1 se trata de expresar el área de un cuadrado, por lo que los alumnos podrán escribir tres diferentes expresiones, de acuerdo con las acotaciones que usen para ello. Por ejemplo, para decir que el área es la medida de un lado elevado al cuadrado: $a^2, \left(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\right)^2, \left(\frac{a}{3}+\frac{a}{6}+\frac{a}{2}\right)^2, \left(\frac{a}{4}+\frac{a}{4}+\frac{a}{2}\right)^2$; para expresar como producto de la medida de dos lados: $\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\right)\left(\frac{a}{3}+\frac{a}{6}+\frac{a}{2}\right)$, $\left(\frac{a}{4}+\frac{a}{4}+\frac{a}{2}\right)(a)$, etcétera. Son seis productos diferentes, le sugerimos pedir a los alumnos que los encuentren y realizar un intercambio de ideas acerca de la equivalencia de todos los productos.

Lo importante es que tengan claridad de que las expresiones que escribieron son equivalentes y que por eso es valiosa su respuesta al inciso b). Si observa que hay una expresión que no consideraron, puede proponérsela a los alumnos y pedirles que verifiquen si es equivalente o no a las anteriores.

También puede sugerir que calculen el perímetro del rompecabezas, con lo que seguirán ejercitando tanto la transformación de expresiones algebraicas como el uso de las fracciones.

En la segunda actividad de la sesión 2 deberán usar el rompecabezas recortado para reproducir los otros dos que aparecen en su libro. Con el fin de emplear eficientemente el tiempo de la clase, se sugiere que le pida a la mitad del grupo que trabaje con el armado del rompecabezas 1, y la otra mitad armará el 2.

Al llegar a la actividad 4, puede hacer una puesta en común de su trabajo y pedir que compartan las expresiones escritas para cada uno, y después determinar si son equivalentes. Las dimensiones que deberán considerar para expresar el área son:



En la actividad 6 se pide a los alumnos que digan si el área de los dos rectángulos en que queda dividido el rompecabezas es igual; aquí podrían notar que en esta construcción quedan 7 piezas de cada lado del segmento y usar esto como justificación para decir que las áreas son iguales.

Cabe aclarar que sí son iguales las áreas de los rectángulos, pero su justificación no se basa en el número de piezas, sino en la equivalencia de las expresiones que se obtienen al expresar el área de ambos. Para que los alumnos descarten esa hipótesis errónea, requiere solicitarles que tracen un segmento igual en los rompecabezas 1 y 2 para que observen que hay piezas que quedan divididas en dos partes y, no obstante, las áreas de los dos rectángulos obtenidos son iguales.

En la actividad 7 se les pide la expresión que corresponde a cada triángulo cuando el rompecabezas se divide por la diagonal, y también la expresión que representa la longitud de ambas diagonales. En esta sección se recomienda que recuerden las características de las diagonales de un cuadrado.

En la actividad 8, para calcular la medida de las diagonales del rompecabezas, deberán recurrir al teorema de Pitágoras: $AD^2 + DC^2 = y^2$. Así, los alumnos deberán transformar las expresiones y usar, además, varios conocimientos, como operaciones con fracciones. Una expresión que podrían obtener para la diagonal *y* es:

$$(a)^2 + \left(\frac{4a}{4}\right)^2 = y^2$$

$$a^2 + a^2 = y^2 \rightarrow \sqrt{2a^2} = \sqrt{y^2}$$

y, por lo tanto, $y = \sqrt{2a^2}$

de donde $y = a\sqrt{2}$

Otra expresión posible es:

$$\left(\frac{2a}{2}\right)^2 + \left(\frac{6a}{6}\right)^2 = y^2$$

$$a^2 + a^2 = y^2 \rightarrow \sqrt{2a^2} = \sqrt{y^2}$$

y, por lo tanto, $y = \sqrt{2a^2}$

de donde $y = a\sqrt{2}$

En ambos casos se llega a la misma expresión. Este aprendizaje puede aprovecharse para que los alumnos también recuerden que si un número cualquiera está elevado al cuadrado y se le extrae raíz cuadrada, se obtiene el mismo número: $\sqrt{y^2} = y$.

Conviene que en esta parte promueva que los alumnos recuerden que si dos cantidades son iguales a una tercera, entonces esas dos cantidades son iguales entre sí.

$$(a)^2 + \left(\frac{4a}{4}\right)^2 = y^2 \quad \text{y} \quad \left(\frac{2a}{2}\right)^2 + \left(\frac{6a}{6}\right)^2 = y^2$$

Entonces, $(a)^2 + \left(\frac{4a}{4}\right)^2 = \left(\frac{2a}{2}\right)^2 + \left(\frac{6a}{6}\right)^2$

En la sesión 3 se continúa usando el *Stomachion* armado en la sesión anterior para responder a las preguntas planteadas. En la actividad 1 inciso a), bastará que tomen cualquiera de las expresiones obtenidas para representar la longitud de la diagonal y la dividan entre 2.

Para responder la actividad 2, deberán recurrir de nuevo al teorema de Pitágoras para expresar la longitud de $\overline{EC}$ y $\overline{ED}$.

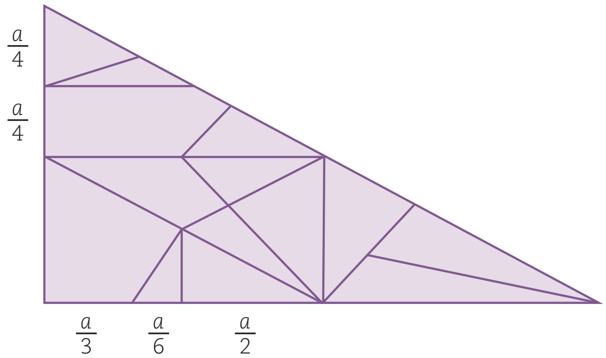
Para responder el inciso c) de esta actividad pueden establecer varias relaciones, por ejemplo:

- Dado que E es punto medio de un lado del cuadrado, la distancia del punto E al punto D es igual a la distancia del punto E al punto C, por tanto, $\overline{ED} = \overline{EC}$.
- Como los lados del cuadrado miden lo mismo, entonces $a = \frac{a}{3} + \frac{a}{6} + \frac{a}{2}$; $\frac{a}{2} = \frac{a}{2}$ y $\angle A = \angle B$, por lo tanto, los triángulos ADE y BCE son congruentes, así que $\overline{ED} = \overline{EC}$.

Como las dos opciones se sustentan en aspectos geométricos y el propósito de esta secuencia se basa en que los alumnos transformen y operen con expresiones algebraicas, si no aparece esta opción, usted podría solicitarles que obtengan la expresión algebraica que representa la longitud de cada segmento y que comprueben la equivalencia de ambas expresiones haciendo las operaciones correspondientes.

Desde esta actividad hasta la 7, los alumnos deberán usar expresiones algebraicas para representar lo que se solicita. Es muy probable que los alumnos sólo se concreten a sustituir las literales por valores arbitrarios. Aunque esto es una buena estrategia para comprobar la equivalencia, pídales que también hagan las transformaciones algebraicas necesarias para comprobar la igualdad de las expresiones.

En la actividad 6 faltan, en la longitud de las medidas, dos valores que permiten contar con los datos necesarios para establecer la expresión que represente el área del triángulo, la cual es igual a la del rompecabezas original, es decir, a^2.



Los valores que faltan en el triángulo son $\frac{a}{2}$ en la altura y a en la base, por lo que una expresión puede ser

$$A = \frac{\left(\frac{a}{3} + \frac{a}{6} + \frac{a}{2} + a\right)\left(\frac{a}{4} + \frac{a}{4} + \frac{a}{2}\right)}{2}$$

Otra expresión correcta podría ser

$$A = \frac{\left(\frac{12a}{6}\right)\left(\frac{4a}{4}\right)}{2}$$

Finalmente, al llevar a cabo las transformaciones algebraicas para demostrar que son equivalentes, o cuando sustituyan las literales por los valores que ellos quieran, seguramente se darán cuenta de muchos atajos que pueden tomar al hacer las operaciones, incluso hacer algunos mentalmente.

Pautas para la evaluación formativa

Para valorar el avance de los alumnos, observe si logran:

- Comprender que las literales se usan para representar cualquier valor.
- Saber que las literales iguales en una expresión algebraica representan un mismo valor.
- Comprender que se puede usar cualquier literal para representar un valor determinado, pero que una vez que se elige, ésta tendrá el mismo valor sin importar cuántas veces aparezca en dicha expresión.

- Representar una expresión algebraica como el producto de dos factores.
- Usar la trasposición de términos para establecer la equivalencia de expresiones algebraicas.
- Escribir varias expresiones algebraicas que representen una misma área.

¿Cómo apoyar?

Si los alumnos aún enfrentan problemas para efectuar las trasformaciones que les permitan establecer la equivalencia de expresiones algebraicas, pídales que recuerden cuáles son las operaciones contrarias (suma-resta, multiplicación-división, potencia-raíz) y que en ellas se basa la trasposición de términos.

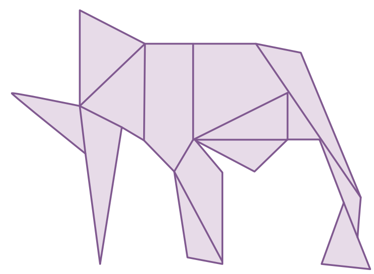
¿Cómo extender?

Con el fin de ejercitar las operaciones y de que no se queden con la idea de que sólo se puede comprobar la igualdad con números naturales, pida a los alumnos que usen fracciones o números decimales para llevar a cabo la comprobación de la equivalencia de las expresiones que obtengan, por ejemplo:

$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$	$x = \frac{2}{3}$ $y = \frac{1}{4}$
$x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$	$x = \frac{1}{5}$ $a = \frac{1}{2}$ $b = \frac{1}{2}$
$(a)^2 + \left(\frac{4a}{4}\right)^2 = \left(\frac{2a}{2}\right)^2 + \left(\frac{6a}{6}\right)^2$	$a = \frac{2}{3}$

Si lo considera conveniente, puede decirles que armen un elefante con las piezas del *Stomachion* y, posteriormente, propiciar una discusión acerca del área total de las piezas que conforman al elefante, para valorar si comprendieron la conservación del área al descomponer y recomponer figuras geométricas.

Elefante



Secuencia 22 Ecuaciones cuadráticas 3

(LT, Vol. II, págs. 120-131)

Tiempo de realización	6 sesiones
Eje temático	Número, álgebra y variación
Tema	Ecuaciones
Aprendizaje esperado	Resuelve problemas mediante la formulación y solución algebraica de ecuaciones cuadráticas.
Intención didáctica	Que los alumnos resuelvan problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas y que las resuelvan por el método que ellos decidan, incluyendo el uso de la fórmula general.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisuales** • *Fórmula general* • Discriminante de la *fórmula general* **Informático** • *Fórmula general*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recursos audiovisuales** • *Recomendaciones iniciales para el estudio de ecuaciones cuadráticas* • *Aspectos a considerar para resolver ecuaciones cuadráticas incompletas* **Bibliografía** • Santos Trigo, Luz M. (2010). *La función cuadrática. Enfoque de resolución de problemas*, México, Editorial Trillas.

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Reconozcan la necesidad de contar con una fórmula que permita resolver cualquier tipo de ecuación cuadrática.
- Sesión 2. Resuelvan problemas usando la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado.
- Sesión 3. Analicen el signo del discriminante para conocer las soluciones de una ecuación cuadrática, dos soluciones distintas, sólo una solución doble o ninguna solución en los números racionales e irracionales.
- Sesión 4. Resuelvan problemas que impliquen el uso de propiedades de las raíces de ecuaciones cuadráticas y de propiedades geométricas.
- Sesión 5. Elijan el tipo de ecuación más eficaz para modelar situaciones y su solución, además de que identifiquen las soluciones en una gráfica para después obtener dicha ecuación.
- Sesión 6. Comparen el comportamiento de las gráficas de las funciones lineales y cuadráticas para determinar la manera en que a cada una de esas funciones se le asocia una ecuación.

Acerca de...

¿Qué conocen los alumnos acerca de la ecuación cuadrática? En las secuencias 4, "Ecuaciones cuadráticas 1", y 14, "¿Ecuación o función?", aprendieron a analizar el comportamiento de las gráficas de funciones de las formas $y = ax^2 + c$ y $y = ax^2 + bx$, y a determinar la manera en que a estas funciones se les asocian las ecuaciones $ax^2 + c = 0$ y $ax^2 + bx = 0$ respectivamente.

Aprendieron, también, a resolverlas algebraicamente y a reconocer que los valores de las abscisas de los puntos en que las gráficas de las funciones cortan al eje *X* representan las soluciones de estas ecuaciones. Otro aprendizaje fue la aplicación de esas técnicas para la resolución de problemas concretos.

En esta última secuencia sobre ecuaciones cuadráticas, los alumnos extenderán esos conocimientos a la ecuación cuadrática completa $ax^2 + bx + c = 0$ y su resolución mediante la fórmula general.

Con esto se espera que los alumnos puedan identificar una ecuación cuadrática como aquella que se escribe así: $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b y c son números cualesquiera y a debe ser diferente de 0, y las resuelvan aplicando la fórmula general, por factorización y de manera gráfica.

Adicionalmente, los alumnos reconocerán: las raíces de una ecuación cuadrática; la relación que existe entre el valor del discriminante de una ecuación cuadrática y las raíces y, consecuentemente, el número de puntos en que corta la gráfica al eje X. Asimismo, sabrán lo que se obtiene si se suman o multiplican las raíces de una ecuación cuadrática.

Sobre las ideas de los alumnos

¿Los alumnos tienen idea de que muchos fenómenos del mundo real tienen que ver con la idea de *variación*, es decir, con la idea de cambio? La única manera de saberlo es preguntarlo, y ésta es una buena manera de empezar el estudio de esta secuencia. Los alumnos saben que "a mayor velocidad, menos tiempo cuando la distancia es constante", pero es difícil que comprendan la diferencia entre esta situación y decir "voy a hacer un viaje de 150 km a una velocidad de 80 km/h, ¿cuánto tardaré en llegar?".

En la primera situación se deja abierta la posibilidad de variar la velocidad y, en consecuencia, el tiempo; en la segunda, se tienen ya establecida la distancia y la velocidad, por lo tanto, sólo hay una respuesta posible para el tiempo. Dicho de otra forma, los alumnos muchas veces confunden situaciones de variación con situaciones que implican ecuaciones.

¿Cómo guío el proceso?

Antes de iniciar el trabajo con esta secuencia, podría platicar con los alumnos acerca de qué tipo de ideas tienen sobre situaciones como las siguientes: "¿Cómo varía la distancia que recorre un automóvil que se mueve a una velocidad constante conforme transcurre el tiempo?"; "¿Qué tanto varía una deuda a cierta tasa de interés cuando pasa el tiempo?"; "Si lanzan una pelota hacia arriba, ¿cómo varía su velocidad hasta el punto en que se detiene?". Motívelos para que reflexionen acerca de cómo las representarían matemáticamente, ¿qué ideas pueden proponer los alumnos sobre estas cuestiones?, ¿qué otros ejemplos de fenómenos de variación pueden aportar? Las respuestas de los alumnos constituyen una buena base para despertar su interés a partir de involucrarlos en la construcción del proceso de aprendizaje.

Con el fin de ubicar a los alumnos en el tema de la formulación y solución de las ecuaciones cuadráticas completas, se propone, en la sección "Para empezar", un "truco" que tiene el propósito de encontrar rápidamente el cuadrado de un número de dos cifras, terminado en 5.

En las actividades 1 y 2 de la sesión 1 se explica que el "truco" se basa en el hecho de que el producto de dos binomios iguales es un trinomio cuadrado perfecto. El binomio es $(10a + 5)$, donde a es el dígito de las decenas y el resultado es $100a(a + 1) + 5^2$, donde a y $(a + 1)$ representan números consecutivos. Por ejemplo, si el dígito de las decenas es 8, entonces $85 \times 85 = 100 \times 8 \times 9 + 5^2 = 7200 + 25 = 7225$.

