LIBRO PARA EL MAESTRO

Matemáticas

Segundo grado

TELEsecundaria

Bloque 2 La potencia de las matemáticas y el ajedrez

Bloque 3 El arte de las matemáticas y las matemáticas en el arte

Bloque 2

Secuencia 13 Multiplicación y división de números enteros (LT, págs. 110-115)

Tiempo de realización	3 sesiones
Eje temático	Número, álgebra y variación
Tema	Multiplicación y división
Aprendizaje esperado	Resuelve problemas de multiplicación y división con números enteros, fracciones y decimales positivos y negativos.
Intención didáctica	Que los alumnos desarrollen habilidad para multiplicar y dividir números enteros y sepan usar estas operaciones al resolver problemas.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisual** • *Multiplicación de más de dos números enteros*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recurso audiovisual** • *La multiplicación y división con números enteros, fracciones y decimales positivos y negativos* **Bibliografía** • Iriarte Bustos, M. Dolores *et al.* (1990). "Obstáculos en el aprendizaje de los números enteros", en *Suma,* 7. España.

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Consoliden su conocimiento sobre la multiplicación y la división de números enteros.
- Sesión 2. Deduzcan, mediante la observación de regularidades, que si en una multiplicación de varios factores hay un número par de factores negativos, el producto es positivo; si el número de factores negativos es impar, el producto es negativo.
- Sesión 3. Consoliden su conocimiento sobre la relación inversa entre multiplicación y división.

Acerca de...

El desarrollo de esta secuencia se inicia en la sesión 1 en el contexto de un juego de dados en el que hay puntos a favor y en contra, representados por números enteros positivos y negativos, respectivamente. Los puntos en contra son siempre el mismo número (–7), lo que posibilita el uso de la multiplicación de dos factores, uno positivo y otro negativo. Al mismo tiempo que los alumnos emplean la multiplicación de un número entero positivo por uno negativo, continúan usando la suma y la resta al tener que calcular la diferencia entre puntos a favor y puntos en contra.

Una vez que los alumnos saben calcular el producto de dos números enteros, en la sesión 2 se pasa a la multiplicación de más de dos factores con la idea de que observen que si hay un número par de factores negativos, el producto es positivo; si el número de factores negativos es impar, el producto es un número entero negativo. Para llegar a esta conclusión es necesario que apoye a los alumnos, tanto para comparar los resultados que obtienen como para analizar sus propias conclusiones.

En la sesión 3 se retoma la división de números enteros a través de multiplicaciones en las que se conoce un factor y el producto; se espera que en la actividad 1 los alumnos usen la relación inversa entre multiplicación y división, es decir, que dividan el producto entre el factor conocido para encontrar el otro factor y que obtengan el signo a partir de su conocimiento sobre la multiplicación de números enteros.

En la actividad 2 de esta misma sesión se hace evidente que, a partir de una multiplicación de dos factores, se pueden formular dos divisiones y que la ley de los signos funciona igual para ambas operaciones. La tabla de la actividad 5 es un buen recurso para usar la relación inversa entre la multiplicación y división de números enteros.

Sobre las ideas de los alumnos

Puesto que en primer grado los alumnos ya estudiaron la suma y la resta con números enteros, es posible que confundan estas operaciones con la multiplicación y la división. Por ejemplo, que al multiplicar (−7) (−6) obtengan −13, en vez de 42. Lo mismo sucede cuando se trata de una multiplicación de más de dos factores. Por una parte, para tratar de evidenciar estos errores es conveniente plantear diferentes operaciones con los mismos números. Por ejemplo:
(–7) + (–6) =; (–7) – (–6) =; (–7) (–6) =; (–7) ÷ (–6) =, para esta última operación es necesario insistir en que el resultado puede expresarse con la fracción $\frac{7}{6}$, para contrarrestar la persistencia de usar directamente una expresión decimal como resultado, y no perder de vista ni el significado de la operación ni la aplicación de la regla de los signos.

Por otra parte, a pesar de que la relación inversa entre la multiplicación y la división se estudia desde primaria, suele no estar presente en muchos alumnos cuando se requiere para calcular un factor desconocido, por ello es necesario analizar cada resultado de la tabla de la actividad 5 de la sesión 3, e incluso agregar otros casos, como pueden ser valores de m y n de más de dos cifras, tanto positivos como negativos e incluso 0.

¿Qué material se necesita?

Si es posible vean, en la sesión 3, el audiovisual *Multiplicación de más de dos números enteros* y analicen los ejemplos que aparecen. Como apoyo al trabajo de las sesiones 1 y 2 se recomienda que los alumnos analicen la regularidad de los resultados en las sucesiones de multiplicaciones de números enteros que se presentan.

En el desarrollo de la secuencia, algunas actividades requieren de calculadora; procure que haya al menos una por pareja, pero es necesario controlar su uso. Por ejemplo, en el caso de la actividad 1 de la sesión 2, puede proponer que una pareja del grupo obtenga los valores en la calculadora y que los contrasten con los resultados obtenidos por los demás. O puede pedir que verifiquen con la calculadora los resultados de la actividad 5 de la sesión 3.

¿Cómo guío el proceso?

En la actividad "Para empezar", verifique que los alumnos se dan cuenta de que los puntos en contra siempre son múltiplos de siete y que la división de estos números entre siete es lo que permite saber cuántas veces perdió cada jugador.

Jugador	Puntos a favor	Puntos en contra	Puntuación	Jugador	Puntos a favor	Puntos en contra	Puntuación	¿Quién ganó?
A	75	8(–7) =		B	83	9(–7) =		
C	68	10(–7) =		D	40	6(–7) =		
E	59	8(–7) =		F	75	11(–7) =		
G	93	5(–7) =		H	92	2(–7) =		
I	48	12(–7) =		J	117	10(–7) =		

Una recomendación general para todas las actividades es que no les dé las respuestas a los alumnos ni los ayude a encontrarlas, permita que sean ellos quienes se comprometan a entender lo que se pregunta, a buscar y a encontrar las soluciones. En cambio, sí ayúdelos a comparar los resultados diferentes, favorezca que entre todos decidan cuáles son correctos, cuáles no y por qué.

En la actividad 1 de la sesión 1, es probable que los alumnos no tengan dificultad para encontrar los puntos en contra, pero sí para encontrar la diferencia. Si es necesario, habrá que retomar el estudio de la resta.

La actividad 1 es de práctica, con datos que provienen del mismo juego con dados. Se sugiere analizar los resultados entre todos, enfatizando el uso del paréntesis como signo de multiplicar.

La actividad 3 no sólo sirve para que los alumnos usen la multiplicación entre un número positivo y otro negativo, sino también para pensar en la operación inversa. Si se conoce el doble, el triple o la mitad de un número, ¿cómo hacer para saber de qué número se trata? Es probable que para expresar la mitad de −7 usen el decimal −3.5; en tal caso, vale la pena comentar que también se puede usar el número $-\frac{7}{2}$, de igual manera que para expresar la mitad de n se usa la expresión $\frac{n}{2}$ (n medios). Ésta es, sin duda, una ventaja de la ubicación de este contenido en segundo grado, pues es posible vincularlo con la expresión algebraica y generalizar las reglas.

La actividad 4 es la otra cara de la actividad 1, ahora se tiene el producto y hay que averiguar cuáles son los factores que generan ese producto. Un hecho interesante es que los productos tienen más de una solución entera. Por ejemplo, para −8, las multiplicaciones con números enteros pueden ser $2(-4)$, $(-2)\ (4)$, $(-8)\ (1)$, $(-1)\ (8)$. Para el producto 45, las multiplicaciones pueden ser $5(9)$, $(-5)\ (-9)$, $15(3)$, $(-15)\ (-3)$. Se sugiere no dar esta información por anticipado, hay que esperar a que los alumnos la descubran. En caso de que no ocurra, habrá que preguntar: "¿Es la única multiplicación que hay?". Si esta pregunta no surte efecto, habrá que decirles: "Hay otras multiplicaciones que dan el mismo resultado; encuéntrenlas".

La actividad 5 es muy similar a la 4, pero ahora se trata de encontrar divisiones en vez de multiplicaciones. Se espera que los alumnos descubran que para cada cociente hay un infinito número de divisiones enteras. Por ejemplo, para −7, pueden ser: $(-7) \div 1$, $7 \div (-1)$, más todas las divisiones que se obtienen al multiplicar el dividendo y el divisor por el mismo número.

En cada fila de la actividad 6 hay una operación cuyo resultado es distinto a todos los demás, se espera que los alumnos no tengan mucha dificultad para identificarla. En la primera fila son multiplicaciones; en la segunda, divisiones, en la tercera hay ambas y en la cuarta aparecen las cuatro operaciones con los números enteros que se han estudiado.

Las actividades 1 a 4 de la sesión 2 giran en torno a las multiplicaciones de varios factores con números enteros. En un primer momento se trata de que observen las regularidades al resolver las multiplicaciones de la actividad 1, y que luego las usen en las actividades 2 y 3 al escribir multiplicaciones que cumplan con ciertas condiciones. En las actividades 4 y 5 se pretende que los alumnos expliciten en qué casos el resultado de una multiplicación de varios factores es un número positivo y cuándo dicho resultado es negativo. Se espera que después de la revisión que se sugiere en la actividad 5, los alumnos sepan determinar si será positivo o ne-

1. Trabajen en pareja. Anoten el factor que falta en las siguientes multiplicaciones.

a) 7(   ) = 56
b) (   )25 = –100
c) 8(   ) = –280
d) (   )14 = –644
e) –20(   ) = 300
f) (   ) (–75) = 1 875

Enunciado	V	F
a) Si en una multiplicación hay un número par de factores negativos, el resultado es negativo.		
b) Si en una multiplicación hay un número impar de factores negativos, el resultado es positivo.		
c) Si en una multiplicación sólo hay factores negativos, el resultado puede ser positivo o negativo.		

gativo el resultado de la multiplicación que se plantea.

En la actividad 6, la columna encabezada por abc se presta para usar la regla de los signos en multiplicaciones de más de dos factores. Conviene hacer notar que cuando hay uno o tres factores que son números enteros negativos, el resultado es un número negativo. Si hay dos, el resultado es positivo.

