LIBRO PARA EL MAESTRO

Matemáticas

Tercer grado

TELEsecundaria

Índice

II. Sugerencias didácticas específicas

Punto de partida

La siguiente batería de 17 reactivos es una propuesta elaborada con el fin de proporcionarle elementos para valorar algunos de los aprendizajes esperados que los alumnos lograron en segundo grado de secundaria, y como un punto de partida para dar seguimiento al avance que presenten durante este grado, así como para orientar sus estrategias de enseñanza.

Reactivo 1

Con las expresiones que presenten los alumnos podrá verificarse el conocimiento en el manejo de la equivalencia de *expresiones algebraicas equivalentes de primer grado*.

a) $12m$; $m + m + m + m + m + m + m + m + m + m + m + m$; $3m + 3m + 3m + 3m$; $4(3m)$

b) $3m + 3m + 3m + 3m$; $m + m + m + m + m + m + m + m + m + m + m + m$; $12m$; $4\,(3m)$

Reactivo 2

Con las respuestas de este reactivo podrá constatar los conocimientos que tienen los alumnos acerca de las *sucesiones*.

Figura 10: <u>19</u>; figura 20: <u>39</u>; figura 50: <u>99.</u>

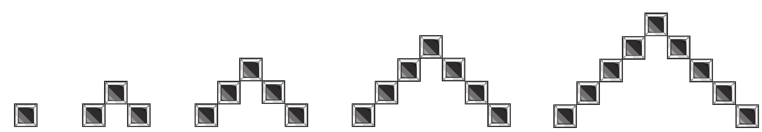


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3 Fig. 4 Fig. 5

Figura 10: ______ Figura 20: ______ Figura 50: ______

Reactivo 3

Este reactivo le permite valorar los conocimientos que tienen los alumnos sobre el manejo de la representación gráfica de situaciones de *variación lineal y proporcionalidad inversa*.

a) Variación lineal (Gráfica 2)

b) Variación inversamente proporcional (Gráfica 3)

c) Variación de proporcionalidad directa (Gráfica 1)

Reactivo 4

Con este reactivo podrá observar si los alumnos utilizan estrategias para resolver problemas. Se trata de una *relación de proporcionalidad directa*: cuantos más marcadores se compren, mayor es el precio total.

Si se denomina con x al número de marcadores que se quiere comprar y se desconoce:

Marcadores	13	x
Precio	\$148.50	\$299.00

Como es proporcionalidad directa, se tiene:

$$\frac{13}{148.50} = \frac{x}{299}$$

Al despejar la x:

$$x = \frac{(299)(13)}{148.50} = 26.175$$

Por lo tanto, se pueden comprar 26 marcadores; sí sobra algo, el precio de 26 marcadores es \$297.00 y sobran \$2.00.

Reactivo 5

Este reactivo, le dará elementos para valorar el manejo del cálculo de la *probabilidad* que tienen los alumnos.

Probabilidad de que sea hombre: $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$; probabilidad de que sea mujer: $\frac{10}{15} = \frac{2}{3}$

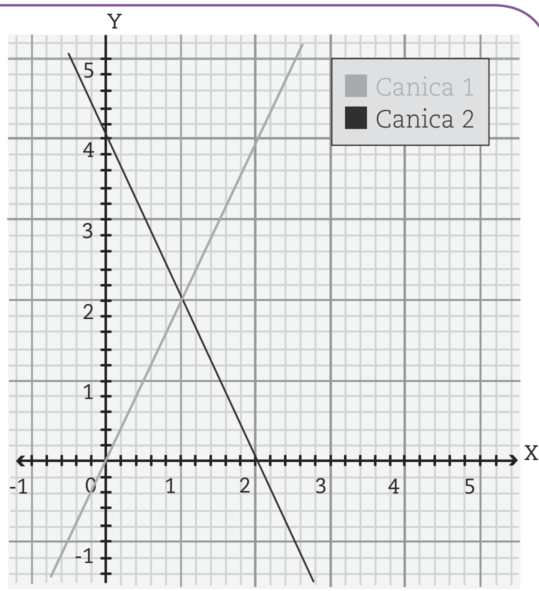
Reactivo 6

Con este reactivo, los alumnos mostrarán sus habilidades y conocimientos en el manejo de los sistemas de *ecuaciones de primer grado con dos incógnitas y su solución gráfica*.

Las canicas se cruzan en el punto (1, 2).

6. El movimiento de dos canicas sobre un plano cartesiano se describe por las dos rectas de la derecha, cuyas ecuaciones son **y – 2x = 0** y **2y + 4x = 8**, respectivamente.

¿En qué punto del plano cartesiano se van a cruzar ambas canicas? ____________________



Reactivo 7

Este reactivo dará a los alumnos la oportunidad de mostrar sus conocimientos del manejo que tienen de la solución algebraica de *sistemas de ecuaciones lineales* con dos incógnitas.

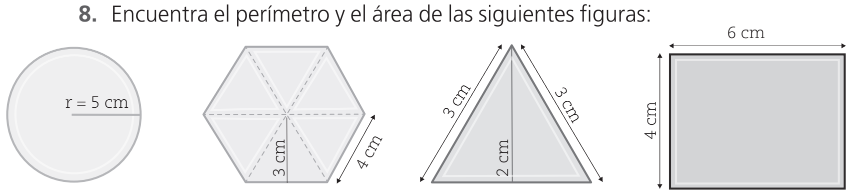
a) $10 - 2x = 60 + 18x$
b) $20x = 10 - 60$
c) $10y = 50$
d) La solución del sistema de ecuaciones: $x = -\frac{5}{2}$; $y = 5$

Reactivo 8

Con este reactivo podrá darse cuenta del manejo que tienen los alumnos del cálculo de *perímetros y áreas* de polígonos regulares y del círculo.

Círculo: P = 31.41 cm; A = 78.54 cm^2
Hexágono: P = 24 cm; A = 36 cm^2
Triángulo: P = 9 cm; A = 3 cm^2
Rectángulo: P = 20 cm; A = 24 cm^2

8. Encuentra el perímetro y el área de las siguientes figuras:

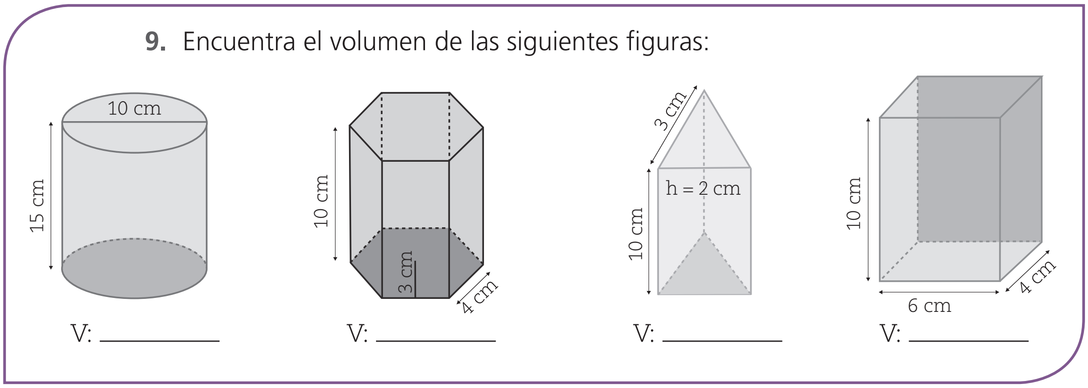


P: __________ P: __________ P: __________ P: __________
A: __________ A: __________ A: __________ A: __________

Reactivo 9

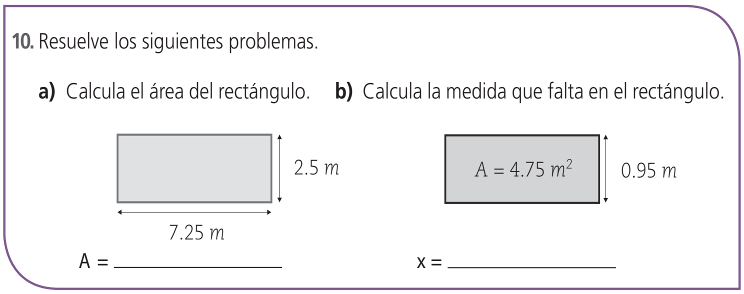
Las respuestas que den los alumnos a este reactivo pondrán en evidencia los conocimientos que tienen en el cálculo del *volumen de prismas y cilindros rectos*.

Cilindro: V = 1178.1 cm^3
Prisma hexagonal: V = 360 cm^3
Prisma triangular: V = 30 cm^3
Prisma cuadrangular: V = 240 cm^3



Reactivo 10

Con este reactivo usted podrá determinar cómo manejan los alumnos el *cálculo del área* del *rectángulo* con los datos que se le proporcionan en la resolución de problemas.
a) A = 18.125 m^2
b) x = 5 m



Reactivo 11

Con la resolución del problema que se presenta en este reactivo, los alumnos mostrarán sus conocimientos de *multiplicación y división de fracciones y decimales*.

Juanita: 800 m; Esperanza: 1350 m; Evelyn: $2\frac{3}{4}$ vueltas

Reactivo 12

Con la resolución de las operaciones que se plantean en este reactivo, los alumnos mostrarán sus conocimientos y habilidades acerca de la *multiplicación y división de números enteros, fracciones y decimales positivos y negativos*.

a) −48 b) $\frac{5}{16}$

c) 0.255 d) 10

e) −114.75 f) −2.708

g) $-\frac{6}{11}$ h) 5

i) $-\frac{2}{5}$

Reactivo 13

Con este problema, los alumnos se enfrentan a la necesidad de manejar *potencias* con exponente entero.

El tiempo que le tomará al pueblo enterarse de la noticia son 5 horas, pues iniciaron 5 personas (5^1); en la primera hora, éstas informaron cada una a 5, es decir 5^2 = 25; en la segunda hora, ésas 25 informaron cada una a 5 personas, que corresponde a $5^3 = 125$, así hasta llegar a la quinta hora donde se informa a $5^6 = 15625$ personas, y al sumarle la cantidad de personas que se enteraron en las horas anteriores, que son 3935, resultan 19560.

Reactivo 14

Al resolver este problema, los alumnos tendrán que conocer la *aproximación de la raíz cuadrada*.

Para calcular el área de un cuadrado se multiplica la medida del lado por sí misma, esto es $(x)(x) = 20\ m^2$; para obtener la medida del lado se extrae la raíz cuadrada del área, es decir $\sqrt{20}$ que tiene un valor aproximado de 4.47, por lo que el valor del lado del cuadrado es de aproximadamente 4.47 m.

Reactivo 15

La situación que se plantea en este problema permitirá evidenciar el dominio de los alumnos respecto al manejo de las *expresiones algebraicas* para despejar los elementos requeridos.

a) 53.558 cm   b) 49.072 cm

Reactivo 16

Con las respuestas que den los alumnos a la situación planteada podrá darse cuenta del manejo de las *medidas de tendencia central* al analizar los datos proporcionados.

Rango: 99; Media: 60.36; Mediana: 70; Moda: 85.

Reactivo 17

Con las respuestas que proporcione el alumno en este reactivo podrá determinar el dominio que tiene de la *lectura de gráficas*.

a) Número de aciertos obtenidos por los alumnos en una evaluación
b) Número de alumnos en el eje vertical y número de aciertos en el eje horizontal
c) De barras
d) 20
e) Los puntos medios de cada intervalo
f) 24
g) 80-100; 0-20

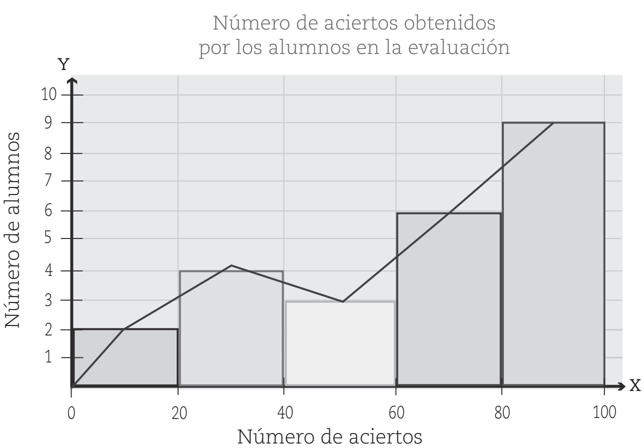
a) ¿Qué información presenta la gráfica? ______

______

b) ¿Qué representa cada número del eje vertical?

______

Y, ¿del eje horizontal? ______



c) ¿Qué tipo de gráfica es? ______

d) ¿Qué rango tienen sus intervalos? ______

e) ¿Qué representan los puntos medios de cada barra? ______

______

f) ¿Cuántos alumnos presentaron la evaluación? ______

______

g) ¿Qué intervalo tiene la mayor frecuencia? ______

______

¿Y la menor? ______

______

______

Bloque 1

Secuencia 1 Múltiplos, divisores y números primos

(LT, Vol. I, págs. 16-21)

Tiempo de realización	3 sesiones
Eje temático	Número, álgebra y variación
Tema	Número
Aprendizaje esperado	Identifica los múltiplos y los divisores de un número, así como los números primos.
Materiales impresos u objetuales para el alumno	Para elaborar el tablero del juego se requiere: cartulina u hojas blancas.
Intención didáctica	Que los alumnos distingan los conceptos: múltiplo, divisor, número primo y número compuesto; también que usen divisiones sucesivas para determinar si un número es o no primo.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisual** • *Múltiplos, divisores, números primos y compuestos* **Informático** • *Algunos múltiplos, todos los divisores*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recurso audiovisual** • *Aspectos de la aritmética entera*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Determinen el conjunto de divisores de un número dado.
- Sesión 2. Determinen el conjunto de factores de un número y analicen su equivalencia con el conjunto de divisores. Conozcan el significado de *número primo* y *múltiplo* de un número.
- Sesión 3. Conozcan y usen la criba de Eratóstenes para seleccionar números primos. Conozcan el significado de un número compuesto.

Acerca de...

Para analizar los conceptos *divisor* y *conjunto* de divisores de un número, se sugiere realizar, en la primera sesión de la secuencia, el juego

Criba de Eratóstenes

1	**2**	**3**	4	**5**	6	**7**	8	9	10
11	12	**13**	14	15	16	**17**	18	**19**	20
21	22	**23**	24	25	26	27	28	**29**	30
31	32	33	34	35	36	**37**	38	39	40
41	42	**43**	44	45	46	**47**	48	49	50
51	52	**53**	54	55	56	57	58	**59**	60
61	62	63	64	65	66	**67**	68	69	70
71	72	**73**	74	75	76	77	78	**79**	80
81	82	**83**	84	85	86	87	88	**89**	90
91	92	93	94	95	96	**97**	98	99	100
101	102	**103**	104	105	106	**107**	108	**109**	110
111	112	**113**	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	**127**	128	129	130
131	132	133	134	135	136	**137**	138	**139**	140
141	142	143	144	145	146	147	148	**149**	150
151	152	153	154	155	156	**157**	158	159	160
161	162	**163**	164	165	166	**167**	168	169	170
171	172	**173**	174	175	176	177	178	**179**	180
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190
191	192	**193**	194	195	196	**197**	198	**199**	200

conocido como “La pulga y las trampas”.[3] Ante el reto de atrapar más pulgas, el alumno que pone las trampas se ve en la necesidad de elegir números que tengan más divisores, mientras que quienes hacen saltar las pulgas piensan en números que no sean divisores de otro donde hay trampa.

En el juego se plantean dos niveles de dificultad, uno en el que se pone sólo una trampa y otro en el que se colocan tres, para que los alumnos piensen si son suficientes para atrapar todas las pulgas, desde las que saltan de dos en dos, hasta las que lo hacen de diez en diez.

En la segunda sesión, se introduce el concepto *factor* al requerir encontrar las dimensiones enteras de todos los rectángulos diferentes que se pueden trazar con un área dada. Por ejemplo, para un área de 12 cm^2, los rectángulos que se pueden trazar son: 12 × 1; 6 × 2; 4 × 3. Los factores que se usan son {1, 2, 3, 4, 6 y 12}. Éste es el conjunto de divisores del número 12. En esta sesión se hace explícito que el conjunto de factores de un número también es el conjunto de divisores del mismo; en lo subsecuente, conviene usar indistintamente ambos términos. Como corolario, se concluye que 12 es múltiplo de cada uno de estos divisores.

El concepto de *número primo* se introduce también en esta sesión, y en la tercera se usa la criba de Eratóstenes para encontrar los números primos menores que 100; también se reflexiona acerca de algunas propiedades de estos números, así como de los números compuestos. Por ejemplo, se pide mostrar con un ejemplo la falsedad de enunciados del tipo: *La suma de dos números primos siempre es un número primo*.

Los conceptos *factor* o *divisor*, *múltiplo*, *número primo* y *número compuesto* son fundamentales para el estudio de la divisibilidad, tema importante de la aritmética que no se agota en esta secuencia.