En la actividad 3 se propone que los alumnos resuelvan un problema que, mediante la aplicación de la ecuación cuadrática completa $3x^2 - 4x - 15 = 0$.

Los alumnos pueden encontrar por ensayo y error una solución: $x_1 = 3$, sin embargo, puede dificultárseles encontrar la segunda solución por el método de factorización que conocen, pues saben hacerlo en los casos donde el coeficiente del término cuadrático es 1, y en este caso no es así. De ahí la necesidad de contar con un método general que permita resolver ecuaciones cuadráticas completas, y aquí el texto propone la fórmula general.

Si bien es posible factorizar expresiones como $3x^2 - 4x - 15$ éste no es un tema para tratar en educación secundaria porque implica una excesiva y compleja manipulación algebraica. La factorización es $3x^2 - 4x - 15 = 3(x - 3)(x + \frac{5}{3})$. Es decir, la segunda solución es: $x_2 = -\frac{5}{3}$.

Algo que puede llamar la atención de los alumnos es que en la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas $x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ aparece el doble signo $\pm$ de la raíz cuadrada. Por ello, conviene que recuerde de dónde surge ese doble signo. Una manera de hacerlo se explica a continuación.

La raíz cuadrada de un número no negativo x es aquel número que, multiplicado por sí mismo, da como resultado el valor x. Por ejemplo: $\sqrt{4} = +2$ porque $(+2)(+2) = 4$; pero también $\sqrt{4} = -2$ porque $(-2)(-2) = 4$. En general, la raíz cuadrada de un número no negativo tiene dos raíces, una positiva y la otra negativa.

La actividad 1 de la sesión 2 propone la resolución del problema planteado en la actividad 3 de la sesión anterior mediante la fórmula general con el propósito de que los alumnos se familiaricen con su uso.

Esto tiene la intención de que los alumnos reconozcan cómo se representa el problema con una ecuación y que asocien los coeficientes de los términos de la ecuación con la fórmula general, para después sustituirlos en ella, como se indica a continuación:

Ecuación cuadrática	Coeficientes		
$ax^2 + bx + c = 0$	a	b	c
$3x^2 - 4x - 15 = 0$	3	−4	−15

Al aplicar la fórmula general al desarrollo de las dos posibles soluciones, se obtiene:

Fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas	
Primera solución $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	Segunda solución $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
$= \frac{-(-4) + \sqrt{(-4)^2 - 4(3)(-15)}}{2(3)}$ $= \frac{4 + \sqrt{196}}{6} = 3$	$= \frac{-(-4) - \sqrt{(-4)^2 - 4(3)(-15)}}{2(3)}$ $= \frac{4 - \sqrt{196}}{6} = -\frac{10}{6} = -\frac{5}{3}$

En este caso, las soluciones de la ecuación representan los dos números que cumplen con las condiciones del problema.

Con respecto al problema que se propone en la actividad 4 de la sesión 2, los alumnos pueden darse cuenta de que la ecuación cuadrática que lo resuelve se obtiene directamente de la figura de la página 124: el área de cada andador (ancho) de la alberca es $5x$, y la de cada andador (largo) de ésta es $10x$; además, en la figura se observa que las esquinas de la alberca son cuatro cuadritos de x metros por lado y el área de los cuatro es $4x^2$. La suma de todas estas partes del andador es $4x^2 + 2(5x) + 2(10x)$ y como el área de todos es 16 m², para encontrar el valor de x (ancho del andador) se plantea la ecuación $4x^2 + 30x = 16$, que en la forma general de la ecuación cuadrática sería $4x^2 + 30x - 16 = 0$, cuyas soluciones son $x_1 = 0.5$ y $x_2 = -8$; en consecuencia, el ancho del andador sólo puede ser 0.5 m, porque los valores negativos no pueden representar longitud.

En el inciso c) de la actividad 6, es necesario que promueva que los alumnos observen que la ecuación $3x^2 - 10x = 25$ es equivalente a $3x^2 - 10x - 25 = 0$.

En la actividad 1 de la sesión 3 es importante recordar a los alumnos que toda ecuación cuadrática tiene dos raíces, que pueden ser distintas o iguales, o incluso pueden no ser números racionales o irracionales. Por ejemplo, la ecuación $3x^2 + x - 10 = 0$ tiene dos raíces diferentes:

$$x_1 = \frac{5}{3} \text{ y } x_2 = -2.$$

Por otro lado, $x^2 + 2x + 1 = 0$ tiene dos raíces iguales, lo cual puede verse si el primer miembro se expresa como producto de dos factores:

$$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)(x + 1) = 0$$

Entonces, si se habla de las soluciones de esta ecuación, podría pensarse en $x = -1$ (una solución); pero si se habla de raíces, podría pensarse en $x_1 = -1$ y $x_2 = -1$ y en este caso las raíces son iguales, es decir, la ecuación tiene dos raíces iguales o raíz doble.

En la actividad 1 de la sesión 3 es muy importante que utilice las gráficas que aparecen en la página 125 del libro, para que los alumnos reflexionen sobre los siguientes aspectos:

- La relación que existe entre el valor del discriminante ($b^2 - 4ac$) de una ecuación cuadrática y el número de raíces.
- La representación geométrica de las raíces de la ecuación cuadrática, determinada por el valor del discriminante.

El valor del discriminante de la primera ecuación $3x^2 + x - 10 = 0$ es mayor que cero (es 121), por lo que la ecuación tiene dos raíces distintas ($\frac{5}{3}$ y -2) y la gráfica de la función correspondiente, corta al eje X en dos puntos, cuyas abscisas son esas dos raíces.

El valor del discriminante de la segunda ecuación $x^2 + 2x + 1 = 0$ es cero, y la ecuación tiene dos raíces iguales (en este caso -1) y la gráfica de la función corta al eje X sólo en un punto. El vértice de la parábola es un punto sobre el eje X.

El valor del discriminante de la tercera ecuación $3x^2 - 2x + 1 = 0$ es menor que cero (es -8), y la ecuación no tiene raíces fraccionarias ni decimales, por lo que la gráfica de la función no corta al eje X.

En las actividades 1 y 2 de la sesión 4, los alumnos deberán llegar a las siguientes respuestas:

a) $(2x + 3)^2 = 2(6x + 4) \rightarrow 4x^2 + 12x + 9 = 12x + 8 \rightarrow 4x^2 + 1 = 0 \rightarrow$ No tiene solución.

b) $8(2 - x)^2 = 2(8 - x)^2 \rightarrow 8(4 - 4x + x^2) = 2(64 - 16x + x^2) \rightarrow 6x^2 - 96 = 0 \rightarrow x_1 = 4$, $x_2 = -4$.

c) $3x(x - 2) - (x - 6) = 4(x - 3) + 10 \rightarrow 3x^2 - 11x + 8 = 0 \rightarrow x_1 = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$, $x_2 = 1$.

En la actividad 3, inciso a), se pide aplicar las propiedades de la suma y el producto de las raíces de una ecuación cuadrática para verificar si las soluciones de las ecuaciones de la actividad 1 son correctas. Por tanto, se desglosa la explicación para cada respuesta.

El inciso a) no tiene solución porque no existe ningún número racional o irracional que sea la raíz cuadrada de un número negativo. En este caso $x = \pm\sqrt{-\frac{1}{4}}$.

Inciso b) $x_1 + x_2 = 4 - 4 = 0$ y $\frac{-b}{a} = \frac{0}{6} = 0$; $x_1(x_2) = (4)(-4) = \frac{-96}{6} = -16$ y $c = -96$.

Inciso c) $x_1 + x_2 = \frac{8}{3} + 1 = \frac{11}{3}$ y $\frac{-b}{a} = \frac{-(-11)}{3} = \frac{11}{3}$; $x_1\,(x_2) = (\frac{8}{3})(1) = \frac{8}{3}$ y $\frac{c}{a} = \frac{8}{3}$.

Para resolver la actividad 4, solicite a los alumnos completar el triángulo rectángulo prolongando el radio hasta el extremo D de la cuerda CD, así como trazar el segmento DF, que une los extremos de las cuerdas.

Las medidas del triángulo serán: para la hipotenusa, $2r$ y para los catetos, $(r + 6)$ y 12, respectivamente. Al aplicar el teorema de Pitágoras, se obtiene: $(2r)^2 = (r + 6)^2 + 12^2$. Al simplificar y ordenar los términos de la ecuación, se obtiene $r^2 - 4r - 60 = 0$. Una de sus soluciones da la medida del radio: 10 cm.

En las actividades de la sesión 5, los alumnos tendrán la oportunidad de elegir la herramienta matemática más eficaz para resolver un problema dado, en este caso, una ecuación de primer grado, un sistema de ecuaciones lineales, o una ecuación cuadrática.

En la actividad 1, inciso a), la primera parte del problema no ofrece ninguna dificultad: $x + y = 184$, pero la segunda parte, sí. Una estrategia para hallar la ecuación que modela esa segunda parte consiste en suponer que no hay residuo y la ecuación es $\frac{x}{y} = 2$, para que el residuo sea 7 hay que restar 7 al numerador así que la ecuación es $\frac{x - 7}{y} = 2$.

En la actividad 3 se propone la ecuación $x^2 + (x + 1)^2 + (x + 2)^2 = 110$ y se pide elegir de cuatro problemas los que pueden modelarse con esta ecuación; las soluciones son los incisos a) y c).

Aquí conviene preguntar a los alumnos por qué los otros dos no corresponden a la ecuación planteada.

Para dar respuesta a ello, los alumnos deberán simplificar y ordenar los términos de la ecuación cuadrática y expresarla en su forma normal o canónica: $3x^2 + 6x - 105 = 0$ que, al factorizarla, se obtiene $3(x - 5)(x + 7) = 0$ y, por lo tanto, las soluciones de la ecuación son: $x_1 = 5$ $x_2 = -7$ y sólo la primera solución es válida para el problema. Los números consecutivos son 5, 6 y 7 y el número de tres cifras es 567 porque $5^2 + 6^2 + 7^2 = 110$.

En la sesión 6 se proponen dos problemas. Después de que los alumnos los lean, plantee las siguientes preguntas para promover la reflexión:

"¿Qué tienen en común estos problemas?"; "¿En qué son diferentes?"; "¿Alguno de ellos se resuelve mediante una ecuación cuadrática?¿Cuál?"; "Para resolver uno de ellos, ¿conviene elaborar una tabla de valores?"; "Si en ambos se representa la medida del ancho del rectángulo con la literal *a*, ¿cómo se representa la medida del largo en función de la medida del ancho?".

En el primer problema, las medidas de los lados pueden representarse de la siguiente manera: ancho = a, largo = $8 - a$. Consecuentemente, el área será $a(8 - a)$. Como no se especifica numéricamente el área, habrá que elaborar una tabla de valores para calcular las posibles áreas del gallinero y determinar cuál sería la mayor. De esto se concluye que el gallinero de mayor área tendría forma cuadrada de 4 m por lado.

Con respecto del problema 2, la representación algebraica del área es también $a(8 - a)$, pero como aquí sí se conoce el valor numérico del área (15 m^2), puede plantearse la ecuación que permite encontrar la medida de los lados del gallinero: $a(8 - a) = 15$, cuyas soluciones son $a_1 = 3$ y $a_2 = 5$.

Pautas para la evaluación formativa

Para valorar el avance de los alumnos, observe si logran:

- Resolver algebraicamente ecuaciones cuadráticas completas e incompletas.
- Representar gráficamente situaciones que implican funciones lineales y cuadráticas.
- Determinar el tipo de raíces de una ecuación cuadrática a partir del valor del discriminante de la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas.
- Identificar las raíces de una ecuación en la gráfica correspondiente.

¿Cómo apoyar?

Es probable que algunos alumnos aún tengan dificultades para simplificar y ordenar ecuaciones cuadráticas para obtener su forma general o canónica. Si esto sucede, sugiérales que revisen las secuencias sobre expresiones equivalentes.

También puede proponer situaciones problemáticas adicionales que impliquen la representación algebraica de funciones cuadráticas y de ecuaciones asociadas a ellas.

Por ejemplo:

Considere la función cuadrática $y = x^2 + 2x - 3$.

- Pida elaborar una tabla de valores de esta función para determinar si tiene un valor máximo o un valor mínimo.
- ¿Cuál es ese valor? ¿Es máximo o mínimo?
- ¿Cuáles son las raíces de la ecuación asociada a esa función?

¿Cómo extender?

Si observa que los alumnos resuelven con facilidad algún problema, pídales que inventen uno para que lo resuelva todo el grupo y tengan claridad de cuál o cuáles son las posibles soluciones.

Secuencia 23 Funciones 3

(LT, Vol. II, págs. 132-141)

Tiempo de realización	4 sesiones
Eje temático	Número, álgebra y variación
Tema	Funciones
Aprendizaje esperado	Analiza y compara diversos tipos de variación a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica, que resultan de modelar situaciones y fenómenos de la física y de otros contextos.
Intención didáctica	Que los alumnos resuelvan problemas que implican el análisis de la relación de variación cuadrática para conocer sus propiedades y características y las pueda expresar algebraicamente.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisuales** • *Maximización de áreas en un proyecto de acuaponia* • *Modelación de fenómenos con funciones cuadráticas* **Informático** • *Elementos y características de una función cuadrática*
Materiales de apoyo para el maestro	**Bibliografía** • "Cada gota cuenta" (22 de diciembre de 2020), en FAO. Disponible en http://www.fao.org/fao-stories/article/es/c/1113809/ **Recursos audiovisuales** • *Interpretación de gráficas con secciones curvas* • *Relaciones funcionales con variación cuadrática*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Analicen el crecimiento y decrecimiento cuadrático a partir de las representaciones tabular y gráfica para determinar un punto máximo y expresar algebraicamente la situación.
- Sesión 2. Resuelvan problemas a partir de elaborar e interpretar la representación tabular y gráfica que describe el crecimiento cuadrático.
- Sesión 3. Comparen las representaciones tabular y gráfica para interpretar los valores que representan un fenómeno que tiene una variación de segundo grado.
- Sesión 4. Resuelvan problemas que implican conocer las propiedades y características de la función cuadrática a partir de sus distintas representaciones, poniendo énfasis en el eje de simetría y el vértice de la parábola, así como en la información que aportan sobre la situación que representan.

Acerca de...

Las funciones cuadráticas permiten examinar y describir un tipo de crecimiento uniforme. El análisis de las características de las funciones cuadráticas en la resolución de problemas, cuando se representan en gráficas y en tablas, permitirá construir modelos a partir de ellas. Algunas de las características de las funciones cuadráticas que se explorarán son la simetría y los puntos máximos y mínimos que corresponden al vértice de la parábola. Se espera que los alumnos pasen gradualmente de realizar la representación punto por punto y sólo con valores enteros para obtener y analizar la gráfica, a anticipar la localzación del vértice y del eje de simetría de la parábola a partir de graficar ciertos puntos, que no necesariamente serán valores enteros, para ver el comportamiento de la función.

Asimismo, se trabajará con números naturales, fracciones y decimales. No sólo se utilizan esos números en los cálculos, sino que, al evaluar las funciones cuadráticas, aparecen números con expansión decimal infinita, es decir, números racionales e irracionales.

Es importante que, en estas circunstancias, se ponga énfasis en lo que significa la aproximación a un número de cifras decimales que se decida apropiado para operar. El uso de una calculadora puede ser de apoyo para los cálculos correspondientes.

Sobre las ideas de los alumnos

En secuencias pasadas, los alumnos se han acercado al concepto de variación cuadrática, pero muchos de ellos pueden tener aún ideas poco claras sobre lo que significa. Por ejemplo, es probable que algunos alumnos piensen que una función cuadrática sólo puede crecer o decrecer y no se dan cuenta de que en una parábola se encuentran ambos tipos de comportamientos: cuando la parábola abre hacia abajo, el comportamiento es primero creciente y después decreciente (como en el caso de una pelota que se avienta hacia arriba y luego cae al suelo), mientras que, cuando la parábola abre hacia arriba, el comportamiento es primero decreciente y después creciente (como en el caso de una cadena que se encuentra agarrada entre dos soportes). Es importante que haga notar esto a los alumnos, para que comprendan que el comportamiento creciente o decreciente depende del punto de vista desde el que se vea la función y cómo se modele el sistema que se está estudiando.