La columna $ac(-1)$ se presta para enfatizar que la multiplicación de un número por -1 tiene el efecto de cambiar el signo del número, es decir, obtener su simétrico. Estas situaciones son importantes de analizar porque serán utilizadas por los alumnos en la manipulación algebraica, por ejemplo, $-m = (-1)m$.

Aunque no se plantea en el libro del alumno, realice una revisión colectiva de la actividad 9, con el fin de reflexionar sobre el uso de los signos en multiplicaciones de más de dos factores.

En la actividad 1 de la sesión 3 observe si los alumnos, por cuenta propia, recurren a la división para encontrar el factor que falta. Por ejemplo, en el caso del inciso f): $(\quad)(-75) = 1\,875$, el factor que falta es igual a $1\,875 \div (-75) = -25$. La actividad 2 sirve para consolidar la idea de que con los mismos términos de una multiplicación se pueden formular dos divisiones, porque finalmente se trata de realizar operaciones inversas.

Se sugiere que revisen de manera colectiva los resultados de la tabla de la actividad 5. Asegúrese de que los alumnos tengan claro que en la primera columna y en la primera fila están los factores y en las demás casillas están los productos.

Los problemas de las actividades 7 y 8 ya han sido estudiados en primer grado; sin embago, son propicios para que los alumnos usen las operaciones con números enteros. Ayúdelos a comparar los resultados y a verificar que son correctos. Observe el tipo de procedimientos que usan, pueden ser ecuaciones, operaciones inversas, ensayo y error.

Pautas para la evaluación formativa

Con la finalidad de verificar en qué medida se va logrando la intención didáctica que aparece en la ficha descriptiva, es necesario hacer un registro de lo siguiente:

Ante una multiplicación o una división en la que hace falta uno de los tres términos, los alumnos usan la operación inversa para encontrarlo. Por ejemplo, ante la operación: $(-15)(\quad) = 75$, los alumnos hacen $75 \div (-15) = -5$.

Frente a una multiplicación de más de dos factores, los alumnos determinan rápidamente si el resultado será positivo o negativo.

Debido a la necesidad de resolver problemas como los siguientes: "Encontrar dos números que multiplicados den -20 y sumados den -8. Encontrar dos números cuyo cociente sea -5 y su diferencia sea 12", los alumnos son capaces de encontrar la solución y verificar que es correcta.

¿Cómo apoyar?

Seguramente algunos alumnos necesitarán más ejercicios de práctica que otros, averigüe quiénes son esos alumnos y déjeles trabajo extra para la casa. Es indispensable revisar puntualmente este trabajo para saber dónde están las dificultades y apreciar el avance.

¿Cómo extender?

A los alumnos aventajados pídales que inventen una o más operaciones diferentes que den el mismo resultado, o bien, que imaginen un problema que se resuelva con una operación determinada.

Secuencia 14 Multiplicación y división de números con signo (LT, págs. 116-123)

Tiempo de realización	4 sesiones
Eje temático	Número, álgebra y variación
Tema	Multiplicación y división
Aprendizaje esperado	Resuelve problemas de multiplicación y división con números enteros, fraccionarios y decimales positivos y negativos.
Intención didáctica	Que los alumnos desarrollen habilidad para multiplicar y dividir números positivos y negativos, y sepan usar estas operaciones al resolver problemas.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisual** • *Jerarquía de las operaciones* **Informático** • *Multiplicación y división de números con signo*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recurso audiovisual** • *La multiplicación y división con números enteros, fracciones y decimales positivos y negativos*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Usen la multiplicación de números positivos y negativos en el plano cartesiano en el contexto del trazo de figuras simétricas y/o semejantes.
- Sesión 2. Deduzcan que las leyes de los signos aplicables a la multiplicación y a la división con números enteros son válidas para dichas operaciones con números fraccionarios y decimales, positivos y negativos.
- Sesión 3. Usen la jerarquía de operaciones al operar con números enteros, fraccionarios y decimales positivos y negativos.
- Sesión 4. Usen la multiplicación y división de números enteros, fraccionarios y decimales, positivos y negativos al resolver problemas.

Acerca de...

En esta secuencia no sólo se amplía el estudio de la multiplicación y de la división hacia los números fraccionarios y decimales, positivos y negativos, sino también un tema que ya fue estudiado en primer grado: la jerarquía de las operaciones. Con la finalidad de darle contexto al uso de la multiplicación y de la división con números positivos y negativos, la secuencia inicia con el trazo de figuras en el plano cartesiano, donde los alumnos deberán recuperar conocimientos previos, como la ubicación de puntos y el concepto de coordenadas cartesianas, y vincularlos con lo que están aprendiendo.

Hay que tomar en cuenta que las operaciones con fracciones y decimales ofrecen mayor dificultad que las operaciones con números enteros, en cuyo caso hay que agregar el manejo de los signos y la jerarquía de las operaciones.

Los problemas que se presentan son intramatemáticos, ya que es difícil encontrar contextos reales que le den sentido al tema de estudio. No obstante, suponemos que los problemas numéricos o geométricos lograrán despertar el interés de los alumnos.

Sobre las ideas de los alumnos

Los alumnos han estudiado la construcción de figuras a escala. Es importante que tengan claridad en que, para obtener una figura a escala, es necesario que las medidas de la original se multipliquen por el factor de escala (que siempre es un número positivo) para encontrar las medidas de la copia. Las coordenadas de un punto representan distancias, del punto al eje vertical (primera coordenada) y del punto al eje horizontal (segunda coordenada). Cuando se pide a los alumnos que multipliquen una o las dos coordenadas por un número, es importante que no confundan dicho número con un factor de escala y que tracen las figuras para que vean cómo se transforman, qué relación hay entre ellas, qué se conserva y qué no.

¿Qué material se necesita?

Si es posible, vean, en la tercera sesión, el audiovisual *Jerarquía de las operaciones*; en la sesión 4 se sugiere usar el recurso informático *Multiplicación y división de números con signo*, con el fin de practicar la resolución de problemas que implican la multiplicación y división con números enteros, fraccionarios y decimales.

Algunas actividades requieren el uso de calculadora; procure que haya al menos una por pareja, pero es necesario controlar su empleo.

¿Cómo guío el proceso?

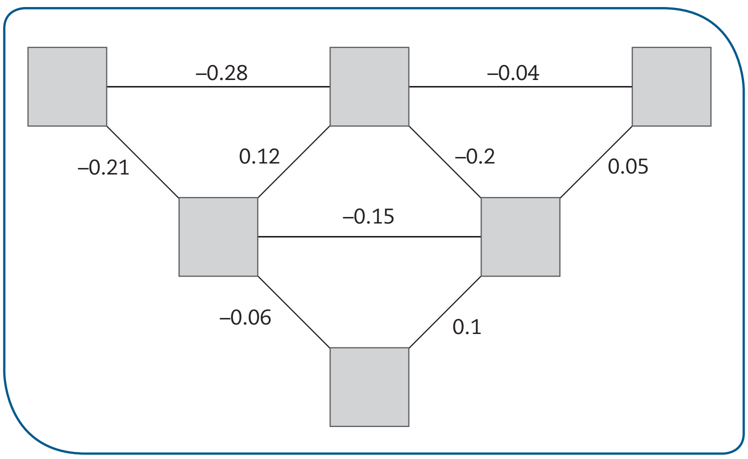
En la actividad "Para empezar", ayúdelos a recordar qué es el plano cartesiano, cuáles son los cuadrantes, qué son las coordenadas. Las actividades 1 y 2 de la sesión 1 se pueden hacer más ágilmente con GeoGebra, pero en caso de no contar con este recurso, se puede usar papel cuadriculado o milimétrico y una regla. Ayúdelos a comparar las figuras que obtuvieron y a que observen la relación que hay entre ellas.

Ponga especial atención a la actividad 4 de la sesión 2, porque las respuestas no son únicas. Observe si los alumnos usan el ensayo y error para encontrar los factores o si fijan uno y, a partir de éste, encuentran el otro. Por ejemplo, en el caso del producto $-\frac{2}{3}$, si se establece que uno de los factores es $\frac{2}{5}$, el otro es el resultado de $-\frac{2}{3} \div \frac{2}{5} = -\frac{10}{6} = -\frac{5}{3}$

Un ejemplo muy simple sobre el uso de la jerarquía de las operaciones consiste en calcular el resultado de $3 + 8 \times 2$ o $3 + 8 \div 2$. Muchos estudiantes dan como resultados 22 y 5.5, respectivamente. Incluso hay calculadoras que dan estos resultados. Sin embargo, habrá quienes digan que los resultados son 19 en el primer caso y 7 en el segundo. También hay calculadoras que arrojan estos resultados. Lo interesante de estos ejemplos es poner a discusión quiénes tienen razón y por qué, lo que da pie a comentar sobre la convención matemática llamada "jerarquía de las operaciones", que se refiere al orden que debe seguirse al efectuar cálculos que contienen varias operaciones, es decir, independientemente del orden en que están escritas.

Se sugiere realizar las actividades 1 a 4 de la sesión 3, tal como están sugeridas y ayudar a los alumnos a comparar y a validar los resultados que encuentren. Hay que destacar que el paréntesis se puede usar como signo de multiplicación y, a la vez, para encerrar operaciones que deben efectuarse antes de quitarlo. Por ejemplo, si en vez de $3 + 8 \times 2$ la expresión fuera $(3 + 8) \times 2$, tendría que hacerse primero la suma y el resultado sería 22. Así, se podría decir que la jerarquía de las operaciones establece un orden que puede alterarse con el uso de los signos de agrupación, es decir, paréntesis, corchetes y llaves.

En las actividades 5 y 6 puede haber dificultades porque es necesario establecer relaciones entre los términos de la multiplicación y los de la



división, además de que los números buscados son decimales menores que 1. No obstante, hay que dar el tiempo necesario para que los propios alumnos encuentren los resultados.

Los problemas de la actividad 1 de la sesión 4 se resuelven usando ecuaciones, pero hay otras maneras de llegar a la solución. Hay que dejar que los alumnos usen el procedimiento que prefieran y ayudarlos a analizar las diferencias en la puesta en común.

En la actividad 8 habrá muchas operaciones para revisar. Se sugiere dar prioridad a las que usen más de dos tarjetas porque es más probable que haya errores.

8. Elige dos o más de las siguientes tarjetas con números y los signos ×, ÷, =, para formar operaciones con su resultado. Tacha las tarjetas que vayas utilizando. Cuando las uses todas, habrás ganado. Anota las operaciones en tu cuaderno.