Sobre las ideas de los alumnos

Los términos *múltiplo*, *divisor* y *factor* no son nuevos para los alumnos. El primero ha sido utilizado para designar, por ejemplo, las unidades de medida que son mayores que el metro (dam, hm, km); el segundo se ha usado para designar a uno de los términos de la división y, el tercero, para designar a los números en una multiplicación. Ahora, *múltiplo*, *divisor* y *factor* se usan como características de los números enteros (en particular los positivos y el 0 que se manejan en la secuencia). Se dice, por ejemplo, “un número entero a es múltiplo de otro número entero b, si existe c, tal que $b \times c = a$”. En sentido opuesto, si a es múltiplo de b y c, entonces b y c son factores o divisores de a. Estas características o propiedades de los números enteros, que parecen triviales, suelen confundir a los alumnos, incluso algunos no logran distinguir un múltiplo de un divisor.

A propósito de las propiedades de los números, es necesario que los alumnos se familiaricen con la idea de que, en matemáticas, para demostrar que un enunciado es falso, basta con un ejemplo que lo muestre, mientras que, para demostrar que es verdadero, no son suficientes los ejemplos y se requieren argumentos. Por esta razón, en la actividad 5 de la sesión 3 se pide que muestren con un ejemplo cuando consideren que el enunciado es falso.

Algunos alumnos se preguntan si el 1 es o no número primo, puesto que se puede dividir entre 1 y entre sí mismo. Un argumento que puede convencerlos de que no es primo consiste en plantear que los números primos tienen dos divisores distintos, mientras que el 1 sólo tiene uno.

¿Cómo guío el proceso?

Lea junto con los alumnos la sección “Para empezar” y pregunte si conocen el juego “La pulga y las trampas”. A quienes lo conozcan, pídales que jueguen en diferentes equipos para aprovechar su experiencia. Ayúdelos a organizarse en equipos de cuatro integrantes y lea junto con ellos las reglas del juego. Si lo considera necesario, juegue con un equipo y que los demás observen. Una vez que las reglas estén claras, déjelos jugar unos 30 minutos y en seguida pasen a la actividad 2 para que contesten las preguntas que ahí se plantean.

Todas las preguntas de la actividad 2 se relacionan con los divisores de un número, pero es muy

[3] Fuenlabrada I., *et al.* (1991). *Juega y aprende matemáticas.* México, SEP.

probable que esta palabra no se mencione. No es necesario introducirla en este momento. Permita que intenten contestar solos y, si no pueden, trate de ayudar con ejemplos comunes para ellos, como ver si es posible dividir un número entre 2, entre 3, entre 4, y así sucesivamente hasta 10. Si queda poco tiempo, deje para la siguiente sesión la actividad 3, porque es necesario que jueguen con nuevas reglas. La pregunta 3, inciso b), da por hecho que con tres trampas es posible atrapar todas las pulgas. Es probable que algunos alumnos lo hayan logrado al jugar, pero, si no ocurrió, es importante resaltarlo. Hay varias respuestas correctas, por ejemplo, al poner una trampa en el 36, se atrapan los saltos 2, 3, 4, 6 y 9; faltarían 5, 7, 8 y 10. Si se pone otra en el 40, se atrapan el 5, el 8 y el 10. Con la tercera trampa se atrapa el 7. Otra posibilidad es poner las trampas en los números 9, 56 y 60.

En la pregunta 3c) también es probable que los alumnos se convenzan, mediante el juego, de que no es posible atrapar todos los saltos con dos trampas. Puede apoyarlos para que identifiquen los números que tienen más divisores, de esta manera se darán cuenta de que siempre hará falta una tercera trampa.

La puesta en común se realiza en la actividad 4, es aquí donde hay que hablar ampliamente sobre los divisores de un número. Es importante incentivar en los alumnos el uso de expresiones como: *Los números en que conviene poner las trampas son aquellos que tienen más divisores*, "conviene elegir saltos que no sean divisores de números donde haya trampas" o "el número 40 tiene más divisores que el 12". Se sugiere iniciar la puesta en común comparando las respuestas de la actividad 2.

Es importante que los alumnos comenten, después de leer la información, cómo determinaron la longitud de los saltos para no caer en una trampa. Es probable que hayan hecho divisiones, mentalmente o por escrito. Más adelante verán que los criterios de divisibilidad les servirán para realizar estas operaciones de manera más sencilla.

En la actividad 1 de la sesión 2, observe si los alumnos distinguen el área y el perímetro de una figura. Si lo considera necesario, aclare que el área es la medida de la superficie, mientras que el perímetro es la medida del contorno. Confirme también que tengan claro que dos o más rectángulos con las mismas dimensiones son iguales, aun cuando estén en posiciones diferentes.

En la actividad 2, incisos c), d), e), f) observe si los alumnos logran trazar todos los rectángulos de área 36 cm^2. Pídales que anoten las medidas de cada uno, así podrán tener a la vista todos los factores de 36.

A diferencia del juego "La pulga y las trampas", realizado en la sesión anterior, con esta actividad se favorece el análisis de los factores de un número y que los alumnos se den cuenta de que el conjunto de factores es, a la vez, el conjunto de divisores de ese número. Este hecho se hace explícito en el recuadro de información y se usa al resolver la actividad 4. Insistir sobre el conjunto de divisores de un número ayuda a distinguirlos de los múltiplos; el conjunto de divisores es finito (se pueden contar), mientras que el conjunto de múltiplos es infinito. En lo subsecuente conviene usar indistintamente ambos términos. Adicionalmente, todos los divisores de un número son menores o iguales que éste, mientras que sus múltiplos son mayores o iguales.

En la misma tabla de la actividad 4 aparecen dos números que son primos, el 23 y el 67. Aquí se pretende que distingan dos tipos de números: los que tienen más de dos divisores y los que sólo tienen dos: el 1, que es divisor de cualquier número natural y ellos mismos; a estos números se les conoce como *primos*.

Las preguntas 4, incisos c) y d), ayudan a enfatizar la idea de múltiplo de un número y a distinguirla de un factor o divisor. Al llegar a la pregunta 4e), que se refiere al mayor divisor de cualquier número, sugiera a los alumnos que revisen la tabla y encuentren que este número es él mismo, y el menor divisor es el 1, mientras que en la pregunta 4, inciso f), que se refiere al número que es múltiplo de sí mismo, pídales que revisen de nuevo la tabla e indúzcalos a encontrar que la respuesta es que todo número es múltiplo de sí mismo.

En la actividad 1 de la sesión 3, permita que los alumnos lean las indicaciones y lleven a cabo todo el proceso para determinar los números primos comprendidos entre 2 y 100. En la actividad 2 se verá si lograron seleccionar los 25 números primos que son menores que 100.

Las actividades 2c) y 2d) tienen la finalidad de que los alumnos usen lo que saben para determinar si un número es primo o compuesto. No les diga cómo hacerlo, se espera que por sí solos traten de encontrar un divisor distinto de 1 y el mismo número, dividiendo entre 2, entre 3, y así sucesivamente. Por ejemplo, al dividir 183 entre 2 se obtiene un cociente decimal, pero al dividirlo entre 3, el cociente es entero, lo que indica que 3 es divisor de 183 y, por lo tanto, es compuesto. No es necesario que encuentren todos los divisores, basta con que puedan mostrar que tiene más de dos. Es muy importante comentar las explicaciones que logren formular.

La actividad 4 tiene la finalidad de que los alumnos piensen y usen los números primos al resolver problemas numéricos. Los problemas 4, incisos a) y b), implican números primos menores que 10, de manera que los cálculos se pueden hacer mentalmente. En caso necesario, aclare en el problema 4, inciso b), que los cuatro divisores incluyen el 1 y el mismo número.

En el problema 4, inciso c), corrobore si los alumnos prueban con todos los números, o bien descartan aquellos cuya cifra de las unidades no es número primo. Si hacen esto último, sólo les quedarán cuatro números: 171, 173, 175 y 177. A partir de aquí podrían empezar a dividir entre los primeros números primos. Es probable que "a ojo" se den cuenta de que ninguno de los cuatro es divisible entre 2, porque no tienen mitad entera. Al dividir entre 3, descartarán el 171 y el 177; al dividir entre 5, descartarán el 175 y les quedará el 173. En el libro del alumno, con el fin de favorecer la práctica de la división, no se dice que pueden usar calculadora. Usted valore si conviene que la usen.

El problema 4, inciso d), es similar al anterior, con la diferencia de que entre 500 y 510 hay dos números primos, el 503 y el 509. Además, los que se descartan son aquellos cuya cifra de las unidades no es un número compuesto, entre ellos el 503.

La actividad 5 incluye afirmaciones sobre números primos y compuestos. En la puesta en común, apóyelos en el análisis de cada enunciado y deténganse el tiempo necesario cuando no se pongan de acuerdo en la veracidad o falsedad del mismo. Es muy importante recalcar a los alumnos que, para mostrar la falsedad de un enunciado, es suficiente con dar un ejemplo que lo contradiga. Sin embargo, para mostrar que es verdadero, ni siquiera muchos ejemplos son suficientes; es necesario utilizar otro tipo de argumentos. Por ejemplo, en el enunciado 5b), con base en los ejemplos podrían argumentar que el producto de dos números primos tiene, al menos, cuatro divisores que son: el 1, el producto y los dos números primos que se multiplican; por lo tanto, siempre es número compuesto.

El caso del enunciado 5, inciso d), que también es verdadero, implica una demostración que está fuera del alcance de los alumnos de este grado, pero puede pedirles que traten de justificar por qué es verdadero más allá de los ejemplos.

Pautas para la evaluación formativa

Con la finalidad de verificar en qué medida se da el logro de la intención didáctica que aparece en la ficha descriptiva, es necesario hacer un registro para cerciorarse de que los alumnos realizan lo siguiente:

- Distinguen claramente lo que es un múltiplo y lo que es un factor o divisor.
- Encuentran el conjunto de factores o divisores de un número.
- Identifican los *primos* en un conjunto de números primos y compuestos.

¿Cómo apoyar?

En el desarrollo de esta secuencia se utiliza mucho el cálculo mental, por ejemplo, para determinar si un número contiene o está contenido en otro. ¿18 es múltiplo de 4?, ¿4 es divisor de 18? Ante estas preguntas no se espera que los alumnos escriban la división o usen la calculadora, sino que usen el cálculo mental para determinar que no. Aunque el cálculo mental debiera ser una práctica permanente en la escuela, es probable que a algunos alumnos se les dificulte. Habrá que apoyarlos mediante la práctica diaria para que logren avanzar.

¿Cómo extender?

A los alumnos que tienen facilidad para el cálculo mental hay que proponerles ejercicios con números de mayor valor, por ejemplo, los factores de 512.

Secuencia 2 Criterios de divisibilidad

(LT, Vol. I, págs. 22-29)

Tiempo de realización	4 sesiones
Eje temático	Número, álgebra y variación
Tema	Número
Aprendizaje esperado	Determina y usa los criterios de divisibilidad y los números primos.
Materiales impresos u objetuales para el alumno	Calculadora para verificar la actividad 1 de la sesión 3.
Intención didáctica	Que los alumnos resuelvan problemas que implican determinar si un número entero es o no divisible entre otro número entero menor o igual que diez.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisual** • *Criterios de divisibilidad* **Informático** • *Criterios de divisibilidad*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recurso audiovisual** • *Aspectos de la aritmética entera* **Bibliografía** • Herrero, Mariano (2011). "Criterio de divisibilidad por 11", en *EcoRibera*. Disponible en https://bit.ly/378rl4g (Consultado el 9 de marzo de 2020). • Tahan, Malba (2005). *El hombre que calculaba* [1932], Basilio Lozada (trad.), México, SEP/Limusa (Libros del Rincón).

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Usen el criterio de divisibilidad entre 3 al resolver problemas.
- Sesión 2. Apliquen los criterios de divisibilidad entre 2, entre 5, entre 3 o entre 10, al resolver problemas.
- Sesión 3. Describan los criterios de divisibilidad entre 4 y entre 6 al resolver problemas.
- Sesión 4. Usen los criterios de divisibilidad al resolver diversos problemas.

Acerca de...

La manera en que se abordan los criterios de divisibilidad en esta secuencia no es en el orden secuencial de los números, sino con base en la similitud de dichos criterios. Primero se habla de la divisibilidad entre 3, que hace referencia a la suma de las cifras del número en cuestión. Este asunto se desarrolla a partir de un problema que resultará interesante para los alumnos, de entre varios que podrán resolver del libro *El hombre que calculaba*, cuya lectura se recomienda ampliamente para este grado.

Enseguida se analizan los criterios de divisibilidad entre 2 y 5, se comenta sobre la diferencia respecto al criterio de divisibilidad entre 3 y, por analogía, se agrega el criterio entre 10.

Finalmente se estudian los criterios de divisibilidad entre 4 y 6; el primero se apoya en el número formado por las dos últimas cifras, y el segundo se da cuando se cumplen dos de los criterios ya estudiados: entre 2 y 3.

Sobre las ideas de los alumnos

Es probable que algunos alumnos no tengan clara la diferencia entre *cifra* y *número*. Una cifra es un símbolo que sirve para representar un número. Por ejemplo, las cifras 5, V, y ━ representan el número cinco en diferentes sistemas de numeración: el decimal, el romano y el maya, respectivamente; mientras que un número puede estar formado por una o varias cifras. Por otra parte, es importante que los alumnos aprendan a usar indistintamente las expresiones "es divisible entre" o "es múltiplo de"; por ejemplo, es lo mismo decir "846 es divisible entre 2" que "846 es múltiplo de 2", aunque la naturaleza de los términos sea diferente, ya que *divisible* viene de dividir, mientras que *múltiplo* viene de multiplicar. De igual manera, las expresiones "846 es divisible entre 2 y entre 3" y "846 es múltiplo común de 2 y 3" también significan lo mismo.

Los criterios de divisibilidad, en sí mismos, no tendrán mucho sentido para los alumnos; es el uso que hagan de ellos, sobre todo al descomponer números en factores primos, lo que permitirá que los tengan presentes.

¿Cómo guío el proceso?

Lea junto con los alumnos la sección "Para empezar" y comenten el problema que se plantea. Pídales que piensen qué preguntas se podrían formular a partir de la información que se da; esto les permitirá entender mejor el problema. Anime a los jóvenes a leer el libro que se menciona, ahora de manera individual.

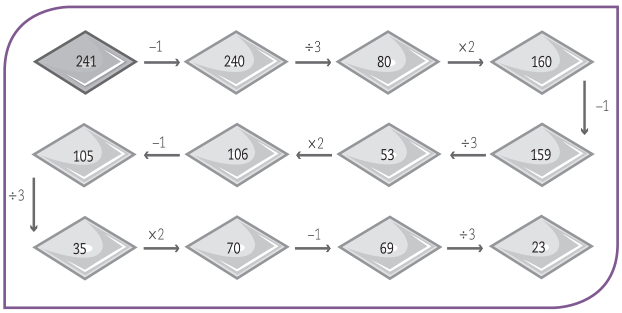
En la actividad 1 de la sesión 1 hay dos preguntas que tienen la intención de que los alumnos vayan precisando sus ideas. La primera pregunta centra la atención en una cantidad dada (230) con el fin de que los alumnos piensen si es o no posible que esa sea la cantidad que buscan y por qué; quizá algunos digan que no, porque, al dividirse entre 3, no sobra 1, lo cual es un avance que puede llevarlos a buscar números de la forma $3n + 1$.

La segunda pregunta ofrece un reto mayor, pues se espera que discutan que el número debe ser de la forma $3n + 1$ y que este número no puede ser, debido a que su residuo es 2.

En la tercera pregunta es deseable que mencionen más de una característica, debido a que no es suficiente que digan que no es múltiplo de 3. Es muy probable que en esta actividad haya soluciones diferentes y que sean incorrectas. Por ahora sólo es necesario que atiendan a la primera condición: que la cantidad de barras de oro sea mayor que 230 y menor que 250.

Ayúdelos a entender la información que hay en la actividad 2, en la que se introduce el criterio de divisibilidad entre 3, y observe que lo apliquen adecuadamente en la actividad 3, tachando los números que son divisibles entre 3. Al realizar esta actividad tendrán a la vista varios números que pueden ser la cantidad buscada (que en este caso serán todos los sucesores de los múltiplos de 3), puesto que al hacer el primer reparto de las barras entre 3, sobró 1. Por ejemplo, algunos de los números podrían ser 232, 235, 238, etcétera; esto es, todos los números enteros de la forma $3n + 1$ mayores que 230 y menores que 250.

La actividad 4 es el punto medular de esta sesión, por ello es muy importante que sean los propios alumnos quienes la resuelvan. Para encontrar los números que completan el esquema es probable que algunos comiencen con la solución que encontraron en la actividad 1, lo que les servirá para comprobar si es correcta; mientras que otros dejarán de lado dicha solución y procederán por ensayo y error. Observe si intentan con los sucesores de los números que tacharon en la actividad 3, por ejemplo, con el 232, el 235, el 238, y así sucesivamente; es necesario probar con estos números porque hay que restar uno y luego dividir entre tres.



