# LIBRO PARA EL MAESTRO

# Matemáticas

Segundo grado

TELEsecundaria

## Bloque 2 La potencia de las matemáticas y el ajedrez



## Bloque 3 El arte de las matemáticas y las matemáticas en el arte

# Bloque 3

## Secuencia 27 Potencias con exponente entero 2

(LT, págs. 214-221)

| | |
|---|---|
| Tiempo de realización | 4 sesiones |
| Eje temático | Número, álgebra y variación |
| Tema | Multiplicación y división |
| Aprendizaje esperado | Resuelve problemas de potencias con exponente entero y aproxima raíces cuadradas. |
| Intención didáctica | Que los alumnos reconozcan la potenciación como una operación, que expliquen sus propiedades básicas y la sepan usar al resolver problemas. |
| Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno | Recurso audiovisual<br>• *Crecimiento exponencial*<br>Informático<br>• *Crecimiento exponencial* |
| Materiales de apoyo para el maestro | Recurso audiovisual<br>• *Potencias con exponente entero y la raíz cuadrada* |

### ¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Se familiaricen con los términos de la potenciación y usen el cálculo mental al efectuar operaciones con potencias y raíces cuadradas.
- Sesión 2. Distingan el crecimiento exponencial y usen las leyes de los exponentes al resolver cálculos más complejos.
- Sesión 3. Amplíen sus conocimientos sobre las leyes de los exponentes y los usen al resolver problemas.
- Sesión 4. Apliquen sus conocimientos sobre la notación científica.

### Acerca de...

Esta secuencia contiene actividades que permitirán a los alumnos profundizar y ampliar lo que estudiaron en la secuencia 15. En cada sesión se privilegia un aspecto central, pero las actividades son diversas y no necesariamente están vinculadas una con otra. Por ejemplo, "Manos a la obra" inicia con una actividad en la que los alumnos analizarán dos sucesiones de potencias para determinar en qué cifra termina una potencia dada.

En la actividad 3 se pide que usen el cálculo mental. Se trata de operaciones aparentemente complicadas, pero al verlas con detenimiento, se da uno cuenta de que se pueden resolver mentalmente.

La actividad 6 implica armar expresiones exponenciales, seleccionando adecuadamente los tres términos de cada expresión. En la sesión 2 se retoma el estudio del producto de potencias con la misma base, con casos en los que hace falta uno de los términos del producto. Se distingue el crecimiento exponencial de otro tipo de crecimiento y se relaciona la potenciación con un problema en el que se analiza cómo varía la capacidad de una caja sin tapa, en función de su altura, manteniendo fija el área lateral. Se recomienda revisar el recurso audiovisual *Crecimiento exponencial* para conocer y analizar otras situaciones con este tipo de crecimiento.

En la sesión 3, a manera de juegos con números, se plantean varios casos en los que se trata de expresar el mayor valor posible, por ejemplo, utilizando únicamente tres doses. También se retoma el estudio del cociente de potencias de la misma base en operaciones a las que les falta uno de los tres términos. Se analizan casos más complejos con exponentes negativos y se generalizan los casos de base 1, exponente 1 y exponente cero.

En la sesión 4 se retoma el estudio de la notación científica y se establece la diferencia respecto a la notación decimal y la notación exponencial. Se plantean algunos problemas en los que se opera con la notación científica.

## Sobre las ideas de los alumnos

A simple vista, algunas operaciones pueden parecer complicadas para los alumnos, como en $(12 - x)^2 = 49$, de la sesión 1, actividad 3, en la que seguramente intentarán desarrollar el binomio al cuadrado cuando no es necesario. En el caso de los productos en los que falta uno de los factores, para muchos alumnos no es evidente que el factor desconocido se obtiene al dividir el producto entre el factor conocido.

En la sesión 2 hay una actividad que permite entender en qué consiste el crecimiento exponencial, sólo se pretende mostrar que la potenciación es útil en este tipo de problemas, pero es probable que necesiten ayuda, o que requieran otros ejemplos, como explicar el crecimiento de una población de 10 bacterias que cada hora se reproducen partiéndose en dos (bipartición).

En las divisiones a las que les falta el dividendo o el divisor, puede surgir una dificultad similar a la de las multiplicaciones a las que les falta un factor; sin embargo, son ejercicios útiles para que los alumnos usen las leyes de los exponentes.

Si una regla funciona para un caso, es normal que los alumnos piensen que funciona para todos los casos. Algunos de los problemas numéricos que se plantean en la sesión 3 permiten darse cuenta de que eso no siempre sucede. Por ejemplo, ¿cuál es el mayor valor posible que se puede expresar con tres veces el 2? Aunque no a las primeras de cambio, los alumnos podrán encontrar que es $2^{22}$. ¿Y con tres veces el 3? Sin pensarlo mucho dirán que $3^{33}$ y tendrán razón, pero, ¿y con tres cuatros? Siguiendo la misma lógica, seguramente responderán que $4^{44}$. Sin embargo, resulta que en este caso, el mayor valor es $4^{4^4}$, mismo que equivale a $4^{256}$.

En muchos casos, lo que permite a los alumnos tener claridad sobre un concepto es contrastarlo con un caso que sea falso o incorrecto. Por ejemplo, identificar entre varias expresiones cuál corresponde a la notación científica. En la sesión 4 los alumnos podrán entender mejor en qué consiste esta forma de expresar números y, sobre todo, de operar con ella al resolver problemas.

## ¿Qué material se necesita?

Algunas actividades requieren del uso de calculadora; procure que haya al menos una por pareja, pero es necesario controlar su uso.

## ¿Cómo guío el proceso?

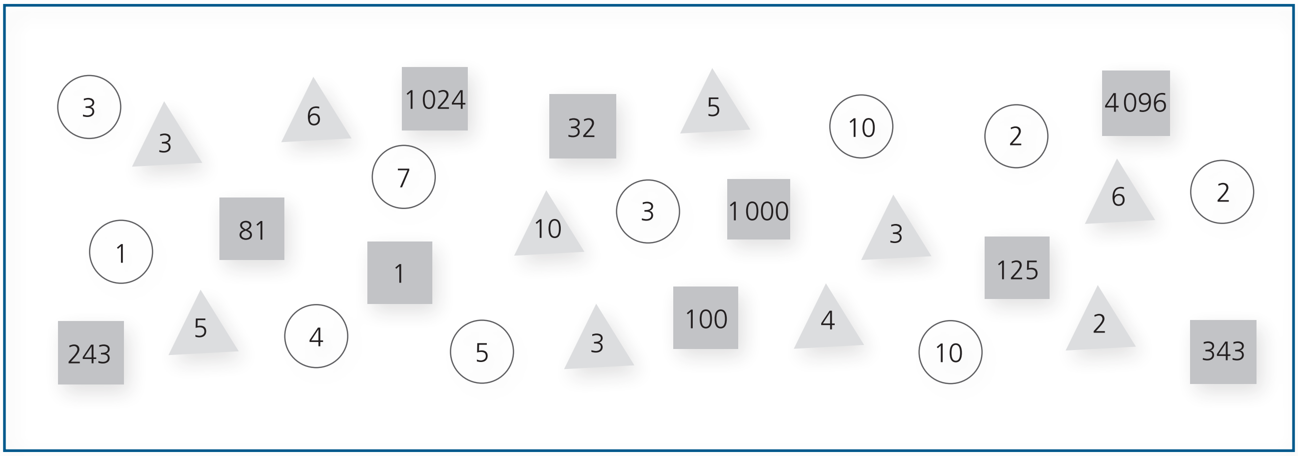
Organice la lectura en voz alta del "Para empezar" y plantee algunas preguntas sobre su contenido. Por ejemplo, ¿cómo se escribe, con cifras, once billones? ¿Cómo se escribe siete mil millones? ¿Cómo ayuda la potenciación en la escritura de números muy grandes o muy pequeños?

En la actividad 1 de la sesión 1 se espera que los alumnos descubran en qué cifras terminan las potencias enteras de 4 y de 7. Para el caso del 4, sólo son dos cifras: 4 o 6. Y para el caso de 7 son: 9, 3, 1, 7; según se trate de exponente impar o par, de manera que tal vez los alumnos no tengan dificultad en resolverla, para luego responder la pregunta de la actividad 2: ¿Las potencias de una misma base tienden a generar un patrón?

En la actividad 3 insista en la indicación de resolver mentalmente las operaciones y en la necesidad de pensar estrategias para llegar más fácilmente al resultado. Por ejemplo:

$$(8 + 3)^2 = 11^2$$
$$11 \times 11$$
$$11 \times 10 = 110$$
$$11 \times 1 = 11$$
$$110 + 11 = 121$$

Las ecuaciones $(3 + x)^2 = 25$ y $(12 - x)^2 = 49$ se resuelven fácilmente al obtener la raíz cuadrada en ambos miembros de la ecuación. En la primera queda $3 + x = 5$ y en la segunda, $12 - x = 7$, que los alumnos podrán solucionar mentalmente.




La actividad 6 es laboriosa, pero se espera que ayude a los alumnos a distinguir claramente los tres términos de la potenciación y a relacionarlos adecuadamente. Sugiérales que al formar las expresiones vayan tachando los números que utilizan para que no se confundan y permítales usar la calculadora. Adviértales que no sobran ni faltan números.

Los problemas de la sesión 2 son para entrar en materia y, seguramente, no serán difíciles de resolver por la mayoría de los alumnos. Aunque algunos problemas dan lugar a ecuaciones de segundo y tercer grado, se espera que sólo usen el procedimiento de ensayo y error para resolverlos. Es probable que en el problema del inciso b) encuentren el cinco sin mucha dificultad, puesto que $5 + 25 = 30$. Si no surge de los alumnos, hay que decirles que el 5 no es el único número que cumple con la condición, que encuentren el otro. Se trata del $-6$, pues $-6 + 36 = 30$. En el problema del inciso c) tampoco les resultará complicado averiguar que el 3 cumple con la condición, pues $3 + 3^3 = 30$. ¿Es 3 el único número que cumple con la condición? Permita que sean ellos mismos quienes concluyan que es el único, puesto que $-3 + (-3)^3 = -3 + (-27) = -30$. Si no llegaran a esta conclusión, usted puede proponerles que hagan la operación y digan qué sucede.

En los dos últimos problemas tal vez sea necesario aclarar qué números son enteros consecutivos y cuáles enteros impares consecutivos. Sugiera el uso de la calculadora y observe si primero calculan los cuadrados y luego restan. Por ejemplo:

$$19^2 = 361$$
$$18^2 = 324$$
$$361 - 324 = 37$$

O bien, si cuentan con calculadoras científicas, sugiérales que resten directamente las potencias para abreviar los cálculos. Por ejemplo, $19^2 - 18^2 = 37$.

En la actividad 3 observe si, para encontrar el factor faltante, dividen el producto entre el otro factor. Por ejemplo:

$$3^5 \times \square^{\square} = 3^7$$
$$\frac{3^7}{3^5} = 3^{7-5} = 3^2$$

En caso de que no usen ese procedimiento, es conveniente recordarles que ésa es la manera directa de encontrar el término faltante.

En esa misma actividad se proponen operaciones de más de dos factores; en caso de que los alumnos requieran ayuda, sólo hay que decirles que se trata de productos de potencias de la misma base y que el procedimiento para resolverlas es el mismo que cuando se trata únicamente de dos factores.

Las actividades 5, 6 y 7 corresponden al mismo problema de la caja. La actividad 5 trata de un caso particular en el que los cuadrados que se recortan en las esquinas miden 1 cm. En cambio, la actividad 7 es un problema de variación en el que se quiere averiguar qué medida deben tener los cuadrados que se recortan para que el volumen de la caja sea el máximo. Un probable error que pueden cometer los alumnos consiste en descontar de los 20 cm que mide la hoja sólo la medida de un cuadrado en vez de dos, puesto que se recorta uno de cada esquina.

Los tres elementos de la potenciación son:

$$\underset{\text{Base}}{x}^{\overset{\text{Exponente}}{a}} = \underset{}{b}\ \leftarrow \text{Potencia}$$

La raíz cuadrada es la ***operación inversa*** de elevar al cuadrado una cantidad llamada base.

$$\sqrt[a]{b} = x$$

Índice: $a$; Radical: $\sqrt{\ }$; Radicando: $b$; Raíz: $x$

Cuando se trata de la raíz cuadrada, el índice (2) no se escribe.

La sesión 3 se inicia con algunos juegos con números para darle sentido a las operaciones, en especial a la potenciación. Otra manera de expresar el 10 con cinco nueves es la siguiente:

$\frac{9}{9} \times \frac{9}{9} + 9 = 10$. Otra puede ser: $9^{\frac{9}{9}} + \frac{9}{9} = 10$.

Si no surgen en el grupo, propóngalas.

En el inciso b), ante las propuestas de los alumnos, es necesario insistir en las condiciones del problema. Por ejemplo, no se vale $\frac{1}{1}$ por dos razones. La primera es que deben ser cifras diferentes, y la segunda, que no se debe usar ningún otro signo y la rayita de fracción cuenta como signo de división. Los alumnos caerán en la cuenta de que el menor valor entero positivo es el 1 y que éste puede expresarse como $1^0$. De esta manera se usan dos cifras diferentes y ningún otro signo.

En el inciso c) hay varias maneras de que los alumnos logren lo que se pide. Una que puede parecer simple, pero da cuenta de un buen manejo de la potenciación es la siguiente: $123\,456\,789^0 = 1$.

En el inciso d) se espera que los alumnos no tengan problema en expresar el mayor valor posible con cuatro unos, $11^{11}$, que es del orden de los miles de millones.

En los incisos e) y f) se sugiere dar el tiempo necesario para que los alumnos, con su ayuda, analicen todas las propuestas que surjan de la clase y logren encontrar la expresión que produce el mayor valor. Un dato interesante es que, para tres números dos, la expresión $2^{22}$ produce el mayor valor, pero, para tres cuatros, no es $4^{44}$, sino $4^{4^4} = 4^{256}$.

En la actividad 5 se trata de encontrar el término faltante en una división de potencias de la misma base. Ahora se espera que usen la multiplicación cuando falta el dividendo o el divisor. En caso de ser necesario, se puede sugerir este recurso. Los incisos k) y l) pueden tener diferentes resultados correctos.

La actividad 7 puede resultar extraña para algunos alumnos. Son cuatro operaciones que ya tienen el resultado y lo que se pide es el procedimiento para encontrarlo. Se sugiere que los alumnos muestren cada procedimiento en el pizarrón para que verifiquen si el resultado es correcto o incorrecto. Si es necesario, ayúdelos a ver que dos resultados son correctos y dos incorrectos.

Las actividades 9 y 10 son complementarias y se espera que no ofrezcan dificultad para obtener las conclusiones respecto al exponente cero, exponente uno y base uno.

En la sesión 4, actividad 1, observe si los alumnos se dan cuenta de que cada número de la primera columna tiene tres ceros más que el anterior. Es probable que algunos no sepan escribir más allá del millón y ésta es una buena oportunidad para aclararlo. Un millón es la unidad seguida de seis ceros, equivale a mil millares, es como si tuviéramos mil billetes de a mil. Un billón es la unidad seguida de 12 ceros, equivale a un millón de millones. Un trillón es la unidad seguida de 18 ceros, equivale a un millón de billones. Un cuatrillón es la unidad seguida de 24 ceros. Pídales que vayan completando renglón por renglón y observe si se dan cuenta de que el exponente de la notación exponencial coincide con la cantidad de ceros que tiene el número escrito en notación decimal. Resalte que una de las ventajas de la notación exponencial es que requiere mucho menos espacio.

La actividad 2 sirve para precisar la forma general de la notación científica, $a \times 10^n$ en la que el coeficiente $a$ debe ser mayor o igual que uno y menor que $10$, y $n$ debe ser un número entero. Ayude a los alumnos a recordar este conocimiento estudiado en la secuencia 15 y pídales que argumenten por qué es o no notación científica cada caso que se presenta.

La actividad 4 es para que los alumnos usen los criterios revisados en la actividad 3 y traten de formular otros que resulten prácticos para pasar de la notación científica a la decimal o viceversa. Éstos se refieren a la relación entre el exponente y la cantidad de cifras que hay a la derecha o a la izquierda del punto decimal, según se trate de un exponente positivo o negativo.