$-\frac{1}{2}$	-0.2	$\frac{3}{5}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{4}{5}$	$-\frac{3}{4}$	0.5	-34
$\frac{6}{5}$	$-\frac{2}{3}$	-4.6	$-\frac{4}{5}$	$\frac{1}{2}$	6.8	$-\frac{2}{3}$	-2.3

Pautas para la evaluación formativa

En esta secuencia los logros de los alumnos se pueden jerarquizar de la siguiente manera.

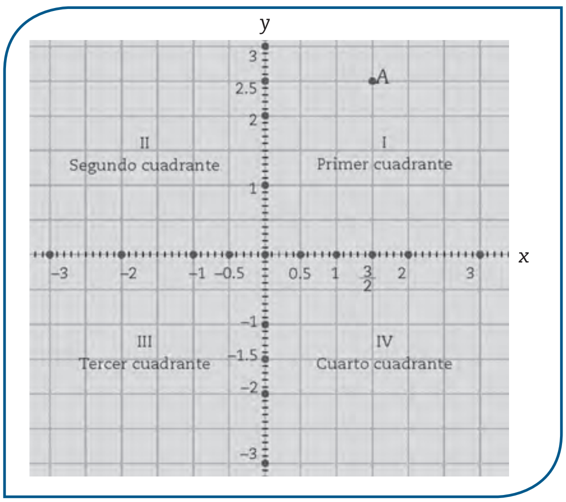
- Resuelven multiplicaciones de dos factores y divisiones. Por ejemplo, $\left(-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{2}{5}\right)$, o $2.5 \div (-3.2)$.
- Resuelven multiplicaciones de más de dos factores. Por ejemplo, $\left(-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{5}{6}\right)$.
- Resuelven operaciones combinadas de suma, resta, multiplicación y división, considerando la jerarquía de las operaciones. Por ejemplo, $2.4 + 1.5(-4.1) - (-6.8 \div 3.4)$.
- Usan correctamente la multiplicación y división de números enteros, fraccionarios y decimales, positivos y negativos al resolver problemas. Por ejemplo: “Pensé un número, lo dividí entre $-\frac{1}{3}$ y el resultado lo multipliqué por $-\frac{1}{5}$. ¿Qué número pensé?”.

¿Cómo apoyar?

Dedique 10 minutos al inicio de la clase, durante dos semanas, para que los alumnos resuelvan ejercicios de cálculo mental. Por ejemplo, -6×0.5; $4\left(-\frac{1}{3}\right)$. Esto permite que los alumnos piensen en cómo relacionar los números que intervienen en la operación.

¿Cómo extender?

Pídales que inventen números u operaciones que cumplan con las condiciones dadas. Por ejemplo, dos números que multiplicados den -3.5; una división cuyo cociente sea $-\frac{3}{5}$; una multiplicación cuyo producto sea $-3\frac{1}{2}$



Secuencia 15 Potencias con exponente entero 1

(LT, págs. 124-131)

Tiempo de realización	4 sesiones
Eje temático	Número, álgebra y variación
Tema	Multiplicación y división
Aprendizaje esperado	Resuelve problemas de potencias con exponente entero y aproxima raíces cuadradas.
Intención didáctica	Que los alumnos usen las leyes de los exponentes al realizar cálculos que implican productos de potencias y potencia de una potencia, así como cociente de potencias; que conozcan de dónde proviene el exponente negativo y cómo se transforma en positivo y utilicen e interpreten la notación científica.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisual** • *Potencias* **Informático** • *Potencias*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recurso audiovisual** • *Potencias con exponente entero y la raíz cuadrada*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Elaboren y utilicen procedimientos para calcular potencias y sus términos.
- Sesión 2. Deduzcan la regla para encontrar el producto de dos potencias de la misma base y la potencia de una potencia.
- Sesión 3. Deduzcan la regla para calcular el cociente de dos potencias de la misma base, expliquen el origen del exponente negativo y cómo éste se puede convertir en positivo.
- Sesión 4. Interpreten, expresen, comparen y operen con cantidades escritas en notación científica.

Acerca de...

El estudio de esta secuencia se inicia con un problema que permite el uso de la potenciación para encontrar el resultado. La primera sesión se centra en familiarizar a los alumnos con los términos de la potenciación y con el análisis de la relación entre dichos términos, sin entrar en el estudio de las operaciones inversas.

Enseguida se estudia la multiplicación de potencias que tienen la misma base, y para eso se recurre a las expresiones multiplicativas de las potencias con el fin de observar que, por ejemplo, $2^3 \times 2^2 = (2 \times 2 \times 2)(2 \times 2)$, es decir, $2^{3+2} = 2^5$.

El producto de potencias de la misma base sirve como apoyo para resolver potencias de potencias. Por ejemplo,

$(3^2)^3 = 3^2 \times 3^2 \times 3^2 = 3^{2+2+2} = 3^{2\times3} = 3^6$

Posteriormente, se pasa al cociente de potencias de la misma base y de allí al exponente negativo y su conversión en positivo, así como al exponente cero.

Para concluir el estudio de esta secuencia, se retoma el uso de la potenciación en la notación científica.

Sobre las ideas de los alumnos

Debido a que la potenciación es una operación que simplifica la multiplicación de factores iguales, los alumnos tienden a confundirla con la multiplicación, que simplifica la suma de sumandos iguales. Por ejemplo, confunden

$3^5 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ con

$3 \times 5 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3$.

En el primer caso, 3 se repite cinco veces como factor, mientras que en el segundo el 3 se repite cinco veces como sumando.

Los alumnos suelen aplicar la regla del producto de potencias de la misma base aun cuando las potencias no tienen la misma base, o bien suelen aplicar dicha regla a las potencias de potencias. Para eliminar esta confusión, es conveniente no limitarse a memorizar la regla, sino a analizar y desarrollar los productos o las potencias de potencias para ver de dónde surge el resultado final.

Sin duda, la división de potencias de la misma base tiene mayor dificultad que la multiplicación. Una de las complicaciones es que, cuando se usa el método de cancelación, no resulta claro por qué queda 1 (en el numerador o en el denominador) cuando se cancelan todos los factores. Por ejemplo, $\frac{2^3}{2^4} = \frac{2 \times 2 \times 2}{2 \times 2 \times 2 \times 2} = \frac{1}{2}$. ¿Por qué queda 1 al cancelar los tres factores que hay en el numerador? ¿Por qué $2^{-1} = \frac{1}{2}$? Son preguntas que la mayoría de los estudiantes se hacen, y si no las plantean ellos mismos, es importante que el maestro lo haga, ya que influirá en la resolución de futuras operaciones.

¿Qué material se necesita?

De ser posible vean, en la segunda sesión, el audiovisual *Potencias*. Y en la cuarta sesión se sugiere también el recurso informático *Potencias*. Algunas actividades requieren de calculadora, procure que haya al menos una por pareja, pero es necesario controlar su uso.

¿Cómo guío el proceso?

Pida a los alumnos que contesten la pregunta que aparece en "Para empezar" sin usar la calculadora. Es probable que muchos escriban la multiplicación con 12 factores iguales. Pregunte: "¿No habrá otra manera más simple de expresar esa operación?". Las respuestas y los comentarios que se hagan permitirán dar entrada a la potenciación.

Apoye a los alumnos en la actividad 3. Es probable que en el grupo haya diferentes tipos de calculadoras, y se trata de saber qué hacer con ellas para calcular potencias. Pida que se apoyen unos a otros. Observe, en esta actividad, si los alumnos son capaces de leer números del orden de los miles de millones; en caso de que no, aproveche para retomar este asunto. Observe lo que hacen en la tabla de la actividad 4, cuando saben que la base es 20 y la potencia 160 000. ¿Cómo averiguar el exponente cuando se conoce la base y la potencia? Sabemos que esta operación es la logaritmación ($\log_{20} 160\,000 = 4$), lo que significa que el exponente al que hay que elevar la base 20 para obtener 160 000 es 4. Aunque el programa no contempla el estudio de la logaritmación, los alumnos pueden entender en qué consiste el problema de averiguar el exponente cuando se conoce la base y la potencia, y resolverlo por ensayo y error.

En la actividad 6 los alumnos tienen la oportunidad de comparar y comprender lo que cada operación significa. Pregúnteles qué sucedería si el valor de la literal, en este caso n, fuera 1. ¿Seguiría produciendo el mayor número la misma expresión?

En la actividad 7 pueden generarse varias respuestas y, a partir de ellas, establecer patrones para determinar la terminación de los resultados de las potencias, considerando la última cifra del número que aparece en la base. Por ejemplo, las potencias de 1, 11, 21, 31, etcétera, terminan en 1. Como también ocurre para los números terminados en 9 (81, 361, 841, etcétera). De esta manera se promueve la comprensión del significado de la potencia.

Dé el tiempo necesario para que los alumnos resuelvan la actividad 1 de la sesión 2. Se espera que logren entender que "un número elevado al cubo, multiplicado por el mismo número elevado a la cuarta" equivale a decir "un número elevado a la séptima". Con esta base pueden, por ensayo y error, encontrar el número que elevado a la séptima da 128. El problema 1b es similar. De aquí se puede explicar que en ambos casos se trata de productos de potencias de la misma base, $a^3 \times a^4$ en el primer caso, y $a^2 \times a^3$ en el segundo caso, lo que equivale a $a^{3+4} = a^7$ y $a^{2+3} = a^5$, respectivamente.

La resolución de las tablas de las actividades 2 y 4 ayudarán a entender mejor la explicación anterior.

La actividad 7 sirve para verificar cuánto han entendido los alumnos sobre el producto de potencias de la misma base y la potencia de una potencia, pero es importante que sean ellos los que encuentren las respuestas.

Para que los alumnos entiendan que el cociente de dos potencias de la misma base es igual a la base elevada a la diferencia de los exponentes, es necesario usar el método de cancelación. Por ejemplo, $\frac{3^3}{3^4} = \frac{a \times a \times a}{a \times a \times a \times a} = \frac{1}{3} = 3^{3-4} = 3^{-1}$. Pareciera que no es tan difícil entender que si se cancelan tres factores en el numerador (dividendo) y tres en el denominador (divisor), el resultado es $\frac{1}{3}$, puesto que, en el caso del numerador, $3 \times 3 \times 3 = 3 \times 3 \times 3 \times 1$. Por otra parte, este mismo resultado se obtiene al restar al exponente del dividendo, el exponente del divisor.