Por otro lado, los alumnos pueden pensar que el comportamiento de las parábolas es no uniforme porque no se comporta como una línea recta; en este punto es primordial que les comente que una función (sea lineal o cuadrática) se considera uniforme y constante siempre que su forma sea simétrica respecto a alguno de sus ejes, esto es, que su forma sea predecible.

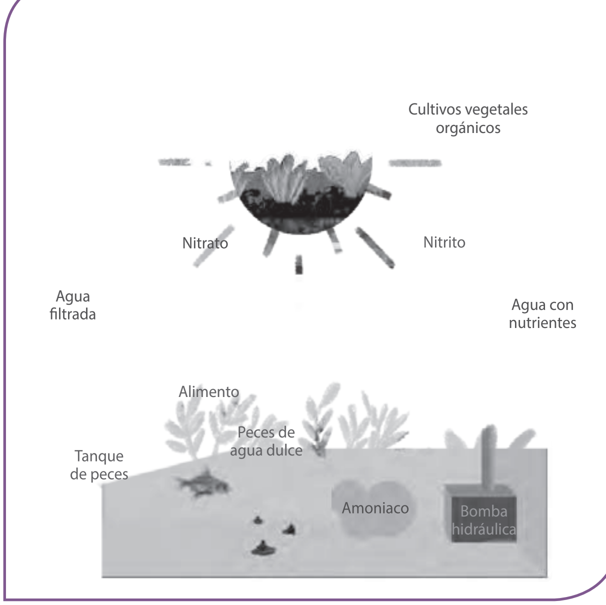
Por ejemplo, en física, el crecimiento de la aceleración con respecto al tiempo es cuadrático, creciente y constante al mismo tiempo, ya que siempre es simétrico con respecto a su eje.

¿Cómo guío el proceso?

Antes de comenzar el trabajo con esta secuencia, si le es posible vea con sus alumnos estos videos acerca de algunos proyectos de acuaponia exitosos en nuestro país: https://www.youtube.com/watch?v=xqN0mzOKoz8, https://www.youtube.com/watch?v=BhPabu3bYY8, https://www.youtube.com/watch?v=nDtHcyn0D64

Posteriormente, lea con ellos la sección “Para empezar” y pídales que analicen el diagrama propuesto. Comente lo que significa la producción sustentable. Es un momento en el cual, dependiendo del contexto de sus alumnos, puede aprovechar para que hablen de sus conocimientos o de la relación con el cultivo de plantas y el cuidado de peces o cualquier otro ser vivo. Esto servirá para responder y discutir en torno a las preguntas que se presentan.

En la actividad 1 de la sesión 1 conviene que analicen la imagen y entiendan bien qué les plantea el problema. Tal vez sea necesario que oriente a los alumnos para determinar que los catetos del triángulo superior miden x, y por lo tanto, la medida de la altura del rectángulo es la misma que los catetos del otro triángulo, esto es $(13 - x)$. Los alumnos pueden verificar que los



triángulos son semejantes. En este tipo de actividades conviene que se exploren las razones para elegir o descartar las gráficas y así sustentar la elección. Por ello, no es suficiente tabular algunos puntos, pues hay cuestiones particulares que deben refinarse y sustentarse. Si observa que por lo general los alumnos trabajan con números enteros o que tienen dificultades para la elección de la gráfica, puede sugerir el llenado de una nueva tabla que complemente la que ya llenaron. Por ejemplo:

Base x (m)	6.0	6.1	6.2	6.3	6.4	6.5	6.6	6.7
Área $A(x)$ (m^2)								

Esta tabla se puede analizar colectivamente y les ayudará para ver cuál es el comportamiento de la gráfica. Algunos alumnos pudieran no identificar que la solución del problema planteado corresponde a la mitad de la parábola porque, en el momento en que la medida del largo del rectángulo es igual a la medida de su ancho, es decir, cuando se forma el cuadrado, los siguientes valores formarán rectángulos con los mismos valores, pero ahora los valores de la base serán los de la altura, esto significa que se invierten. Las preguntas de los incisos b) y d) pueden ayudar a esta reflexión. Cuando un alumno se dé cuenta de esto, será importante orientarlo para que asocie este hecho con la simetría de la gráfica y con su punto máximo, obteniendo las mismas medidas y el área máxima del rectángulo, lo cual ayudará a sus respuestas en la actividad 3.

Lea con el grupo el problema de la primera actividad de la sesión 2 para que les ayude a comprenderlo. Puede poner como ejemplo que el suplemento alimenticio, como algunos otros alimentos, puede ser bueno en cierta medida, pero si se excede su consumo, se vuelve contraproducente. Solicite a los alumnos que digan qué tipo de alimentos pueden causar estos efectos (sal, azúcar, entre muchos otros). Para responder las preguntas de los incisos, los alumnos deberán profundizar en el significado de la simetría de la parábola y, una vez que la grafiquen, reflexionar sobre qué representa el punto máximo que, en este caso, es la cantidad óptima de suplemento alimenticio para que los peces aumenten el mayor peso posible.

En la actividad 2 puede reflexionar con ellos acerca de los puntos donde la parábola corta al eje X, las abscisas de estos puntos son las raíces de la ecuación de segundo grado, lo cual se estudió en la secuencia 22, de las cuales sólo un valor responde al problema, en este caso la raíz positiva. Otro análisis es acerca del vértice de la parábola que representa la ganancia máxima del peso de los peces por semana. Podrán notar que las coordenadas del vértice V(2.5, 2.4) coinciden con los valores de ciertos términos de la función:

$$y = -3(x - 2.5)^2 + 24$$

Es importante que para este tipo de funciones los alumnos identifiquen que el eje de simetría es una recta paralela al eje Y, que pasa por el vértice de la parábola. Revise esta propiedad para cada parábola que grafiquen o que se examinan a lo largo de la secuencia.

En la sesión 3, los alumnos continúan el trabajo de analizar las gráficas, tablas y expresiones de las funciones cuadráticas, sus propiedades y características. Pero también se pretende que entiendan mejor el sistema de acuaponia y cómo influye en lo que le pasa a los peces y al cultivo de las plantas, y cómo esto se puede modelar matemáticamente.

Al tabular los valores tendrán los elementos suficientes para discriminar y elegir la gráfica que representa la función del problema. Pida a los alumnos que argumenten por qué eligieron la gráfica, pero también por qué descartaron las otras tres; esto les llevará necesariamente a referirse a las características de cada gráfica y comprender mejor qué papel tiene cada término. Una vez que transformen la expresión algebraica de una forma a otra, reflexionen sobre lo que representan los valores de los términos en cada una de las expresiones. Por ejemplo, podrán notar que en la expresión general de la parábola $y = ax^2 + bx + c$, c es donde ésta corta el eje de las ordenadas, y en la función

$$y = -0.05(x - 3.5)^2 + 0.8,$$

aparecen las coordenadas del vértice V(3.5, 0.8).

En las actividades 2 y 3 se quiere que los alumnos analicen las gráficas y determinen si quieren usar el suplemento para que tanto peces como plantas saquen el mejor beneficio, que los peces salgan más beneficiados que las plantas o viceversa. Aquí no hay una respuesta correcta o incorrecta, se trata de interpretar la información y que el responsable determine qué valores son los convenientes.

En la sesión 4 los alumnos continúan analizando diversos aspectos sobre la alimentación de los peces y las ganancias que se obtienen en una venta.

Es la primera vez en la secuencia que los alumnos trabajan con una expresión que tiene coeficiente positivo para el término cuadrado de la función:

$$N(s) = 2.25s^2 - 9s + 11.$$

Cuestione e identifique qué razón dan los alumnos para que el cambio de signo determine el sentido de apertura de la parábola. Esto ya lo han visto antes, sobre todo en las secuencias relacionadas con ecuaciones de segundo grado, pero ahora se pretende que lo vinculen con el contexto del problema. Por ejemplo, que la parábola "abra hacia abajo" significa que primero hay un crecimiento y luego un decrecimiento. Es necesario que vinculen este razonamiento con los problemas y modelos de cada situación presentada. En esta sesión deben quedar claras las propiedades de las parábolas, el significado y la interpretación que tienen en los diferentes problemas planteados en las sesiones. En el problema de ganancias es importante que vean que no siempre vender más caro implica mayor ganancia. Se propone abrir el diálogo de reflexión con la siguiente pregunta: "¿Comprarían un libro, un juego o un alimento que, aunque les gustara mucho, estuviera muy caro?".

Una idea puede ser que los precios muy altos disminuyen las ventas. En el siguiente problema puede dejar a los alumnos que investiguen previamente qué efectos tienen los nitratos en los peces y en las plantas para que tengan más elementos sobre la acuaponia.

La actividad 6 permitirá a los alumnos que argumenten sus respuestas con base en lo que han analizado hasta ahora.

Pautas para la evaluación formativa

Con la finalidad de verificar en qué medida se logra la intención didáctica que aparece en la ficha descriptiva, es necesario hacer un registro para cerciorarse de que los alumnos realizan lo siguiente:

- Argumentan su elección entre las gráficas que modelan un problema.
- Analizan el crecimiento y decrecimiento cuadrático a partir de las representaciones tabular y gráfica.
- Determinan los puntos máximo o mínimo de una parábola y los identifican en la expresión algebraica que modela un problema.
- Resuelven problemas a partir de observar e interpretar la representación tabular y gráfica de un fenómeno que se modela con una función cuadrática.

¿Cómo apoyar?

Es probable que los alumnos tengan dificultades para trazar las gráficas de las actividades 2 y 3 de la sesión 3, por lo que se sugiere las lleve graficadas en formato grande para analizarlas con todo el grupo y, a partir de los diferentes argumentos, sean capaces de tomar la decisión que crean más conveniente.

¿Cómo extender?

Puede formalizar y profundizar sobre lo que algunos alumnos tal vez pudieron haber notado: si la expresión de la parábola es de la forma $y = a(x - h)^2 + k$, podemos encontrar de inmediato el vértice de la parábola que es (h, k); si la expresión de la parábola es de la forma $y = ax^2 + bx + c$, podemos encontrar de inmediato el punto donde la gráfica de la función interseca al eje Y. Este punto es $(0, c)$.

Además, podría pedir a los alumnos que den ejemplos de funciones cuadráticas crecientes, decrecientes y constantes, y que comenten sus hallazgos con sus compañeros de grupo.

Secuencia 24 Polígonos semejantes 3

(LT, Vol. II, págs. 142-151)

Tiempo de realización	4 sesiones
Eje temático	Forma, espacio y medida
Tema	Figuras y cuerpos geométricos
Aprendizaje esperado	Construye polígonos semejantes. Determina y usa los criterios de semejanza de triángulos.
Intención didáctica	Que los alumnos resuelvan problemas que implican utilizar la semejanza de triángulos para calcular medidas de distancias inaccesibles.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisuales** • *Estimación de distancias usando el pulgar* **Informático** • *Cálculos de distancias usando la semejanza de triángulos*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recursos audiovisuales** • *Aspectos didácticos de la enseñanza de los polígonos semejantes* • *Acerca de los criterios de semejanza* • *Medir utilizando el pulgar.* Disponible en https://www.youtube.com/watch?v=JPOaN-VzF5U (Consultado el 9 de diciembre de 2002). • *Método de medición de distancias inaccesibles.* Disponible en https://www.youtube.com/watch?v=r2Fqg3FnkIE&feature=youtu.be (Consultado el 9 de diciembre de 2002).

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Utilicen el método de sombras basado en la aplicación de los criterios de semejanza de triángulos AA y ALA para calcular alturas.
- Sesión 2. Utilicen el concepto de reflexión de la luz para calcular alturas inaccesibles y comparen las estrategias empleadas para determinar cuál es la más útil ante las condiciones y los datos de cada situación.
- Sesión 3. Usen el método de paralaje y planeen estrategias para aplicar la semejanza de triángulos en la resolución de problemas que implican el cálculo de una distancia inaccesible.
- Sesión 4. Resuelvan problemas que implican el uso de los criterios de semejanza de triángulos para obtener medidas de longitudes inaccesibles en diversos contextos.

Acerca de...

Medir es una de las acciones que más han relacionado las matemáticas con la vida cotidiana a lo largo de la historia del ser humano. Asimismo, medir y estimar longitudes es una de las actividades matemáticas que pudieran resultar más cercanas y prácticas al contexto de los alumnos. Por otro lado, los criterios de semejanza ofrecen a los alumnos un recurso que les permite calcular medidas inaccesibles. Para ello, deberán hacer abstracciones, conjeturas y generalizaciones, así como validar criterios que les servirán para conocer y profundizar en las propiedades geométricas de los triángulos.

Los alumnos han trabajado en secuencias anteriores con la semejanza de polígonos, los criterios de congruencia y semejanza de triángulos, lo cual les abre la posibilidad de usarlos para resolver problemas de medición, sobre todo para hacer cálculos de medidas inaccesibles.

Sobre las ideas de los alumnos

Algunos alumnos tal vez aún tengan dificultades para usar adecuadamente los criterios de semejanza de triángulos. Por ejemplo, podrían argumentar que los triángulos de la primera actividad de la sesión 1 son semejantes, de acuerdo con el criterio AAA, dado que los ángulos alfa, beta y gama son iguales entre sí. El planteamiento es incorrecto, pues aunque estos ángulos sí son iguales, el criterio señalado es respecto a los tres ángulos de cada triángulo, y es suficiente con tener dos ángulos correspondientes iguales.

¿Cómo guío el proceso?

Lea y comente con los alumnos la sección "Para empezar". En primer lugar, resalte la importancia de los bosques, poniendo atención a las cuestiones medioambientales y a las productivas. El buen cuidado de los bosques y las selvas permitirá un mayor beneficio para todos a lo largo del tiempo, mientras que una sobrexplotación sólo da beneficios a unos cuantos en el corto plazo. Además de las preguntas sugeridas, puede formular otras, como: "¿Por qué razones se cortan los árboles?"; "¿Cómo se puede determinar cuándo conviene cortar un árbol?". Esto los puede llevar a respuestas relacionadas con la medición, y así después comprender qué utilidad tendría la semejanza en estas situaciones.

En la secuencia, los alumnos deberán usar la semejanza de triángulos para resolver diversos problemas de medición. Para ello, deberá determinar cuáles triángulos son semejantes y por qué, identificando la correspondencia de lados y ángulos. A partir de los datos conocidos o accesibles, utilicen los criterios de semejanza, establezcan la razón de semejanza y calculen las medidas que faltan o que no se pueden medir directamente.

En las sesiones 1 y 2 se espera que los alumnos determinen las alturas de árboles a partir de diversos procedimientos y las condiciones que se establecen.

En la actividad 1 de la primera sesión, se pide que se encuentren las alturas de dos árboles, teniendo como referencia las medidas de las sombras que proyectan una persona y los árboles a una cierta hora del día. Por un lado, se pretende que los alumnos argumenten por qué son semejantes los tres triángulos que se forman aplicando correctamente el criterio AA, ya que las medidas de los tres ángulos correspondientes en los tres triángulos son iguales. Ayude a quienes tengan dificultades para determinar la relación de correspondencia entre los ángulos de los tres triángulos orientándolos para encontrar la incidencia de los rayos del sol y determinar los ángulos que tienen la misma medida debido a la condición de paralelismo y la verificación de la semejanza. Es necesario hacerles notar que el ángulo formado por el árbol y su sombra mide 90°. Por otro lado, se pretende que encuentren la razón de semejanza en cada caso, o las relaciones de proporcionalidad que les permitan hacer las operaciones necesarias para determinar las alturas que se piden.