Dé el tiempo necesario para que los alumnos resuelvan los problemas de la actividad 5. Como en cualquier problema, lo importante es que piensen qué pueden hacer con los datos disponibles para contestar las preguntas que se plantean. Por ejemplo, en el inciso a), la primera pregunta implica comparar $1.082 \times 10^8$ km y $1.49 \times 10^8$ km. ¿Cuál de las dos cantidades es menor? Observe si los alumnos perciben que sólo hay que comparar $1.082$ y $1.49$, puesto que las potencias de $10$ son iguales.

Para contestar la segunda pregunta es necesario calcular la diferencia entre las mismas cantidades. En el caso de que las potencias de 10 no fueran iguales, habría que hacer lo necesario para igualarlas y después comparar. Por ejemplo, $1.082 \times 10^8 = 10.82 \times 10^7 = 108.2 \times 10^6$. Apóyelos para que analicen cada problema, comparen sus resultados e identifiquen los posibles errores.

## Pautas para la evaluación formativa

Con la finalidad de verificar en qué medida se va logrando la intención didáctica que aparece en la ficha descriptiva, es necesario hacer un registro de lo siguiente.

- Ante un problema como: "El resultado de $398^2$, ¿es mayor, menor o igual que $160\,000$?". El alumno es capaz de argumentar que es menor, puesto que $300^2$ es igual a $160\,000$.
- Ante un problema como: "¿En qué cifra termina el resultado de $18^2$?¿Y el resultado de $18^4$?". ¿El alumno es capaz de argumentar que el primero termina en 4 y el segundo termina en 6, puesto que $18^4 = 18^2 \times 18^2$. Si $18^2$ termina en 4, ¿$18^2 \times 18^2$ debe terminar en 6?
- Los alumnos son capaces de resolver problemas en los que interviene la potenciación, como los que se plantean en las sesiones 2 y 3 de esta secuencia.
- Los alumnos son capaces de expresar números indistintamente en notación decimal, notación exponencial y notación científica.

## ¿Cómo apoyar?

Muchos de los problemas que se plantean en esta secuencia se resuelven haciendo inferencias del tipo “si esto sucede, entonces debe suceder esto otro”. Es probable que algunos alumnos tengan dificultad al hacer estos razonamientos. La manera de apoyarlos es desmenuzando los cálculos para que observen y traten de entender de dónde proviene cada resultado.

## ¿Cómo extender?

Pídales que inventen operaciones o problemas similares a los que se plantean. Proyecte ejercicios que tengan más de una solución correcta. Por ejemplo, si la potencia es 16, ¿cuáles son la base y el exponente?

# Secuencia 28 Raíz cuadrada de números positivos

(LT, págs. 222-227)

| | |
|---|---|
| Tiempo de realización | 3 sesiones |
| Eje temático | Número, álgebra y variación |
| Tema | Multiplicación y división |
| Aprendizaje esperado | Resuelve problemas de potencias con exponente entero y aproxima raíces cuadradas. |
| Intención didáctica | Que los alumnos aproximen la raíz cuadrada de un número y usen esta operación al resolver problemas. |
| Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno | **Audiovisual**<br>• *La raíz cuadrada* |
| Materiales de apoyo para el maestro | **Recurso audiovisual**<br>• *Potencias con exponente entero y la raíz cuadrada* |

## ¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Resuelvan problemas que involucran la raíz cuadrada de números que son cuadrados perfectos y números que no lo son.
- Sesión 2. Usen la noción de operación inversa en el despeje de incógnitas elevadas al cuadrado.
- Sesión 3. Conozcan y apliquen un procedimiento para calcular la parte entera de la raíz cuadrada de un número.

## Acerca de…

En esta secuencia, que es continuación de la secuencia 16, los alumnos profundizan su conocimiento sobre la raíz cuadrada al vincularlo con otros conocimientos, como la resolución de ecuaciones cuadráticas y el cálculo del radio de un círculo en el que se conoce su área.

El trabajo se inicia con una actividad en la que los alumnos distinguen números que son cuadrados perfectos de los que no lo son. Se introduce la idea de resto como complemento de la raíz entera de un número.

La sesión 2 se centra en el uso de la raíz cuadrada como operación inversa de elevar al cuadrado. Se analiza el caso de los números negativos que, a diferencia de los positivos, al elevarse al cuadrado y obtener la raíz cuadrada del resultado, no se vuelve al punto de partida. Por ejemplo, $(-7)^2 = 49$; $\sqrt{49} = 7$. Como se ve, no se regresa a –7.

Finalmente, en la sesión 3 se introduce un procedimiento para calcular la parte entera de la raíz cuadrada de un número. Se apoya en la manipulación algebraica de expresiones que representan números de una cifra ($a$); de dos cifras ($10a + b$); de tres cifras $100a + 10b + c$.

## Sobre las ideas de los alumnos

Cuando se pregunta por los cuadrados perfectos que hay entre 1 y 100, muchos alumnos no tienen claro que son los que resultan de elevar al cuadrado los números naturales del 1 al 10 y, por lo tanto, son 10. Y cuando se pregunta: ¿cuántos cuadrados perfectos hay de 101 a 200? La pregunta llevará a los alumnos a pensar que son los que resultan de elevar al cuadrado 11, 12, 13,…, pero en este caso ya no son 10, porque $15^2$ se pasa de 200.

Cuando resuelven divisiones no exactas, los alumnos saben que hay un resto o residuo, diferente de cero, que debe ser menor que el divisor. En el caso de la raíz cuadrada de números que no son cuadrados perfectos o que no tienen raíz exacta, también hay un resto diferente de cero. Para muchos alumnos no resulta claro por qué algunas medidas se expresan en metros (m), otras en metros cuadrados ($m^2$) y otras en metros cúbicos ($m^3$). En gran parte, a eso se debe que no le den importancia a escribir la unidad de que se trata. El estudio de esta secuencia es un buen momento para aclarar este aspecto.

## ¿Qué material se necesita?

Algunas actividades requieren el uso de la calculadora; procure que haya al menos una por pareja, pero es necesario controlar su uso.

## ¿Cómo guío el proceso?

En la actividad 1 de la sesión 1, es probable que algunos alumnos vayan directamente a los números que resultan de elevar al cuadrado los números naturales del 1 al 10 y contesten rápidamente que hay diez cuadrados perfectos entre 1 y 100. Esto reflejaría un buen proceso de abstracción que, si surge, vale la pena socializar. En la pregunta 1b algunos alumnos contestarán que sí, pero pronto se darán cuenta de que no es cierto, pues $15^2$ es mayor que 200, de manera que sólo hay cuatro cuadrados perfectos, los que resultan de $11^2$, $12^2$, $13^2$ y $14^2$.

Si observa que la mayoría de los alumnos tiene dificultad para resolver el problema 2a, es necesario hacer una puesta en común, sin esperar hasta el final de la sesión. Los alumnos se darán cuenta de que algunos problemas pueden resolverse mediante la raíz cuadrada, aunque no se trate de cuadrados perfectos. En este caso, la solución (13) es la parte entera de la raíz cuadrada de 172 y los rosales que sobran son el resto: $172 - 13^2 = 3$.

En la actividad 3 se pretende que los alumnos comprendan la relación que hay entre el radicando, la parte entera de la raíz y el resto, que se puede enunciar de la siguiente manera: radicando = parte entera de la raíz, al cuadrado, más resto. Una vez que se tiene el radicando, se puede verificar si la parte entera de la raíz es correcta. Por ejemplo, en el primer caso, $7^2 + 14 = 63$ y, efectivamente, la parte entera de la raíz cuadrada de 63 es 7, puesto que $8^2$ es mayor que 63. Sin embargo, no ocurre lo mismo en el tercer caso, pues $15^2 + 32 = 257$, pero la parte entera de la raíz cuadrada de 257 no es 15, sino 16, puesto que $16^2 = 256$. Se trata de algo similar a lo que ocurre con la división cuando el residuo es mayor que el divisor. El resto, también en el caso de la raíz cuadrada, tiene un límite, y 32 lo rebasa.

La actividad 4 es un juego que involucra las operaciones que se estudian en esta secuencia. Se trata de "adivinar" el número que pensó el compañero después de realizar una serie de operaciones y conocer el resultado al que llegó. Si las condiciones del grupo lo permiten, pueden averiguar la explicación del juego. Se piensa un número $x$, se eleva al cuadrado ($x^2$), se suma el doble del número pensado ($x^2 + 2x$), y finalmente se suma 1 ($x^2 + 2x + 1$). Esta expresión es un trinomio cuadrado perfecto, es decir, es el resultado de elevar un binomio al cuadrado. En este caso, la expresión $x^2 + 2x + 1$, resulta de $(x + 1)^2$, por lo tanto, el número pensado ($x$) se obtiene de extraer la raíz cuadrada al resultado final, menos 1.

En la actividad 1 de la sesión 2, pida a los alumnos que resuelvan el problema de la cisterna con el procedimiento que crean conveniente y, cuando terminen, que analicen y completen el procedimiento descrito en el libro. Ayúdelos a poner en evidencia los aspectos que se han estudiado. Por ejemplo, para cualquier valor de $r$, $\sqrt{r^2} = r$. Observe si los alumnos son capaces de resolver el problema de la actividad 4 y apóyelos para que comparen sus procedimientos y resultados.

Al hacer la puesta en común en la actividad 6, observe si los alumnos lograron concluir que el único enunciado verdadero es el a) y anímelos a que argumenten por qué b) es falso. Pídales que den ejemplos.

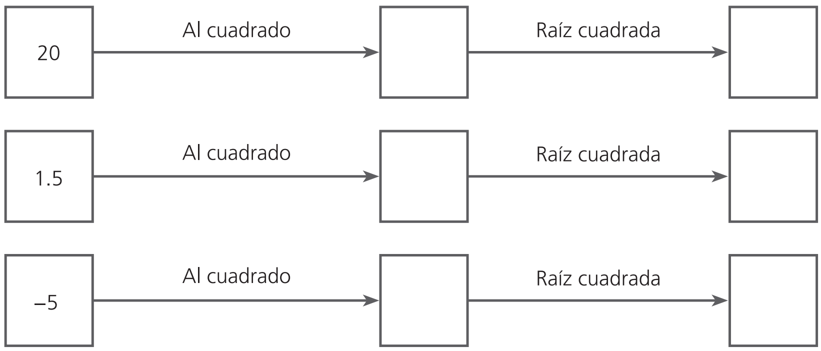
Antes de analizar, junto con los alumnos, el procedimiento que se describe en la actividad 1 de la sesión 3, es necesario aclarar nuevamente cuál es la parte entera de la raíz cuadrada. Ponga algunos ejemplos resueltos con calculadora:

$$\sqrt{8} = \mathbf{2}.828427125$$
$$\sqrt{150} = \mathbf{12}.24744871$$
$$\sqrt{12\,847} = \mathbf{113}.3446073$$

En el primer caso, la parte entera es 2 y tiene una cifra. En el segundo caso, la parte entera es 12, tiene dos cifras, y en el tercero la parte entera es 113, que tiene tres cifras. Una vez aclarado este punto, se sugiere acompañar a los alumnos en el análisis del procedimiento sugerido y detenerse cada vez que surja alguna duda.

Si un número es menor que 100, su raíz cuadrada debe tener una cifra entera, porque el menor número natural de dos cifras es 10 y $10^2 = 100$. Si el número es igual o mayor que 100, pero menor que 10 000, la parte entera de su raíz cuadrada debe

**5.** Trabajen en pareja. Anoten los números que faltan en el esquema.




tener dos cifras, porque el menor número natural de tres cifras es 100 y $100^2 = 10\,000$. Este mismo razonamiento se puede continuar para números iguales o mayores que 10 000.

Las expresiones de la forma:

$$a,\ 10a + b,\ 100a + 10b + c$$

permiten expresar de manera general números de una, dos o tres cifras, respectivamente. Con ellas se puede operar para resolver problemas que implican encontrar el valor de cada literal. Por ejemplo:

$$5;\ 10(2) + 3 = 23;$$
$$100(5) + 8(10) + 7 = 500 + 80 + 7 = 587,$$

respectivamente.

En la actividad 4, apoye a los alumnos para que comparen sus procedimientos y resultados. Un camino posible para resolverlo es el siguiente:

- El área de cada loseta es 200 cm$^2$, de manera que el área total que se tiene con las 4 865 losetas, es $4\,865 \times 200 = 973\,000$ cm$^2$.
- La parte entera de la raíz cuadrada de 973 000 es 986. Ésta es la mayor medida entera, en centímetros, de un lado del cuadrado que se puede construir. Pero, para no romper losetas, se necesita una medida, la mayor posible, que sea múltiplo de 10 y de 20. Ésta es 980 cm, de manera que, puestas a lo largo, habría $980 \div 20 = 49$ losetas, y a lo ancho, el doble, 98 losetas.
- El área del mayor cuadrado que se puede construir es $(980 \text{ cm})^2 = 960\,400 \text{ cm}^2$
- Un lado mediría 980 cm y se utilizarían $49 \times 98 = 4\,802$ losetas.
- Sobrarían $4\,865 - 4\,802 = 63$ losetas.

## Pautas para la evaluación formativa

Con la finalidad de verificar en qué medida se va logrando la intención didáctica de esta secuencia, es necesario hacer un registro para saber si el alumno:

- Aproxima la raíz cuadrada de números positivos que no son cuadrados perfectos. Por ejemplo:

  $\sqrt{56}$ $\qquad$ $\sqrt{875}$ $\qquad$ $\sqrt{4\,592}$

- Resuelve problemas que implican el uso de la raíz cuadrada. Por ejemplo: "Un terreno cuadrado mide 476 m$^2$. ¿Cuánto mide un lado del terreno?".

## ¿Cómo apoyar?

Proponga ejercicios que los alumnos puedan resolver mentalmente y poco a poco aumente el rango de los números, por ejemplo, $\sqrt{25}$, $\sqrt{81}$, $\sqrt{49}$, $\sqrt{100}$, $\sqrt{121}$, $\sqrt{144}$, $\sqrt{10\,000}$, … incluso hay números cuya raíz es un dígito y se memoriza fácilmente, aunque no se trata de que lo memoricen sin comprender de dónde se obtienen. Trate de que cada alumno disponga de una calculadora para que verifique sus resultados. Plantee indistintamente ejercicios de potenciación y de raíz cuadrada, como $6^2$, entonces $\sqrt{36}$; $10^2$, entonces $\sqrt{100}$; $11^2$, entonces $\sqrt{121}$.

## ¿Cómo extender?

Pídales que formulen una explicación sobre la actividad 6 de la sesión 2. Solicite que inventen un problema en el que sea necesario usar la raíz cuadrada para resolverlo.

# Secuencia 29 Sistemas de ecuaciones 2 × 2. Método de suma y resta (LT, págs. 228-233)

| | |
|---|---|
| Tiempo de realización | 3 sesiones |
| Eje temático | Número, álgebra y variación |
| Tema | Ecuaciones |
| Aprendizaje esperado | Resuelve problemas mediante la formulación y solución algebraica de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. |
| Intención didáctica | Que los alumnos conozcan y apliquen el método de suma y resta para resolver un sistema de ecuaciones 2 × 2 y lo comparen con los métodos estudiados, a fin de decidir cuál es el más conveniente de acuerdo con los coeficientes que presentan las ecuaciones. |
| Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno | **Audiovisual**<br>• *Método de suma y resta, otra opción para resolver sistemas de ecuaciones*<br>**Informático**<br>• *Métodos de resolución de sistemas de ecuaciones 2* |
| Materiales de apoyo para el maestro | **Recurso audiovisual**<br>• *Métodos de resolución de sistemas de ecuaciones 2 × 2* |

## ¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Utilicen la reducción de términos semejantes e identifiquen expresiones equivalentes a fin de que apliquen los pasos del método de suma y resta para resolver un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas.
- Sesión 2. Resuelvan problemas que dan origen a un sistema de ecuaciones lineales 2 × 2 con el método de suma y resta; además, reflexionen que, para determinar qué incógnita les conviene igualar, es necesario analizar los coeficientes que tienen en las dos ecuaciones.
- Sesión 3. Establezcan un criterio que les permita determinar cuál es el método de solución más adecuado para resolver un sistema de ecuaciones lineales 2 × 2, basado en los coeficientes de las incógnitas.