Una vez que los alumnos logran formular la regla anterior, entenderán el origen del exponente negativo y su equivalencia con una fracción unitaria cuyo denominador es la misma expresión con exponente positivo.

Después de completar la tabla de la actividad 1, sesión 3, la actividad 2 es fundamental para socializar los procedimientos y resultados encontrados por los alumnos. En particular, en el caso de $\frac{18^4}{18^4}$ sería interesante pedirles que den el resultado sin hacer ningún cálculo. ¿Lograrán ver que el resultado es 1, puesto que el dividendo y el divisor son iguales? Además, vale la pena analizar que $\frac{18^4}{18^4} = \frac{18 \times 18 \times 18 \times 18}{18 \times 18 \times 18 \times 18} = \frac{1}{1} = 1 = 18^{4-4} = 18^0$, de donde se concluye que todo número elevado a la potencia cero es igual a 1.

Es probable que las actividades 1 a 3 de la sesión 4 no tengan dificultad para los alumnos, lo que significaría que han entendido la escritura y lectura de números, a lo que agregarán la notación científica. De lo contrario, habrá que regresar a revisar cómo se escriben los números con muchas cifras, del orden de los millones, miles de millones, billones, etcétera. Será necesario que se acostumbren a separar las cifras, de tres en tres, con un espacio; comente a los alumnos que no es correcto usar coma de acuerdo con las normas del Sistema Internacional de Medidas (SI).

Si lo considera necesario, agregue otros casos en la actividad 4. Por ejemplo, la deuda pública es de casi 11 billones de pesos, “¿cómo se escribe esta cantidad en notación científica?”. La mayoría de las bacterias alcanzan un diámetro de un micrómetro, es decir, una millonésima parte de un metro. “¿Cómo se escribe esta cantidad en notación científica?”. Al analizar estos ejemplos, debe quedar claro que la notación científica es de la forma $A \times 10^n$ y que A debe ser un número mayor o igual que 1 y menor que 10.

Pautas para la evaluación formativa

Observe si los alumnos pueden:

- Calcular potencias de exponente entero mediante cálculo mental, escrito y con calculadora.
- Calcular productos de potencias de la misma base y potencias de potencias.
- Discriminar los productos de potencias que no tienen la misma base y decidir no aplicar la regla.
- Calcular cocientes de potencias de la misma base. Discriminar cocientes de potencias que no tienen la misma base y decidir no aplicar la regla.
- Convertir exponentes negativos en positivos.
- Expresar, leer e interpretar cantidades en notación científica.

¿Cómo apoyar?

En caso de que algunos alumnos no logren usar la calculadora para calcular potencias, puede ponerlos a trabajar en pares para que socialicen sus aprendizajes. Para fortalecer el uso de las leyes de los exponentes, ponga ejercicios que les permitan distinguir cuándo son aplicables y cuándo no.

¿Cómo extender?

Plantee ejercicios en los que se deba calcular el exponente cuando se tiene la base y la potencia. Pida a los alumnos que averigüen cómo se hace con la calculadora. Plantee operaciones con literales en las que se pueda, o no, aplicar las leyes de los exponentes.

Si tienen acceso a internet, pídales que busquen cantidades muy grandes o muy pequeñas y que pasen de la escritura decimal a la notación científica, o a la inversa.

Secuencia 16 Raíz cuadrada de números cuadrados perfectos (LT, págs. 132-137)

Tiempo de realización	3 sesiones
Eje temático	Número, álgebra y variación
Tema	Multiplicación y división
Aprendizaje esperado	Resuelve problemas de potencias con exponente entero y aproxima raíces cuadradas.
Intención didáctica	Que los alumnos comprendan la relación inversa entre potenciación y radicación, y que usen la raíz cuadrada al resolver problemas.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	Audiovisual • *Raíz cuadrada de un número*
Materiales de apoyo para el maestro	Recurso audiovisual • *Potencias con exponente entero y la raíz cuadrada*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Comprendan y usen la relación inversa entre la operación de elevar un número o una expresión al cuadrado y obtener la raíz cuadrada de dicho número o expresión.
- Sesión 2. Sistematicen el procedimiento de ensayo y error para aproximar raíces cuadradas.
- Sesión 3. Usen la raíz cuadrada al resolver problemas y que se acerquen a la idea de número irracional.

Acerca de...

Las primeras actividades de esta secuencia apuntan a que los alumnos comprendan y usen la relación inversa entre elevar al cuadrado y obtener la raíz cuadrada, en particular tomando como contexto el área de diferentes cuadrados. Además, se busca que estimen la raíz cuadrada de números naturales que son cuadrados perfectos por la vía de encontrar el número que multiplicado por sí mismo produce el radicando.

En seguida se muestra una manera de sistematizar el procedimiento de ensayo y error para calcular la raíz cuadrada de números con varias cifras, por la vía de encontrar rangos cada vez más cercanos a la raíz cuadrada.

Finalmente, se plantean algunos problemas en los que los alumnos tendrán necesidad de usar la raíz cuadrada y conocerán una caracterización de los números irracionales, sólo para contrastar este tipo de números con los que son cuadrados perfectos.

Sobre las ideas de los alumnos

Elevar al cuadrado y obtener raíz cuadrada no tienen el mismo uso social que sumar y restar o multiplicar y dividir, por lo tanto los alumnos están menos familiarizados con estas operaciones y no les resulta evidente en qué tipo de problemas las pueden usar. Los casos que resuelven con menor dificultad son las raíces cuadradas de números que son cuadrados perfectos, de manera que esta secuencia se centra en el estudio de esos números.

Cuando los alumnos usan el procedimiento de ensayo y error, la mayoría lo hace al azar. Para evitar esto, resulta muy útil que se acostumbren a ordenar sus ideas. Por ejemplo, si se trata de encontrar la raíz cuadrada de 484, es muy probable que hagan varias multiplicaciones al azar, en vez de pensar que $20 \times 20 = 400$ y, por lo tanto, el resultado es cercano a 20.

Como en cualquier operación, una cosa es saber efectuarla y otra saber usarla al resolver problemas. Por eso ambos aspectos deben ir de la mano. Los alumnos necesitan tiempo para analizar y entender en qué consiste el problema, con qué información cuentan para resolverlo, cómo pueden usar esa información y cómo estar seguros de que el resultado al que llegaron es correcto, pues en él intervienen los procesos de comprobación y, por tanto, el uso de las operaciones inversas.

¿Qué material se necesita?

Algunas actividades requieren el uso de calculadora; procure que haya al menos una por pareja, pero es necesario controlar su uso. Si cuenta con el audiovisual *Raíz cuadrada de un número*, lo puede utilizar para que los alumnos conozcan más sobre esta operación.

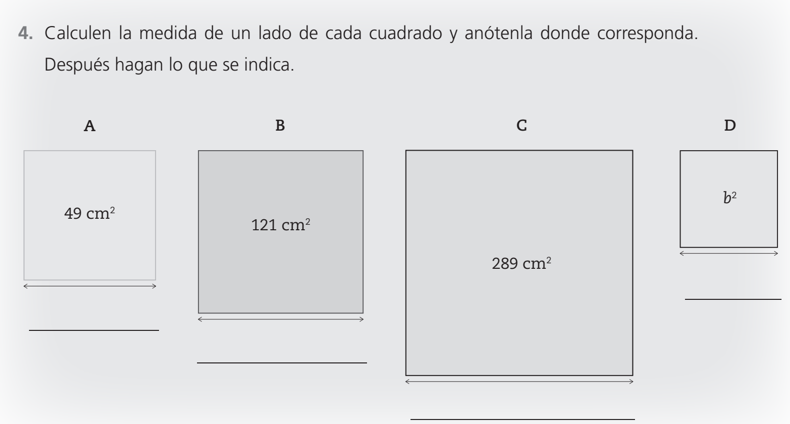
¿Cómo guío el proceso?

Se sugiere no permitir la calculadora en la actividad 4 de la sesión 1. Se trata de números pequeños cuya raíz cuadrada se puede encontrar sin necesidad de hacer muchas operaciones. En cambio, las actividades 4b y 4c sí requieren usar calcula dora. En la actividad 4d, es importante que los alumnos concluyan, en primer lugar, que la medida buscada es mayor que 3 cm y menor que 4 cm, lo que significa que no es una medida entera (o que corresponda a un número natural). Pídales, entonces, que busquen un número con una cifra decimal, pero que, al elevar al cuadrado, dé la medida; el resultado no debe ser mayor que 12. Llegarán a concluir que la medida es mayor que 3.4 cm, pero menor que 3.5 cm.

Pídales que busquen otra cifra decimal (la de centésimos). Se trata de que vean que, entre más cifras decimales tiene la medida buscada, se acercan más a 12. Pregunte entonces: “Si seguimos buscando más cifras decimales, ¿llegaremos a obtener 12?”. Si los alumnos dicen que sí, déjelos que prueben hasta que se convenzan de que no es posible llegar a 12, de manera que hay que optar por dar una medida aproximada, o expresarla como $\sqrt{12}$ cm, que se lee, “raíz cuadrada de doce centímetros”. Este caso se plantea sólo para que los alumnos vean que hay otro tipo de números además de los que son cuadrados perfectos. En especial en la actividad 6, las dos últimas raíces permitirán a los alumnos reflexionar sobre el hecho de que la operación inversa a elevar al cuadrado es la raíz cuadrada y como resultado queda el número 5 o a.

Las actividades 1 y 2 de la sesión 2 son complementarias. Una vez que los alumnos realizan el procedimiento propuesto, se espera que logren explicar en qué consiste. Se sugiere leer en voz alta algunas explicaciones para socializar que la idea central es ir “encerrando” la raíz para tener una aproximación cada vez más precisa. Es importante observar si, en las actividades que siguen, los alumnos usan este recurso y, en todo caso, tenerlo presente cuando la situación se preste. Precisamente la actividad 3 puede resolverse de manera más ágil con el procedimiento de las aproximaciones sucesivas.