Una vez que el esquema esté completo, es necesario analizar el significado de cada número, comenzando por la casilla azul (241), que es la cantidad original de barras de oro. El siguiente número (240) es la cantidad que queda después de deshacerse de una barra. El 80 es lo que corresponde a cada una de las tres partes iguales en las que se dividió la cantidad anterior (240), esto es, la cantidad tomada por el soldado A. La siguiente cantidad es lo restante después de que el soldado A tomó una parte. De esta manera hay que continuar hasta la última casilla.

Al terminar de analizar el esquema, los alumnos podrán identificar la cantidad de barras que tomó cada soldado; sugiérales que a un lado de esas casillas escriban las letras A, B y C. En la última casilla debe estar el número 23, que corresponde a la cantidad de barras de cada una de las tres partes iguales que se obtuvieron al final, de las cuales se le dio una parte a cada soldado, además de las barras que ya tenía. Para saber cuánto le correspondió a cada soldado, habrá que sumar lo que hay en la última casilla a lo que ya tenían A, B, y C, respectivamente. Tenga en cuenta que el resultado debe ser 103, 76 y 58 barras de oro, además de tres barras de las que se deshicieron y una que tomó el coronel; esto da un total de 241.

Es probable que el problema resulte complejo para los alumnos por la cadena de operaciones necesarias para llegar al final. Sin embargo, no pierda de vista que dicho problema sólo es un medio para usar la divisibilidad entre 3. En este caso, no se pretende que los alumnos resuelvan el problema por sí solos, aunque, por supuesto, se pide que lo intenten. Después de esto se les apoya con el esquema, a fin de que encuentren el resultado.

En la sesión 2, observe que los alumnos realicen la actividad 1 de acuerdo con las indicaciones que se dan. Insista en que traten de identificar alguna característica común de los múltiplos de 2, y que la comparen con otros equipos para ver si observan lo mismo. Haga algo similar con los múltiplos de 5. Una vez que haya algún acuerdo, pídales que pasen a la actividad 2, en la que escribirán las ideas que formularon. Recuérdeles que la divisibilidad entre 3 fue estudiada en la sesión anterior.

En la actividad 3 puede haber soluciones diferentes que sean correctas. Por ejemplo, para que el número 34☐ 2☐ sea divisible entre 2, en la última casilla se puede escribir cualquier cifra par, sin importar la cifra que se escriba en la otra casilla. Procure no dar esta información a los alumnos antes de que lo resuelvan, pero sí es importante hacerlo notar en la puesta en común. Ayúdelos a describir los criterios de divisibilidad de acuerdo con la actividad 4, y pregúnteles cómo llegaron a esas soluciones.

Guíelos a analizar con cuidado la información que hay en la actividad 5, donde se incluye el criterio de divisibilidad entre 10, que es similar a 2 y 5.

Aunque no está sugerida en el libro del alumno, es conveniente hacer una puesta en común al término de la actividad 6.

Los criterios de divisibilidad entre 4 y 6 son menos claros que entre 2 o entre 5; sin embargo, se espera que la actividad 1 de la sesión 3 lleve a los alumnos a concluir que, para saber si un número es divisible entre 4, hay que fijarse en el número formado por las dos últimas cifras. Si éste es divisible entre 4, entonces el número con todas sus cifras también lo es.

Observe que en la actividad 1c) de esta sesión no hagan la división al identificar los números. En todo caso, pueden usar la calculadora para comprobar si subrayaron adecuadamente.

En la actividad 3 es probable que algunos alumnos prueben cifras al azar. Otros tal vez logren pensar que 6 es el producto de 2 × 3 y, por lo tanto, la divisibilidad entre 6 tiene algo que ver con la divisibilidad entre 2 y entre 3. Cualquiera que sea el razonamiento que hagan, una vez que tengan todos los números, apreciarán claramente que los números que son divisibles entre 6 terminan en cifra par, es decir, son divisibles entre 2.

Ya que esté fijada la condición anterior, pregunte: ¿la otra cifra puede ser cualquiera? Se habrán dado cuenta de que no, la otra cifra debe ser tal que la suma de todas las cifras sea múltiplo de 3.

En el caso de los que no son divisibles entre 6, es muy probable que sea necesario su apoyo para que los alumnos vean con claridad que es suficiente con que no se cumpla una de las dos condiciones. Esto se entenderá mejor en la actividad 3c). Por ejemplo, el segundo número (54392) termina en cifra par; sin embargo, no es divisible entre 6 porque no cumple con la segunda condición: la suma de sus cifras no es múltiplo de 3. Dicho de otra manera, es divisible entre 2, pero no es divisible entre 3.

La actividad 5 es una recapitulación de los criterios estudiados. Al hacer la puesta en común, destaque que en algunos casos sólo importa la cifra de las unidades; mientras que en otros, es indispensable considerar dos cifras.

En la sesión 4, ayude a los alumnos a analizar con cuidado la actividad 2. Cuando encuentren un ejemplo que muestre la falsedad de un enunciado, pregunte si pueden hallar al menos otros dos ejemplos.

Observe si los alumnos colocan de forma adecuada los números en la actividad 3, cuya finalidad es mostrar gráficamente que los múltiplos de 6 están en la intersección de los múltiplos de 2 y los múltiplos de 3, puesto que cumplen con ambas condiciones.

Las actividades 4 y 5 son, sin hacerlo explícito, un adelanto a la idea de múltiplo común. En el primer caso, la solución es un número que cumple con la condición de ser múltiplo común de 3, 5 y 6, más 1. En el segundo caso se piden números que son múltiplos comunes de dos o más números. Por ahora no es necesario que se introduzca este concepto, se estudiará después.

Finalmente, haga todo lo posible para que los alumnos observen y analicen el material audiovisual e interactúen con el material informático.

Pautas para la evaluación formativa

Con la finalidad de verificar en qué medida se logra la intención didáctica que aparece en la ficha descriptiva, es necesario hacer un registro para cerciorarse de que los alumnos realizan lo siguiente:

- Usan los criterios de divisibilidad entre 5 y 10 al resolver problemas.
- Emplean los criterios de divisibilidad entre 2, 3 y 6 al resolver problemas.
- Utilizan el criterio de divisibilidad entre 4 al resolver problemas.

¿Cómo apoyar?

Es probable que los alumnos necesiten ayuda al redactar los criterios de divisibilidad, o al tratar de entender en qué consiste el criterio de divisibilidad entre 6; puede aprovechar esto para proponer ejercicios adicionales.

¿Cómo extender?

Pídales que averigüen el criterio de divisibildad entre 11[4] y que expliquen en qué se parece al de 3 y al de 9.

Solicite también que indaguen el criterio de divisibilidad entre 7 y entre 8.

Pídales que piensen en la siguiente situación: ¿será cierto que la suma de tres números consecutivos siempre es divisible entre 3? Para orientarlos, considere que:

$$n + (n + 1) + (n + 1 + 1) = 3n + 3 = 3(n + 1)$$

donde se aprecia que la suma de los tres números consecutivos es múltiplo de 3.

3. Anoten las cifras que consideren convenientes en cada cuadro para cumplir con las condiciones que se indican. Después, contesten las preguntas.

Son divisibles entre 6	No son divisibles entre 6
□4□	□4□
□53□	□53□
6□43□	6□43□
□8513□	□8513□

[4] Véase la referencia completa en la tabla de inicio de esta secuencia.

Secuencia 3 Figuras geométricas y equivalencia de expresiones de segundo grado 1

(LT, Vol. I, págs. 30-37)

Tiempo de realización	4 sesiones
Eje temático	Número, álgebra y variación
Tema	Patrones, figuras geométricas y expresiones equivalentes
Aprendizaje esperado	Formula expresiones de segundo grado para representar propiedades del área de figuras geométricas y verifica equivalencia de expresiones, tanto algebraica como geométricamente.
Intención didáctica	Que los alumnos desarrollen habilidad para identificar y obtener expresiones equivalentes que representen sucesiones o áreas de polígonos.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisual** • *Expresiones cuadráticas equivalentes 1* **Informático** • *Expresiones cuadráticas equivalentes 1*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recursos audiovisuales** • *Expresiones equivalentes y no equivalentes* • *Factorización de expresiones algebraicas de segundo grado*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Analicen y comprueben que hay diferentes formas de expresar el perímetro y el área de polígonos, a las cuales se les denomina expresiones equivalentes. Que conozcan el nombre de las expresiones algebraicas por el número de términos que tienen.
- Sesión 2. Usen expresiones algebraicas de segundo grado para representar el área de figuras geométricas, así como de sucesiones cuadráticas. Que apliquen las propiedades de la multiplicación para obtener expresiones equivalentes.
- Sesión 3. Verifiquen la equivalencia en expresiones algebraicas de segundo grado al sustituir la variable por valores numéricos.
- Sesión 4. Apliquen su conocimiento sobre las propiedades de la igualdad para comprobar que dos expresiones algebraicas de segundo grado son equivalentes.

Acerca de...

Esta secuencia es continuación de las que los alumnos trabajaron en segundo grado acerca de las expresiones algebraicas equivalentes lineales.

En esta secuencia se estudian como contexto algunas sucesiones de figuras cuya regularidad se representa mediante una expresión de segundo grado. Los alumnos deberán utilizar y reconocer expresiones que aparentemente son de primer grado, pero que son equivalentes a expresiones cuadráticas, pues están expresadas en forma de multiplicación, como es el caso de $\frac{n(n+1)}{2}$ y $\frac{n^2+n}{2}$. De igual manera, los alumnos expresan áreas de polígonos y del círculo como contexto de donde se obtienen diversas expresiones cuadráticas.

También se nombran las expresiones de acuerdo con el número de términos que las forman: *monomios, binomios, trinomios, polinomios*, pues será un lenguaje que se usará en el estudio de temas algebraicos, como en las ecuaciones de segundo grado.

Sobre las ideas de los alumnos

Los alumnos han trabajado antes con sucesiones para identificar el patrón que permite encontrar cualquier elemento de la sucesión. Sin embargo, transformar esa regularidad que observan en una expresión algebraica que la represente puede no resultar sencillo, por lo que será necesario acompañarlos en su obtención y, si es necesario, retomar algunos ejemplos del grado anterior.

Por otra parte, los alumnos han identificado las expresiones de segundo grado como aquellas donde el 2 es el mayor exponente de una misma variable; sin embargo, es importante que aprendan que cuando se tiene expresada una multiplicación, ésta puede equivaler a una expresión de segundo grado, como sucede en el ejemplo antes citado.

¿Cómo guío el proceso?

En la primera sesión se puede platicar con los alumnos acerca de cómo las diferentes áreas de conocimiento se entremezclan, como es el caso de los vitrales, donde se observa la presencia de la geometría y la química, entre otras disciplinas, para lograr un producto artístico de gran valor. En caso de que haya tiempo y conexión a internet, se sugiere visitar la página http://vitralescorona.com.mx/, donde conocerán más acerca de la historia y elaboración de los vitrales.

Este contexto sirve para asociar las imágenes con diversas figuras geométricas que ya conocen y obtener una expresión que represente el perímetro y el área correspondientes. En la pregunta 1d) de esta sesión se espera que los alumnos refuercen el conocimiento acerca de que sumar expresiones no es lo mismo que multiplicarlas, pues el perímetro se obtiene con la expresión $(x + 3) + x + (x + 3) + x = 4x + 6$, en cambio, su área es $x (x + 3) = x^2 + 3x$ y $4x + 6 \neq x^2 + 3x$. Esto lo podrán comprobar sustituyendo x por algún valor en ambas expresiones, recurso que ya han usado anteriormente. Asimismo, hágalos reflexionar acerca de que la posición del vitral no determina las medidas del largo y el ancho y, por ende, no cambia su perímetro ni su área.

Es importante que los alumnos también tengan claridad acerca de las características de los términos y sepan que cuando se separan por un signo "más" (+) o "menos" (–) dan origen a los binomios, trinomios, etcétera.

En la sesión 2 se sigue trabajando con la búsqueda de expresiones equivalentes, pero, a diferencia de la primera sesión, donde se espera que surjan diferentes expresiones entre los alumnos, aquí se pide explícitamente que busquen dos formas diferentes para expresar lo mismo.

En la actividad 4 se presentan dos expresiones equivalentes, una escrita como multiplicación y la otra como expresión de segundo grado. Es necesario insistir a los alumnos en que siempre que encuentren una operación la resuelvan y la reduzcan para saber de qué tipo de expresión se trata. Por ejemplo, en la expresión $3x + 5x^2 - 2x^2 + x - 3x^2$ diríamos que es de segundo grado hasta que realizamos las operaciones correspondientes y se observa que se reduce a una expresión de primer grado:

$$3x + \cancel{5x^2} - \cancel{2x^2} + x - \cancel{3x^2} = 4x$$

Lo mismo sucede en el caso contrario, donde pareciera que se tiene una expresión de primer grado, pero al realizar las operaciones, en realidad se observa que es de segundo grado:

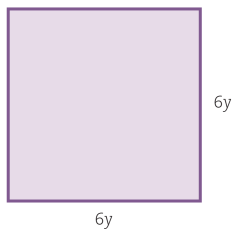
$$y\,(4 + 3x - 2y) = 4y + 3xy - 2y^2$$

En la tercera sesión se plantean problemas donde observarán cómo obtener una expresión algebraica a partir de un dibujo.

La sesión 4 propicia el manejo de los conocimientos algebraicos estudiados hasta este momento para comprobar si dos expresiones que se presuponen iguales, lo son al hacer las operaciones necesarias. La comprobación se hará dando valores a las incógnitas.

Finalmente, se pone en juego la reversibilidad del pensamiento al pedir que tracen una figura que represente una expresión dada. Es necesario apoyar a los alumnos para que comprendan que estas expresiones algebraicas son una especie de fórmula que está representando la manera de obtener el área de alguna figura geométrica. Si lo considera necesario, pídales que mencionen la forma "común" en que representan el área de un rectángulo ($A = bh$), o bien la del cuadrado ($A = l^2$). Así, posiblemente, encontrarán una relación más inmediata con las expresiones que se pide representen con una figura geométrica.

Para la actividad 3, inciso a), podría ser:



O bien, rectángulos con medidas: $(4y)(9y)$, $(12y)(3y)$, $(36y)(y)$, $(18y)(2y)$.

En el caso de la actividad 3, inciso b), no es igual colocar indistintamente las expresiones dadas $(2a + 2)(2a + 3)$, ya que al representarlas en la figura $(2a)(2a)$ se indican dos lados iguales (cuadrado), en tanto que $+3$ y $+2$ describen un aumento, situación que debe ser representada correctamente.

Pautas para la evaluación formativa

Con la finalidad de verificar en qué medida se logra la intención didáctica que aparece en la ficha descriptiva, es necesario hacer un registro para cerciorarse de que los alumnos realizan lo siguiente:

- Diferencian los términos en una expresión algebraica lineal y cuadrática.
- Identifican los términos semejantes y saben reducirlos.
- Aplican la jerarquía de las operaciones.
- Usan correctamente la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición y la sustracción.
- Emplean correctamente la trasposición de términos en una igualdad.

¿Cómo apoyar?

Si los alumnos suman o restan literales iguales con diferente exponente, recuérdeles que se consideran términos semejantes sólo aquellos que tienen la misma parte literal elevada a la misma potencia. Por ejemplo, en la expresión: $-3a^2 + a + 5a + 2a^2$, se pueden reducir, por una parte $-3a^2 + 2a^2 = -a^2$, y por otra, $a - 5a = -4a$, pero a esta última no se le puede sumar $-4a^2$ y $-a$, pues aunque tienen la misma literal, no tienen el mismo exponente.

También es posible que aún enfrenten problemas al hacer la trasposición de términos en una igualdad, por lo que se recomienda proponerles que recurran a la estrategia de la balanza para las ecuaciones, donde lo que se hace de un lado de la igualdad, también debe hacerse en el otro:

$$3x - 8 = -5x - 2$$

$$3x - 8 + 8 = -5x - 2 + 8$$

$$3x = -5x + 6$$

$$3x + 5x = -5x + 5x + 6$$

$$8x = 6$$

$$\frac{8x}{8} = \frac{6}{8}$$

$$x = \frac{3}{4}$$

¿Cómo extender?