## Acerca de...

El método que se estudia en esta secuencia pone en juego los conocimientos algebraicos que los alumnos han aprendido desde el primer grado de secundaria y a lo largo de los dos bloques anteriores. Por ello es necesario que observe si tienen claridad en la suma y resta de términos semejantes, así como en la obtención de expresiones algebraicas equivalentes. Otro aspecto importante es que los alumnos manejen adecuadamente las propiedades de la igualdad, pues en este caso, al multiplicar por un número cualquiera para igualar algún coeficiente, deberán tener presente que deben multiplicar todos los términos de la ecuación en ambos miembros para que la igualdad se conserve.

Con esta secuencia se pretende que los alumnos no sólo aprendan un método más, sino que establezcan algunos criterios para determinar qué método consideran más conveniente, para lo cual deben tener dominio de todos ellos.

## Sobre las ideas de los alumnos

Al estudiar este método de solución para un sistema de ecuaciones, en muchas ocasiones se verán en la necesidad de multiplicar una o ambas ecuaciones por un determinado número. Es común que los alumnos se olviden de multiplicar ambos miembros de la ecuación y sólo lo realicen en uno de ellos. Por ejemplo, si se tiene la ecuación: $3x - 2y = -4$ y tienen que multiplicarla por 5, hacen esto:

$$15x - 10y = -4$$ ✗

En lugar de:

$$15x - 10y = -20$$ ✓

Otro aspecto que muchas veces olvidan los alumnos es que el valor de las incógnitas de un sistema de ecuaciones debe satisfacer las dos ecuaciones, esto significa que, al sustituir su valor en ambas, la igualdad se debe cumplir.

## ¿Cómo guío el proceso?

En la actividad 1 de la sesión 1 se incluyen ejercicios que permiten a los alumnos analizar y discutir por qué son equivalentes o no dos expresiones algebraicas. Aquí es donde reafirmarán lo que se señalaba antes: para obtener una expresión equivalente a una ecuación determinada, lo que se haga de un lado de la igualdad deberá hacerse del otro lado también para que ésta no se altere. Si ve que los alumnos cometen omisiones como las que se mencionaron anteriormente, puede recurrir al esquema de la balanza de platillos para la solución de ecuaciones, donde lo que se hace en uno de los platillos (aumentar o disminuir una cantidad) se debe hacer en el otro, a fin de conservar el equilibrio de la balanza. Posteriormente, se pide que resuelvan un sistema de ecuaciones por el método gráfico con la finalidad de reforzar que, al graficar cualquier sistema, si las rectas se intersecan en un punto, las coordenadas $(x, y)$ de éste representan la solución del sistema. Enseguida se presentan los pasos del método de suma y resta para resolver un sistema $2 \times 2$. En este caso se recomienda que los alumnos justifiquen cada paso. Por ejemplo, ¿por qué al sumar las ecuaciones en el resultado no aparece $b$? ¿Por qué el coeficiente de $a$ pasó como denominador al segundo miembro de la igualdad?

Se recomienda que no salten el punto 5, pues ésta es la mejor forma de comprobar que se puede buscar la eliminación de cualquiera de las dos incógnitas y se obtiene el mismo resultado.

5º Finalmente, se comprueba que los valores obtenidos sirven para hacer verdaderas ambas ecuaciones:

| Ecuación 1: $3a + b = 22$ | Ecuación 2: $4a - 3b = -1$ |
|---|---|
| $3(5) + (7) = 22$ | $4(5) - 3(7) = -1$ |
| $15 + 7 = 22$ | $20 - 21 = -1$ |
| $22 = 22$ | $-1 = -1$ |

¿Los valores de *a* y de *b* son los mismos que los que obtuvieron por el método gráfico? _____________

La reflexión que los alumnos hagan sobre las preguntas de la actividad 6 les ayudará más adelante a determinar cuándo les conviene usar este método de solución u otro de los que ya estudiaron. Al realizar la lectura del recuadro en el punto 7, y como una forma de reforzar los pasos de este método, se sugiere que les proponga asociar cada paso con el procedimiento que realizaron en la actividad 5.

En la sesión 2 se presentan problemas que originan un sistema de ecuaciones. En cada uno, lo primero que deben hacer es asociar los datos del problema con el sistema de ecuaciones que le corresponde; esto es con el fin de que se acostumbren a la necesidad de establecer cuáles son las incógnitas y de qué manera están relacionadas. Tal vez los alumnos tengan problema para encontrar la segunda ecuación, pues están acostumbrados a que se presente de un lado del signo igual solamente un número, pero en este caso la ecuación está dada por el valor de una pulsera en función del valor de la otra: $4y = x$. En el segundo problema se pide que expliquen por qué los dos sistemas que desecharon no representan el problema; esto lleva implícita la justificación de por qué decidieron que uno de ellos era correcto.

Otro aspecto importante consiste en analizar qué incógnita dejan y cuál eliminan. Si los alumnos no proponen una estrategia, usted puede decirles que una consiste en analizar los coeficientes y ver con cuál se puede hacer menos operaciones. Por ejemplo, en el sistema $4x - y = 9$; $3x + 5y = 1$, si se decide eliminar $y$, sólo habría que multiplicar la primera ecuación por 5; en cambio, si deciden eliminar $x$, tendrán que multiplicar la primera ecuación por 3 y la segunda ecuación por 4, para que sus coeficientes se igualen.

En la sesión 3 se plantea otra característica de un sistema de ecuaciones lineales que los alumnos pueden considerar para elegir este método de solución. Consiste en que en ocasiones ya está igualado el coeficiente de una de las incógnitas y además son simétricos, por lo que, de entrada, se puede eliminar una literal para continuar con los demás pasos de este método.

**5.** En equipo, analicen los siguientes problemas. Decidan qué método les parece más adecuado y expliquen por qué. Después, resuelvan en su cuaderno el sistema de ecuaciones y anoten la respuesta de cada problema.

a) La suma de las edades de Edna y Juan es 82. Edna es mayor que Juan por 18 años.

Edad de Edna: ______________

Edad de Juan: ______________

b) El museo de la caricatura tuvo 440 visitantes el día de hoy (hombres y mujeres). Si la razón entre hombres y mujeres es de $\frac{3}{5}$, ¿cuántos hombres y cuántas mujeres asistieron?

## Pautas para la evaluación formativa

El primer aspecto que debe observar es qué tan fácil o difícil resulta a los alumnos representar un problema con un sistema de ecuaciones.

También observe el manejo que tienen de las operaciones algebraicas, por ejemplo, ¿saben reducir términos semejantes?, ¿tienen claridad sobre el manejo de los signos?, ¿no confunden las operaciones de suma o resta con las de división y multiplicación?

Para resolver un sistema de ecuaciones por el método de reducción, o de suma y resta, se multiplica una o las dos ecuaciones por un número que permita obtener coeficientes simétricos de cualquiera de las dos literales.

Después, se suman miembro a miembro las ecuaciones y se reducen los términos semejantes. El propósito es obtener una ecuación de primer grado, o lineal, con una sola incógnita.

El valor obtenido se sustituye en cualquiera de las dos ecuaciones originales para obtener el valor de la otra incógnita.

## ¿Cómo apoyar?

La traducción del lenguaje oral del problema al lenguaje algebraico resulta difícil para muchos estudiantes, en cuyo caso es fundamental apoyarlos para que desglosen el problema en sus diferentes partes y se analice la relación que hay entre ellas. Ayúdelos a identificar qué partes no están bien representadas, sobre todo cuando están involucrados coeficientes con fracciones o decimales.

Si los estudiantes presentan dificultades para operar algebraicamente en cualquiera de los métodos, éste es un buen momento para recordar cómo sumar, restar, dividir y multiplicar algebraicamente. Dedique el tiempo necesario para que no queden dudas al respecto.

## ¿Cómo extender?

Pida a los alumnos que resuelvan algunos sistemas de ecuaciones que incluyan números decimales o fraccionarios, que elijan el método que prefieran para resolverlos y que expliquen por qué lo eligieron.

# Secuencia 30 Relación funcional 2

(LT, págs. 234-239)

| | |
|---|---|
| Tiempo de realización | 3 sesiones |
| Eje temático | Número, álgebra y variación |
| Tema | Funciones |
| Aprendizaje esperado | Analiza y compara situaciones de variación lineal y proporcionalidad inversa a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica. Interpreta y resuelve problemas que se modelan con este tipo de variación, incluyendo fenómenos de la física y otros contextos. |
| Intención didáctica | Que los alumnos resuelvan problemas que impliquen representar tabular, gráfica y algebraicamente fenómenos con variación lineal y de proporcionalidad inversa. |
| Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno | **Audiovisual**<br>• *Tablas, expresiones algebraicas y gráficas*<br>**Informático**<br>• *Leyendo gráficas* |
| Materiales de apoyo para el maestro | **Recurso audiovisual**<br>• *La variación lineal y de proporcionalidad inversa* |

## ¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Representen tabular, gráfica y algebraicamente situaciones que presentan variación lineal o de proporcionalidad inversa; analicen las gráficas correspondientes a este tipo de situaciones.
- Sesión 2. Representen tabular, gráfica y algebraicamente situaciones que presentan variación lineal o de proporcionalidad inversa; obtengan información a partir de la representación gráfica de la proporcionalidad inversa.
- Sesión 3. Resuelvan diversos problemas que impliquen la representación tabular, gráfica o algebraica de situaciones lineales o de proporcionalidad inversa.

## Acerca de...

Esta secuencia complementa el trabajo realizado en la secuencia 21 del bloque 2, a partir de la cual se promueve el desarrollo de una de las principales competencias a desarrollar en los alumnos de educación básica: la comunicación de información matemática con diferentes representaciones: verbal, tabular, gráfica y algebraica.

El paso de un tipo de representación a otra no es un asunto trivial para los alumnos. Por ejemplo, para pasar de la representación tabular a la algebraica es necesario que analicen la relación que hay entre cada pareja de números de la tabla y verifiquen que esa relación que encuentran se cumple para todas las parejas de la tabla. Una vez verificado esto, tendrán que usar las reglas de sintaxis para escribir correctamente con símbolos matemáticos esa relación.

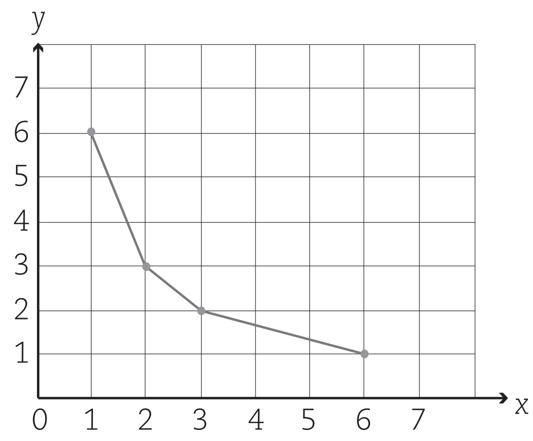
El paso de la tabla a la gráfica implica que los alumnos localicen los puntos que corresponden a las parejas ordenadas de la tabla y que decidan si estos puntos van unidos (magnitudes continuas: litros, horas, metros, gramos...) o no van unidos (magnitudes discretas: personas, canicas, casas, entre otros). En caso de que vayan unidos, deben analizar si la unión es con una línea recta o curva.

El paso de la expresión algebraica a la gráfica suele implicar primero la elaboración de una tabla en la que se asignan valores a la variable independiente y se calculan los valores de la variable dependiente. Cuando se tiene más experiencia es posible pasar de la expresión algebraica a la gráfica; no obstante, es probable que los alumnos de segundo de secundaria aún necesiten construir la tabla y después la gráfica.

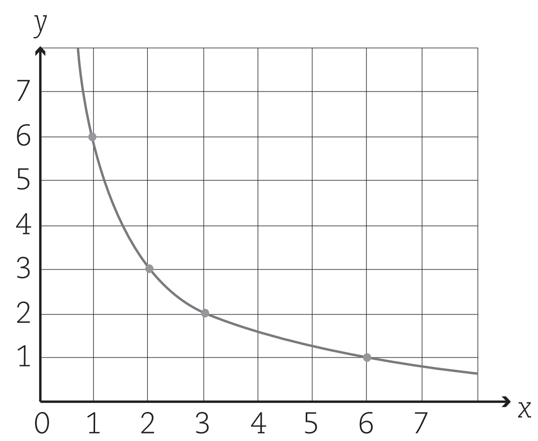
## Sobre las ideas de los alumnos

Después de ubicar varios puntos en un plano cartesiano a partir de una tabla de proporcionalidad inversa, es probable que los alumnos tiendan a unirlos con segmentos de recta, obteniendo una línea quebrada en lugar de una curva (la hipérbola).

Por ejemplo, que hagan esto:




En lugar de esto:




En este caso es importante analizar con los alumnos que, cuando se trata de proporcionalidad inversa, la variación entre un punto y otro no es lineal. De ser necesario, repase las lecciones correspondientes a la variación lineal de primer grado para que identifiquen las características de la misma.

## ¿Cómo guío el proceso?

Dos de los aspectos fundamentales que se trabajan en esta secuencia consisten en encontrar la expresión algebraica que relaciona las dos variables de una tabla y trazar la gráfica en el plano cartesiano de todas las situaciones presentadas en las tablas.

Para la proporcionalidad inversa es muy probable que los alumnos escriban expresiones algebraicas como la siguiente: $vt = 417$.

Esta expresión muestra una característica importante de la proporcionalidad inversa: *El producto de las dos magnitudes involucradas es constante*. No obstante, para completar tablas que posteriormente podrán servir para graficar, es necesario que los alumnos despejen la variable cuyos valores necesitan calcular, en el ejemplo anterior quedaría:

$$v = \frac{417}{t}$$

Es importante que observen que ambas expresiones son correctas y que expliquen por qué.

También es importante que analice con los alumnos que en la segunda expresión ($v = \frac{417}{t}$) se puede notar que la variación es inversa, porque a mayor valor de $t$ el resultado de la división disminuye, lo que se traduce en que a menor velocidad, mayor tiempo.

Otro aspecto importante trabajado en esta sesión se refiere al análisis de las gráficas (actividad 3, sesión 1). A partir de la representación gráfica se espera que los alumnos analicen el crecimiento o decrecimiento de la gráfica en determinados intervalos, su intersección con los ejes y qué significa esta información en el contexto en que están trabajando. En la puesta en común, ponga especial énfasis en que los alumnos traduzcan la información de la gráfica al contexto de tiempo, velocidad y distancia; asimismo, en el inciso e) pida que argumenten cómo supieron si se trataba de una relación proporcional directa o inversa, o bien, si no era proporcional.

El contexto trabajado en la sesión 2 es menos conocido por los alumnos; tome en cuenta esto al apoyarlos durante el trabajo. Se puede vincular esta sesión con los contenidos de Ciencias y Tecnología. Física.

Se sugiere organizar una discusión grupal acerca de lo que son los circuitos y plantear preguntas como:

- Consideran que siempre que se coloca en el circuito una misma resistencia, si el voltaje aumenta, ¿la intensidad de corriente aumenta o disminuye?, ¿la relación entre voltaje e intensidad de corriente es directa o inversa?
- Siempre que se aplica el mismo voltaje a un circuito, si aumentan el valor de la resistencia, ¿la intensidad de la corriente aumenta o disminuye?, ¿la relación entre la resistencia y la intensidad de corriente es directa o inversa?

De manera intuitiva los alumnos podrán plantear la hipótesis de que a mayor voltaje habrá mayor intensidad de corriente eléctrica (relación directa) y de que a mayor resistencia, menor intensidad de corriente eléctrica (relación inversa). No obstante, es muy poco probable que consideren que estas relaciones son de proporcionalidad, pues no tienen elementos para saberlo, por eso en la sesión se presentan las tablas de valores con mediciones para que, a partir de ellas, establezcan la proporcionalidad.