Observe cómo se desenvuelven los alumnos en la actividad 6 y brinde la ayuda necesaria, preferentemente durante la puesta en común. En teoría, no debería haber problema para resolver lo que se pide, pero, así como algunos alumnos tienen dificultad para formular dos divisiones con los mismos términos de una multiplicación, también puede haber dificultad en el caso de estas operaciones.



Dé el tiempo necesario para que resuelvan los problemas 1a y 1b de la sesión 3, y después ayúdelos a analizar los procedimientos y resultados encontrados. Se espera que la mayoría logre encontrar el valor de a y el de b, puesto que conocen el área de los cuadrados que se forman.

La diagonal del cuadrado

1. Trabajen en equipo. Resuelvan los siguientes problemas.
   a) El área del cuadrado cuyo lado mide a es 2 500 cm^2. El área del cuadrado cuyo lado mide b es 1 600 cm^2.
      - ¿Cuál es el valor de a? ______________________
      - ¿Cuál es el valor de b? ______________________
      - ¿Cuál es el área de uno de los rectángulos azules? ______________________
      - ¿Cuáles son las dimensiones de uno de los rectángulos azules?
        Largo: ____________ Ancho: ____________

Observe si se percatan de que deben calcular la raíz cuadrada de 2500 y de 1600, respectivamente. Contenga sus ansias de decirles cómo hacerlo. Deje que disfruten de su propio mérito.

Calcular el área del rectángulo azul no es una tarea simple, porque antes hay que averiguar sus dimensiones y para ello hay que hacer inferencias. La primera inferencia es que si $a = 50$ cm y $b = 40$ cm, los 10 cm de diferencia se reparten a la derecha y a la izquierda del cuadrado rojo, de manera que el ancho del rectángulo azul es 5 cm. La otra inferencia es que si a a se le restan los 5 cm de la izquierda, quedan 45 cm de los que, repartidos en tres rectángulos azules, le tocan 15 cm a cada uno, por lo que el largo mide 15 cm.

Observe si en el problema 1b los alumnos convierten $21\frac{1}{8}$ a decimal, pues esto les facilitará calcular el área del rectángulo y, posteriormente, la medida de un lado del cuadrado.

Lea junto con ellos la información del recuadro y aclare las dudas que surjan o plantee preguntas adicionales para asegurarse de que han entendido. Sólo si lo considera necesario, explique la diferencia entre número irracional y número racional. Algunos racionales como $\frac{1}{6} = 1.166\ldots$, tienen una parte decimal infinita, pero hay una cifra (en este caso el 6), o un grupo de cifras que se repiten. En los irracionales no sucede lo mismo, no hay una cifra ni un grupo de cifras que se repitan. Por ejemplo, $\sqrt{12} = 1.414213562\ldots$ Estos números no pueden expresarse mediante una razón $\frac{a}{b}$.

Para contestar la pregunta 3b), los alumnos deben averiguar que el cuadrado azul se forma con cuatro triángulos que son la mitad del área del cuadrado rojo; por lo tanto, el cuadrado azul es dos veces el área del cuadrado rojo. Una vez resuelto este paso, pueden averiguar cuánto miden los lados del cuadrado azul.

Pautas para la evaluación formativa

Use las actividades que considere convenientes para verificar si los alumnos son capaces de:

- Calcular la medida de un lado de un cuadrado conociendo el área y calcular la raíz cuadrada de números que son cuadrados perfectos.
- Usar, en caso necesario, la relación inversa entre elevar al cuadrado y obtener raíz cuadrada.
- Resolver problemas que requieran el uso de la raíz cuadrada.

¿Cómo apoyar?

A los alumnos que muestren dificultad propóngales ejercicios para que usen el cálculo mental, tanto de elevar al cuadrado, como de obtener raíz cuadrada. Cuando se trate de resolver problemas, sugiérales que tracen las figuras que puedan servirles como apoyo gráfico.

¿Cómo extender?

Pida a los alumnos que usen la calculadora para aproximar raíces cuadradas hasta con dos cifras decimales.

Propóngales expresiones como $2^3 = 8$; $3^4 = 81$, y pídales que, en cada caso, usen los mismos términos para escribir la operación inversa.

Pídales que inventen un problema que se pueda resolver utilizando la raíz cuadrada.

Secuencia 17 Reparto proporcional

(LT, págs. 138-143)

Tiempo de realización	3 sesiones
Eje temático	Número, álgebra y variación
Tema	Proporcionalidad
Aprendizaje esperado	Resuelve problemas de proporcionalidad directa e inversa y de reparto proporcional.
Intención didáctica	Que los alumnos resuelvan problemas que implican un reparto proporcional.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisual** • *¿Cuánto le toca a cada quién?* **Informático** • *Repartos proporcionales*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recurso audiovisual** • *La proporcionalidad directa e inversa y el reparto proporcional*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Resuelvan problemas de reparto proporcional de cantidades continuas (rectángulo que representa un terreno).
- Sesión 2. Resuelvan problemas de reparto proporcional de cantidades discretas (cantidad de nueces o almendras).
- Sesión 3. Resuelvan problemas diversos que implican repartos proporcionales.

Acerca de...

En primaria y en primer grado de secundaria los alumnos trabajaron con problemas de proporcionalidad directa. En el bloque 1 de este segundo grado se iniciaron en el trabajo con la proporcionalidad inversa. En esta secuencia seguirán profundizando su estudio en este tema al resolver problemas de reparto proporcional, por ejemplo, distribuir proporcionalmente la ganancia de un negocio entre varias personas que hayan hecho aportes diferentes para la inversión inicial.

Es importante mencionar que en este tipo de problemas se integran varios contenidos, en particular el uso de fracciones y de la fracción como operador, ya que para resolverlos los alumnos tienen que:

1) Determinar qué parte de una cantidad es otra, por ejemplo, ¿qué parte de 12 es 8? En este caso, 8 es $\frac{2}{3}$ de 12.
2) Determinar el valor de cierta fracción de número, por ejemplo, cuánto es $\frac{3}{5}$ de 20.

Los alumnos podrían intuir que un reparto justo es un reparto proporcional. Supongamos que se quiere repartir nueces a dos equipos con distinta cantidad de integrantes. Una primera idea es que el equipo que tiene más integrantes debería recibir más nueces. Y la segunda es que se requiere calcular cuántas nueces más deben recibir. No obstante, la idea de reparto proporcional implica que los alumnos no sólo determinen quiénes recibirán más nueces, sino también que calculen cuántas más. En algunos casos es sencillo: si un equipo tiene la mitad del número de integrantes que otro equipo, al hacer un reparto proporcional el primero recibirá la mitad de lo que reciba el segundo. Y en otros puede resultar más complicado: si un equipo tiene 3 integrantes y el otro 5, ¿cómo repartir 16 nueces proporcionalmente al número de integrantes?

Las razones implícitas en los repartos proporcionales son equivalentes. En el problema anterior, al primer equipo se le darán 6 nueces y al segundo 10, y la igualdad de las razones de alumnos a nueces queda expresada por:

$$\frac{3}{6} = \frac{5}{10}$$

Sobre las ideas de los alumnos

La manera en que los alumnos resuelven los problemas de reparto puede verse influida por el contexto. Por ejemplo, puede pasar que entre varios alumnos compren algo y no se fijen en quién aportó más y luego repartan lo comprado por partes iguales, es decir, hacen un reparto equitativo. En cambio, cuando se les plantea la situación de cuánto dinero deben recibir varias personas por su trabajo, pueden reconocer que lo justo es que se le pague más a quien trabajó más.

¿Cómo guío el proceso?

En la actividad 1 de la primera sesión permita que los alumnos dividan los rectángulos sin decirles cómo. Los repartos planteados van aumentando en complejidad. En el primero sólo deben dividir a la mitad el rectángulo porque cada persona puso la misma cantidad. El reparto del terreno 2 implica la mitad y dos cuartos. El reparto del terreno 3 es más complejo, quizá los alumnos no tengan problemas en determinar que a Jessica le corresponde la mitad del terreno, pero en cuanto a la otra mitad, tendrán que averiguar: ¿qué parte de $30000 es $20000?, esto es, $\frac{2}{3}$ le tocan a Christian y $\frac{1}{3}$ a Laura. Indique que no es necesario que los trazos sean muy precisos, pero sí que permitan apreciar en la figura que la parte de Christian es, aproximadamente, el doble de la que le corresponde a Laura.

El reparto más complejo es el del terreno 6. Los alumnos tienen que determinar qué parte de 60000 son 20000, 12000, 24000 y 4000. Para hacerlo, pueden seguir varios procedimientos. Uno de ellos es dividir cada cantidad entre 60000.

A Lourdes le toca $\frac{20\,000}{60\,000} = \frac{1}{3}$, es decir, la tercera parte del terreno.

A Blanca le toca $\frac{12\,000}{60\,000} = \frac{1}{5}$, o sea, la quinta parte del terreno.

Como Andrés cooperó con el doble de lo de Blanca, se espera que los alumnos noten que le toca el doble, es decir, $\frac{2}{5}$ partes del terreno.

Con Guillermo pueden proceder de varias maneras, por ejemplo:

a) Con la división:

$$\frac{4\,000}{60\,000} = \frac{1}{5}$$

b) Guillermo puso la tercera parte de lo que puso Blanca, le toca la tercera parte de $\frac{1}{5}$, es decir $\frac{1}{15}$

c) Al repartir lo de Lourdes, Blanca y Andrés se tiene:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{5}{15} + \frac{3}{15} + \frac{6}{15} = \frac{14}{15}$$

Lo que queda del terreno es $\frac{1}{5}$

Observe que, en general, los problemas de repartos proporcionales son una buena oportunidad para recordar y practicar el trabajo con fracciones. Indique a los alumnos que, en algunos casos, es mejor trabajar con fracciones para no tener que hacerlo con decimales periódicos.

Sugerencia: en la puesta en común enfatice que si dos personas compran un pastel, pero una de ellas sólo coopera con la tercera parte del costo, obtendrá un tercio del pastel y la otra los otros dos tercios. En cambio, si cada una cooperara con la mitad, obtendría $\frac{1}{2}$ del pastel.

Esta idea acerca del doble, la tercera, cuarta o quinta parte debe ser recurrente a lo largo del trabajo con esta secuencia.

En la sesión 2 es probable que algunos alumnos piensen que tienen que averiguar desde el principio la cantidad que les toca de nueces, almendras y pistaches a cada equipo. Aclare que eso lo harán hasta la actividad 3.