Razón de semejanza entre el triángulo que forma la altura de Josefina y su sombra respecto a la altura del árbol 1 y su sombra.	Razón de semejanza entre el triángulo que forma la altura de Josefina y su sombra respecto a la altura del árbol 2 y su sombra.
$\frac{3.75}{2} = \frac{x}{1.60}$	$\frac{7}{2} = \frac{z}{1.60}$

En la actividad 2, se propone a los alumnos que utilicen otro procedimiento para encontrar la altura de un árbol, ya que ahora los datos conocidos son las distancias entre los árboles y el observador, y la altura del árbol más cercano al que observa, $\frac{7.2}{3} = \frac{x}{2.5}$ por lo que $x = 6$.

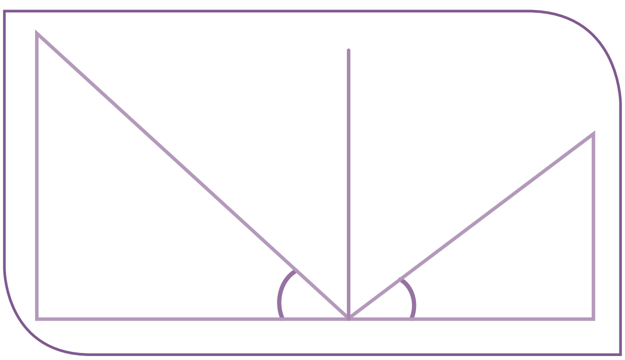
Recuerde que lo importante es establecer las relaciones geométricas entre las figuras y no calcular las dimensiones y obtener la medida. Así que los argumentos y las justificaciones de los alumnos deberán reflejar el razonamiento geométrico que han desarrollado.

En la sesión 2 se presenta un par de estrategias más para medir las alturas inaccesibles. En la actividad 2 se plantea la primera estrategia donde se observa que no basta con encontrar la medida del cateto que corresponde a la altura del triángulo más grande, sino que hay que sumar la altura del otro árbol

$$\frac{4.2}{1.2} = \frac{x}{1}$$

de donde $x = 3.5$ m y al sumar 2.5 m, que corresponde a la altura del árbol conocido, la altura del otro árbol es de 6 m.

En la actividad 3 se presenta la segunda estrategia, en la que es necesario comprender en qué consiste la reflexión de la luz y cómo los ángulos de incidencia y de reflexión son iguales. Explore el concepto de *ángulos complementarios* respecto al ángulo que forman la recta normal y el espejo, para que tengan los datos necesarios de los triángulos que se forman entre el punto más alto del árbol y los ojos de la niña. Deberán observar que se forman triángulos semejantes que tienen un vértice común, como el que aquí se muestra.

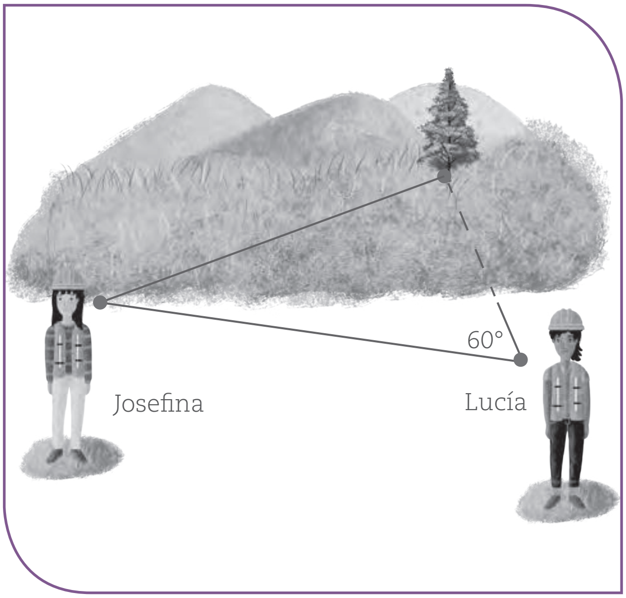


En esta sesión se presentan varios datos interesantes que conviene que discuta con los alumnos para que continúen con la reflexión sobre el cuidado y aprovechamiento de los bosques.

También puede ver el recurso sugerido en la sección "Visita la biblioteca" para complementar la información. Si le es posible, muestre a sus alumnos fotografías del árbol del Tule y comente acerca de la medida de la envergadura de una persona adulta para que estimen el perímetro aproximado del tronco de este árbol. Además, vale la pena identificar la estrategia más adecuada para calcular su altura. También podría pedir a sus alumnos que hagan mediciones de la altura de algunas cosas que haya en la escuela, por ejemplo la canasta de basquetbol, el asta de la bandera, el tamaño de algún árbol, etc., con el fin de poner en práctica los conocimientos estudiados en esta secuencia. Al final se dan sugerencias de cómo extender esta actividad.

En la sesión 3 se propone un par de construcciones geométricas y un método de estimación que les permitirá a los alumnos calcular la distancia de un punto a otro cuando no se puede acceder de forma directa.

En la primera actividad es importante que comprendan la construcción y por qué los triángulos que se forman son semejantes y útiles para encontrar la distancia deseada. Si lo considera pertinente, pida que, sin ver la imagen, los alumnos sigan las instrucciones del libro. Es decir, que se paren en un punto en el patio de la escuela y elijan un árbol o cualquier otro objeto (poste, edificio) que sirva como referencia. Sigan las instrucciones, cotejen que su construcción haya sido bien realizada y, después, verifiquen la precisión de la medida que obtuvieron, midiendo con un metro dicha distancia (en caso de que ésta fuera accesible). En la segunda actividad, tiene que cerciorarse de que los alumnos tomen como elemento importante la medida de los ángulos para trazar la construcción auxiliar de triángulos semejantes. Observe que si un ángulo es de 60°, conviene que el triángulo que se forma entre el árbol, el punto de referencia de Lucía y el de Josefina, sea equilátero, con lo cual se pueden formar dos triángulos rectángulos isósceles.



El método del pulgar para el cálculo de distancias es otra actividad que se puede realizar dentro o fuera del aula. El objetivo es que vean cómo la semejanza interviene en este método de estimación y no tanto la precisión de la medida, pues como se verá, su precisión dependerá de que la estimación o el conocimiento de una longitud sea acertada. Vea el audiovisual correspondiente para que quede claro este método. Después, cuando comparen los resultados que obtuvo cada pareja respecto a las razones que hay entre la distancia del pulgar a los ojos y la distancia que hay entre los ojos, podrán ver que los cálculos se facilitan, pues esta razón se aproxima mucho a 10 y se puede generalizar.

$$\frac{\textit{distancia del pulgar al ojo}}{\textit{distancia entre ojos}}$$

Después de leer el recuadro con la explicación del método de paralaje, comente cómo este método se usa para calcular distancias en el espacio, por ejemplo, la que hay de la Tierra a una estrella dentro de nuestra galaxia. Esto lo pueden comentar con más detenimiento y mayor profundidad cuando vean la secuencia "Razones trigonométricas 3", posterior a ésta.

En la sesión 4, los alumnos resolverán problemas que implican poner en juego lo aprendido acerca de la semejanza de triángulos para obtener medidas de longitudes en diversos contextos.

Pautas para la evaluación formativa

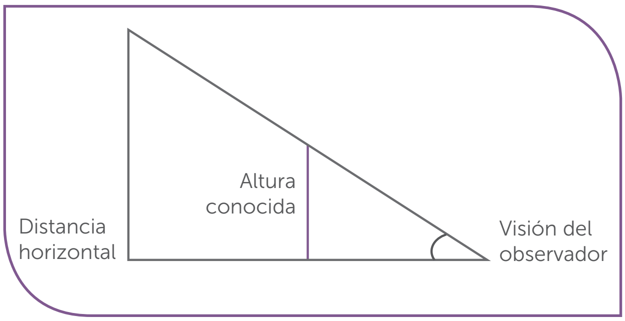
Con la finalidad de verificar en qué medida se logra la intención didáctica que aparece en la ficha descriptiva, es necesario hacer un registro para cerciorarse de que los alumnos realizan lo siguiente:

- Aplican los criterios de semejanza de triángulos para calcular las alturas usando el procedimiento de las sombras.
- Usan diversas estrategias para el cálculo de alturas y determinan cuál de ellas es mejor, según las condiciones y los datos que se presentan.
- Resuelven problemas que implican recurrir a las estrategias estudiadas sobre el uso de la semejanza de triángulos para obtener medidas de longitudes en diversos contextos.

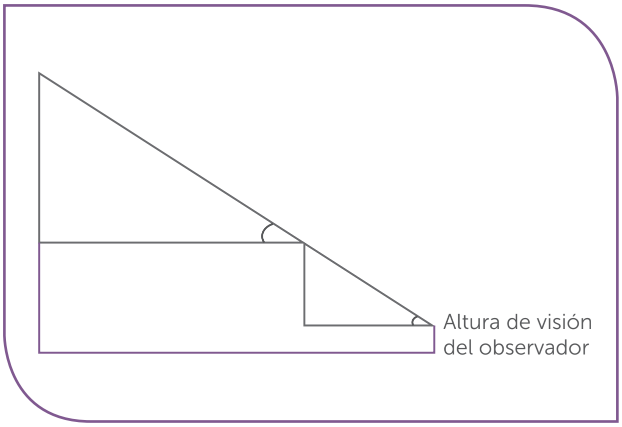
¿Cómo apoyar?

Si observa que los alumnos tienen dificultades para comprender cómo establecer las relaciones de correspondencia entre los lados y ángulos de los triángulos para determinar si son semejantes o no, destaque los datos que se conocen o proporcionan en cada actividad, desde los trazos y los triángulos que se forman. Por ejemplo, en la actividad 1 de la primera sesión, se conoce el tamaño de la sombra que proyectan cada árbol y la persona a una hora determinada, y la altura del observador, además de la condición de paralelismo de los rayos para formar las hipotenusas de los triángulos.

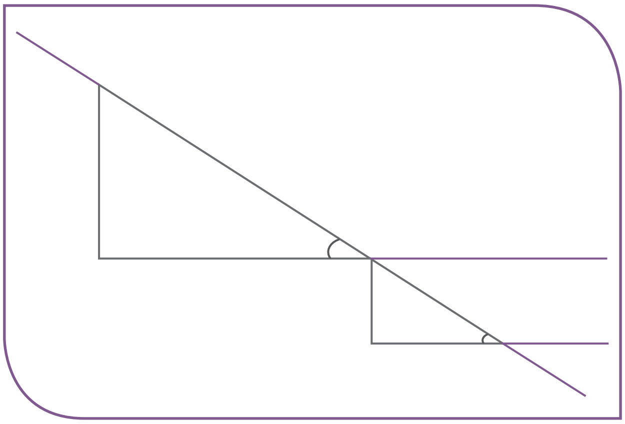
En el caso de la actividad 2 de la sesión 1, puede destacar que las distancias a las cuales se encuentran los árboles y el observador, que en este caso es Josefina, describen la distancia horizontal, pues están al ras del suelo.



En la sesión 2, el cateto que sirve de base de los triángulos está desplazado; sin embargo, es posible determinar una distancia horizontal común, debido a que ambos triángulos coinciden en un punto.



Si prolonga la hipotenusa y los catetos que forman la base de los triángulos, los alumnos podrán observar que el dibujo corresponde a líneas paralelas cortadas por una transversal, con lo cual se espera que identifiquen las relaciones de ángulos correspondientes que existen.



¿Cómo extender?

Entre las sesiones 2 y 3, o al final de la secuencia, puede pedir a sus alumnos que salgan a medir la altura de los objetos con los diversos métodos aprendidos o con alguna alternativa que diseñen entre todos. Por ejemplo, en la actividad 2 de la sesión 1, se usa la altura conocida de un árbol para calcular la de otro. En lugar de tener un objeto fijo, pueden usar un metro de madera, una vara o a un compañero que les sirva como referencia.

Puede formar equipos y pedir que todos midan la altura de los mismos objetos, pero cada uno con un método diferente. También puede pedir que cada equipo mida un solo objeto, pero con todos los métodos aprendidos, además de alguno que usted les haya mostrado. Esto les servirá para comparar medidas, porque sin duda habrá diferencias. Comenten a qué se deben dichas diferencias; esto es importante porque no dependen sólo de hacer bien las operaciones ni de usar bien o mal las propiedades de semejanza, sino de diferencias que puede haber en las longitudes que sirvan como referencia, por ejemplo el desplazamiento del metro al medir distancias horizontales entre un objeto y otro, o la mala posición del espejo o de la mirada del observador, entre otros factores que influyen al realizar una medición precisa. Se sugiere comentar cómo y cuándo se necesitan hacer medidas más precisas y cuándo puede haber ciertos márgenes de error. También se puede comentar qué significa calibrar las medidas y cómo podrían calibrar los métodos de medición para saber más o menos cuál es el margen de error de cada uno. Por ejemplo, se puede medir la altura de una canasta de basquetbol o un edificio, del cual se sepa la altura exacta, para comparar su resultado con la medida ya conocida.

Secuencia 25 Razones trigonométricas 3

(LT, Vol. II, págs. 152-161)

Tiempo de realización	5 sesiones
Eje temático	Forma, espacio y medida
Tema	Figuras y cuerpos geométricos
Aprendizaje esperado	Resuelve problemas utilizando las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.
Intención didáctica	Que los alumnos analicen algunas características y relaciones de las razones trigonométricas y resuelvan problemas en diversos contextos.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisual** • *Maravillas de la trigonometría* **Informático** • *Cálculo de distancias y ángulos*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recurso audiovisual** • *Aspectos didácticos de la enseñanza de la trigonometría*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Calculen alturas inaccesibles con el apoyo de un instrumento y el uso de las razones trigonométricas.
- Sesión 2. Usen las razones trigonométricas para calcular alturas y distancias.
- Sesión 3. Resuelvan problemas que impliquen calcular la medida de los ángulos agudos de triángulos rectángulos a partir de la medida de los lados.
- Sesión 4. Determinen el valor del seno, el coseno y la tangente de los ángulos de 30°, 45° y 60° y reconozcan algunas relaciones entre ellas.
- Sesión 5. Reconozcan los intervalos entre los que se mueven los valores de las razones seno, coseno y tangente y determinen si estos valores crecen o decrecen en los ángulos de 0° a 90°.

Acerca de...

En la secuencia 7, los alumnos resolvieron problemas que requerían el uso de razones trigonométricas recurriendo a procedimientos informales; en la secuencia 16, conocieron y estudiaron las definiciones de las razones seno, coseno y tangente de un ángulo. En esta secuencia se espera que resuelvan problemas aplicando lo que han aprendido sobre trigonometría y logren establecer algunas relaciones entre las razones trigonométricas. Por ejemplo que *sen* 30° = *cos* 60°. Esto es, que el seno de un ángulo es igual al coseno de su complemento, y que al dividir el seno de un ángulo entre el coseno del mismo ángulo se obtiene su tangente. No es el propósito esencial que los alumnos memoricen estas relaciones, lo importante es contribuir a la idea de que en matemáticas hay conceptos que guardan relaciones muy estrechas, como en este caso de las razones trigonométricas.

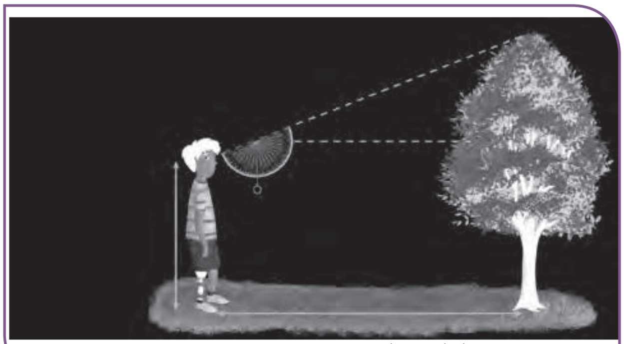
Sobre las ideas de los alumnos

La mayoría de los alumnos construyen los conceptos matemáticos de manera aislada, sin identificar las estrechas relaciones que hay entre ellos. Por ejemplo, estudian la multiplicación y la división creyendo, erróneamente, que son dos operaciones que nada tienen que ver entre sí. De ahí la necesidad de seleccionar problemas que les permitan establecer relaciones entre diferentes conceptos. Muchas veces los alumnos aplican las razones trigonométricas en triángulos que no son rectángulos, es decir, generalizan para todos los triángulos las mismas relaciones, por lo que es importante aclarar esto.