En la actividad 4 de la sesión 3 se incorporan los números negativos en el plano cartesiano, por ello aparecen las dos ramas de la hipérbola. Si bien el programa no indica que deban tratarse las dos ramas, usted puede considerarlo como una breve aportación a lo que los alumnos estudiarán más adelante y trabajarlo con ellos para que tengan la idea de que la curva que estudiaron tiene dos ramas y no sólo una. En la actividad 6 se recomienda revisar el recurso informático *Leyendo gráficas* para profundizar en la construcción de gráficas que representen diferentes tipos de variación.

## Pautas para la evaluación formativa

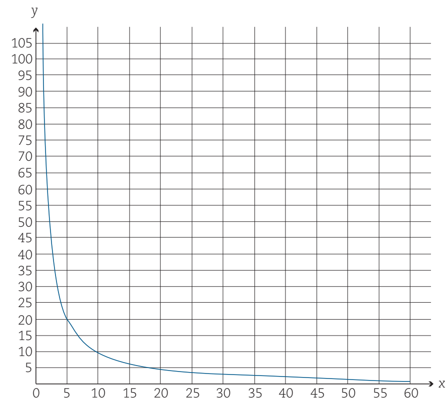
Observe el trabajo de los alumnos para detectar si:

- Analizan de forma adecuada las tablas para encontrar la expresión algebraica correspondiente.
- Utilizan las reglas de escritura correctas en las expresiones algebraicas.
- Identifican las variables en una tabla, en una gráfica y en una expresión algebraica.
- Identifican la relación entre las variables que intervienen en la situación.
- Leen correctamente las gráficas de los planos cartesianos (identifican la abscisa, la ordenada y lo que cada una representa; identifican las coordenadas de un punto y cómo interpretarlas).

## ¿Cómo apoyar?

Utilice números de menor valor para hacer tablas y gráficas con el fin de que los alumnos identifiquen rápidamente la relación entre las variables.

Repase con los alumnos los aspectos principales sobre la variación lineal y la proporcionalidad inversa. Especialmente, podría proponer una actividad como ésta:




Con base en la gráfica anterior, hagan lo que se indica.

a) Anoten si la gráfica representa una relación proporcional o no. En caso de que sí lo sea, anoten de qué tipo es y argumenten.
b) Si en el eje $x$ se ubicó el tiempo en horas que un automóvil tardó en recorrer una distancia, ¿qué magnitud corresponde al eje $y$? ¿Cuál es la expresión algebraica que corresponde a la gráfica?
c) El punto (0.25, 400) ¿corresponde a la gráfica? Justifiquen su respuesta.

## ¿Cómo extender?

Proponga que encuentren en las gráficas trabajadas en la lección puntos con coordenadas que sean fracciones o números decimales. Por ejemplo, en la actividad 4 de la sesión 2, se puede pedir a los alumnos que, a partir de la gráfica, respondan aproximadamente:

- ¿Cuál es la intensidad de la corriente eléctrica para una resistencia de $3.25$ ohmios?
- ¿Qué resistencia hay que colocar en el circuito para obtener una corriente eléctrica de $9\frac{3}{4}$ amperes?

# Secuencia 31 Polígonos 3

## (LT, págs. 240-247)

| | |
|---|---|
| Tiempo de realización | 4 sesiones |
| Eje temático | Forma, espacio y medida |
| Tema | Figuras y cuerpos geométricos |
| Aprendizaje esperado | Deduce y usa las relaciones entre los ángulos de polígonos en la construcción de polígonos regulares. |
| Intención didáctica | Que los alumnos resuelvan problemas que implican la construcción de polígonos regulares. |
| Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno | **Audiovisual**<br>• *Construcciones de polígonos regulares*<br>**Informático**<br>• *Teselados* |
| Materiales de apoyo para el maestro | **Recurso audiovisual**<br>• *Relaciones entre los ángulos de polígonos en la construcción de polígonos regulares* |

## ¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Resuelvan problemas que impliquen la construcción de polígonos regulares a partir de diferentes datos.
- Sesión 2. Resuelvan problemas que impliquen la reproducción de polígonos regulares e irregulares dentro de una configuración.
- Sesión 3. Resuelvan problemas que impliquen la construcción de polígonos regulares e irregulares dentro de una configuración.
- Sesión 4. Analicen la característica de los polígonos regulares que cubren completamente (teselan) el plano y dibujen teselados diversos.

## Acerca de...

Los alumnos han construido figuras y configuraciones geométricas desde primaria y lo han hecho con diferentes recursos (armando rompecabezas, cortando o doblando papel, con el uso del geoplano y de retículas, con instrumentos geométricos). En este grado continuarán trabajando la construcción de figuras geométricas, principalmente con polígonos regulares de cinco o más lados.

La construcción de triángulos equiláteros y cuadrados se estudió en primer grado de secundaria; ahora ampliarán sus conocimientos al trazar otros polígonos regulares como pentágonos, hexágonos, heptágonos, octágonos, etcétera.

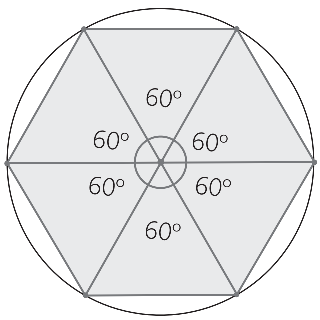
## Sobre las ideas de los alumnos

Los conocimientos adquiridos en las secuencias 8 y 22 son las herramientas y antecedentes con los que los alumnos cuentan para realizar las construcciones de esta secuencia. En particular, la medida del ángulo central de un polígono regular resulta importante para trazar polígonos regulares inscritos en una circunferencia, y la medida del ángulo interior de un polígono regular también será útil cuando se da la medida del lado. No obstante, es probable que los alumnos recurran a otros procedimientos, sobre todo para trazar el triángulo equilátero y el cuadrado.

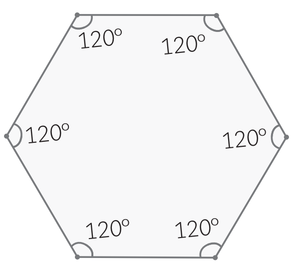
También es muy probable que los alumnos tracen líneas "a ojo", sin medir. Por ejemplo, al trazar un cuadrado puede que marquen una perpendicular sin que realmente lo sea, lo mismo sucedería con otros polígonos regulares. Se espera que al trazar una configuración se den cuenta de que sin el conocimiento de algunas técnicas, difícilmente obtendrán la figura que necesitan.

## ¿Cómo guío el proceso?

En la sesión 1, actividad 1, invite a los alumnos a que discutan en equipo cómo trazar los polígonos pedidos, y después lleven a cabo su plan. Probablemente los alumnos todavía no hagan uso de los aprendizajes de las secuencias anteriores y tracen los polígonos por ensayo y error. En un segundo momento, puede ayudarles a que los construyan mejor usando los siguientes caminos: por ejemplo, para el hexágono regular que se pide en el inciso a), pueden usar lo que saben del ángulo central, esto es, que en dicho hexágono el ángulo central mide 60° (360° ÷ 6 = 60°); después trazar una circunferencia y dividirla en seis ángulos centrales de igual medida, cuyos lados toquen la circunferencia, y enseguida unir los puntos que están sobre ella para obtener el hexágono.




Otro procedimiento consiste en recurrir a la medida del ángulo interno de un hexágono regular (120°). Se traza un lado de la figura y, a partir de ella, se tranzan ángulos de 120°, cuidando siempre que éstos tengan la misma medida y que el lado de uno de los ángulos sea parte del siguiente ángulo.



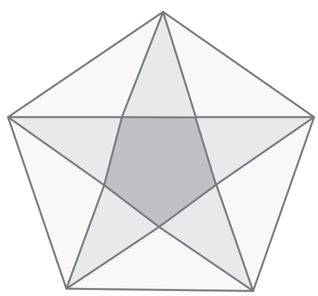

Es probable que algunos alumnos sepan que en un hexágono regular se puede trasladar la medida del radio sobre la circunferencia y que ésta queda divida en seis partes iguales, con lo que se puede trazar el hexágono regular. Los procedimientos anteriores son útiles en los trazos de los demás polígonos regulares.

Es muy importante que se haga una puesta en común donde los alumnos expongan los procedimientos que siguieron para construir los polígonos regulares; esto les servirá para las siguientes tres sesiones de esta secuencia.

Para la construcción de las configuraciones de la sesión 2, los alumnos podrán seguir diferentes procedimientos. Dependiendo de cómo visualicen los diseños, podrían empezar por las figuras exteriores o bien por las del centro. Por ejemplo, para la primera figura, algunos alumnos pueden trazar el cuadrado mayor, localizar los puntos medios de cada lado y unirlos para obtener la figura.

Otra forma consiste en trazar el cuadrado menor y sobre cada lado de éste construir un triángulo isósceles. O también, trazar el cuadrado central y sobre cada lado trazar una perpendicular mediatriz (perpendicular que corta a un segmento en dos partes iguales); posteriormente, trazar los segmentos iguales que forman los dos lados restantes de cada triángulo.

Las configuraciones van aumentando en grado de complejidad. En la última figura ya no hay líneas interiores, por lo que se espera que los alumnos visualicen el polígono que la contiene, o bien, el polígono que se forma al centro (pentágono regular).

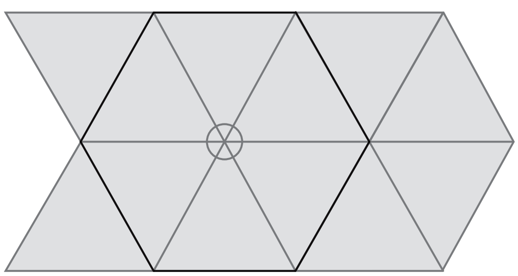


Observe que la instrucción dice "aproximadamente del mismo tamaño", y esto obedece a que es difícil, muchas veces, que quede exactamente del mismo tamaño porque la punta de su lápiz es gruesa o porque no tienen un compás de precisión o una regla bien graduada, lo que también se conoce como *error en la medición*. Pídales que investiguen acerca de esto o hágales comentarios al respecto si lo considera conveniente.

En la sesión 3 los alumnos construirán configuraciones de diferente medida a la que aparece en el libro. Se trata de problemas similares a los de la sesión 2, pero no iguales, pues no es lo mismo reproducir que construir con otras medidas. La idea de pedir que ellos pongan las pestañas donde haga falta tiene el propósito de desarrollar la imaginación espacial de los alumnos, Pida que primero hagan una hipótesis sobre dónde deben llevar pestañas (sin que sobren ni falten) y después comprueben su hipótesis al armar las cajitas.

La decoración de las cajitas puede quedar de tarea si el tiempo no permite hacerlo en clase. De ser posible, organice una exposición con los trabajos de los alumnos, esto los motivará a que se esmeren para realizar los trazos y sus construcciones.

Finalmente, en la sesión 4 los alumnos seguirán profundizando en sus conocimientos sobre polígonos regulares al analizar cuál es la característica que permite que un polígono regular cubra (tesele) el plano. Se espera que al completar la tabla de la actividad 2 se den cuenta de que el ángulo interno debe ser un divisor de 360º para que los polígonos regulares se puedan colocar sin encimarse y sin que dejen huecos. Si esto no ocurre, ayúdelos a examinar algunos de los teselados. Pídales que analicen la medida de los ángulos cuyos vértices convergen en un punto y cuánto suman todos.



En la imagen se observa que en cada vértice convergen seis triángulos. Para averiguar, en este caso, cuánto miden los ángulos que convergen, la respuesta se obtiene dividiendo 360° entre el número de ángulos cuya convergencia está en ese punto. Por lo tanto, la medida de cada ángulo es un divisor de 360°. Después pueden ir a la tabla a verificar que esto se cumpla.

Para los teselados trazados, entre los diferentes procedimientos que puedan usar, está permitido que los alumnos decidan trazar los polígonos regulares y los utilicen como plantilla.

## Pautas para la evaluación formativa

Observe el trabajo de los alumnos para detectar si:

- Usan sus instrumentos geométricos correctamente.
- Hacen sus construcciones usando instrumentos geométricos y no los hacen “a mano alzada” o “a ojo”.
- Usan lo que saben sobre las medidas de los ángulos centrales e internos de los polígonos regulares.

## ¿Cómo apoyar?

Si nota que tienen problemas con el uso de alguno de los instrumentos geométricos (regla, escuadras, compás, transportador), haga una pausa y recuerde cómo se usan, por ejemplo, el trazo de:

- Una circunferencia, dada la medida del radio.
- Un ángulo, dada su medida.
- Paralelas o perpendiculares con escuadras, con regla y compás, con regla y transportador.

## ¿Cómo extender?

- Plantee problemas respecto a las medidas de los ángulos. Por ejemplo: pida que sin medir determinen la medida de los ángulos de los rombos del teselado de la actividad 4 de la sesión 4.
- Pida que inventen otros teselados donde ocupen dos o más polígonos diferentes, ya sea polígonos regulares o irregulares.

# Secuencia 32 Conversión de medidas 3

(LT, págs. 248-253)

| | |
|---|---|
| Tiempo de realización | 3 sesiones |
| Eje temático | Forma, espacio y medida |
| Tema | Magnitudes y medidas |
| Aprendizaje esperado | Resuelve problemas que implican conversiones en múltiplos y submúltiplos del metro, litro, kilogramo y de unidades del Sistema Inglés (yarda, pulgada, galón, onza y libra). |
| Intención didáctica | Que los alumnos conozcan unidades de medida de uso común en contextos marítimos y de producción de hidrocarburos. Que pongan en práctica conocimientos adquiridos en secuencias anteriores, como el cálculo de porcentajes y de conversiones, tanto del Sistema Internacional como del Sistema Inglés, al resolver situaciones en varios contextos. |
| Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno | **Audiovisual**<br>• *Más sobre las unidades de medidas*<br>**Informático**<br>• *Conversión de unidades de medida* |
| Materiales de apoyo para el maestro | **Recurso audiovisual**<br>• *Conversión de medidas* |

## ¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Conozcan unidades de longitud usuales en la navegación marítima y aérea, así como unidades de capacidad utilizadas en la producción de petróleo y que las apliquen para realizar cálculos y conversiones al resolver problemas relacionados con estos contextos.
- Sesión 2. Establezcan relaciones entre las unidades de longitud y de peso del Sistema Internacional y del Sistema Inglés para resolver problemas.
- Sesión 3. Realicen conversiones entre las unidades de capacidad, longitud y peso del Sistema Inglés y del Sistema Internacional.

## Acerca de...

En primaria los alumnos trabajaron con diversas unidades de medida del Sistema Internacional; en este grado se incorpora el estudio del Sistema Inglés. Como logro de este aprendizaje esperado se quiere que dominen formas más eficientes y rápidas de convertir unidades, tanto en un mismo sistema como entre unidades de los dos sistemas. Para ello pueden recurrir a las estrategias estudiadas para multiplicar o dividir rápidamente por potencias de 10 cuando se trata de convertir unidades de medida dentro del Sistema Internacional, y a las relaciones de proporcionalidad, cuando tengan que convertir unidades dentro del Sistema Inglés, o bien, de un sistema a otro.

Por otra parte, los alumnos no pueden sustraerse en la actualidad a la importancia de las fuentes energéticas, en especial de las no renovables como el petróleo, y a la gran cantidad de información en torno al tema. En este sentido es importante que conozcan la unidad que se usa a nivel mundial para medir la producción del petróleo y la forma de comercializarlo, ya que en su transportación entran en juego unidades como los nudos y la milla marina, lo que brinda la oportunidad de seguir poniendo en práctica sus conocimientos sobre las estrategias para hacer cálculos y conversiones con diversas unidades de medida entre los dos sistemas.

La reflexión acerca de la relación velocidad, tiempo y distancia que han trabajado permitirá conceptualizar más fácilmente las nuevas unidades que aquí se les presentan (milla marina como unidad de longitud y nudo como unidad para medir la velocidad de navegación).