Se pretende que los alumnos continúen trabajando con la idea de repartos proporcionales. Si un equipo tiene el doble (triple, cuádruple, etcétera) de integrantes que otro equipo, al primero le toca el doble (triple, cuádruple, etcétera) de nueces, almendras y pistaches que al segundo.

Además de trabajar las ideas expuestas anteriormente, es importante que enfatice que la suma de lo que recibe cada equipo debe coincidir con el total de lo que se repartió. La tabla

3. Si va a repartir también 200 gramos de piñones y 250 gramos de cacahuates, escriban lo que debe darle a cada equipo.

Equipo / Semilla	1	2	3	4	5	Total
Piñones (gramos)						200
Cacahuates (gramos)						250

de la actividad 3 permitirá trabajar esta idea al indicar el total; pida que se verifique si al sumar se obtiene el total de gramos de piñones y de cacahuates. Relacione esta idea con la sesión anterior: el terreno se repartía completo entre todos los que lo compraron.

Un procedimiento que puede surgir en los problemas de reparto de la sesión 2 es el cálculo de lo que le toca a un alumno. Por ejemplo, en total hay 25 alumnos y 75 nueces, por lo tanto, a cada alumno le tocan tres nueces, entonces al equipo 1 le darán 6 × 3 = 18 nueces, al equipo 2 le darán 5 × 3 = 15 nueces, etcétera.

En la sesión 3, con el fin de que practiquen los alumnos, se recomienda resolver los problemas del recurso informático *Repartos proporcionales*.

Pautas para la evaluación formativa

Observe el trabajo de los alumnos para detectar si:

- Identifican la variable independiente de los problemas (cantidad que aportó cada quien para comprar el terreno, número de integrantes del equipo, horas trabajadas, cantidad de pared que pintaron, etcétera).
- Identifican la variable dependiente (la cantidad de terreno que les toca depende de lo que aportaron; la cantidad de nueces depende del número de integrantes; la ganancia depende de las horas trabajadas o de la cantidad de pared que pintaron, etcétera).
- Determinan qué fracción de una cantidad es otra: qué fracción de 60 000 son 20 000 (por ejemplo).
- Pueden calcular determinada fracción de una cantidad: ¿cuánto es $\frac{3}{5}$ de 75?

¿Cómo apoyar?

Estos problemas pueden resultar complejos para los alumnos porque involucran varios contenidos matemáticos trabajados con anterioridad y también requieren desarrollar un razonamiento proporcional.

Si observa que les cuesta trabajo, puede apoyarlos con algunas preguntas que los hagan reflexionar y analizar las situaciones:

- ¿De qué depende la parte del terreno que le toca a cada uno?
- ¿Cómo podrías determinar esa parte?, ¿crees que te pueden ayudar las fracciones?, ¿cómo?, ¿cómo puedes saber qué parte de 60000 es 12000?

Si los alumnos tienen dificultad para trabajar con fracciones en alguno de los problemas, puede hacer un alto y repasar en grupo lo que les esté costando trabajo.

¿Cómo extender?

Solicite que inventen un problema de reparto proporcional. Elija algunos y plantéelos al grupo para resolverlos y discutirlos.

Secuencia 18 Figuras geométricas y equivalencia de expresiones 2 (LT, págs. 144-149)

Tiempo de realización	3 sesiones
Eje temático	Número, álgebra y variación
Tema	Patrones, figuras geométricas y expresiones equivalentes
Aprendizaje esperado	Formula expresiones de primer grado para representar propiedades (perímetros y áreas) de figuras geométricas, y verifica equivalencias de expresiones, tanto algebraica como geométricamente (análisis de las figuras).
Intención didáctica	Que los alumnos ensayen, manipulen y validen diferentes representaciones algebraicas de primer grado que son equivalentes para obtener el perímetro de una figura geométrica o de su área.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisuales** • *Expresiones algebraicamente equivalentes* • *Otras expresiones algebraicamente equivalentes* **Informático** • *Expresiones equivalentes 2*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recurso audiovisual** • *Expresiones de primer grado para representar propiedades de figuras geométricas y equivalencia de expresiones*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Manipulen expresiones algebraicas para encontrar expresiones equivalentes que corresponden al perímetro de figuras geométricas o de su área.
- Sesión 2. Transformen expresiones algebraicas en otras que sean equivalentes, empleando propiedades de la igualdad que les permiten garantizar que son equivalentes.
- Sesión 3. Apliquen la noción de equivalencia para obtener expresiones algebraicas equivalentes a partir de expresiones determinadas o al calcular el perímetro y el área de composición de figuras geométricas.

Acerca de...

Ésta es la segunda de dos secuencias dedicadas a fortalecer la noción de equivalencia de expresiones algebraicas en el contexto de obtener el perímetro y el área de figuras geométricas mediante transformaciones algebraicas. Las expresiones algebraicas que se obtienen son, generalmente, las fórmulas para calcular el perímetro y el área de las figuras geométricas; sin embargo, el trabajo se centra en buscar expresiones equivalentes a esas fórmulas a partir de las distintas medidas y características de las figuras o de la composición de figuras que se proponen, lo cual implica para el alumno la necesidad de manipular y transformar las expresiones algebraicas. Si bien aún se sigue recurriendo a contextos geométricos, se dejarán gradualmente para dar paso a situaciones algebraicas, como ocurre en la sesión 3.

La equivalencia de expresiones algebraicas es una idea matemática fundamental en este grado y en el nivel de secundaria, sustentada en las propiedades de la igualdad. En particular, las actividades propuestas en esta secuencia, junto con las de la secuencia 7 y las secuencias 6 y 19 (que forman el trayecto formativo relacionado con sucesiones), se complementan para que los alumnos logren la noción de equivalencia y puedan luego asimilar procesos como la factorización de expresiones algebraicas, así como comprender y manipular los procedimientos que se les presentarán en la resolución de ecuaciones y funciones.

Los alumnos deben comprender que una solución puede obtenerse de diversas maneras, siempre y cuando se apliquen correctamente las reglas y propiedades de la igualdad. Para ello se propone verificar la equivalencia asignando valores numéricos, lo cual, de ningún modo, representa una demostración matemática; hay que señalar de manera enfática que es sólo eso: una verificación de casos particulares.

Sobre las ideas de los alumnos

Desde primer grado los alumnos han tenido experiencias sobre lo que significa que dos expresiones algebraicas sean equivalentes. Sin embargo, es posible que aún tengan dificultades respecto a la manipulación algebraica y consideren que expresiones de suma como, por ejemplo, $\frac{5a}{2} + \frac{5a}{2}$ es equivalente a $\frac{10a}{4}$, y no visualicen que se trata de la suma de la mitad de $5a$ dos veces. O que $\frac{5a}{2} + \frac{5a}{2} = 5a$. Precisamente la obtención del perímetro de la figura que presenta esas medidas les ayuda a comprender el resultado de la suma algebraica.

Los alumnos deben comprender de qué manera se utilizan las literales para referirse a la medida de un lado de las figuras. Por ejemplo, en el caso de la actividad 3 de la sesión 2, la medida del largo del rectángulo rosa es $x + 2$. Así que si tuvieran que obtener su perímetro, sería equivalente a la suma $2(x + 2) + 2h$ y su área será igual al producto $h(x + 2)$, lo que es equivalente a $hx + 2h$, pero no a $hx + 2$, ya que la medida del largo es $x + 2$, y no sólo x, como algunos alumnos pueden considerar.

¿Qué material se necesita?

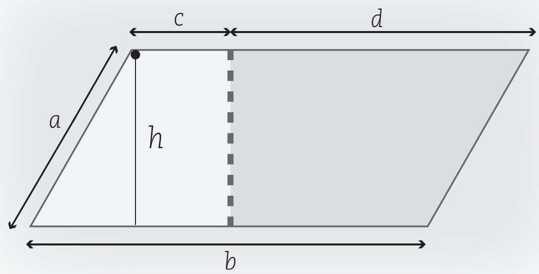
Para esta secuencia se han diseñado dos audiovisuales y un recurso informático. Los audiovisuales complementarán estrategias y procedimientos para la manipulación algebraica y la obtención de expresiones equivalentes. El recurso informático *Expresiones equivalentes 2* proporcionará más actividades para que el alumno adquiera mayor destreza y soltura en la manipulación algebraica. Posiblemente se necesite calcar o copiar las figuras geométricas propuestas para manejarlas físicamente y así los alumnos tengan una mayor comprensión de lo que implica la manipulación algebraica.

¿Cómo guío el proceso?

En la primera actividad de la sesión 1, los alumnos revisan y aplican los conocimientos y estrategias adquiridos en la secuencia 7 del bloque 1. En la actividad 2, la figura es un romboide que se puede transformar, a partir del corte que se indica, en un trapecio o en un rectángulo. Esas transformaciones geométricas requieren plantear nuevas expresiones algebraicas que representen el área de cada figura y se deberá verificar si son equivalentes o no. Una de las medidas implica la fracción $\frac{1}{2}$ con el propósito de que los alumnos comiencen a manipular este tipo de números en expresiones algebraicas.

En la actividad 3 se pide verificar la equivalencia de las expresiones que corresponden al área de las figuras dando valores numéricos a las literales que representan las medidas de las bases y alturas. En la actividad 4 se solicita identificar cuáles de las expresiones propuestas también son equivalentes a la que encontraron. Tal vez algunos alumnos hayan planteado ya alguna de las propuestas anteriormente, lo interesante será analizar que las tres expresiones son equivalentes y justificar por qué lo son, en cuyo caso se centra en el trabajo algebraico.

En la sesión 2, la primera actividad consiste en pasar del álgebra a la geometría al proporcionar expresiones algebraicas que corresponden a las áreas de dos rectángulos, que a su vez componen otro. Habrá que pedirles a los alumnos que representen geométricamente la composición



correspondiente. Para lograrlo, los alumnos deben considerar que cada expresión algebraica es el modelo de un rectángulo y tendrán que determinar la manera en que es conveniente disponer del largo y ancho para que conformen la figura resultante, que también es un rectángulo. Esto está determinado por las reglas algebraicas que deberán reconocer los estudiantes para trazar así cada figura. En la segunda actividad, el trabajo se centra en verificar la igualdad entre las expresiones algebraicas, lo que requiere de la destreza de los estudiantes para manipular las expresiones; éste es el trabajo esencial de la secuencia y por eso es importante que algunos alumnos partan del lado izquierdo de la igualdad y otros desde el lado derecho, como se indica en la instrucción de la actividad.