La fórmula para calcular el área de los vitrales de la sesión 2 puede servir para que los alumnos analicen la implicación de un cociente en una expresión, lo cual enriquece el análisis sobre expresiones equivalentes. Puede utilizar un ejemplo como el siguiente para que analicen qué expresión no es equivalente a las demás, en cada grupo.

$$A = \frac{5m(m)}{2},\ A = \left(\frac{m}{2}\right)\left(\frac{5m}{2}\right),\ A = m\left(\frac{5m}{2}\right),$$

$$A = (5m)\,\frac{m}{2}$$

$$A = \frac{x(x+4)}{2},\ A = \frac{x}{2}\,(x+4),\ A = \frac{(x+4)}{2}(x)$$

$$A = \frac{(2a+6)(a)}{2},\ A = (a)\left(\frac{2a+6}{2}\right),$$

$$A = \left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{2a+6}{2}\right)$$

Secuencia 4 Ecuaciones cuadráticas 1

(LT, Vol. I, págs. 38-45)

Tiempo de realización	3 sesiones
Eje temático	Número, álgebra y variación
Tema	Ecuaciones
Aprendizaje esperado	Resuelve problemas mediante la formulación y solución algebraica de ecuaciones cuadráticas.
Intención didáctica	Que los alumnos reconozcan la representación gráfica de una ecuación cuadrática e identifiquen la(s) solución(es). Que usen el ensayo y error al plantear y resolver ecuaciones cuadráticas.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisual** • *Ecuaciones cuadráticas 1* **Informático** • *Análisis de ecuaciones cuadráticas*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recursos audiovisuales** • *Recomendaciones iniciales para el estudio de ecuaciones cuadráticas* • *Aspectos a considerar para resolver ecuaciones cuadráticas incompletas*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Conozcan las características de una ecuación de segundo grado, en contraste con las de primer grado, así como algunos problemas que se pueden resolver con ellas.
- Sesión 2. Analicen el proceso para la formulación de una ecuación de segundo grado, su solución por ensayo y error, y el hecho de que tiene dos soluciones.
- Sesión 3. Conozcan la representación gráfica de una ecuación de segundo grado e identifiquen los puntos de corte con el eje X como soluciones de la ecuación. Analicen la pertinencia de las soluciones en relación con el problema de que se trata.

Acerca de...

La presente secuencia introduce al estudio de las ecuaciones de segundo grado. Se apoya en lo que los alumnos saben de las ecuaciones de primer grado, tanto para contrastar sus características, como para aprovechar dichos conocimientos en la comprensión y el uso de una nueva herramienta.

En la sección "Para empezar" se eligió el contexto histórico relacionado con la vida de Diofanto por dos razones: una, porque se trata de un personaje importante para el desarrollo del álgebra; y otra, porque da pie a la formulación de

a) El epitafio habla de tres etapas de su vida; represéntenlas algebraicamente.

Niñez	Etapa en que aparece el bozo en su mejilla	Etapa entre el primer bozo y antes de casarse
$\frac{x}{6}$	$\frac{x}{12}$	$\frac{x}{7}$

d) Con base en la situación anterior, completen la siguiente tabla.

	En tu equipo	En tu grupo	En el grupo de la situación planteada
Número total de alumnos (incógnita)			x
Número de mensajes enviados por cada alumno			$x(x - 1)$
Número total de mensajes enviados			650

una expresión algebraica de primer grado, con la idea de partir de lo que los alumnos saben hacer.

Varios de los aspectos que se abordan en esta secuencia no se agotan, se continuará profundizando su estudio en los siguientes bloques, en la medida en que los alumnos se familiaricen con la manipulación algebraica. Por ejemplo, el asunto de las raíces de una ecuación de segundo grado se apoya, en esta secuencia, en el cálculo mental, el ensayo y error y en la representación gráfica, porque la parte visual ayuda a la comprensión, pero más adelante, además de estos recursos, podrán usar alguno de los métodos que se conocen para resolver ecuaciones.

El ensayo y error se apoya en una idea que los alumnos ya manejan: la de encontrar un número que satisfaga la ecuación. Se analiza, además, que no necesariamente las dos raíces de una ecuación cuadrática son soluciones del problema en cuestión. Por ejemplo, un número negativo no puede ser la medida de una superficie.

Es notorio que en esta secuencia se pone énfasis en la representación algebraica de los datos del problema y de la ecuación que permite resolverlo, con la finalidad de que los alumnos se acostumbren a sistematizar los procesos de solución, desde el inicio hasta la verificación de que el resultado obtenido es correcto.

Sobre las ideas de los alumnos

Los alumnos suelen pensar que así como hay problemas de suma, de resta y de multiplicación, también hay problemas de ecuaciones. Con frecuencia, las prácticas de enseñanza ponen los problemas al servicio de las operaciones y no las operaciones o las ecuaciones al servicio de los problemas, como debería ser. Para contrarrestar estas ideas, es necesario estar abiertos a que los alumnos usen lo que saben hacer y, a partir de ahí, favorecer que adquieran los nuevos conocimientos.

Las ecuaciones son una herramienta potente para resolver problemas y, por esta razón, es importante que los alumnos las conozcan y las sepan usar cuando les resulten necesarias. Se sabe que una de las grandes dificultades es la representación algebraica de los datos de un problema y el establecimiento de la relación entre éstos para formular la ecuación; luego vienen otras dificultades que no corresponden a esta secuencia, como el uso de técnicas más eficientes para resolver la ecuación.

El despeje de la incógnita elevada al cuadrado puede confundirse con la multiplicación por dos. Hay que estar atentos a este posible error y enfatizar el uso de la propiedad de la igualdad, mediante la cual se puede efectuar la misma operación en ambos miembros de la ecuación.

Los alumnos estudiaron la raíz cuadrada en segundo grado, pero es hasta este momento cuando se usa para resolver ecuaciones y se resalta el doble signo de la raíz, entre otras razones porque se pone en evidencia cuando la ecuación se representa gráficamente.

¿Cómo guío el proceso?

Lea junto con los alumnos la sección "Para empezar" y plantee algunas preguntas para aclarar lo que dice. Por ejemplo: "¿Cuántos años han pasado desde 1600 a. n. e. hasta la fecha actual?"; "¿En qué parte del mundo se ubicaba Babilonia?"; "¿Cómo se llama actualmente?"; "¿Tienen idea de qué hacer para saber cuántos años vivió Diofanto?". No es necesario que en este momento den la respuesta correcta a esta pregunta, porque en seguida se desarrolla un proceso para encontrar la respuesta.

c) Continúen este razonamiento hasta encontrar las edades de ambos. Verifiquen que el producto es 315. Anoten aquí los resultados.

Hermana de Raúl	Raúl
15 Años	21 Años

2. El proceso que realizaron en la actividad anterior también se puede hacer utilizando el lenguaje algebraico. Anoten las expresiones algebraicas que se piden.

La edad de la hermana de Raúl	La edad de Raúl	El producto de las dos edades	El producto conocido de las dos edades
x	x + 6	x(x + 6)	315

En la actividad 1 de la sesión 1, los incisos a) y b) dan la pauta para saber a qué edad murió Diofanto. Al expresar algebraicamente las tres etapas que se mencionan en el epitafio y después de efectuar la suma, $\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7}$, se obtiene $\frac{33}{84}x$, es decir, estas tres etapas abarcan $\frac{33}{84}$ del total de años que vivió, de donde se deduce que vivió 84 años. A partir de esta información se pueden plantear y responder otras preguntas, anime a los alumnos a que piensen algunas; esto es parte de la puesta en común que se sugiere en la actividad 2. Es muy probable que surja algo como lo siguiente:

- ¿A qué edad se casó Diofanto?
- ¿Cuántos años tenía Diofanto cuando nació su hijo?
- ¿Cuántos años vivió su hijo?

El problema de la actividad 3 se desarrolla en tres etapas, las dos primeras en el plano de lo concreto, primero en equipo y luego en el grupo. Este desarrollo tiene dos finalidades importantes. La primera es que los alumnos entiendan el problema, y la segunda, de carácter más general, es usar la estrategia de reducir las cantidades con el fin de encontrar un camino que lleve a la solución de un problema. En la tercera etapa se busca generalizar el procedimiento encontrado en las dos etapas anteriores.

La generalización queda resumida en la tabla del inciso d) y la formulación de la ecuación de segundo grado se hace explícita en el inciso e). Es muy importante dejar claro a los alumnos que lo que permite formular la ecuación es tener dos valores iguales, uno de ellos expresado algebraicamente, $x(x - 1)$; y el otro mediante un número, 650. Ambas expresiones representan la cantidad total de mensajes enviados, por lo tanto, se pueden relacionar mediante el signo igual.

Al hacer la puesta en común, seguramente los alumnos dirán que para resolver la ecuación probaron con distintos números hasta que encontraron el que satisface la ecuación. En ese momento no se espera que usen otro procedimiento.

En la sesión 2, en las actividades 1 y 2, se desarrolla el proceso para resolver un problema que intenta averiguar edades. La lógica es diferente a la del problema 3 de la sesión anterior, donde envían mensajes. En la actividad 1 de esta segunda sesión, los alumnos usan ensayo y error para encontrar la solución; en la actividad 2 usan el álgebra nuevamente con la idea de mostrar que se tienen dos valores iguales (el producto de las edades) y que se pueden relacionar con el signo igual para obtener una ecuación. La solución encontrada anteriormente se usa para verificar que la ecuación se satisface.

En la actividad 3 es importante recalcar que hay ecuaciones que no parecen ser de segundo grado y lo son, como es el caso de $x(x + 5) = 6$, pues al efectuar la multiplicación indicada con el paréntesis resulta $x^2 + 5x = 6$. Contrariamente, hay ecuaciones que parecen ser de segundo grado y no lo son. Por ejemplo, $x^2 + 2x - 3 = x^2 - x + 9$, pues, al simplificar la ecuación, se eliminan los términos cuadráticos y resulta $3x = 12$, que es una ecuación de primer grado.

En las actividades 4 y 5 se contrasta que una ecuación de primer grado con una incógnita tiene una solución, mientras que una de segundo grado con una incógnita tiene dos soluciones. A partir del trabajo realizado es muy probable que los alumnos, por ensayo y error, encuentren la solución positiva del enunciado B. Los incisos c) y d) los llevarán a encontrar la solución negativa.

La última pregunta de la actividad 6, con la que termina la sesión, merece especial atención porque algunos alumnos podrían pensar que las dos soluciones son 14 y 15, la solución positiva, y −15 y −14 , la solución negativa. Efectivamente, ambas parejas corresponden a números consecutivos, su producto es 210 y son solución del problema; sin embargo, las dos raíces, o la solución de la ecuación, es 14 y −15. Se puede verificar que éstos son los únicos números que satisfacen la ecuación.

La reflexión anterior se confirmará al realizar las actividades 1 y 2 de la sesión 3. En las gráficas de la actividad 1 se muestran las soluciones, tanto de la ecuación que corresponde al enunciado A, como la que corresponde al enunciado B. Es muy importante que al hacer la puesta en común, en la actividad 2, apoye a los alumnos para que les quede claro que las soluciones, tanto de la ecuación de primer grado, como de la de segundo grado, están en el cruce de la recta y de la curva, respectivamente, con el eje X del plano cartesiano.

Los alumnos saben que cualquier punto del plano cartesiano se representa con una pareja ordenada de números (x, y), que se llaman coordenadas del punto. El primero es la abscisa (el valor de x) y el segundo es la ordenada (el valor de y). La solución de la ecuación, entonces, es el valor de la abscisa cuando el valor de la ordenada es cero. Esto se dice en el recuadro de formalización.

En la actividad 3 se desarrolla un proceso para resolver un problema de áreas. Observe si los alumnos van aprendiendo a expresar algebraicamente los datos del problema y si identifican las dos expresiones que representan el mismo valor del área, una expresión algebraica y otra numérica, mismas que se relacionan con el signo igual para formar la ecuación.

La gráfica del inciso d) muestra las dos soluciones de la ecuación, los alumnos pueden verificar que −4 también es solución de la ecuación; sin embargo, lo que hay que destacar es que −4 no es solución del problema, pues si el valor del área es cero, no existe tal superficie y un valor menor que cero no tiene sentido.

Pautas para la evaluación formativa

Con la finalidad de verificar en qué medida se logra la intención didáctica que aparece en la ficha descriptiva, es necesario hacer un registro para cerciorarse de que los alumnos realizan lo siguiente:

- Distinguen claramente la diferencia entre una ecuación de primer grado y una de segundo grado.
- Identifican las dos raíces de una ecuación de segundo grado a partir de su representación gráfica.
- Discriminan entre la solución de la ecuación y la solución del problema.
- Plantean y resuelven por ensayo y error, ecuaciones de segundo grado cuya relación con el problema es clara.

¿Cómo apoyar?

Proponga, si lo considera necesario, ejercicios adicionales para que los alumnos expresen algebraicamente enunciados verbales. Por ejemplo: *el doble de un número*, *si la suma de dos números es 25 y uno de ellos es x, ¿cuál es el otro?*, *si mi edad actual es x, ¿cuántos años tendré dentro de cinco años?*, *¿cuál era mi edad hace cinco años?*

¿Cómo extender?

Si observa que los alumnos resuelven fácilmente algún problema, pídales que inventen uno para que todo el grupo lo resuelva.

4. Trabajen en equipo y completen la siguiente tabla con las expresiones algebraicas que se piden.

De un número cualquiera	Del sucesor de un número cualquiera	De la suma de dos números consecutivos cualesquiera	Del producto de dos números consecutivos cualesquiera
x	X + 1	x + (x + 1)	x(x +1)

Secuencia 5 Funciones 1

(LT, Vol. I, págs. 46-55)

Tiempo de realización	4 sesiones
Eje temático	Número, álgebra y variación
Tema	Funciones
Aprendizaje esperado	Analiza y compara diversos tipos de variación a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica, que resultan de modelar situaciones y fenómenos de la física y de otros contextos.
Material	Mapamundi con líneas terrestres.
Intención didáctica	Que los alumnos analicen y comparen de manera cualitativa diferentes formas de variación a partir de sus representaciones gráficas en contextos que resulten familiares o significativos para los alumnos.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisual** • *Llenado de recipientes* **Informático** • *Análisis cualitativo de gráficas de relaciones de variación*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recursos audiovisuales** • *Interpretación de gráficas con secciones curvas* • *Relaciones funcionales con variación cuadrática*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Analicen, por medio de la gráfica, diferente información de la situación como los valores máximos y mínimos, así como la variación de las horas de luz y los intervalos de crecimiento y decrecimiento en diferentes épocas del año.
- Sesión 2. Analicen la información de las funciones ya graficadas, que hagan interpolaciones para estimar valores a partir de datos conocidos y usen la información que conocen para construir otras gráficas.
- Sesión 3. Comparen las representaciones gráficas y las diversas relaciones funcionales no lineales para entender la relación de dependencia y la variación entre dos cantidades.
- Sesión 4. Relacionen el contexto con el tipo de representación para profundizar en las nociones de dependencia y razón de cambio.

Acerca de...

Las gráficas de funciones sirven, entre otras cosas, para analizar las relaciones de dependencia entre dos conjuntos de cantidades y el tipo de variación que existe entre éstas.

Desde la educación primaria, los alumnos han trabajado con la relación que hay entre dos conjuntos de cantidades, y en la secundaria han profundizado en el estudio de las relaciones como procesos de variación. En particular, se ha hecho hincapié en los procesos de variación funcional con situaciones lineales y de proporcionalidad directa e inversa. Además, el estudio de los fenómenos de variación se ha hecho mediante diferentes representaciones matemáticas. Dicha experiencia les permitirá hacer un análisis de otro tipo de relaciones funcionales tomando en cuenta aspectos cualitativos de la variación a partir de las gráficas para derivar en soluciones cuantitativas u otro tipo de representación (tabular o algebraica).

Sobre las ideas de los alumnos

En esta secuencia se debe aprovechar lo estudiado en los grados anteriores. Los alumnos, al tener experiencia en identificar las variables de un fenómeno que se puede modelar mediante una gráfica, tienen las nociones que les permiten identificar y analizar las relaciones de dependencia y variación. Sin embargo, es probable que las nociones no estén afianzadas del todo, por lo que es necesario detectar que aún les falta construir e identificar las concepciones erróneas para formalizar lo aprendido a partir de situaciones lineales.

¿Cómo guío el proceso?

Lea y comente con los alumnos la sección "Para empezar". Ponga atención en las nociones que tienen respecto al fenómeno y al tipo de respuestas que dan sus alumnos; esto le permitirá resolver dificultades que se presenten a lo largo de la secuencia, derivadas de lo que saben o desconocen respecto al tema y a la duración del día y la noche. No olvide volver a estas preguntas al finalizar la secuencia para que los alumnos contrasten lo que sabían al inicio con lo que aprendieron.

A lo largo de la secuencia se pretende que los alumnos describan el comportamiento de la gráfica con sus propias palabras y que, además, vinculen esta información con el fenómeno o la situación que representa; es decir, que también describan el fenómeno o comportamiento modelado.

En la actividad 1 de la sesión 1, observe si los alumnos asocian los días más largos o más cortos con ciertas épocas del año o ciertos meses. Detecte qué uso le dan a la gráfica para determinar la duración del día en función de la fecha que se les pregunta. Tome en cuenta que las respuestas deben ser: a) entre diciembre y enero; b) junio, diciembre; c) 14 h y 30 min; d) 10 h, 12 h 30 min y 11 h.

Puede complementar la actividad con preguntas sobre el cambio de dirección de la gráfica, es decir: ¿a partir de cuándo aumenta la cantidad de luz solar? O bien, ¿a partir de qué fecha decrece la cantidad de luz solar en Tijuana?, ¿durante qué meses el número de horas de luz solar en Tijuana es mayor de 13 y menor de 9 horas?, ¿cuál es la variación del número de horas de luz solar entre el 15 de octubre y el 21 de noviembre? Observe con cuidado que los alumnos hagan correctamente la partición de los meses sobre el eje horizontal, dependiendo de lo que estén graficando. Además, pídales que encuentren dos fechas en las cuales la duración de la luz solar sea de 12 horas y 15 minutos, y revise que partan adecuadamente el segmento de una hora sobre el eje vertical.