## Sobre las ideas de los alumnos

Al llegar al estudio de esta secuencia, se espera que los alumnos tengan una idea clara acerca de que, en el Sistema Internacional, la relación entre las unidades de medida y sus múltiplos y submúltiplos se basa en la estructura del sistema decimal, y que para convertir de una unidad grande a una más pequeña, se multiplica, y para convertir de una unidad pequeña a una grande, se divide.

| $(10^3)$ | $(10^2)$ | $(10^1)$ | base | $(10^{-1})$ | $(10^{-2})$ | $(10^{-3})$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 000 | 100 | 10 | ↓ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{100}$ | $\frac{1}{1\,000}$ |
| km | hm | dam | m | dm | cm | mm |


Asimismo, deberán saber cómo se relacionan las medidas para hacer conversiones entre las unidades del Sistema Inglés y de un sistema a otro.

## ¿Cómo guío el proceso?

La primera sesión invita a los alumnos a reflexionar acerca de las operaciones que han venido realizando para hacer conversiones entre unidades de medida. Por ejemplo, en el inciso a) de la actividad 1 los alumnos deberán tener claridad de que la operación que les permite responder la pregunta es una multiplicación entre la cantidad de galones y su equivalencia en litros, sin importar el orden en que aparezcan los factores, por lo que tendrán dos opciones correctas. Otros podrían pensar en establecer una relación de proporcionalidad como: $\frac{1g}{42g} = \frac{3.785\ l}{x}$ y llegar a los productos cruzados: (42) (3.785); otros más podrían verla como una ecuación lineal con una incógnita: $x(1) = (42)\ (3.785) \rightarrow x = (42)\ (3.785)$.

En la actividad 2, la relación se basa en calcular el tanto por ciento que corresponde a cada producto obtenido del petróleo, por lo que deberán recordar que el tanto por ciento de una cantidad se representa como $\frac{n}{100}$. Deberán usar esa relación para realizar sus cálculos, ya sea convirtiéndola en número decimal o usando la fracción para multiplicar la cantidad de litros por el tanto por ciento. Por ejemplo: para calcular los litros de nafta que se obtienen de un barril de petróleo, se pueden realizar las siguientes operaciones:

$$\frac{10}{100} \times 159 = \frac{1\,590}{100} = 15.9 \text{ litros,}$$
$$\text{o bien, } 159 \times 0.10 = 15.9 \text{ litros}$$

Aunque no se solicita, usted puede pedirles que sumen los porcentajes obtenidos para que verifiquen que se obtiene el total de litros de petróleo que contiene un barril. Es necesario usar las cantidades hasta milésimos para obtener 159 litros, pues si dejan sólo dos cifras decimales la cantidad obtenida será un poco menor.

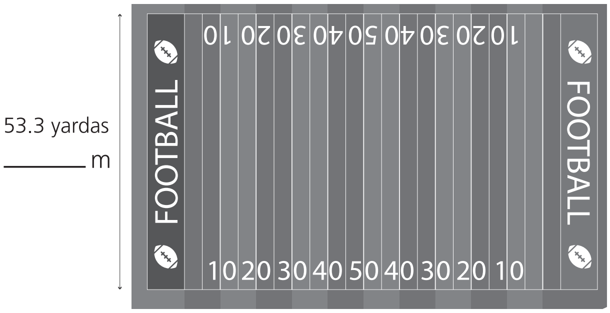
En esta sesión también se retoma la relación velocidad, distancia y tiempo al pedirles, en la actividad 3 inciso b), que calculen cuánto tarda el buque en llegar de un punto a otro, conocidas la distancia y la velocidad promedio. La expresión que los relaciona es: $d = \frac{v}{t}$ , lo que lleva a la operación $5\,063.175 \div 19 = 266.48$

Como la velocidad está dada en relación con una hora, entonces el resultado es el número de horas que tarda. Aunque esto no se pide en la sesión, usted puede preguntarles a cuántos días equivale ese tiempo, para lo cual tendrán que dividir esa cantidad entre 24 (número de horas que tiene un día). Incluso, podría pedirles que antes de hacer cualquier operación, digan una cantidad que consideren aproximada.

No omita comentar con los alumnos el dato donde se señala que en muchos países se usa la coma decimal en lugar del punto decimal, cuya función es la misma.

La sesión 2 se basa en el futbol americano. Para iniciar, se puede platicar con los alumnos acerca de cómo se juega este deporte, sobre todo para aquellos alumnos que no conocen sus reglas básicas.

A lo largo de la sesión, los alumnos tendrán que ir y venir entre las conversiones de unidades de longitud y de peso del Sistema Inglés y del Sistema Internacional, para lo cual deberán usar las equivalencias y relaciones estudiadas en las secuencias anteriores. En la actividad 2 se plantea un aspecto que relaciona la imaginación espacial con la representación plana de los cuerpos. Los alumnos tendrán que imaginar el balón ovalado y la circunferencia central, de la cual se da la medida del diámetro.




Un ejercicio interesante es pedirles que imaginen el corte del balón sobre el diámetro mayor, que es precisamente el marcado en las acotaciones, y después solicitar que imaginen los círculos si los cortes se hacen más alejados del centro. Otro planteamiento relacionado con la imaginación espacial consiste en que digan la forma que se obtendría si se cortara el balón de punta a punta, ¿sería también un círculo?

La tercera sesión plantea conversiones entre los dos sistemas de unidades de medida que se han estudiado. En ésta se presentan datos interesantes acerca del cuerpo humano. También permite reflexionar acerca de las relaciones entre algunos animales de gran tamaño y su alimentación, así como el tamaño de sus crías y la cantidad de alimento que consumen.

Todo este trabajo se basa principalmente en que los alumnos identifiquen la relación y, por lo tanto, la operación que les permite pasar de una unidad de medida mayor a una menor, o de una menor a una mayor dentro del mismo sistema de unidades, así como de una unidad del Sistema Internacional a otra del Sistema Inglés o viceversa. Como ya han trabajado con esto, se espera que sin dificultad establezcan las relaciones de proporcionalidad directa que permiten resolver los problemas y las equivalencias entre la representación fraccionaria y decimal del tanto por ciento en los problemas que lo requieren.

Seguramente, al cabo de usar constantemente las equivalencias entre ambos sistemas de unidades, habrán memorizado algunas equivalencias, pero de no ser así, se puede dejar que las consulten o tener a la vista una tabla con todas ellas.

## Pautas para la evaluación formativa

Observe si los alumnos comprenden los problemas y su traducción al lenguaje matemático; el manejo que tengan de estrategias de cálculo mental y de estimación de los resultados, por ejemplo: si se pide que calculen a cuántos días equivalen 266.48 horas, los alumnos deberán estimar que son más de 10 (pues $24 \times 10 = 240$), pero menos de 12 (pues $24 \times 12 = 288$). De igual forma, observe si tienen claridad acerca de que, para convertir unidades menores a unidades mayores, se multiplica, y cuando convierten de unidades menores a mayores, se divide.

## ¿Cómo apoyar?

Un problema que se puede presentar en esta secuencia es la interpretación de las cantidades de tanto por ciento que aparecen en la imagen de la primera sesión, pues tienen punto decimal. En este caso, habrá que recordarles a los alumnos que el tanto por ciento representa una cantidad de cada cien ( $\frac{n}{100}$ ), así que si se tiene 1.8%, para convertirlo en número decimal es necesario dividirlo entre 100, de donde se tiene que: $1.8\% = 0.018$

Otra situación que podría ocurrir es que se olviden de la unidad con la que están trabajando y la unidad que les piden en la respuesta, ya que se dan medidas en unidades de ambos sistemas. Si esto ocurre, es importante que de principio no se tome como un error, será mejor hacer cuestionamientos al respecto. Por ejemplo, para responder cuántas pulgadas mide la circunferencia mayor del balón, se debe observar que la medida del diámetro está en centímetros y se pide que respondan en pulgadas, por lo tanto, será necesario que hagan una conversión antes de efectuar otras operaciones. Aquí, en lugar de error, puede ser distracción, pues el largo del balón está dado en pulgadas.

## ¿Cómo extender?

Se puede pedir que investiguen acerca de qué es un área y una hectárea, unidades que aún se usan en la agrimensura, que significa técnica de medir tierras.

También pueden investigar qué significan los prefijos *micro*, *nano*, *pico*, *mega*, *giga*, *tera* y su equivalencia en potencias de 10 ($10^{-6}$, $10^{-9}$, $10^{-12}$, $10^{6}$, $10^{9}$, $10^{12}$), respectivamente, así como algunas unidades que los contengan y que ellos conozcan.

# Secuencia 33 Volumen de cilindros rectos

## (LT, págs. 254-259)

| | |
|---|---|
| Tiempo de realización | 3 sesiones |
| Eje temático | Forma, espacio y medida |
| Tema | Magnitudes y medidas |
| Aprendizaje esperado | Calcula el volumen de prismas y cilindros rectos. |
| Intención didáctica | Que los alumnos resuelvan problemas que implican calcular el volumen de cilindros rectos. |
| Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno | **Audiovisual**<br>• *Volumen de cilindros*<br>**Informático**<br>• *Cilindros y volúmenes* |
| Materiales de apoyo para el maestro | **Recurso audiovisual**<br>• *El volumen de prismas y cilindros rectos*<br>**Bibliografía**<br>• Sáiz Roldán, Mariana (s. f.) "El volumen. ¿Por dónde empezar?" Disponible en http://www.matedu.cinvestav.mx/~maestriaedu/docs/asig4/ConfMagist.pdf (Consultado el 24 de julio de 2019) |

## ¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Construyan cilindros rectos y comparen el volumen de cilindros con procedimientos propios.
- Sesión 2. Desarrollen la fórmula para calcular el volumen de cilindros rectos.
- Sesión 3. Resuelvan problemas que impliquen el cálculo del volumen de cilindros rectos.

## Acerca de...

En el bloque 1 de segundo grado, los alumnos resolvieron problemas de cálculo de volumen de prismas cuya base era un polígono regular.

En esta secuencia determinarán que para calcular el volumen de un cilindro también tienen que multiplicar el área de la base por la altura. En el caso del cilindro, la base es un círculo, su área es $\pi r^2$ y, por lo tanto, el volumen es $V = \pi r^2 h$.

Al igual que con los prismas, el trabajo con cilindros permite desarrollar la visualización e imaginación espacial. Por ello, en la primera sesión se pide a los alumnos identificar el desarrollo plano (molde) que permite construir cilindros y después se les pide que los construyan para que comprueben sus hipótesis de manera empírica.

Es importante que los alumnos noten que no están aprendiendo una nueva fórmula, sino que es la misma que usaron para calcular el volumen de los prismas.

## Sobre las ideas de los alumnos

Recuerde que la noción de volumen es compleja para los alumnos. En esta secuencia tendrán la oportunidad de seguir profundizando en el estudio de esta magnitud. Al trabajar con los cilindros, reflexionarán acerca de la imposibilidad de saber con exactitud el volumen de estos cuerpos, debido a que se usa un valor aproximado de $\pi$ (el cual es un número irracional cuya expresión decimal es infinita y no periódica).

Entre los errores más comunes se encuentra omitir las unidades al dar los resultados, los alumnos sólo dan el dato numérico. También es un error frecuente que olviden que la unidad (mm, cm, dm, m, etcétera) debe estar expresada al cubo. Por ello es importante que, al trabajar esta secuencia, continuamente se haga referencia a la unidad que están usando, así como que noten la diferencia entre cm, $cm^2$ y $cm^3$.

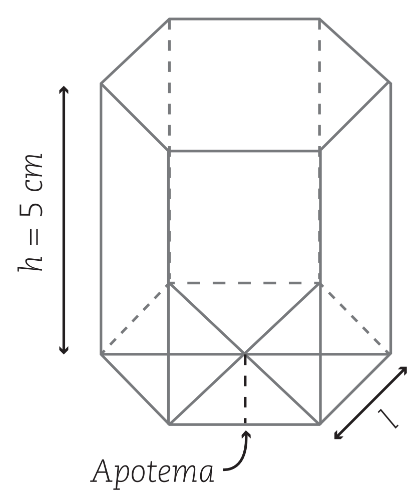
## ¿Cómo guío el proceso?

En la sesión 1, actividad 1, indique que, antes de armar los cilindros, primero estimen y le expliquen a su compañero con qué desarrollos planos consideran que es posible construir un cilindro. Para realizar la actividad 2, es conveniente que encargue con anticipación el material necesario para que los alumnos calquen y construyan los cinco cilindros indicados. En la actividad 4 se espera que los alumnos concluyan que una manera de saber, a simple vista, que un desarrollo plano permite armar un cilindro es que el lado del rectángulo que va pegado al círculo debe medir $\pi$ veces el diámetro del círculo, es decir, tres veces y un poco más (aproximadamente 3.14 veces). Si nota que se les dificulta deducir y explicitar dicha idea, puede apoyarlos con algunas preguntas: ¿cuál lado del rectángulo va pegado al círculo?, ¿en qué parte del círculo se pega?, ¿cómo tendría que ser la medida de ese lado? Si lo considera necesario ayúdelos a recordar cómo determinar la medida de la circunferencia ($\pi \times$ diámetro).

Es muy probable que los alumnos piensen que el desarrollo plano morado no permite construir un cilindro o que crean que el cilindro que resulta con ese desarrollo es oblicuo. Deje que hagan sus hipótesis, y más adelante, en el inciso a) de la actividad 3, podrán comprobar si fueron verdaderas o falsas.

En la actividad 2 se espera que observen que hay dos medidas que entran en juego: la altura del cilindro y el diámetro (o radio) de su base. Por el momento es suficiente con que noten esto, en la siguiente sesión desarrollarán la fórmula.

En la sesión 2 se toma como punto de partida lo que los alumnos trabajaron en el bloque 1, tanto la construcción de prismas cuya base es un polígono regular como la fórmula para calcular su volumen. Es probable que algunos alumnos lleguen a confundir la altura del prisma con el apotema; para obtener dicha medida deben medir directamente sobre la base del prisma. Para que resulte más sencillo, sería conveniente indicarles que encuentren el centro de la base desde el desarrollo plano (para el caso de los prismas hexagonal y octagonal).




Para obtener el volumen del prisma octagonal es necesario calcular primero el área de la base:

$$A_B = \frac{8\,(l \times apotema)}{2}$$

Y después el del volumen:

$$V = A_B \times h$$

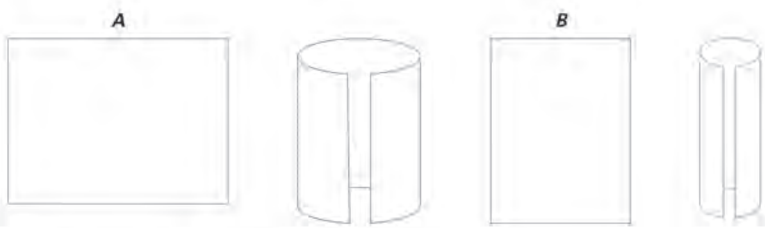
Se espera que los alumnos noten que el cilindro puede considerarse como un prisma con base circular y que, por lo tanto, su volumen se calcula aplicando la fórmula que ya conocen: $V = \pi r^2 h$.

2. Completen la siguiente tabla. En el caso del cilindro anoten el volumen aproximado.

| Nombre | Volumen ($cm^3$) |
|---|---|
| Prisma triangular | |
| Prisma cuadrangular | |
| Prisma hexagonal | |
| Prisma octagonal | |
| Cilindro | |

En los problemas de la sesión 3 también trabajarán con la capacidad. Recuerde que es importante que los alumnos noten que la *capacidad* (lo que le cabe a un recipiente) es diferente al *volumen* (cantidad de espacio que ocupa); ambas magnitudes guardan una relación tan estrecha que es posible calcular la capacidad de un recipiente calculando el volumen del cuerpo que cabe dentro de él. Esto lo trabajarán al resolver los problemas 2 y 4, en los que es necesario recordar que un decímetro cúbico equivale a un litro.

3. Se tiene una tarjeta rectangular que mide 8 cm de largo y 6 cm de ancho. Si esta tarjeta se usa como cara lateral de un cilindro puede usarse de dos maneras.




a) ¿Con cuál se obtiene un cilindro de mayor volumen? ____________________

Durante el trabajo de esta secuencia permita el uso de la calculadora; el propósito principal es el trabajo con el volumen y se espera que la operatoria no sea un obstáculo ni un aspecto al que tengan que invertirle mucho tiempo.