¿Cómo guío el proceso?

En la sesión 1, los alumnos resolverán un caso práctico: medirán indirectamente, y haciendo uso de la trigonometría, una altura elegida por ellos. Para lograrlo, construirán un instrumento que les permitirá conocer la medida del ángulo que podrán emplear para calcular la altura elegida. Es importante que considere el tiempo que los alumnos tardarán en construir el instrumento. Si lo cree pertinente, puede dejarlo de tarea en lugar de hacerlo en clase, dependerá del tiempo con el que cuente para estudiar la secuencia.

Se espera que los alumnos noten que el ángulo que deben emplear es el que aparece marcado en el diagrama con la letra *x*.



Distancia hacia el objeto

Y también se espera que observen que ese ángulo es el complemento del ángulo que forma el hilo con el popote, pues el ángulo X es opuesto por el vértice al complemento del ángulo que se forma con el hilo y el popote. Por ejemplo, si el ángulo entre el popote y el hilo es de 50°, entonces el ángulo X es 90° – 50° = 40°. Si esto no ocurre así, se sugiere ayudarlos a reflexionar acerca de ello.

Respecto a la distancia que hay hasta el objeto y la altura del observador, los alumnos podrán elegir si determinan esas distancias en metros y centímetros. Para ello pueden usar una cinta métrica, una regla, el metro del juego geométrico del maestro o una cuerda y luego medir la cuerda con el instrumento con el que cuenten. Asimismo, si así lo deciden, también pueden usar una unidad de medida que se use en la localidad en la que viven y que sea adecuada para longitudes.

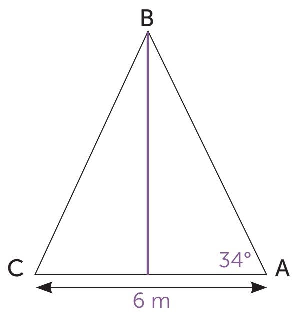
Si bien en la actividad 2 se indica que en la página 180 de su libro hay una tabla de valores de las razones trigonométricas, los alumnos pueden usar una calculadora científica si cuentan con ella.

Son comunes dos errores en esta actividad. Uno es que los alumnos crean que tienen que usar el valor del ángulo que forma el hilo con el popote, y el otro es que olviden aumentar al resultado la altura desde la cual se observa. Si al monitorear el trabajo de los alumnos observa alguno de estos errores, puede apoyar con preguntas como: "¿Cuál es el triángulo rectángulo que van a considerar?"; "¿El ángulo que están tomando en cuenta forma parte de ese triángulo?"; "¿Ya consideraron la altura desde la cual se observa?".

Supervise que elaboren los diagramas que se piden en la actividad 3. Si varios equipos eligieron medir la misma altura es importante que en la puesta en común se comente, si obtienen resultados diferentes, si esto se debe a un error de medida (de las distancias o del ángulo), o es un error de cálculo (se equivocan al hacer las operaciones), o bien un error de imprecisión en los instrumentos utilizados; esto último es común porque las herramientas con que cuentan son inexactas, incluso si se usan de manera correcta. También es importante que se tenga en mente, a lo largo de toda la secuencia, que la mayoría de los valores de las razones trigonométricas de las tablas son aproximaciones. Es probable que los alumnos que recurran a la calculadora encuentren un resultado y los que usen las tablas, otro, debido a que en la pantalla de la calculadora aparecen más números a la derecha del punto decimal; no obstante, si los cálculos son correctos, los resultados son muy aproximados.

Los problemas de la sesión 2 se han elegido de tal manera que los alumnos tengan que emplear alguna de las tres razones trigonométricas que han estudiado. En la primera actividad, para calcular la altura del asta bandera tienen el valor de un ángulo y su cateto adyacente y necesitan calcular el cateto opuesto, así que podrán usar la tangente del ángulo de 27°. Puede aprovechar este problema para comentar con los alumnos las alturas de un asta bandera (quizás obtuvieron la medida del asta de su escuela en la sesión 1) o las astas banderas monumentales de México que llegan a medir más de 100 m de altura. Para que se den una idea de esta última medida, se sugiere que la comparen con alguna longitud del entorno escolar.

En el problema del inciso d) también conviene usar la tangente. Se espera que los alumnos noten que la altura pedida es igual a (3)(tan 34°). Es probable que se equivoquen y consideren los 6 m para calcular la altura del triángulo, pero como el triángulo ABC es isósceles, se debe considerar la mitad del segmento AC.



Algunos de los despejes que los alumnos tendrán que hacer son más sencillos que otros. Por ejemplo, en el inciso a) el despeje es:

$$\tan 27° = \frac{co}{100}$$

$$co = (100)(\tan 27°)$$

Mientras que para el inciso b) es:

$$sen\ 40° = \frac{1.27}{h}$$

$$(h)(sen\ 40°) = 1.27$$

$$h = \frac{1.27}{sen\ 40°}$$

Un error común es que los alumnos consideren que el 1.27 "pasa" multiplicando a sen 40°. Apoye a los alumnos que cometan este error recordándoles cómo se despeja un cociente cuando la cantidad desconocida es el denominador y no el numerador.

Es de suma importancia que usted realice la actividad 2 y que le dedique tiempo en clase para revisar algunos de los problemas que inventen los alumnos para que los resuelvan todos los compañeros, pues esto ayuda a clarificar conceptos o descartar ideas erróneas que pudieran tener aún.

Hasta este momento, los alumnos han calculado el valor de las razones trigonométricas a partir de los lados de un triángulo rectángulo. En la sesión 3 harán el proceso inverso: dado el valor de alguna de las razones trigonométricas, determinarán el ángulo.

En el primer problema tendrán que encontrar cuál es el ángulo cuyo seno es $\frac{6}{10}$, o bien 0.6. Quienes usen tablas se darán cuenta de que este valor no está exactamente, pero se espera que tomen el valor de 0.601 como el más cercano y que corresponde a 37°, mientras que los alumnos que usen la calculadora científica encontrarán que:

$$\boxed{sen^{-1}} \left(\frac{6}{10}\right) \approx 36.869°$$

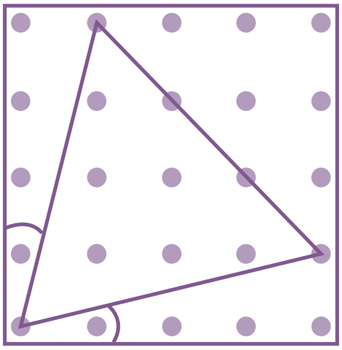
Aproveche la puesta en común de la actividad 2 para seguir comentando acerca de que, al trabajar con las razones trigonométricas, se obtienen valores aproximados.

Una aclaración que vale la pena hacer a los alumnos es acerca de las teclas $\boxed{INV}$ y $\boxed{sen^{-1}}$, que vienen en las calculadoras científicas; ambas se usan para obtener el ángulo cuyo seno es el número que se introduce en la calculadora después de apretar alguna de estas teclas. Esto podría confundir a los alumnos porque, matemáticamente, la razón trigonométrica inversa del seno es la cosecante:

$$csc\ (\alpha) = \frac{1}{sen\ (\alpha)}$$

La tecla $\boxed{sen^{-1}}$ representa a la función inversa del seno, llamada arcoseno (arcsen).

El problema planteado en la actividad 4 fue abordado anteriormente. Los alumnos demostraron que el triángulo no es equilátero calculando la medida de los lados a partir del teorema de Pitágoras. En este caso se pide que exploren si los tres ángulos miden 60°. Para comprobar que el triángulo no es equilátero es suficiente con que uno de los ángulos no mida 60°; podrán elegir cualquier ángulo. Por ejemplo, se puede partir de que el ángulo de la esquina inferior izquierda del geoplano mide 90°. Con las razones trigonométricas se puede investigar si la suma de los ángulos marcados es 30°; si así fuera, el ángulo interior del triángulo mediría 60°.



La medida de los ángulos indicados se puede calcular de la siguiente manera, si se toma como unidad la distancia entre cada punto:

ángulo cuya tangente es $\frac{1}{4}$.

El resultado es 14.036°, aproximadamente. Al sumar ambos se obtiene 28.072°, por lo tanto, el ángulo interior del triángulo no mide 60°. Si bien se está trabajando con aproximaciones, la suma de los dos ángulos marcados no medirá nunca 30°, aunque se tome una aproximación con más decimales.

En la sesión 4, los alumnos conocerán una manera de calcular el seno, el coseno y la tangente de los ángulos de 30°, 60° y 45°. Para los dos primeros se recurre a un triángulo equilátero y para el tercero se usa un triángulo rectángulo isósceles. Al hacerlo tendrán que hacer uso de raíces cuadradas inexactas. Recuerde que una raíz cuadrada inexacta pertenece a los números irracionales, es decir, se trata de un número que tiene una parte a la derecha del punto decimal que es infinita y no tiene periodo; esto ocasiona que siempre se tenga que trabajar con aproximaciones. Por ejemplo, para la tangente de 30° encontrarán: $\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Podría quedarse indicado de esta manera, pero, si los alumnos lo prefieren, pueden usar la calculadora para determinar un valor aproximado de la raíz cuadrada de 3 y dividir uno entre ese valor, lo cual deberá comentarse en el grupo y concluir que el valor encontrado es una aproximación. Es muy probable que en bachillerato los alumnos aprendan a usar un proceso llamado racionalización de radicales para transformar este tipo de expresiones.

La actividad 2 está dedicada a explorar algunas relaciones interesantes e importantes entre las razones trigonométricas. Al completar la tabla es muy probable que los alumnos se sientan inclinados a consultar la tabla de las funciones trigonométricas o a usar la calculadora para comprobar, por ejemplo, que el seno de un ángulo es igual al coseno de su complemento, es decir, explorarían si:

$$\begin{aligned} sen\ 30° &= cos\ 60° \\ sen\ 20° &= cos\ 70° \\ sen\ 35° &= cos\ 55° \\ sen\ 8° &= cos\ 82° \end{aligned}$$

Y notarán que sí se cumplen estas igualdades. No obstante, más que comprobaciones numéricas, se espera que los alumnos usen argumentos basados en las definiciones de las razones trigonométricas. Por ejemplo: "El seno de un ángulo es igual al coseno de su complementario porque en un triángulo rectángulo los ángulos agudos son complementarios y el cateto opuesto de uno es el cateto adyacente del otro, por lo tanto, al calcular $\frac{co}{h}$ de uno da lo mismo que $\frac{ca}{h}$ del otro".

Para la afirmación f), quizá busquen los valores del seno y del coseno de un ángulo, eleven al cuadrado ambos resultados, lo sumen y obtengan 1 (o un número aproximado a uno). Nuevamente, lo ideal es que apliquen las definiciones para argumentar la afirmación:

$$sen^2\ A + cos^2\ A = \left(\frac{co}{h}\right)^2 + \left(\frac{ca}{h}\right)^2$$

Elevando al cuadrado:

$$\frac{co^2}{h^2} + \frac{ca^2}{h^2}$$

Al resolver la suma y por el teorema de Pitágoras:

$$\frac{co^2 + ca^2}{h^2} = \frac{h^2}{h^2} = 1$$

por lo que:

$$sen^2\,A + cos^2\,A = 1$$

Si a nadie se le ocurre, usted puede sugerir que apliquen las definiciones. En la puesta en común contraste esta manera de argumentar con la de trabajar con datos numéricos aproximados, pues además no se pueden probar todos los valores, sino solamente algunos, lo cual impide hacer generalizaciones, mientras que el argumento anterior permite afirmar que es válido para todos los valores de los ángulos.

En la actividad 1 de la sesión 5, los alumnos profundizarán en el estudio de las razones trigonométricas al ver cómo varían los valores de estas razones y tendrán que extender el concepto de razón más allá de la relación entre los lados de un triángulo rectángulo; éste es un primer acercamiento para pasar de las razones a las funciones trigonométricas. Aquí se enfrentarán con ideas importantes que les podrían resultar difíciles, por ejemplo, que pueden calcular el seno de un ángulo de 0° o de 90° a pesar de que no existe un triángulo rectángulo que tenga ángulos con esos valores. En un primer momento permita que traten de encontrar en equipo las justificaciones que se piden en el inciso b), y en la puesta en común puede apoyarlos para que completen o modifiquen los argumentos dados. Por ejemplo, para analizar el valor mínimo del seno pueden considerar un triángulo rectángulo con un ángulo agudo muy pequeño, muy cercano a 0°, como el siguiente:

Haga notar que el cateto opuesto a este ángulo también se acerca a cero, por lo que, cuando el ángulo mida 0°, la razón $\frac{co}{h}$ tendrá como valor $\frac{0}{h} = 0$.

En cambio, en un triángulo rectángulo con un ángulo agudo muy cercano a los 90°, como el siguiente:

se observa que el valor del cateto opuesto se va acercando al valor de la hipotenusa, por lo tanto, la razón $\frac{co}{h}$ tendrá como valor $\frac{h}{h} = 1$.

Los conceptos anteriores no son fáciles de entender porque se han introducido con las razones trigonométricas a partir de los lados de un triángulo rectángulo y porque sólo se han considerado con ángulos agudos, pero reflexionar esto con los alumnos les aclara por qué en las tablas o en la calculadora hay valores de las razones para 0° y 90°.

Un ejemplo de argumento podría ser: "El valor mínimo del seno de un ángulo es 0, porque cuando el ángulo se acerca a 0° el cateto opuesto tiende a cero".

El valor máximo del seno de un ángulo es 1, porque cuando el ángulo se acerca a 90° la medida del cateto opuesto se acerca a la medida de la hipotenusa.

Razonamientos similares se pueden hacer para el coseno y la tangente. Especial atención merece la tangente de 90°. Los alumnos notarán que tiende a infinito, porque el cateto adyacente se acerca a cero y la razón $\frac{co}{ca}$ se va haciendo cada vez más grande, es decir, tiende al infinito.

Cuando se efectúa esta operación en la calculadora, la pantalla indica que hay un error matemático debido a que la división entre cero no existe y se define como infinito (∞)

Asimismo, como una breve introducción a la idea de función trigonométrica se espera que, a partir del análisis de los valores de las razones, los alumnos reflexionen si crecen o decrecen e identifiquen la gráfica en el plano cartesiano.

Pautas para la evaluación formativa

Observe si los alumnos:

- Usan correctamente el instrumento que construyeron para calcular diferentes alturas.
- Recurren, en forma adecuada, a las razones seno, coseno y tangente de un ángulo al resolver problemas.
- Calculan la medida de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo a partir de la medida de los lados del triángulo.
- Logran dar argumentos generales para algunas relaciones entre las razones seno, coseno y tangente de un ángulo a partir de sus definiciones.

¿Cómo apoyar?

Recuerde que no se trata de memorizar los valores de las razones, pero sí de identificar las relaciones que hay entre ellas. Si los alumnos no recuerdan las definiciones de las razones estudiadas, permita que usen como formulario el recuadro de la sesión 3 de la secuencia 16, para que lo consulten cuando así lo deseen

Ayúdelos a identificar en los problemas cuál es el triángulo rectángulo que deben considerar, y en dicho triángulo, cuál ángulo está en juego, cuál es su cateto opuesto y cuál su cateto adyacente.

¿Cómo extender?

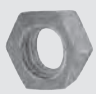
Pida a los alumnos que investiguen si hay más razones trigonométricas además de seno, el coseno y la tangente de un ángulo, y si encuentran otras, digan cómo se llaman y qué relación tienen con las razones que estudiaron.

Averigüen si el seno, el coseno y la tangente de un ángulo sólo se pueden calcular para los ángulos agudos o también para otros valores, como ángulos obtusos (de más de 90° y menos de 180°) o para ángulos entrantes (de más de 180°).