En la actividad 2, además de trabajar los mismos aspectos que en la 1, se pretende que el análisis del contexto sea clave para entender por qué la diferencia de las gráficas centra la atención en el crecimiento y el decrecimiento de éstas (cómo crece o decrece la cantidad de horas de luz solar, en qué puntos alcanza el valor máximo y en cuál el mínimo); verifique que sus alumnos entiendan el comportamiento de la gráfica relacionándolo con el fenómeno que representa. Si nota que algunos alumnos tienen dificultades para responder las preguntas, regrese a éstas después del llenado de la tabla de la actividad 1 de la siguiente sesión. Tome en cuenta que las respuestas para la actividad 2 de la sesión 1, deben ser: a) Oslo, Santiago, porque es invierno para ellos; b) Santiago, Oslo; c) 15 de junio, 21 de marzo y 21 de septiembre; d) 21 de marzo y 21 de septiembre.

En la sesión 2, comenzarán con el uso de tablas como apoyo para determinar puntos especiales sobre las gráficas usando su conocimiento previo y la estimación de puntos en la gráfica a partir de datos conocidos para contestar las preguntas de la actividad 1.

Ciudad	Enero 1	Febrero 1	Marzo 21	Junio 21	Agosto 1	Septiembre 21	Noviembre 1	Diciembre 21
Tijuana	10 h	10 h y 30 min	12 h y 12 min	13 h	13 h y 48 min	12 h	11 h	10 h
Cancún	11 h	11 h	12 h	13 h y 30 min	13 h	12 h	11 h y 30 min	11 h

El proceso que encontrarán en esta sesión involucra graficar, lo que les permitirá movilizar el conocimiento matemático para describir de mejor manera la situación a la que se enfrentan y, asimismo, comprender el fenómeno de la vida real que se les presenta. Tome en cuenta que las respuestas para la actividad 1 son: a) 14 h 15 min y 13 h 30 min, sí; b) Se debe a que las ciudades están a diferentes latitudes.

Las actividades 2 y 3 están estrechamente re lacionadas con la actividad anterior. Entender las gráficas les ayudará a comprender mejor la situación en las diferentes ciudades aunque no sepan mucho del tema tratado. Conviene destacar que en las gráficas vemos que la cantidad de horas de luz varía según pasa el tiempo; es decir, depende de éste. Además, para cada día del año hay un único valor de horas de luz. Conviene que reflexionen en torno a esto. Si observa que hay dificultades para responder las preguntas, en particular los cuestionamientos de los incisos b) y c), puede ver con los alumnos el siguiente video, o bien, pedirles que lo vean previamente en casa para auxiliarles a profundizar acerca de los movimientos de la Tierra: https://www.youtube.com/watch?v=xPF6V7Iisas&ab_channel=BetzabethjMayorga

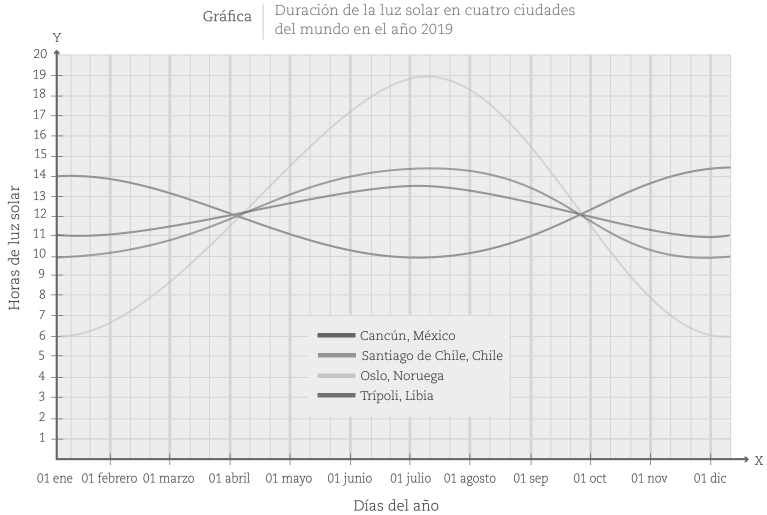
El uso de un mapamundi resulta fundamental para lograr una mejor comprensión del fenómeno y visualizar de otra manera por qué la variación entre fechas del año y las ciudades se da de esa manera. Puede trabajar también en algún momento de la sesión, o dejarlo de tarea, el estudio de los equinoccios. Analizar a fondo las gráficas de las ciudades de Oslo y Santiago de Chile le permitirá profundizar, si así lo desea, en el estudio del contexto, los movimientos de la Tierra, su inclinación respecto al Sol, etcétera.

En la actividad 6 se espera que el alumno use la información recabada junto a lo que sabe respecto a la duración de un día (24 horas). Si observa que tienen dificultades para responder y las preguntas de la actividad no son suficientes para detonar lo que saben, pregunte respecto a la información de la tabla de la actividad 1 de esta misma sesión. Por ejemplo, si en Tijuana la luz solar estuvo presente durante 12 horas el día 21 de septiembre de 2019, ¿cuántas horas habrá durado la noche? O bien, ¿cuántas horas no hubo luz solar? Además, si observa que aún tienen dificultades para comprender a cabalidad la gráfica, puede cuestionar a sus alumnos de tal forma que fijen su atención en que la noche más corta coincide con el día más largo y viceversa, de tal manera que reflexionen y conjeturen sobre cómo se comportará la gráfica que tienen que trazar. Si tienen previamente nociones al respecto, puede pedirles que esbocen la gráfica sin dar valores y la comparen con la final.

Otra actividad que puede trabajar con el grupo para que observen las características de estas gráficas complementarias, es dibujar en una página aparte una reproducción —lo más grande posible— de las gráficas de las cuatro ciudades (p. 47). En esa reproducción, los alumnos pueden trazar las gráficas de la duración de la noche y observar las simetrías que hay entre las gráficas del día y las de la noche. De esta manera, aprovechan la oportunidad de observar lo complementario de los fenómenos que se están estudiando.

Al final de la sesión, algo que tiene que quedar claro es por qué no puede haber más de un valor para cada fecha que se tome, es decir, la duración del día (o la noche) depende de la fecha en que se esté. Además, para cada fecha y cada ciudad se registra sólo una cantidad de horas de luz solar, pues en un mismo día y fecha, la duración del día no puede tener diferentes valores.

Gráfica | Duración de la luz solar en cuatro ciudades del mundo en el año 2019



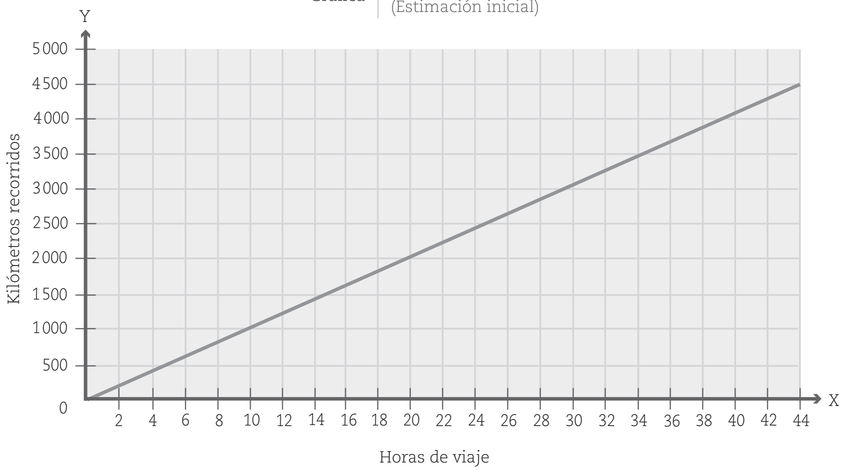
Fuente: https://bit.ly/2HZFOus

Sesión 3

De Tijuana a Cancún

1. Trabajen en pareja las actividades de esta sesión. Amalia y su madre se mudan de Tijuana a Cancún. Para ello, consultan la página de la Secretaría de Comunicaciones y Transportes y encuentran una ruta que implica recorrer 4350 km. Trazan la gráfica que ves aquí y que representa el kilometraje que recorrerán por cada hora de viaje si mantienen una velocidad constante. Con base en ella, respondan las preguntas que aparecen enseguida.

Gráfica | Viaje de Tijuana a Cancún (Estimación inicial)



La sesión 3 se debe trabajar retomando lo que los alumnos ya conocen (la representación gráfica de una función lineal) con algo relativamente nuevo. Las preguntas están enfocadas a centrar también el análisis de la variación en aspectos cuantitativos, sobre todo en la noción de razón de cambio. Comparar dos situaciones que modelan el mismo viaje puede ser útil para aproximarse a un modelo de la realidad. En primer lugar, se presenta un viaje en condiciones ideales donde la velocidad constante es de 96.66 km/h, después se presenta otro viaje en condiciones un poco más reales. Centre la atención en los segmentos donde varió la velocidad respecto a un segmento anterior, por ejemplo, pueden analizar y determinar a qué velocidad iban durante las primeras cinco horas de viaje y compararla con la velocidad promedio que alcanzaron entre las horas 25 y 29 de viaje.

Además, comente que el tiempo que estuvo detenido el auto se muestra en las partes paralelas al eje X y son, aproximadamente, 26 horas. Preste especial atención al inciso c), ya que usted debe ayudar a los alumnos a comprender que en los segmentos planos lo que avanza es el tiempo y no la distancia, lo que significa que el coche estuvo detenido.

Asimismo, centre la atención en la parte curva de la gráfica y pregunte: ¿se puede hablar de una velocidad promedio en esta gráfica? Comente que ésta es la sección con mayor velocidad, lo cual se puede saber debido a su forma curva. Pregunte, además: ¿qué significa hablar de velocidad promedio?, y ¿cómo se representa gráficamente la aceleración o la desaceleración del vehículo?

Si los alumnos aún tienen dificultades con esto, refuerce la idea de razón de cambio y crecimiento con las actividades de la sesión 4 y el llenado de albercas. Ahí encontrarán también problemas que les permitirán centrar el análisis de la variación en aspectos cuantitativos para los cuales pondrán en juego las nociones de dependencia y de razón de cambio.

Complemente las preguntas planteadas con otro tipo de situaciones y modificando la forma de la alberca; por ejemplo, si fuera un prisma rectangular recto, ¿cómo se vería su gráfica?, ¿cómo sería si tuviera una forma cilíndrica?, ¿qué parte de la forma de la alberca provoca la mayor variación?

Pautas para la evaluación formativa

Con la finalidad de verificar en qué medida se logra la intención didáctica que aparece en la ficha descriptiva, es necesario hacer un registro para cerciorarse de que los alumnos realizan lo siguiente:

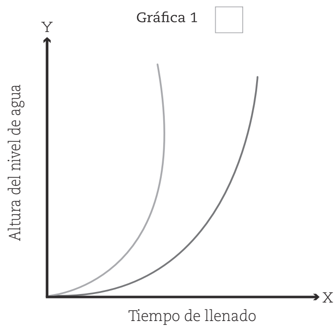
- Distinguen claramente qué es una función y la relación de dependencia que hay entre dos variables.
- Grafican la duración de las noches para cada ciudad usando la información que tenían de las gráficas y respuestas anteriores.
- Vinculan o explican los fenómenos a partir de una representación gráfica.
- Ante las relaciones funcionales que se presentan, ¿determinan qué variable es la dependiente y cuál es la independiente.

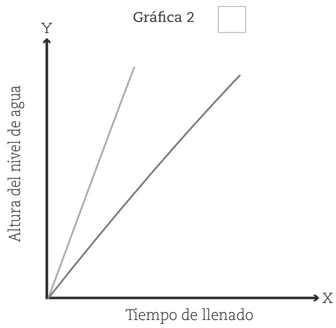
¿Cómo apoyar?

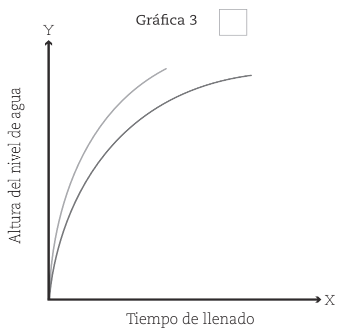
Un aspecto importante por considerar en las funciones es la lectura de las gráficas a que dan lugar. Insista a los alumnos acerca de la estrecha relación entre los valores que se obtienen en las tablas al marcar algunos puntos de la gráfica y la elaboración de las gráficas donde deben apreciarse los puntos correspondientes.

¿Cómo extender?

Si observa que los alumnos han comprendido el concepto de función y no tiene problemas para el llenado de tablas y la construcción de gráficas, pida que extrapolen sus datos para calcular el valor de un punto que no esté en las gráficas mostradas. Por ejemplo, para el caso de las gráficas de la luz solar de alguna ciudad, podría pedir que tracen la gráfica del año siguiente, o bien, del anterior. Sugiera que vean el siguiente video o recomiende otros que considere pertinentes para profundizar respecto al tema de los movimientos de la Tierra y las líneas de referencia que se tienen: https://www.youtube.com/watch?v=Oy1b5RZ44CY,https://www.youtube.com/watch?v=xPF6V7lisas







Alberca 1 ■ Alberca 2 ■

a) Indiquen con una ✓ cuál es la gráfica que representa el comportamiento del llenado de las dos albercas. Justifiquen su elección.

____

____

b) ¿En cuál de las dos albercas se tiene que cortar primero el flujo de agua para evitar que se desborde. ____________________

Secuencia 6 Polígonos semejantes 1

(LT, Vol. I, págs. 56-65)

Tiempo de realización	5 sesiones
Eje temático	Forma, espacio y medida
Tema	Figuras y cuerpos geométricos
Aprendizaje esperado	Construye polígonos semejantes. Determina y usa criterios de semejanza de triángulos.
Material	Juego de geometría, tijeras, cartulina.
Intención didáctica	Que los alumnos identifiquen y construyan polígonos semejantes.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisuales** • *Construcciones de polígonos semejantes* • *Aplicaciones en situaciones reales de la semejanza* **Informático** • *Razón de semejanza*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recursos audiovisuales** • *Aspectos didácticos de la enseñanza de los polígonos semejantes* • *Acerca de los criterios de semejanza*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Identifiquen figuras trazadas a escala como figuras semejantes.
- Sesión 2. Determinen la razón de semejanza de dos polígonos semejantes.
- Sesión 3. Construyan polígonos semejantes.
- Sesión 4. Identifiquen que los polígonos semejantes son aquellos que tienen sus ángulos respectivamente iguales y cuyos lados correspondientes son proporcionales.
- Sesión 5. Exploren las relaciones entre la congruencia y la semejanza de polígonos.

Acerca de...

Los alumnos han estado en contacto con el pensamiento proporcional desde primaria y en los dos años que llevan de estudio en secundaria. Ya se enfrentaron a problemas de figuras a escala al estudiar las magnitudes proporcionales; por esta razón, y considerando la escala como un saber previo, esta secuencia inicia el estudio de los polígonos semejantes a partir de las figuras a escala.

Con el estudio de los polígonos semejantes, los alumnos profundizarán sus conocimientos de proporcionalidad, realizarán construcciones geométricas y revisarán ángulos y su medida, así como la congruencia de los mismos.

Sobre las ideas de los alumnos

En la vida cotidiana, los alumnos usan la palabra semejante como sinónimo de parecido; en matemáticas, decir que un polígono es semejante a otro no se refiere a que es "parecido", tiene un significado específico. Por ejemplo, los alumnos podrían pensar que todos los rectángulos son parecidos entre sí, pero en esta secuencia aprenderán que no todos los rectángulos son semejantes.

Un error común entre los alumnos al resolver problemas de proporcionalidad es concebirlos como problemas de suma o resta, cuando en realidad la proporcionalidad pertenece al campo conceptual de la multiplicación y la división. Por ejemplo, en la sesión 3, actividad 4, se pide que construyan una ampliación de las figuras que conforman un rompecabezas. Considerando que el lado que mide 4 cm, en la ampliación mida 5 cm, es común que piensen que deben sumar 1 a todos los lados de las figuras (razonamiento aditivo) en lugar de multiplicar por $\frac{5}{4}$ (razonamiento multiplicativo) para obtener lados proporcionales.

Los alumnos estudiaron en primer grado la congruencia de polígonos; es importante que al terminar de trabajar esta secuencia, construyan la idea de que la congruencia es un caso particular de la semejanza, donde la razón de semejanza es $\frac{1}{1} = 1$.

¿Qué material se necesita?

En esta secuencia los alumnos ocuparán su juego de geometría, tijeras y, de ser posible, cartulina para la sesión 3. En esta sesión utilizarán el recortable 2 de la página 101.

¿Cómo guío el proceso?

Se sugiere iniciar platicando con los alumnos acerca de los ejemplos que conoce de figuras a escala para después leer y comentar lo enunciado en "Para empezar". Al finalizar, puede comentar que en matemáticas la palabra semejanza tiene un significado más específico que el que tiene en la vida cotidiana.