## Pautas para la evaluación formativa

Observe si los alumnos logran:

- Identificar el desarrollo plano de un cilindro.
- Determinar que para calcular el volumen de un cilindro se usa la misma fórmula que para calcular el volumen de un prisma: área de la base por altura.
- Usar correctamente la fórmula para calcular el volumen del cilindro.
- Tomar correctamente las medidas necesarias para calcular el volumen de un cilindro.
- Resolver problemas que implican el cálculo del volumen de cilindros.

## ¿Cómo apoyar?

Pida a los alumnos que hagan un formulario de perímetros, áreas y volúmenes y permita que lo consulten todas las veces que sea necesario.

Repase con ellos las ideas trabajadas en el bloque 1 acerca del volumen de prismas, esto constituye la base para el trabajo con el volumen del cilindro.

Pida a los alumnos que construyan un decímetro cúbico y comprueben que su capacidad es un litro.

Si se les dificulta el problema 4 de la sesión 3, puede pedir que construyan las latas con las medidas propuestas y buscar la manera de comprobar que su capacidad es un litro.

## ¿Cómo extender?

Proponga más ejercicios sobre el cálculo de volúmenes cuya altura y radio están expresadas con literales.

# Secuencia 34 Gráficas de línea

(LT, págs. 260-267)

| | |
|---|---|
| Tiempo de realización | 4 sesiones |
| Eje temático | Análisis de datos |
| Tema | Estadística |
| Aprendizaje esperado | Recolecta, registra y lee datos en histogramas, polígonos de frecuencia y gráficas de línea. |
| Intención didáctica | Que los alumnos lean, interpreten, comparen y elaboren gráficas de línea que representan situaciones diversas. |
| Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno | **Audiovisual**<br>• *Gráficas de línea*<br>**Informático**<br>• *Gráficas de línea* |
| Materiales de apoyo para el maestro | **Recurso audiovisual**<br>• *Lectura de gráficas estadísticas* |

## ¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Identifiquen las diferencias entre el polígono de frecuencia y la gráfica de línea.
- Sesión 2. Analicen una situación a partir de leer, interpretar y comparar la información que se presenta en diferentes gráficas.
- Sesión 3. Reconozcan cuando diferentes gráficas de línea presentan la misma información al establecer relaciones entre los valores de los datos, de las escalas de los ejes y otras convenciones precisas y propias de ese tipo de gráficas.
- Sesión 4. Comparen y analicen dos o más gráficas de línea en un mismo plano o en planos diferentes.

## Acerca de...

Un aspecto básico del pensamiento estadístico es describir e interpretar la información mostrada en sus representaciones gráficas, tabulares o numéricas; esto implica la lectura correcta de los datos y las convenciones gráficas. Asimismo conlleva reconocer si diferentes representaciones de la información muestran los mismos datos al establecer relaciones numéricas precisas entre esas representaciones.

En esta secuencia los alumnos aprenderán a leer, interpretar, elaborar, comparar y analizar gráficas de línea. Una característica de este tipo de gráfica estadística es que muestra los cambios de una situación a través del tiempo. Para ello se presentan unidades de tiempo en el eje horizontal: fechas, años, meses, días, horas, entre otros; mientras que en el eje vertical se presentan los valores del aspecto de la situación que se observa y registra, por ejemplo, precios, porcentajes, población.

En la sesión 1 se propone comparar e identificar las diferencias entre una gráfica de línea respecto a un polígono de frecuencias. Luego, en la sesión 2, los estudiantes deberán leer, interpretar y comparar diferentes gráficas de línea referidas a una misma situación: el tipo de cambio del dólar en pesos a la venta. En la sesión 3, los estudiantes deberán reconocer cuáles son las representaciones correctas y equivalentes de los datos mostrados entre algunas de las gráficas de la segunda y tercera sesión.

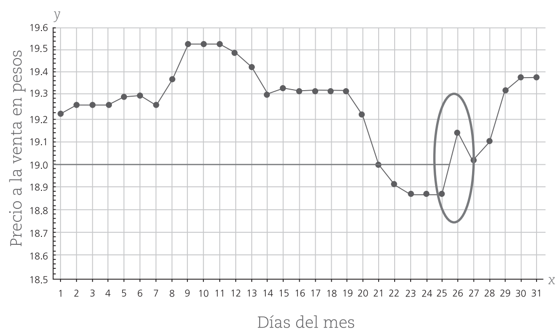
En el pensamiento estadístico, analizar los datos es una de las actividades más complejas; con su análisis se pueden identificar las tendencias que muestran, elaborar posibles inferencias y predicciones a partir de diagramas, tablas o gráficos estadísticos y de los valores de las medidas de tendencia central y de dispersión.

Las gráficas de línea son utilizadas en reportes, informes y presentaciones en diversos medios de comunicación porque permiten comparar dos o más conjuntos de datos que corresponden a un mismo aspecto de una situación. Por ejemplo, en la actividad 4 de la sesión 3, el aspecto común es el precio máximo de la caja de tomate tipo *saladette*, y cada conjunto de datos corresponde a los diferentes valores que ha tenido durante un mes en los estados indicados.

## Sobre las ideas de los alumnos

En el bloque 2 de este grado los alumnos estudiaron histogramas y polígonos de frecuencia, y en primer grado vieron gráficas de barras y circulares. Por lo anterior, se espera que en el desarrollo de las actividades propuestas en esta secuencia ya puedan identificar tareas de descripción y análisis de la información recurrente, como leer, interpretar, comparar, organizar, representar y concluir. Sin embargo, es posible que los alumnos tengan dificultades para reconocer algunas de las características y convenciones propias de una gráfica de línea; por ejemplo, en el eje vertical puede representarse un intervalo de valores discretos o continuos y cambiarse de escala; mientras que en el eje horizontal, pueden ser sólo valores discretos —es decir, que son puntuales, no continuos— como en el caso de fechas o días de la semana, donde es evidente que entre una fecha y otra no se registra ningún dato a pesar de que los puntos de los valores de los datos estén unidos con un segmento, como se destaca entre el día 25 y 26 de marzo en la gráfica 2. Tipo de cambio del dólar en pesos durante el mes de marzo de 2019.

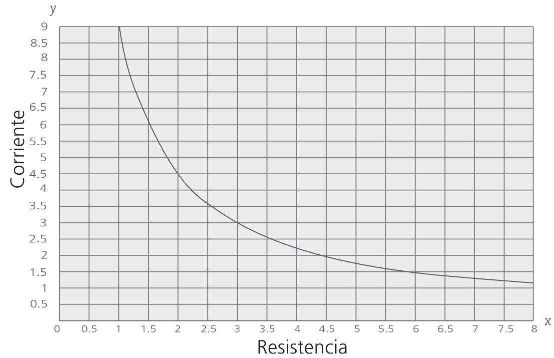
Gráfica 2 | Tipo de cambio del dólar en pesos durante el mes de marzo 2019




Fuente: Banco de México, "Mercado cambiario (tipos de cambio)", 2019.

En este caso es posible aceptar la afirmación de que hay un aumento mayor que 20 centavos del tipo de cambio del dólar entre los días 25 y 26, pero es incorrecto afirmar que en el transcurso de un día a otro el tipo de cambio fue de $19.00

Generalmente, los segmentos de línea marcan una tendencia: aumentar o disminuir, pero no siempre implican valores intermedios entre dos datos, como puede ocurrir en el caso de una gráfica de una función lineal o de proporcionalidad inversa. Por ejemplo, en la actividad 4 de la sesión 2 de la secuencia 30, "Relación funcional 2", sí tiene sentido considerar los puntos (6, 1.5), (6.25, 1.44), (6.5, 1.38), pues la gráfica representa valores continuos.




Salvo el caso de la gráfica 4, "Tipo de cambio del dólar en pesos del 20 de julio de 2018 al 9 de noviembre de 2018", en la que algunos puntos intermedios sí pueden corresponder a una fecha si se realiza una división proporcional entre la distancia que hay entre una y otra de las fechas indicadas en el eje horizontal para ubicar un día en particular.

Gráfica 4 | Tipo de cambio del dólar en pesos del 20 de julio de 2018 al 9 de noviembre de 2018


Otras características que se deben destacar de una gráfica de línea es que no son líneas cerradas como los polígonos de frecuencias, lo que significa que no se inicia ni termina necesariamente con frecuencia cero, ni que forzosamente corte el eje horizontal.

## ¿Cómo guío el proceso?

Las actividades de la sesión 1 están encaminadas a comparar el polígono de frecuencia y la gráfica de línea en una situación en la que ambas representan el tipo de cambio del dólar a la venta en pesos durante un mes. El polígono de frecuencias muestra el número de días del mes (frecuencia absoluta) que presentó el tipo de cambio del dólar a la venta en pesos promedio en cada intervalo. En el caso de la gráfica de línea se muestra el precio a la venta del dólar en pesos diariamente.

La primera actividad es un ejemplo de leer los datos y "entre los datos", es decir, un ejemplo de inferir información. Así, el inciso b) se contesta directamente con la gráfica 1. Basta con identificar el punto más alto del polígono de frecuencias para conocer la mayor frecuencia y ubicar el valor correspondiente del eje horizontal (moda o intervalo modal). Mientras que en el caso de la gráfica 2, se requiere contar, uno a uno, cuántos días se repite cada valor del eje vertical. Hay algunos incisos que se pueden contestar directamente en ambas gráficas; como en el inciso d), si se considera que en el polígono de frecuencias el tipo de cambio del dólar más caro en el mes es $19.08 (valor medio del último intervalo) mientras que si se considera la gráfica de línea es $19.52 (punto más alto de la gráfica). Las actividades 2 de las sesiones 1 y 2 pretenden que los alumnos conozcan las convenciones de representación de una gráfica de línea; la mayoría son comunes a las otras gráficas estadísticas: título de los ejes y de la gráfica, entre otras. Se espera que los alumnos reconozcan la principal convención de una gráfica de línea: que el título y escala de valores del eje horizontal corresponde a unidades de tiempo. Otra de las actividades que promueven el desarrollo del pensamiento estadístico es la reorganización de la información, y dos de sus principales tareas son:

- Elaborar una representación que muestre el mismo conjunto de datos de manera gráfica o tabular, como se propone en las actividades 3 y 4 de la sesión 1.
- Mostrar la misma información utilizando otra escala numérica, como se propone en las actividades 1 a 3 de la sesión 3.

Una tarea relacionada con el análisis de datos que los alumnos deben realizar es la elaboración de afirmaciones verdaderas que implican comparar y combinar datos. Ejemplo de lo anterior es la actividad 3 de la sesión 2. Una vez que la realicen, pida a los alumnos que copien en su cuaderno el recuadro para hacer un ejercicio semejante con los datos que muestran las gráficas 4 y 5. Finalmente, en la sesión 4 los alumnos recolectan y registran datos de situaciones que pueden ser presentadas en gráficas de línea. Motive a los alumnos a que no se limiten sólo a recolectar datos de las situaciones propuestas en el libro, sino de diversos contextos, por ejemplo, registro del crecimiento de un ser vivo (planta, animal) que les permita usar diferentes unidades de tiempo. En esta última sesión los alumnos también deberán comparar dos o más conjuntos de datos en un mismo plano e interpretar si es posible hacer predicciones.

## Pautas para la evaluación formativa

Observe si durante el trabajo con esta secuencia los alumnos:

- Leen e interpretan la información presentada en una gráfica de línea.
- Reorganizan los datos a partir de cambios de escala en los valores del eje vertical o de mostrar los datos en otro tipo de representación.
- Identifican los conjuntos de datos que corresponden a cada gráfica de línea presentadas en un mismo plano.
- Elaboran correctamente gráficas de línea para mostrar los datos que recolectaron y registraron.

## ¿Cómo apoyar?

Si a los alumnos se les dificulta reconocer las características y convenciones de una gráfica de línea, pida que elaboren la representación tabular de cada gráfica.

Si es posible, pida que visiten el sitio del Banco de México (http://www.banxico.org.mx/tipcamb/main.do?page=tip&idioma=sp) para que analicen la manera en que se utilizan las gráficas de línea en los reportes que elaboran y publican.

## ¿Cómo extender?

Pida reunir los carteles que elaboraron en la actividad 1 de la sesión 4 y realice un concurso en el que voten por el cartel que esté mejor elaborado; deberán calificar los aspectos técnicos relacionados con las gráficas de línea que se indicaron en la actividad 2 de la sesión 1.

# Secuencia 35 Medidas de tendencia central y de dispersión 2 (LT, págs. 268-273)

| | |
|---|---|
| Tiempo de realización | 3 sesiones |
| Eje temático | Análisis de datos |
| Tema | Estadística |
| Aprendizaje esperado | Usa e interpreta las medidas de tendencia central (moda, media aritmética y mediana), el rango y la desviación media de un conjunto de datos y decide cuál de ellas conviene más en el análisis de los datos en cuestión. |
| Intención didáctica | Que los alumnos analicen diversas situaciones en las que se usan e interpretan conjuntos de datos y valores de la media aritmética y de la desviación media. |
| Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno | **Audiovisual**<br>• *Aplicación de la estadística*<br>**Informático**<br>• *Estadística* |
| Materiales de apoyo para el maestro | **Recurso audiovisual**<br>• *Análisis de datos* |

## ¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Comparen conjuntos de datos y obtengan los valores de su media aritmética y la desviación media para analizar la situación que presentan.
- Sesión 2. Analicen una situación usando e interpretando los valores de la media aritmética y la desviación media.
- Sesión 3. Obtengan e interpreten los valores de la media aritmética y la desviación media referidos a procesos de verificación de medidas para tomar decisiones.

## Acerca de...

En esta secuencia, los alumnos de segundo grado analizarán información a partir de la comparación de dos o más conjuntos de datos, de los valores de la media aritmética y de la desviación respecto a la media. Se espera que, a partir de este análisis, puedan tomar decisiones en situaciones que implican resultados deportivos y procesos de verificación en investigación de mercados. De este modo se pretende que conozcan la relevancia de la formación estadística, y en particular que logren percibir la variabilidad de los datos y que reconozcan su presencia y aplicación en el mundo que los rodea.

En la secuencia 25 los alumnos aprendieron a calcular la desviación media como el promedio de las diferencias absolutas de los datos respecto al valor de la media aritmética. En esta secuencia también deben calcularla y, además, analizar su relación con la dispersión de los datos para dar conclusiones y tomar decisiones. Particularmente en la sesión 3 se pretende dar a conocer a los alumnos ejemplos de la aplicación de la desviación media. En esa sesión se ilustra la manera de realizar un proceso de verificación, que implica hacer varias pruebas en las que se pueden obtener medidas diferentes de un mismo objeto; lo que conlleva a obtener errores de medida, los cuales influyen en el proceso. La precisión de un instrumento o de un método de medida está relacionada con la desviación media que se obtiene en cada proceso de medida.

## Sobre las ideas de los alumnos

Tal vez algunos alumnos todavía no comprendan por qué las medidas de tendencia central y las de dispersión se complementan. En parte puede deberse al proceso de enseñanza, pues primero se proponen situaciones que se centran en el cálculo de las medidas de tendencia central y luego en las medidas de dispersión, y no siempre se entiende que la variabilidad de los datos es transversal. De ahí que sea importante que los alumnos aprendan a interpretarlas, compararlas y generar posibles valores de los datos que conforman el conjunto, como ocurre en la sesión 2.