Manos a la obra

Cálculo de alturas

1. Trabajen en equipo. En esta actividad construirán un instrumento que les servirá para medir ángulos. Consigan el siguiente material:

• Hilo resistente 	• Un transportador 
• Pegamento blanco 	• Una tuerca 
• Popote de cartón	

Dato interesante
El teodolito es un instrumento de medición mecánico-óptico y visual. En ingeniería se emplea para medir distancias, desniveles y ángulos. El primer teodolito fue construido en 1787 por Jesse Ramsden (1735-1800). Abajo se muestra la evolución del diseño de los teodolitos. La fotografía de la derecha es de uno actual.

Secuencia 26 Tendencia central y dispersión de dos conjuntos de datos 2

(LT, Vol. II, págs. 162-169)

Tiempo de realización	3 sesiones
Eje temático	Análisis de datos
Tema	Estadística
Aprendizaje esperado	Compara la tendencia central (media, mediana y moda) y dispersión (rango y desviación media) de dos conjuntos de datos.
Intención didáctica	Que los alumnos comparen la tendencia y distribución de datos estadísticos reales que corresponden a una misma situación, así como la tendencia y distribución de dos conjuntos de datos estadísticos que corresponden a dos aspectos diferentes de la misma situación.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisual** • *Comparación de conjuntos de datos estadísticos* **Informático** • *Estadísticas en la hoja de cálculo*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recursos audiovisuales** • *Aspectos didácticos del análisis de datos* • *Recursos para el estudio de la estadística*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Analicen y comparen la tendencia y distribución de datos estadísticos respecto a una situación real.
- Sesión 2. Analicen y comparen dos conjuntos de datos a partir de los valores de las medidas de tendencia central, rango y desviación media.
- Sesión 3. Presenten y comparen conjuntos de datos estadísticos que corresponden a situaciones reales.

Acerca de...

En esta secuencia se amplía lo que los alumnos ya saben sobre la representación de datos con gráficos y medidas de tendencia central, rango y desviación media, así como de la interpretación de gráficas y medidas de tendencia central y dispersión para dar sentido al conjunto de datos, es decir, para interrogar los datos.

Durante el estudio de esta secuencia, los alumnos se centrarán en la comparación de dos conjuntos de datos estadísticos con igual número de elementos. Además, se introduce la comparación de conjuntos de datos con diferente número de elementos. Tales comparaciones permiten apoyar el desarrollo del razonamiento estadístico de los alumnos a partir de actividades que involucran las ideas de dispersión y variabilidad, formas de distribución de los datos y razonamientos sobre los datos.

Entre los propósitos de comparar conjuntos de datos estadísticos está determinar si los conjuntos de datos representan poblaciones iguales o diferentes. En este sentido, el estudio de secuencia ayuda a que los alumnos aprendan algunas de las técnicas necesarias para este propósito en el nivel de secundaria e implican la reorganización de los datos, el uso de los valores de las medidas de tendencia central y de dispersión para hacer estas comparaciones.

Los resultados obtenidos por los alumnos les ayudarán a hacer inferencias y predicciones basadas en datos, en lugar de suposiciones sobre los datos o las poblaciones de las que se toman. Un ejemplo son los diferentes conjuntos de datos estadísticos y algunos de los valores que representan conjuntos de datos presentados en encuestas oficiales usados para analizarlos a lo largo de la secuencia.

Uno de los aspectos importantes que los alumnos deben comprender cuando comparan conjuntos de datos con diferente número de elementos es que se requiere del razonamiento multiplicativo para interpretar y hacer las comparaciones a partir de proporciones y frecuencias relativas que pueden expresarse como porcentajes.

Sobre las ideas de los alumnos

Entre las concepciones que los alumnos han construido a partir de las secuencias de los grados anteriores están el análisis de datos como proceso que involucra su recolección, descripción y representación utilizando métodos estadísticos y la obtención de conclusiones a partir de los datos y valores que los representan o resumen.

Es importante distinguir con los alumnos el análisis descriptivo que se hace con un solo conjunto de datos y el análisis que se puede hacer con dos conjuntos de datos para que les quede lo más claro posible lo que en esta secuencia estudiarán.

Tal vez algunos alumnos en este último grado de educación básica tengan algunas confusiones sobre los conocimientos y procesos al leer, interpretar, organizar y evaluar datos estadísticos. A veces, los alumnos suelen pensar que leer datos y organizarlos son actividades que no tienen relación; por ello, es importante que los oriente para que comprendan que hacer una gráfica, calcular una media aritmética y predecir la distribución de un conjunto de datos son actividades relacionadas.

Entre las definiciones y los conceptos estadísticos fundamentales implícitos en la secuencia están el de *población*, *muestra*, *variable de estudio*, *dato*, *datos*, *dato cualitativo*, *dato cuantitativo*. No se trata de darles las definiciones o de que las busquen, sino de saber que están presentes en el momento de llevar a cabo las actividades y que los alumnos están construyendo las nociones para comprender esos conceptos. Por ejemplo, *población* es el conjunto de individuos u objetos cuyas propiedades o características interesa analizar. Generalmente, los alumnos entienden que este concepto hace referencia a un conjunto de personas y, en estadística, puede ser también un conjunto de animales u objetos. De ahí que se le llame población de interés o de estudio, y se considera definida por completo cuando es posible especificarla mediante una lista de sus elementos (datos). Otra manera en que los alumnos aprenden a identificar cuál es la población a la que se hace referencia es mediante el título del gráfico y de los ejes horizontal y vertical. Una *muestra* es un subconjunto de una población. La *variable* es la característica de interés acerca de cada elemento de una población o muestra, mientras que un dato es el valor de la variable, asociado a un elemento de una población o una muestra.

Si analiza las secuencias de grados anteriores, observará que, por ejemplo, se insiste en que los alumnos determinen el título de las gráficas y de los ejes. Se espera que, con la reflexión sobre las diversas actividades de esta secuencia, los alumnos reconozcan con claridad y precisión las poblaciones y muestras que se están estudiando en cada caso. Los alumnos deberán aprender que, por una parte, puede ocurrir que los conjuntos de datos sean de dos poblaciones en las que se observa una misma característica. Por ejemplo, el ingreso mensual promedio de las mujeres profesionistas, comparado con el ingreso mensual promedio de los hombres profesionistas. O que ambos conjuntos son parte de una misma población, por ejemplo, los conjuntos de ingreso mensual promedio tanto de los hombres como de las mujeres profesionistas conforman la población de ingresos mensuales promedio de profesionistas.

¿Cómo guío el proceso?

En la sección "Para empezar" se propone la introducción al estudio de la secuencia a partir del análisis y la reflexión de algunos datos estadísticos de la infografía. Es recomendable preguntar a los alumnos qué saben sobre las aplicaciones actuales de la estadística y en qué áreas se aplica. Luego, lea con ellos la información de la infografía y destaque que se encuentra expresada en forma de proporción: 1 de cada 10 mujeres; 1 de cada 10 hombres; 1 de cada 3 trabajadores. Esto se describe así debido a que la población de mujeres, hombres y trabajadores de América Latina son tres conjuntos que no tienen el mismo número de elementos y, por lo tanto, se utiliza el razonamiento multiplicativo expresado mediante proporciones, que nos permite, por ejemplo, hacer la comparación entre hombres y mujeres y comprender la información que se presenta.

En la actividad 1 de la sesión 1 se espera que los alumnos puedan:

- Leer los datos. El alumno debe identificar en el gráfico que la variable de estudio es el número de profesionistas por carrera universitaria. Además, cuando los alumnos lean la información que muestran las gráficas de barras, se espera que reconozcan que cada barra representa una carrera universitaria (cualidad) y la longitud de la barra indica el número de profesionistas (frecuencia absoluta) en esa. En la primera gráfica, las barras aparecen ordenadas respecto a la longitud en forma descendente y, en la segunda, las longitudes de las barras están en orden ascendente. De esta manera, parte de la respuesta al inciso a) es el número de profesionistas por carrera entre las carreras más solicitadas y las 10 con menos profesionistas.

  Otra información que los alumnos leen directamente del gráfico es que el valor del promedio del número de profesionistas por carrera universitaria es 237 105, y que este valor no necesariamente corresponde a las 20 carreras que aparecen en las dos gráficas de barras. Los alumnos deberán comprender que los datos estadísticos de estas carreras son los datos extremos de un conjunto con más de 20 elementos y que desconocemos cuántas carreras se registraron en total.
- Leer entre los datos. En las preguntas de los incisos b) y c), las respuestas corresponden a la comparación entre los datos; en el caso del inciso b), es la carrera de Ciencias ambientales con 24 458 profesionales y, en el del inciso c), Administración y gestión de empresas con 1 248 893. En la pregunta d) de la actividad 1 se les pide a los alumnos indicar el número promedio de profesionistas por carrera, que es 237 105, valor que, como ya se indicó, se muestra en la infografía y, al ubicarlo entre los datos de las diez carreras universitarias con mayor número de profesionistas y las diez con menor número de profesionistas, se observa que el valor promedio está entre los datos de las dos gráficas.
- Leer más allá de los datos. En la pregunta del inciso e) el alumno puede utilizar el rango como valor para determinar cuál de los dos conjuntos tiene mayor variabilidad. Si así lo hace, determinará que el conjunto de 10 carreras con más profesionistas presenta mayor variabilidad porque el rango es 895 778 (diferencia entre 1 248 893 y 353 115). En la gráfica de las 10 carreras con menos profesionistas, la carrera con menor número tiene 24 458 y la décima con menos profesionistas tiene 55 341, con lo que hay una diferencia de 30 883 (más del doble), siendo mayor la observada en la otra gráfica.

La actividad cierra con el inciso f), una pregunta abierta enfocada a conocer cuál es la comprensión de los alumnos del conjunto de datos que han analizado y reorganizado. Dependerá de si su respuesta se basa en la información que presenta el gráfico o en experiencias personales respecto a la situación y no considera los datos.

Es posible que los alumnos deseen compartir sus soluciones con un compañero antes de la discusión grupal; permítalo. Durante la discusión, también pida que piensen en las diferencias en los tipos de preguntas que se hicieron. Los alumnos deben reconocer que algunas piden simplemente información del gráfico, mientras que otras implican interpretaciones y manipulación de los datos que se muestran en él.

La segunda actividad implica una tarea de reorganización en la que los alumnos deben identificar las representaciones gráficas que corresponden a la distribución de los 20 datos de la actividad anterior a partir del número de profesionistas. En este caso, la gráfica de línea no es el tipo de gráfica estadística adecuada para mostrar la distribución del número de profesionistas, que es la situación que se está analizando. Es importante recordar que una gráfica de línea se usa para mostrar la tendencia de los datos en el tiempo, por lo que en el eje horizontal se consideran años, meses, días o cualquier unidad de medida de tiempo.

Una manera de verificar si las representaciones gráficas son correctas es permitir dar respuesta a las preguntas de los incisos a) al e) de la actividad 2, al leerlas.

Los datos de las gráficas de barra de la actividad 1 representan los extremos de la distribución completa del número de profesionistas por carrera; es cierto que no sabemos cuántas carreras se registraron en total, ni el número total de profesionistas, pero sí conocemos que el número promedio de profesionistas es 237 105, lo cual permite suponer que la distribución del conjunto de datos tiene una forma de J a la derecha, porque el mayor número de elementos se agrupa en un extremo del rango y se extiende al otro extremo; por lo tanto, la distribución de los datos es asimétrica. Este tipo de distribuciones también se llama sesgada y se identifica de acuerdo con la dirección de la cola (que se forma con los datos extendidos, no con la ubicación de los datos más agrupados que forman un bloque). Por ejemplo, la imagen muestra la posible forma de la distribución después de ubicar el valor del promedio que se proporciona en el gráfico de la sesión 1 y las respuestas a las preguntas de los incisos a) al c). De esta forma podemos notar que una de las respuestas correctas es la primera imagen de la actividad 2.

En la pregunta del inciso d) de la actividad 2 se puede considerar el promedio de 237 105 profesionistas por carrera como el dato típico, es decir, el que mejor representa al conjunto de datos para dar respuesta a la pregunta; sin embargo, sería conveniente hacer una reflexión con los alumnos, ya que la distribución es asimétrica y existe un dato atípico, que de conocerse todos los datos sería conveniente considerar el valor de la mediana, porque en su cálculo no influye el valor de los datos atípicos.

En el inciso e), la pregunta implica leer entre los datos, pero dado que se tiene un conjunto incompleto, no es posible calcular el valor de la desviación media, pues no conocemos cuántas carreras en total se registraron, ni tampoco conocemos el número de profesionistas de las carreras que están entre las 10 carreras con menos y las 10 con más profesionistas.

En la discusión grupal que corresponde a la actividad 3, proponga la revisión de las respuestas a partir de una de las dos gráficas, ya sea la de puntos o la de barras (como se hace en la imagen anterior), y consideren que el promedio del número de profesionistas está ubicado entre 200 000 y 250 000. Además, pueden considerar que el valor del rango es mayor que 1 200 000 y la forma de la distribución de los datos es asimétrica, por lo que puede plantear hacer una hipótesis sobre los valores de los datos que faltan: si la mitad del rango es 600 000, aproximadamente, y la cuarta parte a su vez es un poco más de 300 000, eso nos hace suponer que los valores de los datos faltantes están entre 100 000 y 600 000 profesionistas.

En la actividad 4, se propone que comente con sus alumnos la manera en que creen que pudieron recolectarse los datos del número de profesionistas por

carrera; de manera semejante a la actividad "Para empezar", el propósito es indagar sobre cuál es el nivel de aprendizaje que tienen para considerar la información de los datos y valores de las medidas para dar respuesta a las preguntas de esta actividad.

Conjunto de datos	Hombres	Mujeres
Mediana	\$11710	\$10076
Rango	\$10128	\$8586
Media aritmética	\$12061	\$10300
Desviación media	\$1781	\$1385

Algunas de las preguntas o expresiones que pudieron plantearse a las personas para recolectar los datos son: ¿qué profesión desempeña?, ¿qué estudios realiza o realizó?

En la actividad 5, una propuesta de posible organización de la tabla es:

Número de registro	Género	Estatura en cm	Color de cabello	Talla de calzado	Preocupaciones	Carrera universitaria

La actividad 1 de la sesión 2 implica para los alumnos la lectura de gráficos que les permitirá hacer comparaciones entre los dos conjuntos de datos estadísticos.

Para llevar a cabo la actividad 3, antes de pedir que se distribuyan entre ellos el trabajo, dígales que recuerden los elementos de un histograma y de un polígono de frecuencias, así como el procedimiento de elaboración. Los alumnos deben comprender qué cambia en la nueva gráfica, por qué ahora en el eje horizontal se representa el ingreso mensual promedio y, en el eje vertical, el número de veces que se registró ese ingreso en el mes. Indique que, para efectuar los cálculos del inciso b), pueden usar calculadora si no pueden usar hoja de cálculo electrónica. Las respuestas a la tabla son:

En la actividad 5 puede comentar con sus alumnos sobre la posibilidad de hacer una exhibición en el periódico mural para los compañeros de otros grados y describir la información que presentan: tanto de la manera en que la obtuvieron como la organización y presentación de los resultados. Incluso podrían discutir sobre las personas a quienes les interesaría conocer esta información.

La actividad 6 establece una conexión entre lo que los alumnos analizaron en las sesiones 1 y 2, y por cuál o cuáles carreras universitarias o técnicas se interesan y cuáles no sabían que existen. Si le es posible, consulte con ellos el estudio cualitativo "La educación de las niñas y jóvenes mujeres en Ciencias, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas (CTIM)", disponible en http://www.ift.org.mx/sites/default/files/contenidogeneral/usuarios-y-audiencias/estudioculiattivoninasyjovenesencarrerasstem.pdf, así como el recorrido en la base de datos del sitio de IMCO. Ésta es una oportunidad para vincularse con el trabajo de orientación vocacional que se hace en la escuela. Posteriormente, se propone comparar los datos estadísticos de la sexta pregunta de la encuesta con lo estudiado en la sección "Para empezar" para decidir si representan a poblaciones iguales o diferentes.