Las actividades 3 y 4 implican utilizar expresiones algebraicas de la forma $(x + a)$, tanto para multiplicar como para sumar.

Para terminar, en la primera actividad de la sesión 3, los alumnos deben transformar expresiones algebraicas en otras equivalentes, ya sin el contexto de obtener el perímetro o el área de figuras.

Pautas para la evaluación formativa

Observe si los alumnos logran:

- Transformar figuras geométricas mediante el planteamiento de nuevas expresiones algebraicas que representan el área de figuras, y verificar si son equivalentes o no.
- Utilizar fracciones en expresiones algebraicas.
- Usar la equivalencia de las expresiones que corresponden al área de las figuras dando valores numéricos a las literales que representan las medidas de las bases y las alturas.
- Identificar y justificar cuáles son las expresiones equivalentes.
- Pasar del álgebra a la geometría luego de proporcionarles las expresiones algebraicas que corresponden a las áreas de dos rectángulos que componen otro; representar geométricamente una composición.
- Reconocer las reglas algebraicas para trazar cada figura geométrica.
- Reconocer la igualdad entre las expresiones algebraicas.
- Utilizar expresiones algebraicas de la forma $x + a$, tanto para multiplicar como para sumar.
- Transformar expresiones algebraicas en otras equivalentes para obtener el perímetro o el área de figuras.
- Comprender la equivalencia de expresiones algebraicas y de transformación cuando sólo un dato corresponde a una literal.
- Convertir expresiones algebraicas en otras equivalentes, para lo cual aplican propiedades de la igualdad que les permiten responder que son equivalentes.
- Emplear la noción de equivalencia para obtener expresiones algebraicas equivalentes a partir de expresiones determinadas o al calcular el perímetro y el área de composición de figuras geométricas.
- Obtener expresiones algebraicas equivalentes para calcular el perímetro de una figura y verificar su equivalencia.

¿Cómo apoyar?

Es probable que algunos alumnos aún tengan dificultades para pasar de lo geométrico a lo algebraico; una manera de ayudarlos es mediante el manejo directo de las figuras geométricas; es decir, quizá resulte conveniente trazar y recortar las figuras para que los alumnos puedan manipularlas y comprobar de manera concreta y directa que, al cambiar la disposición de las figuras, no se altera su área, pero que la nueva configuración da origen a nuevas expresiones algebraicas.

También recuerde a los estudiantes las reglas y manipulaciones algebraicas que aprendieron en la secuencia 6 al trabajar con sucesiones.

¿Cómo extender?

En el caso de la actividad 3 de la sesión 2 puede pedir que obtengan el perímetro de cada rectángulo que aparece y lo comparen con el perímetro del rectángulo rojo. Observarán que la suma de los perímetros de los rectángulos rosa, verde y azul no es equivalente al del rectángulo rojo, pida entonces que justifiquen por qué.

Secuencia 19 Sucesiones y expresiones equivalentes 2

(LT, págs. 150-155)

Tiempo de realización	3 sesiones
Eje temático	Número, algebra y variación
Tema	Patrones, figuras geométricas y expresiones equivalentes
Aprendizaje esperado	Verifica algebraicamente la equivalencia de expresiones de primer grado, formuladas a partir de sucesiones.
Intención didáctica	Que los alumnos transformen una expresión algebraica en otra equivalente utilizando como contexto matemático las sucesiones numéricas.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisual** • *Operaciones algebraicas* **Informático** • *Sucesiones de números*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recurso audiovisual** • *Sucesiones numéricas y expresiones equivalentes* **Bibliografía** • Pérez Carrizales, César O. (s.f.). "Sucesiones numéricas", en *Asesoría secundaria 1*. Disponible en http://recursos.salonesvirtuales.com/wp-content/uploads/bloques/2012/06/Susesionesnumericas.pdf (Consultado el 10 de julio de 2019). • Ramírez G., Paola, "Actividades: sucesiones numéricas". Disponible en https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-21363_recurso_pdf.pdf (Consultado el 10 de julio de 2019).

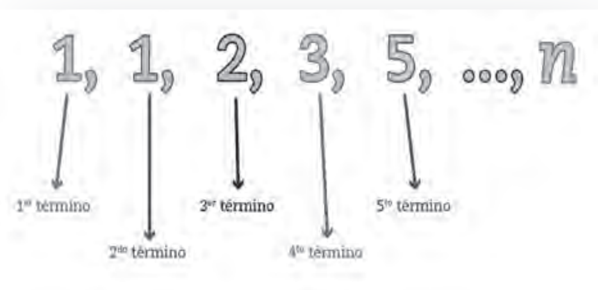
¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Escriban expresiones algebraicas en otras formas equivalentes, utilizando como contexto sucesiones de números.
- Sesión 2. Obtengan expresiones algebraicas equivalentes a partir de una sucesión de números decimales o fraccionarios, y argumenten por qué las expresiones algebraicas obtenidas son equivalentes.
- Sesión 3. Encuentren expresiones algebraicas equivalentes que impliquen fracciones.

Acerca de...

En esta secuencia se continúa trabajando el tema de patrones en sucesiones numéricas, no sólo para analizar las regularidades y encontrar la regla, sino para practicar la equivalencia de expresiones algebraicas con base en que éstas representan la misma sucesión. Esta secuencia es continuación de la número 6; así, el alumno sigue, por un lado, analizando sucesiones de números y encontrando la regla y, por otro lado, determinando expresiones equivalentes. El manejo de la sintaxis algebraica, el uso de paréntesis, el trabajo con números con signo, así como el manejo de números decimales y fraccionarios son puntos importantes para encontrar dichas expresiones, y se practicará a lo largo de la secuencia.



Sobre las ideas de los alumnos

Es probable que los estudiantes continúen teniendo dificultades para reconocer un patrón, y más aún para representar con una expresión algebraica la regla que sigue una sucesión de números; sin embargo, el propósito fundamental en esta secuencia es comprender la equivalencia de expresiones algebraicas. El grado de complejidad se incrementa al trabajar sucesiones con fracciones y con números decimales, por lo que el acompañamiento que pueda proporcionarles para el reconocimiento del patrón que sigue la sucesión es fundamental.

¿Cómo guío el proceso?

En la sesión 1, los alumnos empiezan buscando expresiones equivalentes a $n + n + 1$, que pueden ser: $2n + 1$; $n + (n + 1)$, y es posible que hasta aparezcan las expresiones $2(n + 0.5)$ o $2(n + \frac{1}{2})$. Si las dos últimas no aparecen, puede proponerlas y promover la discusión de si son equivalentes o no.

En las actividades de "Manos a la obra", después de encontrar la regla de la sucesión dada $3n - 2$, enfoque los esfuerzos en obtener todas las expresiones equivalentes posibles; por ejemplo, se pueden escribir las siguientes:

$$n + n + n - 2;\ 2n + n - 2;\ 2n - 2 + n;$$
$$2(n - 1) + n;\ 3(n - \tfrac{2}{3})$$

Si la última expresión no surge, usted puede proponerla y pedir a los estudiantes que verifiquen si es equivalente.

Posteriormente, se presentan sucesiones que involucran enteros negativos: sucesión III, cuya regla puede expresarse como $-4n$, y en la sucesión IV, como $12n - 3$. En ambas, el manejo de los números con signo es fundamental para encontrar las expresiones equivalentes.

En la sesión 2, se parte de una sucesión de números decimales. Encontrar la regla de la sucesión $(\frac{n}{2} + 0.5)$ puede ser difícil, por lo que tendrá que apoyar a sus alumnos para que lo logren. Ponga especial interés en promover que los estudiantes utilicen las expresiones decimal y fraccionaria de un número cuando sea posible.

En la sesión 2, actividad 2, se presenta la sucesión $\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{18}, \frac{1}{24}, \ldots$ cuya regla puede expresarse como $\frac{1}{6n}$, donde la tarea principal es trabajar con expresiones algebraicas que involucran fracciones. El acompañamiento es fundamental para encontrar las expresiones equivalentes. Una opción es revisar esta actividad de manera grupal, una vez que los estudiantes traten de resolverla en pareja. Compruebe con el grupo si las expresiones que se presentan en el punto a) son equivalentes. Los puntos b) y c), donde se pide que verifiquen que la fracción $\frac{1}{300}$ forma parte de la sucesión y que encuentren formas equivalentes de expresar las fracciones de la sucesión, es un buen momento para verificar si tienen alguna dificultad para operar fracciones y apoyarlos en este aspecto.

Se sugiere lo mismo para la actividad 4 que presenta la sucesión $\frac{3}{4}, \frac{3}{2}, \frac{9}{4}, 3, \frac{15}{4}, \frac{9}{2}, \ldots$, donde la regla puede expresarse como $\frac{3}{4}n$. Es importante que los alumnos se den cuenta de que algunos términos de la sucesión están expresados con fracciones equivalentes, ya que al utilizar la regla $\frac{3}{4}n$ se genera la sucesión $\frac{3}{4}, \frac{6}{4}, \frac{9}{4}, \frac{12}{4}, \frac{15}{4}, \ldots$

3. Completen las siguientes sucesiones de números y escriban una expresión algebraica que las genere.

Sucesión	Posición del término						n (regla de la sucesión)
	1ro	2do	3ro	4to	5to	6to	
III	–4	–8		–16		–24	
IV	–9		–3	0	3		

2. Completen la siguiente sucesión de números y escriban una expresión algebraica que la genere.

Posición del término	1^{ro}	2^{do}	3^{ro}	4^{to}	5^{to}	6^{to}	n (regla de la sucesión)
Sucesión VI	$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{24}$		$\frac{1}{36}$	

a) Marquen con una palomita (✓) las expresiones algebraicas equivalentes a la expresión que encontraron para la sucesión 6 y, en su cuaderno, expliquen por qué lo son.