## ¿Cómo guío el proceso?

Desde "Para empezar" se hace presente la importancia del registro de datos y, a lo largo de la secuencia, también se resaltan y señalan otros ejemplos de situaciones en que interviene. Promueva entre los alumnos una discusión al respecto y pida que den ejemplos de situaciones en las que también sea necesario el registro de datos. En la actividad 1 de la sesión 1, los alumnos deben leer e interpretar tablas para comparar los conjuntos de datos registrados. Estos datos corresponden a diferentes resultados obtenidos en las tres temporadas de participación de un equipo de basquetbol profesional. Se pretende que el análisis de los datos permita a los alumnos argumentar si jugar como local influye en el desempeño del equipo. Después, en la actividad 2, deberán calcular la media aritmética y la desviación media de algunos de los conjuntos de datos para compararlos y contestar las preguntas planteadas en los incisos siguientes. En este caso, observarán que son mejores los resultados obtenidos cuando se juega como local, además de que se obtiene un mayor promedio de puntos anotados y la dispersión es menor, lo que se puede traducir como una mayor consistencia en los resultados.

| | Promedio de puntos anotados (media aritmética) | Desviación media | Promedio de puntos en contra (media aritmética) | Desviación media | Rango |
|---|---|---|---|---|---|
| Como visitante | | | | | |
| Como local | | | | | |

En la sesión 2, los alumnos deben interpretar los valores de la media aritmética y la desviación media para completar la tabla del inciso b). Deberán hacer cálculos como los siguientes:

| Número | Visitante | |
|---|---|---|
| | Juegos ganados | Juegos perdidos |
| Mínimo | 13 – 2.6 = 10.4 | 6.333 – 3.111 = 3.222 |
| Máximo | 13 + 2.6 = 15.6 | 6.333 + 3.111 = 9.444 |

Se espera que noten que es posible hacer afirmaciones como la de Manuel (inciso c)), ya que el promedio de juegos perdidos es $3$ y la desviación media $0.6$, entonces se puede decir que el número mínimo de partidos perdidos es $2$ —aunque el resultado exacto es $2.4$, pero en el contexto de la situación no se pierde parte de un partido— y el número máximo es $4$ —porque el valor es $3.6 \approx 4$.

Para que los alumnos realicen deducciones como las anteriores, apóyelos con preguntas como las siguientes: ¿es posible perder $2.4$ partidos?, ¿qué significaría perder $2.4$ partidos? Es importante que los estudiantes comprendan que los valores de las medidas de tendencia central y de dispersión son referentes que resumen al conjunto de datos y que, como en todo resumen, se pierde precisión en algunos datos (por ejemplo, no se puede saber en cuál temporada se obtiene el puntaje mínimo). En el inciso f) los alumnos deben completar la conclusión, actividad que recurrentemente se propone a los alumnos como parte del desarrollo del pensamiento estadístico, el cual va más allá de calcular medidas estadísticas. Otra actividad periódica es la recolección y registro de datos por parte de ellos, como se propone en la actividad 4. Posteriormente, deberán organizar, describir y analizar los resultados para presentarlos o darlos a conocer, en este caso, por medio de carteles.

En la sesión 3, los alumnos conocerán una situación cotidiana en la que se usa una norma que implica el registro de datos y el cálculo de promedios y errores de medición.

| | Promedio de juegos ganados | Promedio de juegos perdidos | Promedio de puntos anotados | Promedio de puntos en contra | Promedio de puntos anotados por partido | Promedio de puntos en contra por partido |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Como local | 16.333 | 3 | 1 661.333 | 1 483.666 | 85.9 | 76.61 |
| Desviación media (DM) | 0.4 | 0.6 | 87.555 | 115.111 | 0.6 | 2.518 |
| Como visitante | 13 | 6.333 | 1 596.666 | 1 477.333 | 82.65370 | 76.38 |
| Desviación media (DM) | 2.6 | 3.111 | 61.555 | 80.22 | 0.660 | 2.5024 |

Esta situación les ayudará a darse cuenta de que el uso de la estadística es cotidiano y que se aplica en diversas situaciones. Se pretende que los alumnos reconozcan que la estadística permite tener argumentos para sustentar una declaración o una conclusión antes del momento de tomar decisiones. También es importante que los alumnos comprendan que entre mayor número de datos tengan, es más conveniente trabajar con los valores de las medidas de tendencia central y de dispersión.

## Pautas para la evaluación formativa

Observe si durante el trabajo con esta secuencia los alumnos:

- Utilizan los procedimientos correctos para calcular la media aritmética, el rango y la desviación media de los conjuntos de datos.
- Realizan la búsqueda y recopilación de datos de manera eficiente y eficaz.
- Organizan y analizan los datos y valores de los promedios y dispersión.
- Presentan afirmaciones y conclusiones correctas en las que utilizan los valores de la media, rango y desviación media.

## ¿Cómo apoyar?

En caso de que los alumnos tengan dificultades para obtener los valores de la media aritmética y la desviación media, pida que revisen la secuencia 25 para recordar cómo se calcula la desviación media. Luego, pida que en grupo realicen un ejemplo de la manera en que se obtienen los resultados, como se presenta a continuación:

| | Promedio de puntos anotados (media aritmética) |
|---|---|
| Como visitante | $\frac{1854 + 1744 + 1358}{3} = 1652$ |

| Desviación media |
|---|
| $\frac{\lvert 1\,854 - 1\,652\rvert + \lvert 1\,744 - 1\,652\rvert + \lvert 1\,358 - 1\,652\rvert}{3} = 196$ |

De manera semejante podrán obtener los otros valores de las medidas de los otros conjuntos.

## ¿Cómo extender?

Pida a los alumnos analizar los conjuntos de datos que corresponden al precio de la gasolina o de alguno de los productos señalados en las sesiones 3 y 4 de la secuencia 34 para obtener el precio promedio y su desviación media.

# Secuencia 36 Probabilidad clásica 2

(LT, págs. 274-279)

| | |
|---|---|
| Tiempo de realización | 3 sesiones |
| Eje temático | Análisis de datos |
| Tema | Probabilidad |
| Aprendizaje esperado | Determina la probabilidad teórica de un evento en un experimento aleatorio. |
| Intención didáctica | Que los alumnos calculen la probabilidad frecuencial y clásica de algunos eventos y determinen qué es un evento complementario y cómo se calcula su probabilidad. |
| Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno | **Audiovisual**<br>• *Evento complementario*<br>**Informático**<br>• *Probabilidad clásica vs. probabilidad frecuencial* |
| Materiales de apoyo para el maestro | **Recurso audiovisual**<br>• *De la probabilidad frecuencial a la teórica* |

## ¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Comparen la probabilidad teórica y frecuencial de un evento para compararlas y utilicen la simulación.
- Sesión 2. Conozcan y calculen la probabilidad teórica de eventos complementarios.
- Sesión 3. Resuelvan problemas que implican calcular la probabilidad teórica de eventos.

## Acerca de...

En esta secuencia los alumnos continuarán con el estudio de la probabilidad teórica de diversos eventos que se inició en la secuencia 12. Probabilidad clásica, del bloque 1. En la sesión 1 de esta secuencia se propone calcular las probabilidades teóricas de los eventos y obtener su probabilidad frecuencial a partir de simular las situaciones. Los alumnos deberán pensar de qué manera pueden simular una situación. Para ello requieren identificar todos los resultados posibles y cuáles son los favorables de los eventos definidos, ya que la situación que simula la original debe ser equivalente. Además, al realizar la simulación se espera que comprendan que la probabilidad frecuencial de un evento es resultado de llevar a cabo la situación, y que si la repitieran el mismo número de veces, podrían obtener o no ese mismo valor; si la repitieran una gran cantidad de veces, se irían aproximando al valor de la probabilidad teórica, la cual está relacionada con la proporción entre el número de casos favorables de un evento y el total de casos que hay sin que ocurra la situación. Se insiste en que el valor de la probabilidad de un evento está entre 0 y 1.

En la sesión 2 se introduce el concepto de evento complementario, aprovechando que se identifican y cuentan los resultados favorables de un evento. En la sesión 3 se presentan situaciones relacionadas con el control de calidad de algunos productos para calcular la probabilidad teórica.

## Sobre las ideas de los alumnos

Se espera que los alumnos no tengan problema para distinguir entre la probabilidad teórica de un evento y la frecuencial, ni para reconocer que el valor máximo de la probabilidad de un evento es 1 y el mínimo es 0.

Un aspecto que puede generar dificultades a los estudiantes es el uso de expresiones decimales para referirse a la probabilidad teórica, ya que aparecen números decimales periódicos. En caso de ocurrir, pida también que utilicen fracciones y comparen los resultados.

Por ejemplo, en la actividad 2 de la sesión 1 las probabilidades teóricas de los eventos son:

| Color | Probabilidad de seleccionar un alumno que le guste | |
|---|---|---|
| Azul | $\frac{1}{2}$ | 0.5 |
| Verde | $\frac{1}{4}$ | 0.25 |
| Rosa | $\frac{1}{6}$ | 0.1666... |
| Morado | $\frac{1}{12}$ | 0.08333... |

La probabilidad de seleccionar al azar a un alumno que no prefiera el color azul es igual a la probabilidad de que prefiera verde o rosa o morado. Si se expresa con números decimales, se obtiene:

0.25 + 0.1666 + 0.08333 = 0.4999 mientras que si utilizan fracciones se obtiene:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{1}{2}$$

Por ello es importante que los alumnos comprendan que es conveniente expresar las probabilidades con fracciones.

Otro aspecto que los alumnos deben comprender es que las situaciones aleatorias pueden implicar eventos no equiprobables, como ocurre en la actividad 1 de la sesión 1, en la que quizás algunos consideren que la probabilidad de seleccionar a una mujer (o a un hombre) es $\frac{1}{2}$, sin considerar que el número de alumnas es el doble del de alumnos, es decir, dos terceras partes de la cantidad total de alumnos son mujeres y un tercio son hombres.

## ¿Cómo guío el proceso?

En "Para empezar" conviene destacar las características de las situaciones y fenómenos aleatorios que se señalan e insistir en ellas en el desarrollo de la secuencia. En la sesión 1, actividad 1, incisos a) y b), los alumnos deben calcular la probabilidad teórica, mientras que en la actividad 1 inciso c) deben calcular la probabilidad frecuencial. Es importante que al comparar los resultados de ambas probabilidades se insista en que la probabilidad frecuencial puede ser distinta a la teórica, pues es resultado de lo que ocurre al realizar el experimento o llevar a cabo la situación. Si lo considera conveniente, puede pedir que reúnan los resultados de los equipos para calcular la probabilidad frecuencial del evento en el grupo, y compararla con la teórica. Es posible que puedan observar que, cuando el número de repeticiones crece, la probabilidad frecuencial tiende a acercarse a la teórica.

### Probabilidad clásica vs. probabilidad frecuencial

1. Trabajen en pareja.

En un grupo de telesecundaria hay 24 alumnos en total: 16 son mujeres y los demás son hombres. Si se selecciona un alumno al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea un hombre?

*P(A: el alumno seleccionado al azar es un hombre) =* ______________

b) ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar al azar a una mujer?

*P(B: el alumno seleccionado al azar es una mujer) =* ______________

Si los alumnos utilizan números decimales para expresar los valores de las probabilidades, tendrán menor precisión que si usan fracciones. No les prohíba el uso de los decimales, pero en las puestas en común pida que los expresen también con fracciones y hágales notar que estas últimas son más precisas.

2. Los alumnos del grupo de telesecundaria señalaron su color preferido. La siguiente tabla muestra sus preferencias.

| Color | Azul | Verde | Rosa | Morado |
|---|---|---|---|---|
| Número de alumnos | 12 | 6 | 4 | 2 |

a) Si se selecciona un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que prefiera el color azul?

*P(C: el alumno seleccionado al azar prefiere el color azul)* = ________________

b) ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar un alumno al azar que prefiera el color verde o el rosa?

*P(D: el alumno seleccionado al azar prefiere el color verde o rosa)* = ________

c) ¿Es mayor la probabilidad de elegir un alumno que prefiera el color azul o uno que no lo prefiera? Justifiquen su respuesta. ________________________________

En la sesión 2 conviene elaborar diagramas de árbol para enumerar todos los resultados posibles (espacio muestral) y determinar las probabilidades de los eventos que se indican. Esto también ayudará a ilustrar el concepto de evento complementario.

En la resolución de los problemas de la sesión 3 recomiende a los alumnos utilizar estrategias de conteo para determinar los espacios muestrales y obtener las probabilidades teóricas, como el diagrama de árbol, tablas o listas donde aparezcan todos los resultados posibles.

## Pautas para la evaluación formativa

Observe si durante el trabajo con esta secuencia los alumnos:

- Utilizan los procedimientos para determinar los espacios muestrales.
- Usan la simulación para representar la situación o el fenómeno aleatorio.
- Utilizan fracciones o decimales correctamente para expresar el valor de las probabilidades.

a) A una tienda le surten un lote de 20 artículos sin defectos, 10 artículos con defectos mínimos y 2 con defectos graves. Si el supervisor elige un artículo al azar, cuál es la probabilidad de que:

- El artículo no tenga defectos: ________________
- El artículo tenga un defecto mínimo: ________________
- El artículo sea defectuoso: ________________

b) El supervisor de la tienda decide elegir dos artículos al mismo tiempo para revisarlos. ¿Cuál es la probabilidad de los siguientes eventos?

- Que ninguno de los dos artículos esté defectuoso: ________________
- Que ambos artículos estén defectuosos: ________________
- Que uno de ellos esté defectuoso: ________________
- Que uno de ellos tenga defectos graves: ________________

c) Se sabe que, en un lote de 1 600 pantallas, el 20% son defectuosas.

- ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar al azar una pantalla que no esté defectuosa? ________________
- ¿A cuántas pantallas equivale? ________________
- ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar al menos un radio? ________________

d) En una urna hay 10 fichas numeradas del 1 al 10. Un jugador extrae, sin ver, dos fichas y suma los números que traen. No regresa las fichas a la urna. Gana si la suma de los números es 10.

- ¿Cuál es la probabilidad de que las fichas sumen 10? ________________
- ¿Cuál es la probabilidad de que no sumen 10? ________________

2. En grupo, verifiquen sus respuestas y comenten la manera en que determinaron cada probabilidad. Para comprender mejor de qué trata la situación o apreciar cuáles pueden ser los resultados posibles, simulen alguna de las situaciones.

3. Utilicen el recurso informático *Probabilidad clásica vs. probabilidad frecuencial* para interpretar y analizar los resultados que arrojan ambas probabilidades en diversos experimentos aleatorios.

## ¿Cómo apoyar?

En caso de que los alumnos tengan dificultades para comprender la actividad 1 de la sesión 1, plantee la situación considerando el número de alumnos y alumnas que hay en su grupo, de manera que puedan representar concretamente la situación.

## ¿Cómo extender?

Pida a los alumnos que utilicen la hoja de cálculo electrónica para generar los resultados aleatorios de las actividades propuestas en el inciso c) de la actividad 1 de la sesión 1, y la actividad 3 de la sesión 2.

# Evaluación Bloque 3
## (LT, págs. 280-281)

Con el propósito de observar el avance en el logro de los aprendizajes de los estudiantes, además de las consideraciones que usted haya realizado, se presentan a continuación los resultados y orientaciones del instrumento de evaluación del bloque 3.

**Reactivos 1 a 4. Potencia con exponente entero y aproximación de raíces cuadradas.** Con la resolución de estos reactivos, los alumnos calculan productos y cocientes de potencias enteras de la misma base, potencias de potencias y raíz cuadrada.

**Reactivo 1.** Es posible valorar las habilidades de cálculo de los alumnos respecto a la interpretación del significado de la potencia y, además de reconocer las regularidades que se generan en potencias de la misma base, permite apreciar el desarrollo del sentido numérico que se espera de los alumnos, ya que: $3^9 = 3^3 \times 3^3 \times 3^3 = (3^3)^3$.

Los alumnos no necesitan calcular el valor total de la potencia, basta comprender, dada la información que presenta la base del reactivo, que:

$3^9 = 27 \times 27 \times 27 = (20 + 7) \times (20 + 7) \times (20 + 7)$ y una parte de los cálculos implica que: $7 \times 7 \times 7 = 343$. Por lo que la respuesta a la pregunta es: 3.

**Reactivo 2.** La situación corresponde a una aplicación de la potencia: el cálculo del volumen de un cubo. Los alumnos deben considerar que en un cubo la medida de los lados es igual, por lo que el volumen implica calcular la potencia al cubo de la medida del lado (arista), esto es: $l^3 = 125 \text{ cm}^3$.