En la sesión 3 se presenta una infografía que muestra algunos aspectos de interés en las vidas de los jóvenes. Al leer la infografía, se espera que los alumnos describan que la pregunta de interés del estudio es: "¿Cuáles son tus preocupaciones hoy en día?". Y que les quede claro que 24691 jóvenes contestaron algunas de las 12 respuestas que se muestran. Los resultados para cada respuesta se expresan en porcentaje, y es posible conocer cuántos jóvenes contestaron cada una de esas respuestas porque se conoce el total de mujeres y hombres. Por ejemplo, 41% de los 24691 jóvenes contestó que le preocupa no tener dinero, es decir, 10123 jóvenes dieron esa respuesta. Una posible dificultad que los alumnos pueden tener es comprender que los jóvenes dieron más de una respuesta, por eso se les cuestiona en el inciso b) por el porcentaje total de las respuestas. Se espera que los alumnos no tengan problemas para contestar las preguntas de los incisos c) al i) porque son tareas de lectura de gráficas que han efectuado en otros momentos y otras actividades.

En particular en el inciso f) se espera que los alumnos observen que al 62% de los hombres de 12 a 17 años les preocupa sacar buenas calificaciones, mientras que al 4% no le preocupa bajar de peso.

Pautas para la evaluación formativa

Con la finalidad de verificar en qué medida se logra la intención didáctica que aparece en la ficha descriptiva, es necesario hacer un registro para cerciorarse de que los alumnos realizan lo siguiente:

- Distinguen entre los tipos de gráficas estadísticas, así como el tipo de datos que es conveniente incluir en cada gráfica.
- Interpretan el valor de las medidas de tendencia central, rango y desviación media, involucradas en cada situación.
- Reorganizan los datos correctamente.
- Comparan dos conjuntos de datos a partir de los valores de la media y desviación media o de la media y el rango.
- Comparan dos conjuntos de datos estadísticos que corresponden a dos atributos de una situación.

¿Cómo apoyar?

Si observa que los alumnos leen e interpretan incorrectamente las gráficas de la sesión 1, recuérdeles que una gráfica de barras muestra las frecuencias de valores de datos específicos en un conjunto de datos y se puede usar para datos categóricos o numéricos. Cada barra es el valor de un dato (por ejemplo, Derecho) y la longitud de cada barra corresponde a la frecuencia (número de profesionistas por carrera).

¿Cómo extender?

Con la intención de que los alumnos lleven a cabo otras actividades de reorganización de los datos que les permitan utilizar la información contenida en la gráfica de la actividad 1 y la de la sesión 2, puede proponerles elaborar gráficas en su cuaderno que muestren cuáles son las 10 carreras con:

- Mayor ingreso económico promedio mensual.
- Mayor ingreso promedio mensual para las mujeres.
- Mayor ingreso promedio mensual para los hombres.

Para enriquecer los conceptos de población y muestra que están implícitos en la comparación de los conjuntos de datos, los alumnos pueden extender la aplicación de su encuesta si la localidad en la que se encuentra la escuela es grande, y además investigar entre las personas cercanas a ellos (vecinos, familiares, amigos, etc.) cuáles son los ingresos promedio que perciben. También puede sugerir acceder a internet, bajar la base de datos disponible en el sitio del IMCO y utilizar los datos de bachilleres contra universitarios, o los de profesionistas en actividad informal y formal, con el propósito de que analicen diferentes aspectos de la situación que viven los profesionistas.

Porcentajes por género e intervalo de edad

Total	12-17 años	18-29 años	Total	12-17 años	18-29 años
38	29	44	45	27	48
40	57	29	34	62	28
33	29	35	33	26	35
15	20	12	13	23	11
12	12	12	11	11	11
11	11	12	12	11	12
10	10	11	11	9	11
8	8	8	8	7	9
8	8	7	8	10	8
8	10	6	7	9	6
6	7	5	4	4	4
5	6	5	5	5	5
16078	7095	8983	8613	1902	6711

Secuencia 27 Eventos mutuamente excluyentes 3

(LT, Vol. II, págs. 170-175)

Tiempo de realización	3 sesiones
Eje temático	Análisis de datos
Tema	Probabilidad
Aprendizaje esperado	Calcula la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes.
Intención didáctica	Determinar si un juego de azar es justo o no y, en caso de no serlo, modificarlo de tal manera que sea posible convertirlo en justo.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisual** • *Juego de azar* **Informático** • *Juego de azar*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recurso audiovisual** • *Aspectos didácticos de la enseñanza de la probabilidad*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Calculen la probabilidad frecuencial y teórica de eventos simples, compuestos y mutuamente excluyentes en situaciones relacionadas con datos estadísticos.
- Sesión 2. Reconozcan las condiciones o reglas que hacen que un juego de azar sea justo y, en caso necesario, redefinan los eventos para que el juego de azar cumpla con esta condición.
- Sesión 3. Compensen los premios de un juego de azar para que sea justo.

Acerca de...

En esta secuencia, las situaciones que se consideran como contexto para calcular la probabilidad de eventos simples, compuestos y mutuamente excluyentes corresponden a la estadística y los juegos de azar. Al explorar y analizar este tipo de situaciones, se pretende reforzar y ampliar los conceptos de eventos independientes y mutuamente excluyentes introducidos en las secuencias 9 y 19. A diferencia de la secuencia 19, en la cual los alumnos aprendieron a calcular la probabilidad de eventos mutuamente excluyentes, en esta secuencia analizarán algunos de los resultados posibles de las situaciones propuestas usando las medidas de dispersión, no para encontrar valores y efectuar los cálculos de manera mecánica, sino para darles sentido y significado.

Entre las razones para elegir esas situaciones se encuentra, por un lado, la estrecha vinculación entre la estadística y la probabilidad y la relación de éstas con los ámbitos biológico, físico y social, así como el hecho de que proponer juegos permite comparar cualitativamente las probabilidades de eventos en un ambiente entretenido y de indagación.

Uno de los propósitos de la estadística es describir, medir y explicar la variabilidad en los datos, la cual es una característica que se puede presentar y observar en una diversidad de situaciones. En esta secuencia se pone énfasis en el significado físico de la variabilidad de los datos.

Con respecto a los juegos de azar, los ejercicios propuestos son ejemplos de problemas de muestreo repetido que permiten explorar el razonamiento probabilístico de los alumnos. A partir de estos juegos de azar, en los cuales se usan los mismos dados, las mismas fichas y el mismo tablero, es posible comprender y afirmar los conceptos de eventos simples, compuestos y mutuamente excluyentes (o ajenos) con cambios mínimos o profundos a las reglas o a los premios, así como hacer uso de estrategias que generen una actitud proactiva de los alumnos para enfrentar e intentar resolver problemas, no sólo de matemáticas, sino de cualquier situacion en general.

Por otro lado, se propone la construcción del concepto de juego justo a partir de la selección de eventos o sucesos que sean equiprobables, para lo cual los alumnos deberán examinar la validez de las predicciones que hacen y reflexionar sobre el proceso seguido en cada partida respecto a las reglas o condiciones que se den, las cuales están definidas por los eventos o sucesos por observar, así como por las condiciones del generador aleatorio (moneda, dados, ficha, ruleta, cartas, entre otros) que se utilice en el juego. Los alumnos deberán comprender que cuando no se puede redefinir una regla o condición de un juego para que sea equitativo, entonces ellos podrían proponer ajustes en los premios. Se espera que los alumnos, al establecer el uso de un sistema de registro, como las tablas y los diagramas, puedan reflexionar sobre lo ocurrido en cada partida y reconocer posibles patrones que les permitan plantear algunas conjeturas que se conviertan en propuestas de premios con base en el análisis de los resultados, de tal forma que al final sea un juego justo.

Sobre las ideas de los alumnos

En las secuencias 9 y 19 los alumnos identificaron cuándo dos eventos son mutuamente excluyentes y cómo se calcula la probabilidad de este tipo de eventos, lo cual será importante para el estudio de esta secuencia.

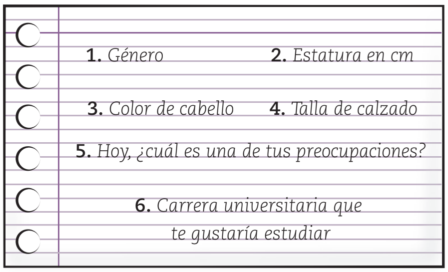
Entre los conocimientos matemáticos que los alumnos continuarán usando más adelante se encuentran los porcentajes, los decimales y las relaciones entre ellos, así como la correspondencia de éstos con las fracciones.

Se conocen las dificultades que los alumnos enfrentan con estos números y los errores generalizados que cometen al usarlos, lo que significa que son conceptos complejos que requieren de un largo proceso secuencial de actividades diversas, entre las que se encuentran las de los juegos de azar.

Por otra parte, se han utilizado a lo largo de las secuencias contextos para darle sentido a la presencia de la variabilidad en los resultados favorables y lograr una mejor comprensión de ciertos conceptos, como el de eventos mutuamente excluyentes.

¿Cómo guío el proceso?

Comience leyendo con los alumnos la sección "Para empezar", en la cual se propone una reflexión sobre la escala de la medida de la probabilidad, tanto en su expresión numérica como verbal. Además, al usar el contexto del pronóstico del estado del tiempo, se espera que los alumnos consideren de qué manera se hacen las predicciones. Comente que en esta situación confluyen diversas variables, y la observación y el análisis a partir del registro y la organización de los datos y los cálculos que se pueden obtener a partir de éstos, permiten establecer el vínculo entre estadística, probabilidad y geografía. Si lo considera conveniente, proponga que observen el siguiente video en el que se presenta información para comprender mejor el concepto de estado del tiempo: https://www.youtube.com/watch v=CiZbF-gV2sQ&ab_channel=smnmexico2



En la actividad 1 de la sesión 1, los alumnos realizan 10 extracciones del mazo de tarjetas considerando tres características a observar del conjunto total de datos registrados en éstas. Es importante que los alumnos reconozcan su conjunto total de tarjetas como su población de interés y que los datos registrados en la tabla de las 10 extracciones representan una muestra aleatoria debido a que cada tarjeta la sacaron al azar. También es conveniente que los lleve a la siguiente reflexión: si regresan las tarjetas para repetir la experiencia de extraer las 10 tarjetas y registrar los resultados, entonces obtendrán una nueva muestra aleatoria, ya que no necesariamente se extraen las mismas tarjetas ni en el mismo orden. Si se procede de esa manera varias veces, se obtienen muestras aleatorias diferentes. Es importante que consideren lo anterior y no se limiten a completar la tabla y dar respuesta a las preguntas: deben pensar principalmente en cómo cambiarían las muestras cada vez que se saca un nuevo conjunto de cartas del mazo.

Por otra parte, para determinar las probabilidades de cada característica (género, estatura en centímetros y talla de calzado), consideramos que todos los valores de los datos para cada característica tienen la misma probabilidad de ocurrir, ya que no contamos más que con la información de los 10 resultados de la extracción y no hay razón alguna para considerar que un resultado es más probable que otro.

En la actividad 2 de la sesión 1 se calculan las probabilidades de los mismos eventos, pero considerando todo el conjunto de datos (población), por lo que cada probabilidad es la razón entre el número de veces que es favorable un determinado evento y el número total de datos o registros. En la puesta en común de la actividad 3, se espera que oriente a los alumnos para contrastar los valores de la probabilidad frecuencial obtenidos al hacer las extracciones y los valores obtenidos en el recuento de todos los datos. Además, es importante que usted promueva la reflexión acerca de la variación en los valores de la probabilidad de cada situación en la actividad 1 si la muestra cambia; en algunas ocasiones los valores de las probabilidades serán similares y en otras no, lo cual se debe a la relación entre la variabilidad de los datos y la incertidumbre.

En la actividad 4 se propone a los alumnos hacer una conjetura a partir de los resultados y las reflexiones anteriores; también pueden considerar el valor de la media aritmética que obtuvieron en la secuencia 26 respecto a la talla promedio de calzado de mujer y la probabilidad de que la talla de calzado de una mujer sea mayor que 23; con esto, los alumnos están exponiendo su razonamiento ante una decisión que deben tomar.

Es importante recordar que el razonamiento es un proceso mental y entre las maneras de conocer cómo razonan los alumnos están las expresiones orales y por escrito, las cuales se pueden valorar una vez que son registradas, compartidas y discutidas, por lo que las puestas en común son espacios de exposición del razonamiento de los alumnos.

En las sesiones 2 y 3 se consideran algunos juegos de azar. A los alumnos que les corresponden el lanzamiento de dos dados cúbicos se les proporcionan las reglas para jugarlo por parejas. El propósito de la sesión 2 es que descubran si las reglas del juego (eventos) conceden ventaja a alguno de los jugadores y, si es así, entonces se pretende que sean equitativos o justos, analizando la equiprobabilidad de los eventos. En la sesión 2, actividades 1 a 3, deberá asegurarse de que cuentan con las fichas y los dados requeridos. Debe recomendar que cada alumno registre en su cuaderno la manera en que coloca las fichas en el tablero en cada partida y la diferencia que obtiene en cada extracción. El análisis se debe centrar en los eventos que el alumno debe elegir para que ambos jugadores tengan las mismas probabilidades de ganar al jugar.

En la sesión 3, el juego también se desarrolla a partir de la diferencia entre los puntos de las caras superiores de los dados; sin embargo, ahora existe el premio de puntos a repartir. Una vez que los alumnos elaboren el diagrama de árbol con los 36 resultados posibles, deben identificar los resultados favorables a cada uno de los seis eventos. Para el evento A: la diferencia es 5, y deben marcar los resultados (6, 1) y (1, 6). De esa manera, los resultados favorables para el evento F: la diferencia es 0, son (1, 1); (2, 2); (3, 3); (4, 4); (5, 5); (6, 6), de tal manera que Emma tiene más posibilidades de ganar que Joel. Una manera de compensar el juego sin cambiar las reglas (los eventos) es que Joel reciba dos puntos cada vez que salga uno de sus resultados favorables. Es importante que proponga analizar la propuesta que den los alumnos en la actividad 4.

Pautas para la evaluación formativa

Para valorar el avance de los alumnos, observe si logran:

- Distinguir entre evento simple, compuesto y mutuamente excluyente.
- Calcular la probabilidad de eventos mutuamente excluyentes.
- Interpretar los valores de las medidas de la probabilidad de los eventos respecto al contexto o la situación que se analiza.

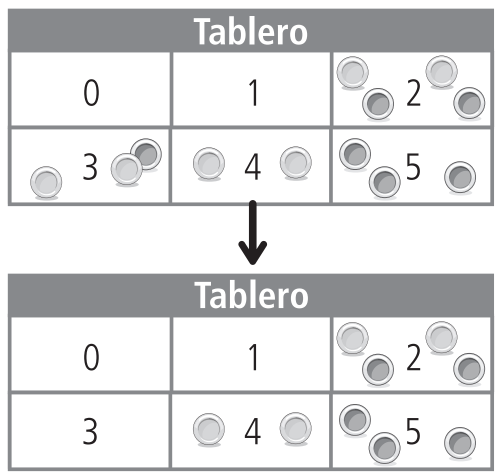
¿Cómo apoyar?

Si observa que los alumnos tienen dificultades para comprender la manera en que la estadística y la probabilidad se complementan, consulte y analice junto con ellos los datos registrados varios años atrás de los promedios de temperatura máxima mensual de un determinado año y elaboren una gráfica de línea para mostrar su variación con respecto a otros años.

También le puede pedir a los alumnos que analicen varios datos de lluvia y temperatura para decidir en qué mes del año conviene llevar a cabo un evento social con el objetivo de minimizar la probabilidad de mal tiempo. Pueden consultar esta información en el sitio del Sistema Meteorológico Nacional en la liga: https://smn.conagua.gob.mx/es/climatologia/temperaturas-y-lluvias/resumenes-mensuales-de-temperaturas-y-lluvias

¿Cómo extender?

Para que los alumnos conozcan la manera en que se modifican las condiciones del juego por utilizar un dado no cúbico, solicite que visiten el recurso del sitio https://www.dado-virtual.com/ para generar los lanzamientos de los dados y hacer los ajustes a los tableros o a las reglas del juego necesarios para que sean justos.