En el desarrollo de la secuencia, continuamente se solicita a los alumnos que argumenten sus respuestas a los problemas. Es importante que en las puestas en común que realice no sólo se comparen las respuestas, sino que también se comenten y discutan los argumentos.

Al trazar las figuras a escala que se piden en la actividad 3 de la sesión 1, de manera implícita los alumnos harán uso de la proporcionalidad de los lados; verifique que realmente lo hayan hecho en su cuaderno.

Determinar la escala o razón de semejanza entre dos polígonos no es fácil para algunos alumnos. Muchas veces invierten el orden en que deben realizar el cociente que determina la razón; por ejemplo, determinan que es 2 en lugar de $\frac{1}{2}$. Puede apoyarlos haciéndoles reflexionar sobre la idea de que si el polígono trazado es menor que el original, entonces la razón de semejanza debe ser una fracción menor que uno y, por lo tanto, corresponde a una reducción; en cambio, si el polígono trazado es mayor que el original, entonces la razón de semejanza es mayor que uno y, por tanto, es una ampliación. Como ejemplo de lo anterior, observen la escala de algunos mapas de localidades: siempre será una fracción menor que la unidad ($\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$, etcétera).

Respecto a construir el Sistema Solar a escala, se recomienda que reflexione con los alumnos que, por ejemplo, la distancia de Mercurio al Sol es de aproximadamente 58 millones de kilómetros.[5] Si se usara una escala para representar cada millón de kilómetros con un centímetro, Mercurio quedaría a 58 centímetros del Sol, mientras que Plutón (cuya distancia es aproximadamente 6 000 millones de kilómetros, quedaría a 6 000 centímetros, es decir a 60 metros. Otro reto será representar el diámetro del Sol, 1 392 000 km, por lo que su Sol tendrá que medir aproximadamente 1.4 cm de diámetro. Júpiter, por su parte, que es el planeta mayor (diámetro 142 984 km) tendría que quedar de 1.4 mm de diámetro, lo que hace casi imposible dibujar los demás planetas, dado el tamaño que deberían de tener.

Se espera que los alumnos se den cuenta de que la razón de semejanza de un polígono respecto a otro se obtiene dividiendo la medida de algún lado de un polígono entre la medida del lado correspondiente en el otro polígono. Así, la razón de semejanza del polígono A respecto al polígono B es:

$$\text{Razón de semejanza} = \frac{\begin{array}{c}\text{lado}\\ \text{del polígono A}\end{array}}{\begin{array}{c}\text{lado correspondiente}\\ \text{del polígono B}\end{array}}$$

Una de las actividades que hará que los alumnos abandonen concepciones erróneas —como el pensamiento aditivo— acerca de la construcción de figuras semejantes es el armado de los rompecabezas geométricos propuestos en la sesión 3; es muy importante utilizarlos tal como se indica en las instrucciones. Cada rompecabezas debe tener las piezas indicadas; es necesario que se repartan las piezas por equipo; si no hay suficientes alumnos de tercer grado, se recomienda formar equipos con los alumnos de segundo e incluso con los de primero.

Se espera que no tengan problema en construir las piezas del primer rompecabezas porque los lados son perpendiculares. De ser necesario, recuerde a los alumnos cómo trazar rectas perpendiculares usando

[5] Fuente: https://www.nocreasnada.com/la-distancia-de-los-planetas-al-sol/

las escuadras. El primer rompecabezas tiene el propósito de que centren su atención en la proporcionalidad de los lados. Es probable que, como se pide que el lado que mide 4 cm deba medir 3 cm, piensen que deben restar 1 cm a cada lado de las piezas que están construyendo. Al tratar de armar la reducción del rompecabezas, los alumnos se darán cuenta de que esta idea es errónea. La razón de proporcionalidad de la figura que van a construir respecto al original es $\frac{3}{4}$, por lo que deberán obtener $\frac{3}{4}$ de la medida de cada lado de la pieza que están construyendo, esto equivale a multiplicar por $\frac{3}{4}$. Será una oportunidad para repasar cómo obtener $\frac{3}{4}$ de una cantidad o, bien, cómo multiplicar por $\frac{3}{4}$.

Como aparece en la sesión, se sugiere una puesta en común después de trabajar el primer rompecabezas. El propósito es reflexionar sobre la proporcionalidad de los lados y cómo obtener lados proporcionales antes de continuar.

El segundo rompecabezas presenta una dificultad adicional: en dos piezas hay ángulos que no son rectos. La dinámica será la misma y el propósito ahora es que se den cuenta de que no es suficiente la proporcionalidad de los lados correspondientes, sino que, además, hay que fijarse en la igualdad de los ángulos.

En la sesión 4 se pretende reafirmar las dos condiciones que se requieren para que dos figuras sean semejantes (igualdad de ángulos y proporcionalidad de lados correspondientes). Se espera que en los argumentos que se piden en la tabla de la actividad 1, los alumnos enuncien estas características.

En la actividad 2, directamente, se plantea al alumno la cuestión de que no es suficiente la igualdad de ángulos, debido a que todos los rectángulos tienen sus ángulos iguales, pero no todos son semejantes entre sí. Y en la actividad 3 se trabaja el caso de que pueden tener los lados correspondientes proporcionales; sin embargo, si los ángulos correspondientes no son iguales, entonces los polígonos no son semejantes.

Para terminar la secuencia, en la sesión 5 los alumnos retomarán sus conocimientos de congruencia para considerarla un caso especial de semejanza, donde la razón de semejanza es 1. Es muy probable que los alumnos no registren que las figuras 3 y 5 son figuras semejantes a la figura A y sólo las consideren congruentes. Es importante que en la puesta en común se discuta si una figura congruente con otra también es semejante a aquélla, y que se llegue a la conclusión de que sí lo es.

Pautas para la evaluación formativa

Con la finalidad de verificar en qué medida se logra la intención didáctica que aparece en la ficha descriptiva, es necesario hacer un registro para cerciorarse de que los alumnos realizan lo siguiente:

- Identifican dos figuras que están construidas a escala.
- Trazan correctamente figuras a escala con ayuda de una cuadrícula.
- Establecen correctamente la razón de semejanza entre dos polígonos.
- Determinan que en una reducción la razón de semejanza es menor que 1 y que en una ampliación es mayor a 1.
- Calculan correctamente la medida de los lados de polígonos semejantes.
- Construyen correctamente polígonos semejantes a otros.
- Identifican la congruencia como un caso particular de semejanza donde la razón de semejanza es 1.

¿Cómo apoyar?

Si observa que se les dificulta la construcción de figuras, repase con ellos el uso de instrumentos geométricos para trazar polígonos (triángulos, cuadrados, rectángulos).

En caso de que tengan dificultades para calcular la medida de los lados cuando la razón es una fracción, repase con ellos la multiplicación de fracciones o la manera de usar la fracción como operador (por ejemplo, calcular $\frac{3}{4}$ de 10).

¿Cómo extender?

Puede plantear preguntas de reflexión como las siguientes, siempre pidiendo que argumenten su respuesta:

- ¿Todos los cuadrados son semejantes entre sí?
- ¿Todos los rombos son semejantes entre sí?
- ¿Todos los pentágonos regulares son semejantes entre sí?
- ¿Todos los pentágonos son semejantes entre sí?
- ¿Todos los círculos son semejantes entre sí?
- El circulo A tiene un radio de 5 cm, el círculo B tiene un radio de 2 cm, ¿cuál es la razón de semejanza del círculo B respecto al círculo A?

Secuencia 7 Razones trigonométricas 1

(LT, Vol. I, págs. 66-75)

Tiempo de realización	5 sesiones
Eje temático	Forma, espacio y medida
Tema	Figuras y cuerpos geométricos
Aprendizaje esperado	Resuelven problemas utilizando las razones trigonométricas: seno, coseno y tangente.
Intención didáctica	Que los alumnos resuelvan problemas que impliquen razones entre dos lados de un triángulo rectángulo, usando procedimientos informales.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisuales** • *Construcción de rampas de acceso y carreteras* • *Aplicaciones de la trigonometría* **Informático** • *¿Cuál tiene mayor pendiente?*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recurso audiovisual** • *Aspectos didácticos de la enseñanza de la trigonometría*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Resuelvan problemas que impliquen determinar la razón entre el cateto opuesto y el cateto adyacente a un ángulo de un triángulo rectángulo, mediante procedimientos informales.
- Sesión 2. Establezcan la razón entre el cateto opuesto a un ángulo y la hipotenusa de un triángulo rectángulo, utilizando estrategias personales.
- Sesión 3. Calculen la razón entre el cateto adyacente a un ángulo y la hipotenusa de un triángulo rectángulo para resolver problemas.
- Sesión 4. Resuelvan problemas que impliquen determinar las razones entre los lados de triángulos rectángulos.
- Sesión 5. Establezcan y comparen la razón, expresada en decimales, entre dos lados de un triángulo rectángulo.

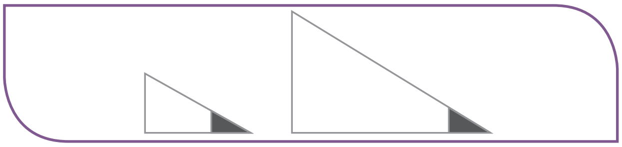
Acerca de...

El estudio de la trigonometría involucra varios conceptos matemáticos: ángulos, ángulo recto, triángulos rectángulos, proporcionalidad, entre otros.

Esta secuencia es la primera referida al estudio de la trigonometría y representa el primer acercamiento a la noción de razón trigonométrica como la comparación entre la longitud de dos lados del triángulo rectángulo. En esta secuencia no se definen ni se nombran las razones, se trata de que los alumnos conciban la idea de que en algunas situaciones interviene la comparación por cociente de dos cantidades, idea que se retoma y profundiza más adelante en el bloque 2, donde los alumnos conocerán tanto los nombres como la definición de seno, coseno y tangente.

Sobre las ideas de los alumnos

Algunos alumnos suelen pensar, erróneamente, que si los lados que forman un ángulo se prolongan, su medida aumenta. Por ejemplo, que el ángulo marcado en el triángulo de la izquierda es menor que el de la derecha.



Con el estudio de la secuencia 6, "Polígonos semejantes 1", los alumnos aprendieron que cuando los polígonos son semejantes, se mantiene la proporcionalidad entre las medidas de los lados y la igualdad en las medidas de los ángulos, esto lo reafirmarán con el estudio de las razones trigonométricas.

Al resolver esta secuencia, los alumnos tendrán que hacer cálculos continuamente. Es importante mencionar que se debe poner énfasis en los conceptos y procesos más que en los cálculos, incluso, de ser posible, permita el uso de la calculadora.

¿Cómo guío el proceso?

Como se mencionó anteriormente, al resolver los problemas de esta secuencia, los alumnos tratarán con las razones seno, coseno y tangente de un ángulo; sin embargo, no es el propósito en estos momentos que se les nombre ni que se definan, esto se hará en la siguiente secuencia, llamada "Razones trigonométricas 2". Permita que los alumnos usen sus saberes previos y que utilicen procedimientos informales para resolver las actividades sin necesidad de mencionarles que las razones que están considerando son trigonométricas y que tienen nombres especiales. No obstante, si algún alumno las nombra porque las conoce, acepte el comentario y mencione que estos nombres los retomarán en el bloque 2.

En las sesiones 1 y 2, emplearán de manera implícita la tangente de un ángulo. Puede iniciar la sesión 1 platicando con los alumnos acerca de las rampas para que las personas que usan sillas de ruedas puedan acceder a distintos lugares. Es probable que algunos piensen que la pendiente de la rampa sólo está determinada por su altura; no obstante, se espera que al analizar la rampa, se percaten de que depende tanto de la altura como de la distancia horizontal y que también puedan determinar que el porcentaje de la pendiente de una rampa se calcula dividiendo la medida de su altura entre la distancia horizontal y luego se multiplica por 100. Si los dos ejemplos que vienen en el libro son insuficientes, puede plantear otros (como los que se presentan en la siguiente tabla) para que los analicen y determinen cómo se calculan estos porcentajes.

Altura de la rampa	Distancia horizontal	Pendiente
15 cm	100 cm	15%
30 cm	60 cm	50%
10 cm	40 cm	25%
12 cm	80 cm	15%
9 cm	75 cm	12%

Entre las estrategias que surjan, posiblemente esté la de sumar, restar, multiplicar o dividir las medidas de los lados que forman la rampa. Si esto sucede, recuérdeles que cuando se habla de razón entre números, equivale a realizar una división entre ellos que se representa como $\frac{a}{b}$. Para obtener el porcentaje al que equivale esta razón, el decimal obtenido se multiplica por 100, como se estudió en grados anteriores. El uso de fracciones y su expresión como decimal o porcentaje, así como la equivalencia de estas expresiones, estará presente en la secuencia. Si lo considera necesario, haga un repaso de este contenido.

Es importante que en el cierre de la sesión se enfatice que la pendiente de una rampa no sólo depende de su altura o de su distancia horizontal, sino también de la razón entre ambas (tal como se menciona en la actividad 5); ésta es la idea principal que los alumnos deben construir.

En la sesión 2, los alumnos explorarán dos ideas importantes. La primera es la igualdad de razones para conservar la misma pendiente o inclinación (actividades 1 y 2). Se espera que los alumnos determinen que diferentes medidas pueden dar la misma pendiente si la razón entre ellas se conserva. Para la actividad 1, calcularán diversas medidas que den una pendiente de 10%. Verifique los argumentos que los alumnos dan en la actividad 2. Podrían anotar: "Si asciende 90 metros en kilómetro y medio, es lo mismo que si asciende 60 metros en un kilómetro", aunque se esperan argumentos que den cuenta de que manejan las razones entre las medidas. Por ejemplo: "en ambas carreteras se asciende 30 metros por cada medio kilómetro", o bien: "ambas tienen una pendiente de 6%, y también: da el mismo resultado si se divide 90/1500 que si se divide 60/1000". Si estos argumentos no surgen en el grupo, puede mencionarlos después de escuchar los que los alumnos propongan.

La otra idea importante de esta sesión es que los alumnos estudiarán que la pendiente se relaciona con el ángulo de inclinación (actividad 3). Con apoyo de un diagrama, esta idea se profundizará en el bloque 2, donde los alumnos calcularán la pendiente (tangente) de ángulos.

En la sesión 3 se trabaja de manera implícita con la idea del seno de un ángulo. Los alumnos explorarán la razón entre la altura a la que se coloca el colector (cateto opuesto del ángulo de inclinación) y el largo del colector (hipotenusa). Al resolver la actividad 1, los alumnos explorarán que el ángulo de inclinación no varía si la razón entre la altura y el largo del colector es la misma. Ponga especial atención en los argumentos que dan en las actividades 1 y 2. Las tablas de estas actividades son de proporcionalidad; retome esta idea preguntando a los alumnos: "Si dividen la altura entre el largo, ¿da siempre la misma cantidad?". Y, al igual que en las sesiones anteriores, una idea importante que los alumnos deben construir en esta sesión es que el ángulo de inclinación no depende sólo de la altura o sólo del largo del colector, sino que depende de la razón entre ambas.

En la misma línea que las anteriores, en la sesión 4 se trabaja implícitamente con el coseno de un ángulo. El contexto son las escaleras de mano, donde está contenida la razón entre la distancia de la escalera a la pared (cateto adyacente) y la longitud de la escalera (hipotenusa).

Para terminar, en la sesión 5 se retoman los contextos trabajados en las cuatro sesiones anteriores para resolver problemas diversos que implican usar las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.

Pautas para la evaluación formativa

Con la finalidad de verificar en qué medida se logra la intención didáctica que aparece en la ficha descriptiva, es necesario hacer un registro para cerciorarse de que los alumnos realizan lo siguiente:

- Consideran que el valor de las pendientes o de los ángulos de inclinación no sólo depende de la medida de un lado, sino de la razón entre dos de ellos.
- Comparan y ordenan correctamente las razones implicadas en los problemas de la secuencia.
- Determinan y calculan la razón entre dos cantidades, ya sea expresada como fracción, decimal o porcentaje.

¿Cómo apoyar?

Si nota que en las sesiones donde se manejan porcentajes se les dificulta a los alumnos calcularlos, se sugiere que haga un repaso breve del tema. En particular, que recuerden cómo determinar qué tanto por ciento es una cantidad de otra:

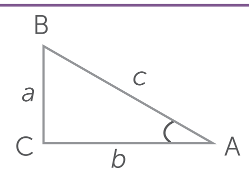
- ¿Qué tanto por ciento es 18 de 36?
- ¿Qué tanto por ciento es 24 de 40?

Apóyese en el cálculo de porcentajes más accesibles, como 10%, 5%, 1%.

¿Cómo extender?

Plantee problemas geométricos como los siguientes:

Considera triángulos rectángulos ABC cuyos lados se han nombrado como *a, b* y *c*.



Considera el ángulo A (marcado en la figura). Anota 1 al triángulo cuya pendiente es mayor, 2 al que le sigue, y así sucesivamente. Si dos triángulos tienen la misma pendiente, anota el mismo número.