En este caso no es necesario calcular la medida del lado, pues implicaría calcular la raíz cúbica de 125 para conocer la medida de la arista y después duplicarla para calcular el nuevo volumen; posteriormente habría que analizar la relación entre 125 y el nuevo volumen obtenido. Por lo que puede seguirse esta estrategia para conocer la respuesta: Si se duplica la medida de cada lado y se eleva al cubo, se tiene:

$(2\,l)^3 = \mathbf{8}\, l^3 = \mathbf{8} \times 125 \text{ cm}^3$. Por lo tanto, la respuesta es 8 veces.

**Reactivo 3.** Implica la aproximación de una raíz cuadrada entera y determinar el residuo. Se espera que los alumnos utilicen alguna de las estrategias estudiadas en las secuencias para determinar la mayor medida del lado del cuadrado que se puede formar con las 300 losetas. La medida es $17^2$ losetas por lado, pues $17^2 = 289$ y sobran 11.

**Reactivo 4.** Los alumnos ponen en juego sus conocimientos sobre el significado e interpretación de la potencia y su operación inversa, la raíz cuadrada. La expresión $(x - 5)^2 = 144$ es una representación de cómo el cuadrado de la diferencia de dos números es 144; esto significa que la diferencia es 12, ya que $12^2 = 144$.

Por lo tanto, el número que al restar 5 unidades da 12, es 17. Otra manera de resolver la situación es la siguiente:

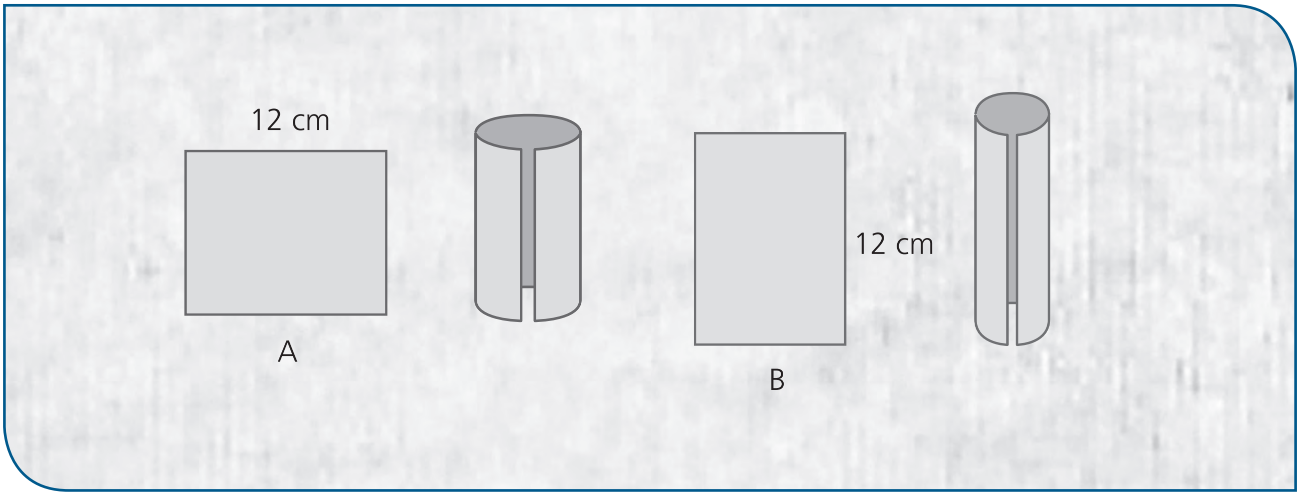
$$\begin{aligned} (x - 5)^2 &= 144 \\ (x - 5) &= \sqrt{144} \\ (x - 5) &= 12 \\ x &= 12 + 5 \\ x &= 17 \end{aligned}$$

**Reactivo 5. Volumen del cilindro.** Con este reactivo se valora la aplicación de la fórmula para obtener el volumen de un cilindro: $V = \pi r^2 h$.

En el caso del cilindro A, la circunferencia que se genera es $12 = \pi d$, de donde $d = \frac{12}{\pi}$, aproximadamente, y $d = 3.82$, por lo que su radio = 1.91 y su volumen = $103.09 \text{ cm}^3$.

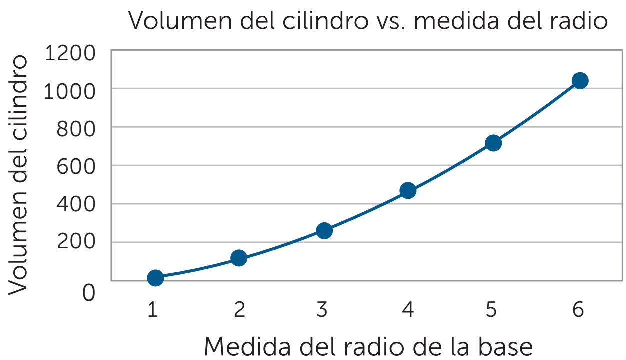
El caso del cilindro B, la circunferencia que se genera es $9 = \pi d$, de donde $d = \frac{9}{\pi}$, aproximadamente, y $d = 2.86$, por lo que su radio = 1.43 y su volumen = $77.05 \text{ cm}^3$

Al comparar ambos volúmenes, se espera que identifiquen que el mayor es el del cilindro A.




**Reactivo 6.** Variación lineal. En este caso, se espera que los alumnos identifiquen que sí hay una relación de variación entre el volumen y el radio del cilindro, pero no es proporcional ni lineal. La relación que tienen es exponencial (cuadrática), aunque no se espera que ésta sea la respuesta que den los alumnos. Tal vez algunos consideren que es proporcional, porque si el radio crece, el volumen también, pero el incremento es exponecial y la gráfica que representa esa relación es una curva como se muestra a continuación.

| *h* | *r* | *v* | $r^2$ |
|---|---|---|---|
| 9 | 1 | 28.26 | 1 |
| 9 | 2 | 113.04 | 4 |
| 9 | 3 | 254.34 | 9 |
| 9 | 4 | 452.16 | 16 |
| 9 | 5 | 706.5 | 25 |
| 9 | 6 | 1017.36 | 36 |




La segunda parte de los reactivos son de opción múltiple.

**Reactivos 1 y 2.** Sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas. En el primer reactivo se evalúa la resolución de sistemas de ecuaciones de 2 × 2, y particularmente la interpretación de los resultados al identificar el valor de la incógnita por la que se pregunta. El precio de un flan es $20. Dependiendo del sistema de ecuaciones que planteen, puede ocurrir que encuentren primero el valor del precio de una gelatina, y es posible que los alumnos consideren erróneamente ese precio como la respuesta correcta.

En el segundo reactivo se evalúa el planteamiento del sistema de ecuaciones que corresponde a la situación de la base del reactivo. La respuesta correcta es:

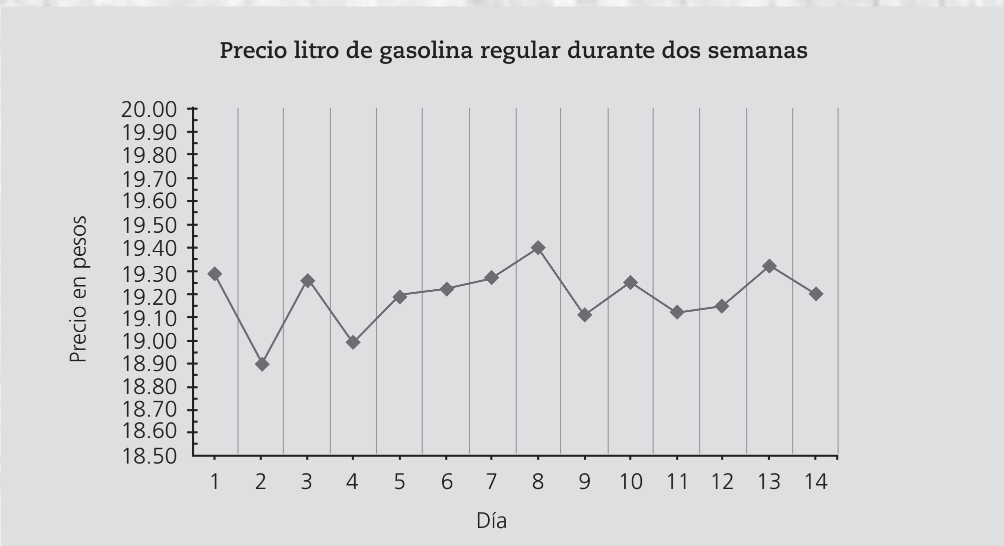
$$20x + 10y = 500$$
$$40x - 50y = 300$$

**Reactivo 3.** Conversión de medidas de peso. Con la respuesta de este reactivo se valora en los alumnos su dominio en la forma de convertir medidas de peso expresadas en los sistemas internacional e inglés. La expresión correcta de las operaciones es: $89 - (0.454 \times 10)$. Tal vez, algunos alumnos consideren como correcta la expresión: $89 - (454 \times 10)$, olvidando convertir el valor de las libras a kilogramos.

**Reactivo 4.** Conversión de medidas de capacidad. Este reactivo permite valorar la habilidad de convertir medidas de capacidad del Sistema Internacional de manera eficiente, así como de interpretar la situación que se presenta: $5 \times 1000 \times 0.22$. Es importante que los alumnos se den cuenta de que se pregunta por la cantidad de mililitros, lo que justifica multiplicar por 1000.

**Reactivo 5.** Probabilidad clásica. Con este reactivo se valora si los alumnos comprenden el significado de la probabilidad clásica y la manera de calcularla. Hay un solo resultado favorable de los 12 posibles, de ahí que la probabilidad es un doceavo.

**Reactivo 6.** Gráfica de línea. Con este reactivo se evalúa la lectura e interpretación de gráficas de línea, se espera que los alumnos sean capaces de leer directamente los datos y entre datos. De ahí que la respuesta correcta es la segunda opción.



# Bibliografía


Block Sevilla, David *et al.* (2010). *¿Al doble le toca el doble? La enseñanza de la proporcionalidad en la educación básica*, México, Ediciones SM (Somos maestr@s).

Centeno Pérez, Julia (1997). *Números decimales. ¿Por qué? ¿Para qué?*, Madrid, Síntesis.

Díaz Godino, Juan *et al.* (1996). *Azar y probabilidad*, Madrid, Síntesis.

Itzcovich, Horacio (2005). *Iniciación al estudio didáctico de la geometría. De las construcciones a las demostraciones*, Buenos Aires, Libros del Zorzal.

Secretaría de Educación Pública (1999). *Libro para el maestro. Matemáticas. Educación secundaria*, México, SEP.

____________ (2018). *Matemáticas. Primer grado. Libro para el maestro. Telesecundaria*, México, SEP.

Sessa, Carmen (2008). *Iniciación al estudio didáctico del álgebra. Orígenes y perspectivas*, México, SEP / Libros del Zorzal.

Ursini, Sonia *et al.* (2005). *Enseñanza del álgebra elemental. Una propuesta alternativa*, México, Trillas.


## Referencias electrónicas


Espinosa Pérez, Hugo *et al.* (2000). *Fichero de actividades didácticas. Matemáticas. Educación secundaria*, 2ª ed., 2ª reimp., México, SEP. Disponible en https://www.uv.mx/personal/grihernandez/files/2011/04/ficheroactividades.pdf (Consultado el 12 de julio de 2019).

Gallardo, Aurora y Abraham Hernández (s. f.). "Emergencia de los números enteros". Disponible en http://www.matedu.cinvestav.mx/~maestriaedu/docs/asig5/Agallardo.pdf (Consultado el 12 de julio de 2019).

García Peña, Silvia y Olga Leticia López Escudero (2008). *La enseñanza de la Geometría*, México, Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (Materiales para apoyar la práctica educativa). Disponible en https://local.inee.edu.mx/images/stories/2014/Publicaciones_CONPEE/pdf/geometriacompleto.pdf (Consultado el 12 de julio de 2019).

Grimaldi, Verónica *et al.* (2017). *Ecuaciones. Aportes para el debate acerca de su enseñanza*, Buenos Aires, Santillana (Cuadernos de apoyo didáctico. Secundaria básica y últimos años de la primaria). Disponible en https://wcarpre.s3.amazonaws.com/2_Ecuaciones.pdf (Consultado el 12 de julio de 2019).

Iriarte Bustos, M. Dolores *et al.* (1991). "Obstáculos en el aprendizaje de los números enteros", en *Suma*, núm. 7, pp. 13-18. Disponible en https://revistasuma.es/IMG/pdf/7/013-018.pdf (Consultado el 12 de julio de 2019).

Pérez Carrizales, César O. (s. f.). "Sucesiones numéricas", en *Asesoría secundaria 1.* Disponible en http://recursos.salonesvirtuales.com/wp-content/uploads/bloques/2012/06/Susesionesnumericas.pdf

Sáiz Roldán, Mariana (s. f.). "El volumen. ¿Por dónde empezar?". Disponible en http://www.matedu.cinvestav.mx/~maestriaedu /docs/asig4/ConfMagist.pdf (Consultado el 10 de julio de 2019).

Secretaría de Educación Pública (2017). *Matemáticas. Secundaria. 2°.* Disponible en https://www.aprendizajesclave.sep.gob.mx/sec-ae-pensamiento-mate2.html (Consultado el 11 de julio de 2019).


# Créditos iconográficos

**Ilustración**

Roberto Ángel Flores Angulo: **pp.** 11, 48, 53, 57, 93 y 108.
David Núñez Bahena: **p.** 139.

**Fotografía**

**p. 8:** fotografía de Ana Laura Delgado Rannauro/Archivo iconográfico DGME-SEB-SEP; **p. 10:** kiosco de Chignahuapan, Puebla, © fernando blancas santos/Shutterestock.com; **p. 11, 17 y 25:** fotografías de Martín Córdova Salinas/Archivo iconográfico DGME-SEB-SEP; **p. 26:** *Collage*: fotografías de Martín Córdova Salinas y Ana Laura Delgado Rannauro/Archivo iconográfico DGME-SEB-SEP; **p. 28:** adornos geométricos estilo boho, © amirage/Fotosearch LBRF/Photo Stock; **p. 29:** (de izq. a der.) murciélago abejorro o nariz de cerdo de Kitti, Curiosoando.com, bajo licencia CC BY-SA 4.0; *Sphaerodactylus macrolepis*, también conocido como gecko, Sara Lovotti, bajo licencia CC BY 4.0; colibrí abeja, Pixabay 2366009; **p. 30:** fotografía de Ana Laura Delgado Rannauro/Archivo iconográfico DGME-SEB-SEP; **p. 31:** fotografías de Martín Córdova Salinas/Archivo iconográfico DGME-SEB-SEP; **p. 47:** ruta de Tlaxcala a Salamanca, Guanajuato, Google Maps; **p. 62:** (arr.) Pico de Orizaba, Pixabay 4049768; (de izq. a der. de arr. a ab.) guepardo, Sudáfrica, © jspix/imageBROKER/imageBROKER/Photo Stock; halcón peregrino, fotografía de Juan Lacruz, bajo licencia CC BY-SA 3.0; avestruz, fotografía de copper, bajo licencia CC BY-NC 4.0; pez espada, Freepng.es; liebre, fotografía de Donna Pomeroy, bajo licencia CC BY-NC 4.0; tiburón azul, fotografía de Mark Conlin/NMFS, bajo licencia CC0; purasangre, Pexels 1996333; Usain Bolt, fotografía de Fernando Frazão/Agencia Brasil, bajo licencia BR CC BY 3.0; **p. 63:** (centro de izq. a der.) ranita monte Iberia, fotografía de jpgalvan, bajo licencia CC BY-NC 4.0; camaleón Brookesia Mínima de Madagascar, fotografía de Frank Glaw, Jörn Köhler, Ted M. Townsend, Miguel Vences, bajo licencia CC BY 4.0; murciélago abejorro o nariz de cerdo de Kitti, Curiosoando.com, bajo licencia CC BY-SA 4.0; (ab. de izq. a der.) imagen del centro de vuelo espacial Goddard de la NASA por Reto Stöckli/MODIS; planeta Marte, NASA/JPL-Caltech/Universidad de Arizona; planeta Saturno, NASA/JPL-Caltech/Space Science Institute; **p.153:** fotografía de Martín Córdova Salinas/Archivo iconográfico DGME-SEB-SEP.