Evaluación. Bloque 3

(LT, Vol. II, págs. 106–107)

Reactivo 1. *Razones trigonométricas*. De acuerdo con los datos de la imagen, la razón que es conveniente utilizar es el seno del ángulo de 30°. Recordar que *sen* 30° = $\frac{co}{h} = \frac{1}{2}$, por lo que

$$\frac{1}{2} = \frac{co}{65\text{ m}}$$

$$co = \frac{1}{2} \times 65\text{ m} = 32.5\text{ m}$$

Reactivos 2 y 3. *Funciones.* Para el reactivo 2 se puede apreciar en la gráfica que el sistema de acuaponia es el de mejor rendimiento en kilogramos por metro cuadrado. En el reactivo 3 se observa que la máxima producción para los tres tipos de cultivo es 45 días.

Reactivos 4 y 5. *Polígonos semejantes.* En el reactivo 4 la razón de semejanza ΔBCD: ΔAED de los triángulos que se forman en el pentágono es $\frac{7}{4.32}$ = 1.62. Para el reactivo 5 la medida del lado AE del pentágono es de 7 cm.

Reactivo 6. *Mínimo común múltiplo y máximo común divisor.* La expresión algebraica para representar un múltiplo de 5, siendo *x* un número natural es 5*x*.

Reactivo 7. *Eventos mutuamente excluyentes.* Se refiere a las condiciones que generan un juego justo. Conviene hacer una tabla con los resultados favorables de los eventos, como la siguiente:

Eventos La canica que sale tiene...	Resultados favorables al evento	Número de resultados favorables
A: ... un número menor que 10.	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	9
B: ... un número de dos dígitos.	10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50	41
C: ... un número mayor que 25.	26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45 ,46, 47, 48, 49, 50	25
D: ... un número terminado en número par.	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48, 50	25
E: ... un número que es múltiplo de 5.	5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50	10

El juego entre Manuel y Fernanda es justo si ellos consideran los eventos C y D como reglas del juego, porque esos eventos tienen el mismo número de resultados favorables.

La **segunda parte** la integran ocho actividades. La primera actividad se relaciona con *polígonos se-*

mejantes, y para determinar la profundidad de la cisterna según los datos de la imagen, se tiene:

$$\frac{243\text{ cm}}{90\text{ cm}} = \frac{x}{165\text{ cm}};\ 2.7 = \frac{x}{165\text{ cm}};$$
$$2.7\,(165\text{ cm}) = x;\ x = 445.5\text{ cm}$$

Lo cual significa que la cisterna tiene una profundidad de 445.5 cm.

La segunda actividad corresponde a *ecuaciones cuadráticas.* La siguiente tabla muestra los valores del discriminante D y, de acuerdo con su valor, cuántas soluciones tiene cada una de las ecuaciones cuadráticas.

a) $x^2 - 20x + 100 = 0$; $D = 0$; la ecuación tiene dos raíces iguales.

b) $x^2 - 3x + 2 = 0$; $D > 0$; la ecuación tiene dos raíces distintas.

c) $x^2 - 2x + 3 = 0$; $D < 0$; la ecuación no tiene raíces en los números racionales o irracionales.

La tercera actividad también está relacionada con *ecuaciones cuadráticas* y con *figuras geométricas y equivalencia de expresiones de segundo grado.* La resolución de la situación implica plantear las expresiones algebraicas que corresponden a las dimensiones de un terreno.

a) Medidas originales del terreno: Ancho: x; Largo: $3x$; Área: $A = 3x^2$

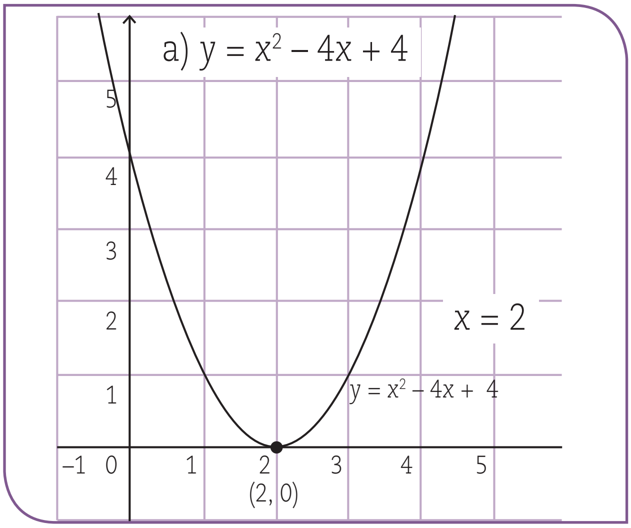
b) Medidas aumentadas del terreno: Largo: $3x + 12$; Ancho: $x + 6$; Área: $2A = (3x + 12)(x + 6) = 3x^2 + 12x + 18x + 72 = 3x^2 + 30x + 72$

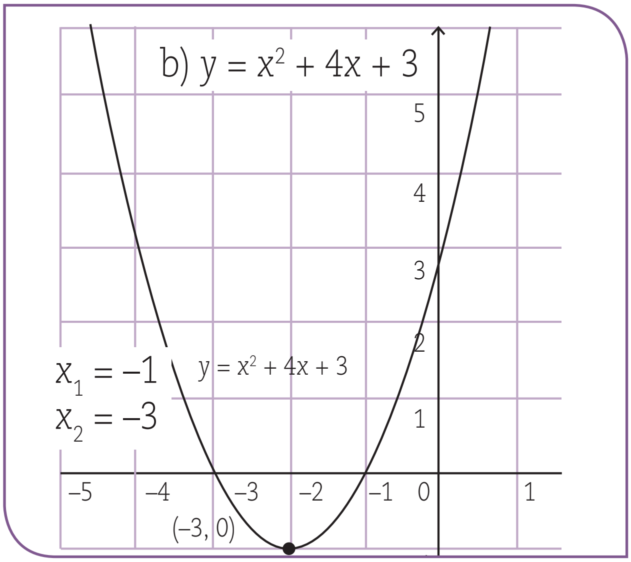
c) Ecuación que permite hallar la medida original del ancho del terreno:
$2A = 3x^2 + 30x + 72$, como $A = 3x^2$, al sustituir en 2A resulta: $3x^2 - 30x - 72 = 0$

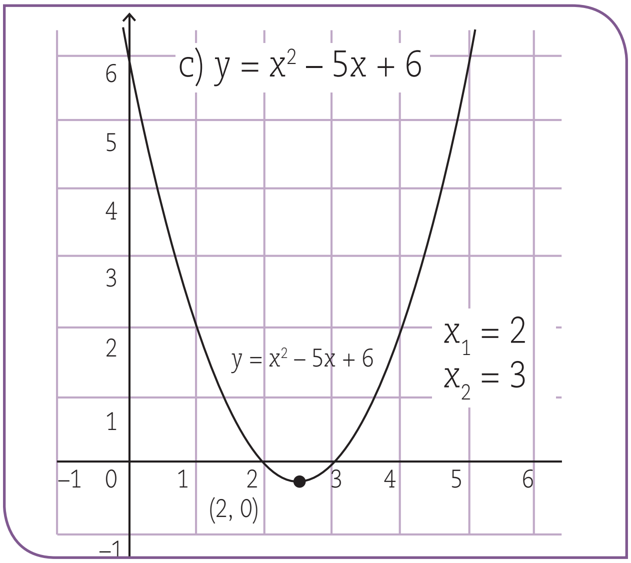
d) Soluciones de la ecuación: $x_1 = 12$; $x_2 = -2$

Es importante que el alumno comprenda que las dos soluciones de la ecuación cuadrática no necesariamente son las dos soluciones que resuelven la situación problemática.

La actividad 4 también está vinculada con *ecuaciones cuadráticas* y con *funciones*, específicamente con la elaboración y lectura de la gráfica de una función cuadrática para determinar cuáles son los valores de la abscisa en que la gráfica corta al eje X.







Puede ocurrir que algún alumno no requiera elaborar las gráficas y decida igualar cada función a cero y resolver cada ecuación para obtener los valores de las abscisas, que son los valores de x_1 y x_2.

La actividad 5 permite evaluar los conocimientos adquiridos con respecto a las figuras geométricas y la equivalencia de expresiones algebraicas. La expresión factorizada del área del trapecio que se pide es:

$$A = \frac{bh}{2} + \frac{Bh}{2} = \frac{h}{2}(B + b)$$

También pueden escribir:

$$A = \frac{bh}{2} + \frac{Bh}{2} = h\left(\frac{B + b}{2}\right)$$

La sexta actividad corresponde a *eventos mutuamente excluyentes*. La respuesta correcta del inciso a) es seleccionar el tablero 3 porque $\frac{13}{36}$ del área total corresponden a la zona de color amarillo, lo que representa poco más de un tercio. En el caso del inciso b), la probabilidad de ganar el premio de $50 jugando con el tablero 3 es de $\frac{13}{36}$, por la razón descrita en el inciso a). Y con respecto a la probabilidad de ganar el premio utilizando el tablero 1 es de $\frac{1}{3}$.

El juego es justo si se quita el tablero 3 y el tablero 2 o si se ajusta el tablero de manera que tenga la misma probabilidad que el tablero 1 o 4, pero se debe quitar el tablero 3 para jugar con tres tableros. Es decir, las opciones que se deben marcar con una ✓, son la segunda y la tercera.

La séptima actividad implica evaluar contenidos relacionados con el estudio de *tendencia central y dispersión de dos conjuntos de datos*. Al leer e interpretar los conjuntos de datos que se muestran en las gráficas, el alumno dará las respuestas que se piden.

En Ciudad Valles, la menor temperatura que se espera es 28° y la mayor es 34°, mientras que en la ciudad de Toluca, la menor temperatura es 17° y la mayor temperatura pronosticada es 23°. En ambas ciudades, el rango de la temperatura máxima y mínima pronosticada es 6°.

En Toluca, la temperatura máxima más frecuente pronosticada es 19° y 20° y, en Ciudad Valles, la más frecuente es 32° y 34°.

La temperatura máxima media pronosticada para Ciudad Valles es 32.14° con una desviación media de ±1.43. En el caso de la ciudad de Toluca se pronostica que la temperatura máxima media es 20° con una variación media de ±1.29. De acuerdo con esta información, se espera que la temperatura máxima para las próximas dos semanas tenga poca variación.

Como se puede observar en las respuestas, quizá algunos alumnos sólo consideren uno de los dos valores que corresponden a la temperatura máxima más frecuente en cada conjunto. Esto significa que los conjuntos son bimodales. Otra posible dificultad al leer los datos en ambos conjuntos es considerar como la menor temperatura (máxima) el primer dato registrado en cada gráfica.

La última actividad, la octava, implica leer e interpretar las gráficas de línea. Respuestas:

a) En Ciudad Valles, S. L. P.

b) En Ciudad Valles, S. L. P. Por el pico que se registra al principio de la segunda semana, entre lunes y miércoles, particularmente, para el martes se espera un registro de 41 mm de precipitación en esa ciudad.

En el caso del inciso c), el valor del rango en el nivel de precipitación esperada para cada ciudad resume mejor el pronóstico que se muestra en las gráficas, porque en Ciudad Valles va de 0 a 41 mm y en Toluca, de 0 a 6.6 mm.

Bibliografía

Block Sevilla, David *et al*. (2010). *¿Al doble le toca el doble? La enseñanza de la proporcionalidad en la educación básica*, México, Ediciones SM (Somos maestr@s).

Díaz Godino, Juan *et al*. (1996). *Azar y probabilidad*, Madrid, Síntesis.

Grupo Beta (1999). *Proporcionalidad geométrica y semejanza*, Madrid, Síntesis.

Hitt, F. (2002). *Funciones en contexto*, México, Pearson Educación (Prentice Hall).

Itzcovich, Horacio (2005). *Iniciación al estudio didáctico de la geometría. De las construcciones a las demostraciones*, Buenos Aires, Libros del Zorzal.

Secretaría de Educación Pública (1999). *Libro para el maestro. Matemáticas. Educación secundaria*, México, SEP.

Secretaría de Educación Pública (2018). *Matemáticas. Primer grado. Libro para el maestro. Telesecundaria*, México, SEP.

Sessa, Carmen (2008). *Iniciación al estudio didáctico del álgebra. Orígenes y perspectivas*, México, SEP/ Libros del Zorzal.

Ursini, Sonia *et al*. (2005). *Enseñanza del álgebra elemental. Una propuesta alternativa*, México, Trillas.

Zill, D. y Dewar, J. (1998). *Álgebra y trigonometría*, México, Mc Graw Hill.

Referencias electrónicas

Batanero Bernabeu, Carmen y Luis Serrano Romero (1995). *La aleatoriedad, sus significados e implicaciones educativas*, UNO, 5, 15-28.

Bodí Pascual, Samuel David (2008). *Análisis de la comprensión de divisibilidad en el conjunto de los números naturales*, tesis doctoral, Universidad de Alicante. Disponible en http://www.eltallerdigital.com (Consultado el 10 de marzo de 2020).

Espinosa Pérez, Hugo *et al*. (2000). *Fichero de actividades didácticas. Matemáticas. Educación secundaria*, 2ª ed., 2ª reimp., México, SEP. Disponible en https://www.uv.mx/personal/grihernandez/files/2011/04/ficheroactividades.pdf (Consultado el 12 de julio de 2019).

García Peña, Silvia y Olga Leticia López Escudero (2008). *La enseñanza de la geometría*, México. Serie Materiales para apoyar la práctica educativa. Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación. Disponible en https://local.inee.edu.mx/images/stories/2014/Publicaciones_CONPEE/pdf/geometriacompleto.pdf (Consultado el 12 de julio de 2020).

Grimaldi, Verónica *et al*. (2017). *Ecuaciones. Aportes para el debate acerca de su enseñanza*, Buenos Aires, Santillana (Cuadernos de apoyo didáctico. Secundaria básica y últimos años de la primaria). Disponible en https://wcarpre.s3.amazonaws.com/2_Ecuaciones.pdf (Consultado el 12 de mayo de 2020).

Pérez Carrizales, César O. (s. f.). "Sucesiones numéricas", en *Asesoría secundaria 1*. Disponible en http://recursos.salonesvirtuales.com/wp-content/uploads/bloques/2012/06/Susesionesnumericas.pdf

Quevedo, F. (2011). *Medidas de tendencia central y dispersión*. *Medwave* Mar;11(3). doi:10.5867/medwave.2011.03.4934 (Consultado el 20 abril de 2020).

Secretaría de Educación Pública. *Matemáticas. Secundaria 3°*. Disponible en https://www.planyprogramasdestudio.sep.gob.mx/sec-ae-pensamiento-mate3.html (Consultado el 10 de enero de 2021).

Serradó Bayés, Ana (2013). "El proyecto internacional de alfabetización estadística". *Números*, revista de didáctica de las matemáticas, volumen 83, páginas 19-33. Disponible en http://www.sinewton.org/numeros (Consultado el 14 mayo de 2020).

UNESCO (2017). Contenidos más integradores en libros de texto: enfoques sobre religión, género y cultura. Disponible en acceso abierto bajo la licencia Attribution-ShareAlike 3.0 IGO (CC-BY-SA 3.0 IGO) (http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/igo/).

UNESCO (2017). Escuelas en acción, ciudadanos del mundo para el desarrollo sostenible: guía para el alumnado.

Créditos iconográficos

Ilustración
María Itzel Alcántara Jurado: **pp.** 10-11.
Carolina Tovar González: **pp.** 62, 65, 80, 138, 141, 144-145, 147 y 151.

Fotografía
p. 7: *la hora de la luna, Tierra*, Pixabay 4439728; **p. 11:** (arr.) calentador de agua solar, ©mipan/Shutterstock.com; (centro) personaje en vitral de plomo, Pixabay 3984958; **p. 15:** fotografía de Martín Córdova Salinas/Archivo iconográfico DGME-SEB-SEP; **p. 151:** (ab. izq.) teodolito, fotografía de qfwfq78, bajo licencia CC BY-NC-ND 2.0; (ab. der.) teodolito DTM-A20, fotografía de PhY, bajo licencia CC BY-SA 3.0.