Lado b (cm)	Lado a (cm)	Orden según la medida del ángulo A
3	4	
2	10	
3	10	
9	18	
6	8	

Secuencia 8 Teorema de Pitágoras 1

(LT, Vol. I, págs. 76-83)

Tiempo de realización	4 sesiones
Eje temático	Forma, espacio y medida
Tema	Medida
Aprendizaje esperado	Formula, justifica y usa el teorema de Pitágoras.
Intención didáctica	Que los alumnos formulen y justifiquen geométrica y algebraicamente el teorema de Pitágoras.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisuales** • *Pruebas geométricas del teorema de Pitágoras* • *Historia del teorema de Pitágoras* **Informático** • *Otras pruebas algebraicas del teorema de Pitágoras*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recursos audiovisuales** • *Aspectos didácticos del teorema de Pitágoras* • *Usos y aplicaciones del teorema de Pitágoras*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Repasen la manera de trazar un triángulo dadas las medidas de sus tres lados, y exploren otras medidas que generan triángulos rectángulos.
- Sesión 2. Exploren el teorema de Pitágoras a partir de casos particulares y del cálculo de áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo.
- Sesión 3. Prueben geométricamente el teorema de Pitágoras.
- Sesión 4. Prueben algebraicamente el teorema de Pitágoras.

Acerca de...

El estudio del teorema de Pitágoras es de una gran riqueza didáctica porque permite conectar con otros contenidos matemáticos y desarrollar el razonamiento deductivo de los alumnos. Al estudiarlo, repasarán diversos trazos geométricos, propiedades de los triángulos, perpendicularidad y paralelismo, el área de los cuadrados, el cálculo de la raíz cuadrada y el uso y la equivalencia de expresiones algebraicas, entre otros.

Uno de los propósitos generales de la enseñanza de las matemáticas en la escuela es que los alumnos las conciban como una construcción social en la que se formulan y argumentan hechos y procedimientos matemáticos, y uno de los propósitos de la enseñanza de la geometría es razonar deductivamente al identificar y usar las propiedades de triángulos, cuadriláteros, polígonos regulares y del círculo. Sin duda, el estudio del teorema de Pitágoras contribuye a ambos propósitos. El antecedente de este contenido es la secuencia 3, "Figuras geométricas y equivalencia de expresiones de segundo grado 1".

Sobre las ideas de los alumnos

Algunos alumnos pueden no tener los saberes previos de los contenidos mencionados. Por ejemplo, pueden presentar dificultades para trazar un triángulo, y aunque está relacionado con el teorema de Pitágoras, no hay que verlo como un obstáculo para abordarlo. Por el contrario, debe considerarse como una oportunidad para repasar y reafirmar, y también para que se formen una idea más integral de las matemáticas.

Aunque en primer grado estudiaron la propiedad de desigualdad de los triángulos, es común que los alumnos sigan pensando que cualquier terna de medidas de longitud de los segmentos pueden ser los lados de un triángulo; en la sesión 1 se explora esta idea.

Algo que ocuparán en la sesión 4 es el manejo de expresiones algebraicas, en particular el cuadrado de un binomio. Un error común entre los alumnos, al trabajar con expresiones algebraicas, es que consideran que $(a + b)^2 = a^2 + b^2$. Es importante que se trabaje al respecto, por lo que se recomienda que cada vez que sea necesario se consulte la secuencia 3 "Figuras geométricas y equivalencia de expresiones de segundo grado 1", para revisar cómo se multiplica un binomio al cuadrado. Aunque aún no hayan estudiando el caso en que ambos términos son literales, pueden apoyarse en los ejercicios que ahí se proponen.

¿Qué material se necesita?

En esta secuencia, los alumnos ocuparán su juego de geometría, tijeras, pegamento y los recortables 3 y 4 propuestos en la página 103 para realizar las actividades de la sesión 3 “Armemos rompecabezas”.

¿Cómo guío el proceso?

Lea y comente con los alumnos la sección “Para empezar”. Ahí se sugiere que consigan un cordel y reproduzcan la cuerda de los 12 nudos y formen con ella el triángulo rectángulo de lados 3, 4 y 5. Pregunte a los alumnos: “¿Cómo podemos verificar que el ángulo formado por los lados de 3 y 4 unidades es recto?”. Es probable que surjan pruebas empíricas. Por ejemplo, usar el ángulo recto de alguna de las escuadras o de una hoja rectangular, o bien medirlo directamente con un transportador. También puede pedir que, usando la cuerda de 12 nudos, verifiquen que las esquinas del salón estén a escuadra. Permita que los alumnos respondan a la pregunta sobre cómo marcan en su comunidad los linderos. Probablemente no lo sepan, así que puede dejar de tarea que lo investiguen con las personas adultas de su comunidad.

Se espera que los alumnos respondan las dos preguntas planteadas al inicio de “Manos a la obra” de la sesión 1 a partir de sus conocimientos previos. Es probable que para la primera pregunta, “¿Con tres medidas cualesquiera es siempre posible construir un triángulo?”, algunos alumnos recuerden lo estudiado en primer grado y respondan inmediatamente, pero que otros lo hayan olvidado. En la segunda pregunta: “¿Qué características deben cumplir las medidas de los lados de un triángulo para que sea rectángulo?”, aun cuando es el contenido esencial de esta secuencia, lo más probable es que los alumnos no sepan con certeza la respuesta. No es necesario que usted explique o aclare nada al respecto. Permita que ellos hagan sus hipótesis y construyan sus respuestas. Durante el trabajo con la secuencia pueden regresar a estas preguntas para ratificarlas o rectificarlas.

Es importante que tracen en su cuaderno los triángulos pedidos en la sesión 1; verifique que lo hagan. Apoye a quienes tengan dificultad en seguir las instrucciones o en el manejo de los instrumentos geométricos. En la puesta en común, puede comentar el caso en que los arcos no se cortan y, por lo tanto, no se forma un triángulo (por ejemplo, con la terna 1, 3, 10). Plantee preguntas como: "¿Cuáles de los triángulos que trazaron son rectángulos?; "¿Cómo saben que lo son?; ¿Cómo verifican que un ángulo del triángulo es recto?".

Si bien algunos alumnos propondrán pruebas empíricas para comprobar que un triángulo es rectángulo, después de estudiar el teorema de Pitágoras podrán dar un argumento diferente; esto último lo estudiarán en el bloque 2, cuando estudien el recíproco de dicho teorema. Al completar la tabla de la actividad 3, los alumnos habrán encontrado tres ternas de valores para las medidas de los lados de triángulos rectángulos, las cuales se retoman en la sesión 2 para trabajar con ellas.

En la sesión 2 se da un primer acercamiento al teorema de Pitágoras, basado en casos particulares y en el cálculo de áreas, dadas las medidas de los lados. Aunque los cuadrados construidos sobre los lados de los triángulos rectángulos están cuadriculados, se espera que los alumnos calculen el área usando la fórmula; el cuadriculado está como apoyo para aquellos que aún no tienen afianzado el concepto de área. Una primera formulación del teorema la encontrarán en la actividad 2. Si nota que algunos subrayan una formulación errónea, no es necesario que los corrija directamente, en la puesta en común de la sesión podrán corregir si es necesario. También es importante enfatizar en la expresión *Si fuera cierto...* (actividad 3), pues los alumnos **no** deben formarse la idea de que por cumplirse en tres casos se cumplirá en otros.

En la sesión 3 se da un paso más hacia la generalización del teorema. En este caso, mediante pruebas geométricas se espera que los alumnos observen que, en efecto, las piezas de los cuadrados de los catetos cubren el cuadrado de la hipotenusa.

No obstante, puede cuestionar a los alumnos acerca de que, al menos para esos otros dos triángulos (cuyas medidas de lados no se conocen), también se cumple el teorema. Pregunte: "¿Qué pasará con otros triángulos rectángulos?, ¿también se cumplirá?". Se sugiere que en la actividad 2 enfatice que ellos van a construir un triángulo rectángulo cualquiera, pida que sea diferente a todos los que han trabajado en la secuencia. De ser necesario, en esta actividad repase con ellos cómo trazar los cuadrados, las paralelas y perpendiculares que se requieren. Se espera que al término de esta actividad, los alumnos observen y comprendan que el teorema de Pitágoras se cumple para todos los tríangulos rectángulos. Pida que continúen con la sesión 4, donde todos trabajarán otras comprobaciones, ahora usando el álgebra.

Si es necesario, para la sesión 4 repase con los alumnos cómo calcular el área de un triángulo, un cuadrado y un trapecio con expresiones algebraicas, así como la manipulación de las expresiones algebraicas que se requieren, en particular el cuadrado de un binomio.

Pautas para la evaluación formativa

Con la finalidad de verificar en qué medida se logra la intención didáctica que aparece en la ficha descriptiva, es necesario hacer un registro para cerciorarse de que los alumnos realizan lo siguiente:

- Saben usar los instrumentos de geometría y seguir instrucciones al realizar una construcción geométrica.
- Saben trazar triángulos, cuadrados, paralelas, perpendiculares.
- Saben calcular el área de triángulos y cuadrados.
- Saben manipular expresiones algebraicas
- Aceptan que no se puede generalizar un hecho geométrico a partir de casos particulares.
- Aceptan las pruebas algebraicas como generalizaciones del teorema.

¿Cómo apoyar?

Recuerde a los alumnos cómo se usan la regla, las escuadras y el compás.

Repase las construcciones geométricas que se requieren, indique cómo se trazan paralelas, perpendiculares, triángulos y cuadrados.

Si tienen problemas con las manipulaciones algebraicas, invítelos a que repasen la secuencia 3 "Figuras geométricas y equivalencia de expresiones de segundo grado 1" de su libro de texto.

¿Cómo extender?

Puede proponer que:

- Analicen y reproduzcan con otros triángulos diferentes las construcciones de los dos rompecabezas de la sesión 3.
- Analicen, reproduzcan y etiqueten con otras literales las figuras de la sesión 4 y, a partir de ellas, comprueben el teorema de Pitágoras.
- Pida que tracen un triángulo obtusángulo (son los que tienen un ángulo mayor a 90°), que construyan los cuadrados construidos sobre los lados y exploren: ¿se cumple el teorema de Pitágoras?, ¿qué observan?

Secuencia 9 Eventos mutuamente excluyentes 1

(LT, Vol. I, págs. 84-91)

Tiempo de realización	3 sesiones
Eje temático	Análisis de datos
Tema	Probabilidad
Aprendizaje esperado	Calcula la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes.
Intención didáctica	Distinguir cuándo un evento es sencillo, compuesto, o dos eventos son mutuamente excluyentes.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisual** • *Eventos simples, compuestos y mutuamente excluyentes* **Informático** • *Eventos simples, compuestos y mutuamente excluyentes*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recurso audiovisual** • *Aspectos didácticos de la enseñanza de la probabilidad*

¿Qué busco?

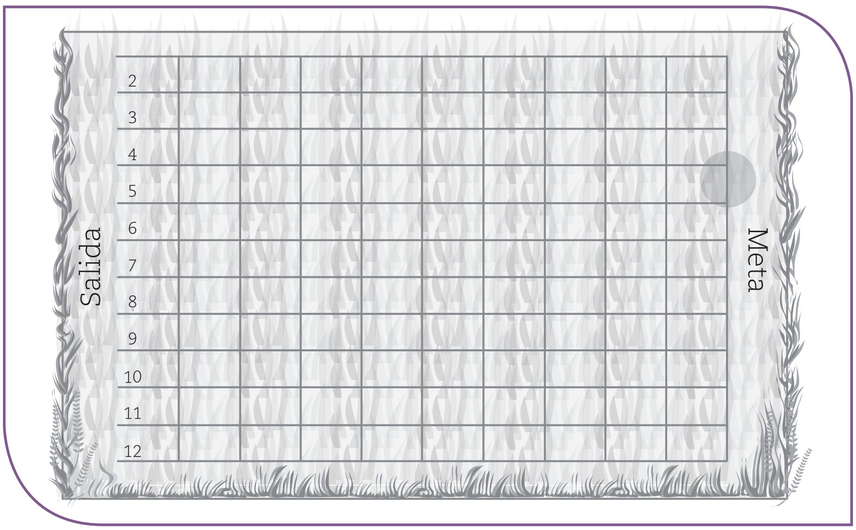
Que los alumnos:

- Sesión 1. Distingan los eventos simples de los compuestos al realizar un experimento aleatorio.
- Sesión 2. Reflexionen sobre las características que hacen que dos eventos sean mutuamente excluyentes al realizar un experimento aleatorio.
- Sesión 3. Determinen con el cálculo de la probabilidad clásica si los eventos son simples, compuestos o mutuamente excluyentes.

Acerca de...

La enseñanza de la probabilidad en la educación secundaria consiste en propiciar la intuición de los alumnos respecto a los conceptos de probabilidad a partir de experiencias variadas, de tal manera que comprendan que en las situaciones de azar no hay resultados milagrosos ni caprichosos.

Esta secuencia didáctica es la primera de tres que se proponen en este grado, relacionadas con la probabilidad. Con su estudio se pretende que los alumnos distingan cuáles son los eventos simples, compuestos y mutuamente exclu-



yentes, mediante la realización de un juego de azar y el análisis de la frecuencia con que ocurren, así como a partir de su espacio muestral.

La secuencia se basa en el juego de azar que corresponde al lanzamiento de dos dados no trucados y observar los números de las caras superiores para sumarlos en un contexto de carrera de caballos. Algunas de las razones por las cuales se propone iniciar con esta situación son:

- Históricamente, los juegos de azar representan uno de los aspectos básicos que contribuyen al surgimiento y desarrollo de la teoría de la probabilidad. Al realizar este tipo de juegos surgen ideas fundamentales, como variabilidad (por ejemplo, la variación de los resultados en un experimento), aleatoriedad (asociado con impredictibilidad de los resultados y con la regularidad estadística que presentan) e independencia (el resultado de un evento no altera las probabilidades de otros eventos que pueden ser previos, simultáneos o futuros).
- En general, los juegos de estrategia detonan la curiosidad de los alumnos hacia los procedimientos y la búsqueda de estrategias ganadoras, que deben ser aprovechadas para propiciar que lleven a cabo procesos matemáticos y los utilicen casi sin darse cuenta para que los disponga a continuar su trabajo matemático.
- Es posible que la mayoría de los alumnos ya haya realizado juegos que se generan a partir del lanzamiento de dos dados; sin embargo, se ha considerado su versatilidad, pues al usar los mismos dados y el mismo tablero, pero cambiando las reglas o los eventos a observar, se puede generar una gama amplia de juegos.
- La importancia social que tienen los juegos, en particular los de azar.

Sobre las ideas de los alumnos

En el caso del juego de "Carrera de caballos", algunos alumnos podrían pensar, erróneamente, que en 10 ensayos se termina el juego. Es importante que registren el número de veces que tiraron los dados como un aspecto más que permite apreciar la variabilidad que se tiene cada vez que se realiza el juego.

Como se señaló, en la educación secundaria se pretende que la enseñanza de la probabilidad permita el desarrollo de la intuición de las ideas fundamentales para comprender sus conceptos.

Así, por ejemplo, para hacer evolucionar la idea de variabilidad construida hasta este momento por los alumnos, sería conveniente que, de ser posible, realicen varias veces el juego (hagan varios ensayos) y analicen los registros que hacen, de manera semejante a las actividades 2 y 3 propuestas en la sesión 1, y el inciso a), de la actividad 4. El análisis de esos resultados abona a la comprensión de la variabilidad de los resultados cada vez que se juega, preparando a los alumnos para entender que una muestra pequeña de 10 resultados tendrá mayor variabilidad de ocurrencia que una muestra con muchos más resultados. Esto es, que entre más resultados se puedan analizar, se comprende mejor la tendencia de la probabilidad frecuencial a la teórica. Cabe señalar que, por cuestiones didácticas, se

Ensayo	1	2	3	4	5	6
Evento \ Resultado	(5, 2)	(3, 4)	(4, 6)	(2, 5)	(1, 1)	(1, 1)
A: Avanza el caballo 2	No ocurrió	No ocurrió	No ocurrió	No ocurrió	Ocurrió	Ocurrió
B: Avanza el caballo 7	Ocurrió	Ocurrió	No ocurrió	Ocurrió	No ocurrió	No ocurrió
$P'(A)$: Probabilidad frecuencial del evento *A*	$\frac{0}{1}$	$\frac{0}{2}$			$\frac{1}{5}$	
$P'(B)$: Probabilidad frecuencial del evento *B*	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{3}$			

trabaja con una cantidad pequeña de resultados (muestra) que permite distinguir las características de los eventos simples, compuestos y mutuamente excluyentes, pero no es razón para limitar a los alumnos. Pueden seguir experimentando para desarrollar estas ideas; por esto, se recomienda que realicen varias veces el juego. Un evento sencillo (o simple o singular) sólo tiene un resultado favorable posible, mientras que un evento compuesto implica más de un resultado favorable. Para determinar cuándo se tienen eventos mutuamente excluyentes, es necesario comparar los resultados favorables de cada uno de ellos. Si no hay ningún resultado favorable en común, entonces son ajenos o mutuamente excluyentes o incompatibles.

Dado 2	6						
	5		5, 2				
	4						
	3						
	2						
	1						
		1	2	3	4	5	6
		Dado 1					

¿Qué material se necesita?

Dos dados por equipo.

¿Cómo guío el proceso?

Inicie con la reflexión de las respuestas a las preguntas de la sección "Para empezar". Es importante conocer cuáles son las experiencias de los alumnos al respecto y, específicamente, los juegos de azar que les son familiares. Esto permite, por una parte, introducir a los alumnos en el contenido de la secuencia y, por otra, obtener información acerca de las ideas y los conocimientos que tienen sobre azar y probabilidad. Si alguno de los alumnos dice que ha jugado con dados, pida que explique de qué manera y plantee una pregunta equivalente a la del inciso a) de la actividad 1, en el sentido de saber si cuando inicia el juego pueden anticipar un ganador y si, al finalizar el juego, su predicción es correcta. También puede plantear la pregunta del inciso b) de la actividad 4, una vez que expliquen cuál ha sido su experiencia de juego.

En las dos primeras sesiones, los alumnos trabajarán con la frecuencia de ocurrencia de los eventos, lo cual corresponde a la probabilidad frecuencial que vienen estudiando desde primer grado. Si algunos no lo recuerdan, señale que la frecuencia de ocurrencia es la frecuencia relativa, que también es la probabilidad frecuencial, y que la han aprendido a expresar como P´(E).

En la actividad 4 inciso b), pídales que utilicen una tabla semejante a las presentadas en las actividades 2 y 3 para analizar en detalle los resultados obtenidos por equipo y los del grupo.

En la sesión 2, los alumnos deben darse cuenta de que, al comparar los resultados favorables de dos eventos, puede suceder que:

- Todos los resultados sean comunes, con lo cual los eventos son equivalentes. Por ejemplo, el evento D: la suma de los números en los dos dados es menor que 6, podría ser equivalente a un nuevo evento H: la suma de los números en los dos dados es igual o menor que 5.
- Algunos de los resultados que obtendrán serán comunes. Por ejemplo, de acuerdo con los resultados registrados en la tabla 1, el evento D: la suma de los números en los dos dados es menor que 6, y G: la suma de los números en los dos dados es un número par, tienen en común el resultado (1, 1), que genera la suma: 1 + 1 = 2. También este par de eventos tiene en común el resultado (2, 2), aunque en los 10 ensayos no se presentó. Así, los dos eventos anteriores son equivalentes al evento (G y D) en el cual las condiciones de aquellos eventos deben ocurrir al mismo tiempo (o simultáneamente) en éste.
- No hay resultados en común que sean mutuamente excluyentes. Una de sus principales características es que, al definir el evento en el cual ambos eventos deben ocurrir simultáneamente, éste es imposible debido a que su frecuencia de ocurrencia es 0 y se expresa, por ejemplo, en el caso del evento (D y F) de la tabla 4, como P´(D y F) = 0.

En la sesión 3 se emplea la probabilidad clásica o teórica que se expresa como P(E) para distinguirla de la frecuencial, como ya lo estudiaron en segundo grado. Si los alumnos no lo recuerdan o le preguntan por qué se expresa sin apóstrofo, puede solicitar que revisen el libro de segundo grado.

Es importante que los alumnos comprendan que el espacio muestral para el experimento de lanzar dos dados y observar los números de las caras superiores es de 36 resultados posibles, y cuando el experimento implica lanzar dos dados y observar la suma de los números de la caras superiores, es de 11: {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}.

En el primero, todos los resultados son equiprobables; en el segundo, son no equiprobables; en el juego de las carreras de caballo se utiliza el segundo. Así, los eventos: "La suma de los dos números es 12" y "La suma de los dos números es 2", son eventos simples.

Finalice revisando cuáles son los juegos de azar que se juegan más o son más conocidos en la comunidad.

Pautas para la evaluación formativa

Con la finalidad de verificar en qué medida se logra la intención didáctica que aparece en la ficha descriptiva, es necesario hacer un registro para cerciorarse de que los alumnos realizan lo siguiente:

- Completan las tablas de las actividades de las sesiones, no tienen problema en determinar si ocurre o no un evento dado.
- Completan las tablas de las actividades, no tienen problema en señalar la frecuencia de ocurrencia que equivale a la probabilidad frecuencial del evento indicado.
- Reconocen cuáles son los valores mínimos y máximos de la frecuencia de ocurrencia de un evento.

¿Cómo apoyar?

Si observa que los alumnos aún tienen dificultades para comprender cuáles son los eventos simples, puede proponer observar los siguientes eventos:

Evento T: La suma de los dos números es menor que 3;

Evento R: El producto de los dos números es 1;

Evento V: La suma de los dos números es mayor que 11;

Evento U: El producto de los dos números es mayor que 30;

Evento L: La suma de los dos números es múltiplo de 2, 3 y 4.

También puede incluir algunos de los eventos anteriores y compararlos con los que se proponen en la sesión 2 para determinar si son mutuamente excluyentes.

Otra opción que tiene para trabajar con los eventos anteriores es utlizarlos en la sesión 3 e identificar los resultados favorables que les corresponden en el espacio muestral de resultados. De este modo, los alumnos pueden determinar que hay eventos equivalentes, como el T y el R.

¿Cómo extender?

Use la misma mecánica del juego "Carrera de caballos", pero en lugar de sumar los números de las caras superiores que caen al lanzar ambos dados, ahora se restan y los números del tablero cambian de 0 a 5.

Al realizar un experimento aleatorio y observar dos eventos simultáneos elegidos puede suceder cualquiera de las situaciones siguientes:

a) Todos los resultados favorables de uno de los dos eventos son los mismos que todos los resultados favorables del otro evento.

b) Algunos resultados favorables de uno de los dos eventos son los mismos que algunos resultados favorables del otro evento.

c) No existen resultados favorables en común para los dos eventos. Esto significa que ambos eventos no pueden ocurrir al mismo tiempo, es decir, la frecuencia relativa de ambos es cero. A estos eventos se les llama mutuamente excluyentes o ajenos. Cuando se dan los casos señalados en a) y b) el valor de la probabilidad frecuencial es mayor que 0 y menor que 1.

Evaluación. Bloque 1
(LT, Vol. I. págs. 106–107)

Reactivos 1 y 2. *Múltiplos, divisores y números primos*. El número 48 tiene 10 divisores: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24 y 48. Los números 41 y 61 son primos, ya que sólo son divisibles entre ellos mismos y 1.

Reactivo 3. *Criterios de divisibilidad.* 213, pues al dividirlo entre 5, el residuo es 3.

Reactivos 4 y 5. *Figuras geométricas y equivalencia de expresiones de segundo grado.* La expresión algebraica $\frac{n(3n-1)}{2}$ es equivalente a las expresiones:

$$\frac{3n^2 - n}{2} = \frac{3}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$$

El número de jugadores del torneo de ajedrez se obtiene mediante la expresión:

$$\frac{n(n-1)}{2} = 45$$

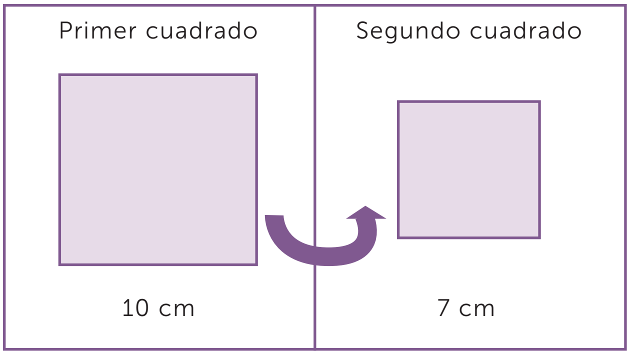
Reactivo 6. *Ecuaciones cuadráticas.* Los valores de la solución de la ecuación $2x^2 - 72 = 0$ son $x_1 = 6$; $x_2 = -6$, porque $2(-6)^2 - 72 = (2 \times 36) - 72 = 72 - 72 = 0$ y $2(6)^2 - 72 = (2 \times 36) - 72 = 72 - 72 = 0$.

Reactivo 7. *Funciones.* El máximo nivel de glucosa en la sangre de Ramón lo obtiene 105 minutos después de ingerir alimentos.

Entre 90 y 125 minutos es el intervalo de tiempo en que Ramón se encuentra fuera del rango óptimo de insulina. La siguiente tabla muestra la relación entre los niveles de azúcar de acuerdo con el tiempo.

Tiempo (min)	5	120	300
Nivel de azúcar (mg/dL)	80	145	80

Reactivos 8 y 9. *Polígonos semejantes.* En el reactivo 8, el alumno debe identificar el cociente que corresponde a la razón de semejanza del segundo cuadrado con respecto al primero, que es: $\frac{7}{10}$. Lo cual no es fácil para muchos alumnos, debido a que algunos de ellos invierten el orden en que deben realizar el cociente que determina la razón, poniendo que es $\frac{10}{7}$ en lugar de $\frac{7}{10}$. Para comprenderlo, puede pedir que dibujen el primer cuadrado que mide 10 cm de lado y, luego, se transforma en el segundo que mide 7 cm por lado.

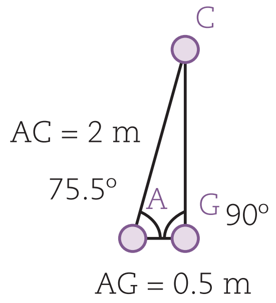


La razón de semejanza se plantea como:

$$\frac{\textit{Segundo cuadrado (transformación)}}{\textit{Primer cuadrado (original)}}$$

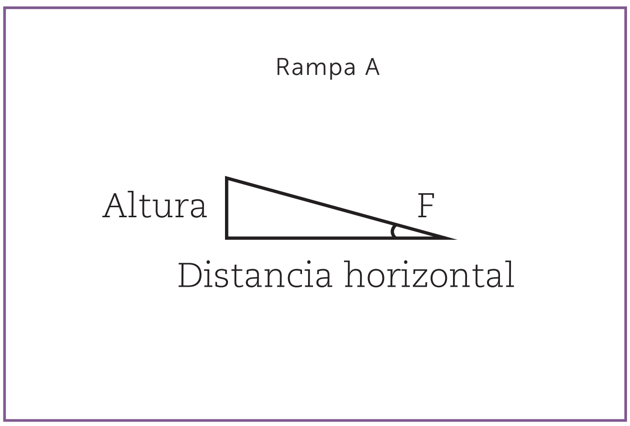
En el reactivo 9, con respecto a la semejanza de figuras geométricas, los alumnos deben reconocer que todos los triángulos equiláteros son semejantes entre sí porque la medida de sus tres ángulos es igual, 60° cada uno, eso no cambia entre un triángulo equilátero y otro, sin importar la medida de sus tres lados. En este caso, puede utilizar el juego de geometría para trazar triángulos equiláteros de diferente tamaño y observar que la medida de los ángulos es la misma por construcción. También pueden proponer utilizar *software* como GeoGebra o Cabri para construir una familia de triángulos equiláteros y determinar la razón de semejanza entre ellos.

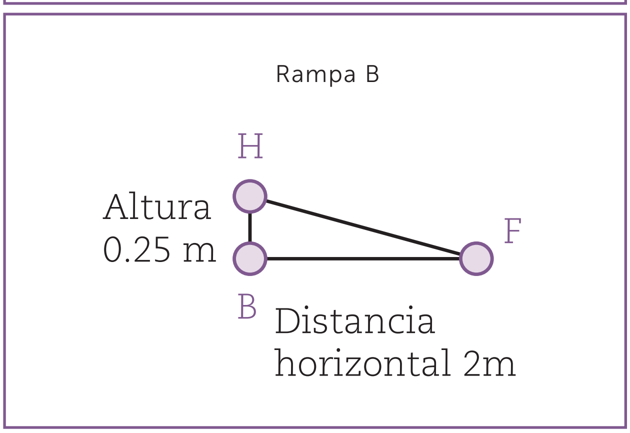
Reactivos 10 y 11. *Razones trigonométricas.* En el reactivo 10, el alumno debe identificar la pareja de valores que, dada la longitud de la escalera y de la distancia de la pared a la que se coloca, forme el ángulo con mayor medida entre las parejas de valores propuestas en las cuatro opciones de respuesta.



La pareja de valores correcta es 2 m y 0.5 m, lo que significa que la escalera tiene 2 m de longitud a una distancia de 0.5 m de la pared, formando un ángulo de 75.5°.

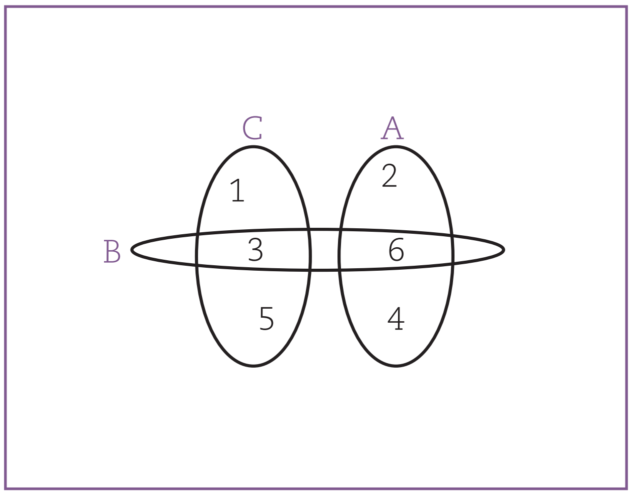
En el reactivo 11 se pregunta por la distancia horizontal y la altura de una rampa que debe tener la misma pendiente que la presentada en la imagen, los alumnos deben identificar cuáles son los valores y, para ello, deben recordar que una característica de esos valores es que deben ser proporcionales a los que se indican implícitamente en la imagen. La razón entre la altura y la distancia horizontal es $\frac{1}{8}$ y la respuesta correcta es B.





Reactivos 12 y 13. *Teorema de Pitágoras.* En el caso del reactivo 12, los alumnos deben reconocer que es en los triángulos rectángulos donde se cumple el teorema de Pitágoras. En el reactivo 13 se cuestiona sobre la manera en que se determina el área del cuadrado construido en el cateto desconocido, una vez que se conoce el área del cuadrado de la hipotenusa y el área del cuadrado del otro cateto que forman el triángulo rectángulo. Solamente se requiere calcular la diferencia de áreas conocidas, 10 cm^2 – 3 cm^2.

Reactivo 14. *Eventos mutuamente excluyentes.* Se pide al alumno distinguir cuáles son los eventos mutuamente excluyentes o ajenos. Una manera de identificar de entre los tres eventos definidos para la situación aleatoria de lanzar un dado y observar el número de puntos de la cara superior al caer, es representarlos en diagramas de Venn, de esa forma se observa con claridad que los eventos A y C son ajenos, es decir, no tienen resultados en común.



La segunda parte de la evaluación contiene cinco actividades. La primera actividad está vinculada con *criterios de divisibilidad* y para cada condición que indica se tiene más de una respuesta correcta. Una estrategia para determinar las respuestas correctas es hacer una lista de números del 4380 al 4389 y señalar con cuáles criterios de divisibilidad cumple cada uno de éstos.

Divisible entre:	4380	4381	4382	4383	4384	4385	4386	4387	4388	4389
2	✓		✓		✓		✓		✓	
3	✓			✓			✓			✓
5	✓					✓				
6	✓						✓			

Entonces, un alumno podría anotar las cifras 2, 3, 5 y 6 para formar 4382, 4383, 4385 y 4386, respectivamente. Un alumno que anota cero en los cuatro números demuestra que reconoce que 4380 cumple con los cuatro criterios de divisibilidad.

En la segunda actividad, el alumno debe escribir expresiones algebraicas equivalentes que representen el área del rectángulo dibujado con líneas negras.

Expresión algebraica 1
$(a)(a + a + 5)$

Expresión algebraica 2
$(a)(2a + 5)$

Expresión algebraica 3
$2a^2 + 5a$

Un error que puede cometer un alumno es sumar las dos dimensiones del rectángulo, $(a) + (a + a + 5)$ o sumar todos los valores que aparecen en el rectángulo, $a + (a + a + 5) + a + 2a + 5$.

En la actividad 3, el alumno debe construir un rectángulo que mida 3 cm de lado considerando que el lado correspondiente en el primer rectángulo es 2 cm, por lo tanto, implica aplicar la razón de $\frac{3}{2}$ para determinar la medida del otro lado del rectángulo. En este caso, la actividad se refiere al contenido de *polígonos semejantes*. La actividad 4 se relaciona con *razones trigonométricas 1.* Se solicita determinar la altura en que se debe colocar un calentador de 2 m de longitud considerando la razón de $\frac{2}{5}$, se determina la altura: $h = 2 \times \left(\frac{2}{5}\right) = \frac{4}{5} = 0.8$ m.

La quinta y última actividad de evaluación corresponde al tema *probabilidad*. El alumno debe determinar la probabilidad clásica del evento "ganar la rifa", dado que se compraron 25 boletos. La probabilidad es $\frac{25}{400} = \frac{1}{16}$