☐ $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3n}\right)$ ☐ $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2n}\right)$ ☐ $\frac{6}{n}$

☐ $\frac{n}{6}$ ☐ $0.6n$ ☐ $\frac{n^{-1}}{6}$

La sesión 3 presenta más sucesiones con expresiones algebraicas con fracciones. La primera $\frac{1}{4n} + \frac{1}{8}$, genera la sucesión $\frac{1}{4} + \frac{1}{8}, \frac{1}{8} + \frac{1}{8}, \frac{1}{12} + \frac{1}{8}, \frac{1}{16} + \frac{1}{8}, \frac{1}{20} + \frac{1}{8},\ldots,$ donde los estudiantes pueden escribir los resultados de cada suma como otra forma de escribir la sucesión; sin embargo, el énfasis debe ponerse en encontrar expresiones equivalentes, como $\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\right), \frac{1}{4} \times \left(n^{-1} + \frac{1}{2}\right)$. Expresiones del tipo n^{-1} como una expresión equivalente a $\frac{1}{4}$, deben ser reforzadas siempre que sea necesario.

Pautas para la evaluación formativa

Los alumnos, en la primera sesión:

- Reconocen las regularidades de una sucesión de números y pueden expresar la regla mediante una expresión algebraica.
- Escriben expresiones equivalentes y argumentan por qué son equivalentes.

En la segunda y tercera sesión:

- Manejan y determinan expresiones equivalentes con fracciones o números decimales.
- Utilizan alguna estrategia para encontrar expresiones equivalentes con números enteros, decimales y fraccionarios.

¿Cómo apoyar?

Si observa que algunos estudiantes siguen teniendo problemas para reconocer las regularidades de las sucesiones y expresar la regla algebraicamente, apóyelos para que lo consigan. Ésta es una habilidad que se consolidará después de realizar muchas actividades de este tipo.

También aproveche todas las actividades para reforzar la operación de las expresiones algebraicas, principalmente cuando involucran fracciones y decimales. Siempre que lo crea conveniente, revise las actividades de manera grupal.

¿Cómo extender?

La sesión 3 es la forma de extender el trabajo de expresiones equivalentes. Puede presentar otras, pero siempre considerando que los estudiantes requerirán más apoyo y que es un aprendizaje que no debe ser consolidado en este momento.

Secuencia 20 Sistemas de ecuaciones. Métodos de igualación y de sustitución (LT, págs. 156-161)

Tiempo de realización	3 sesiones
Eje temático	Número, álgebra y variación
Tema	Ecuaciones
Aprendizaje esperado	Resuelve problemas mediante la formulación y solución algebraica de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.
Intención didáctica	Que los alumnos resuelvan situaciones que requieran el planteamiento de un sistema de ecuaciones y utilicen los métodos de igualación y sustitución para encontrar su solución.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisuales** • *Operaciones algebraicas 2* • *Métodos de igualación y sustitución para resolver sistemas de ecuaciones* **Informático** • *Métodos de resolución de sistemas de ecuaciones 1*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recurso audiovisual** • *Métodos de resolución de sistemas de ecuaciones 2 x 2*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Resuelvan una situación problemática que implica plantear un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas utilizando el método gráfico y, a partir de él, introducir un nuevo método de resolución: el de igualación.
- Sesión 2. Conozcan y utilicen el método de sustitución a partir de los métodos gráfico y de igualación, para continuar resolviendo problemas que implican plantear un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.
- Sesión 3. Resuelvan otros sistemas de ecuaciones lineales utilizando los métodos aprendidos: igualación y sustitución.

Acerca de...

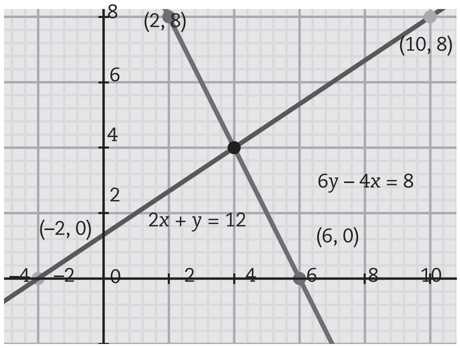
En esta secuencia los alumnos continúan trabajando en el tema de ecuaciones y, en particular, con sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas como se inició en la secuencia 5, donde el método utilizado para resolverlos fue el gráfico. Ahora se introducen dos métodos algebraicos: el de igualación y el de sustitución.

Es importante señalar que, para que un estudiante adquiera destreza en el uso de estos métodos de resolución de problemas, es necesario que domine la manipulación simbólica y aprecie el valor que tiene, así que es un buen momento para poner énfasis en este aspecto del álgebra adquirido en las secuencias 18 y 19 de este bloque, así como también en la 5, 6 y 7 del bloque 1.

Sobre las ideas de los alumnos

Aunque esta secuencia continúa lo aprendido en la secuencia 5, es importante retomar algunas de las concepciones o ideas que puedan tener los alumnos al trabajar con ecuaciones y, en especial, con sistemas de ecuaciones. Por ejemplo, indague si tratan de resolver el problema planteando una sola ecuación, sin reparar en que hay dos incógnitas, y si perciben que plantear una sola ecuación con dos incógnitas no les permitirá encontrar una solución. Por ello, antes de elegir el método por el cual han de resolver el sistema de ecuaciones, hay que plantear el sistema.

Es indispensable asegurarse de que los alumnos comprenden que cada una de las literales (incógnitas) de las ecuaciones del sistema representan la misma cantidad desconocida en ambas. Esto significa que el valor de x es el mismo en la primera y en la segunda ecuación; lo mismo ocurre con el valor de y. Por lo anterior, se debe enfatizar la diferencia entre la solución de una ecuación lineal con una incógnita y la solución de un sistema 2×2, recalcando que los valores numéricos obtenidos para las incógnitas deben satisfacer simultáneamente ambas ecuaciones. Esto lo observaron en el método gráfico como el punto de intersección entre ambas líneas rectas. De ahí que se apoyen en el uso de ese método para comprender qué se busca con la aplicación de los nuevos métodos que van a estudiar.



¿Cómo guío el proceso?

En la sesión 1, los alumnos tendrán que resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, primero por el método gráfico y luego igualando las ecuaciones que corresponden al despeje de y. El trabajo en pareja permite que primero, entre compañeros, se apoyen en aspectos como el despeje de literales y la obtención de la gráfica.

Una vez resuelto el sistema, retome los despejes de la incógnita y que realizaron para elaborar la tabla de valores. Enfatice que la solución del sistema, es decir, que el punto (x, y) es común en ambas rectas, y sus valores hacen verdaderas las dos ecuaciones, por lo que las expresiones que se obtienen al despejar y en ambas ecuaciones representan el mismo valor y, por lo tanto, pueden igualarse. Éste es el fundamento del método de igualación. Posteriormente, los estudiantes resolverán otro problema de manera guiada por el proceso que se presenta, para que vayan identificando paso a paso en qué consiste dicho método. Es conveniente que al terminar la actividad discutan en grupo las dificultades que se presentaron y se aclaren las dudas, ya sea en el planteamiento de las ecuaciones, en la manipulación simbólica o en la interpretación de la solución.

Destaque que el despeje de la literal no siempre tiene que ser la incógnita y, también pueden despejar x y aplicar el método de igualación. Si lo cree adecuado en este momento, pida a los alumnos que resuelvan de nuevo el problema despejando inicialmente la incógnita x. Recuerde resaltar por qué este método se llama de igualación: se despeja cualquiera de las incógnitas en ambas ecuaciones y se igualan las expresiones que se obtienen. Estas ideas resultan claves para entender e identificar los métodos.

En la sesión 2 se propone un problema en que el sistema presenta ecuaciones con coeficientes decimales que corresponden a la expresión de porcentajes. De nuevo se parte de la solución del sistema por el método gráfico. Apoye lo necesario a los alumnos si presentan alguna dificultad en la manipulación simbólica durante el proceso de resolución. Señale que también pueden iniciar despejando la incógnita *y* en cada ecuación lineal; guíelos para que identifiquen los pasos del método de sustitución y reconozcan algunas de las propiedades de la igualdad que se aplican.

$x + y = 30$ $x + y = 26$	$x + y = 26$ $0.25x + 0.75y = 30$
$x + y = 30$ $0.75x + y = 26$	$x + y = 26$ $0.75x + 0.25y = 30$

En la actividad 2 los alumnos resolverán un sistema de ecuaciones cuyas incógnitas son coeficientes fraccionarios. Posiblemente la manipulación simbólica todavía se les dificulte en la resolución del problema, por lo que será necesario acompañar a los alumnos en el proceso, resaltando lo que sucede al despejar la misma incógnita en ambas ecuaciones y lo que pasa con sus coeficientes. Si lo considera conveniente, realice los despejes de la incógnita en cada ecuación de manera grupal para que los estudiantes puedan expresar sus dudas.

En la actividad 3, se solicita a los estudiantes que, en equipos, analicen los métodos de igualación y sustitución para llegar a los mismos procedimientos de manera grupal.

En la sesión 3 se continúan resolviendo sistemas de ecuaciones mediante los tres métodos trabajados hasta ahora; por un lado, para que los estudiantes reconozcan que, por cualquier método, el resultado tiene que ser el mismo y, por otro, para que determinen en qué tipo de ecuaciones les parece más adecuado o más fácil aplicar un método u otro.

El problema que se propone en la actividad 1 implica ecuaciones con coeficientes decimales, por lo que será necesario el acompañamiento para que puedan llegar a plantear el sistema:

$$\begin{aligned} 0.5x + 0.8y &= 24 \\ 0.75x + 0.7y &= 26 \end{aligned}$$

Resolver el problema por el método gráfico es una forma de validar los resultados obtenidos a partir de los métodos algebraicos.

¿Cuál es el método más conveniente?

1. Trabajen en pareja el siguiente problema.

   En el grupo 2° B, han aprobado la asignatura de Inglés 50% de las alumnas y 80% de los alumnos, mientras que Matemáticas la aprobó 75% de las alumnas y 70% de los alumnos. Calculen el número de alumnas y de alumnos que hay en el grupo si el total de aprobados es 24 en Inglés y 26 en Matemáticas. Analicen y contesten las siguientes preguntas para resolver el problema:

Le recomendamos acostumbrar a los alumnos a que, una vez que obtengan los valores de las incógnitas, comprueben que, en efecto, son la solución del sistema al sustituir sus valores en ambas ecuaciones para verificar que las hacen verdaderas.

Pautas para la evaluación formativa

Los propósitos didácticos de esta secuencia están centrados en el aprendizaje de métodos algebraicos para resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, por lo que en este proceso formativo será conveniente observar si los alumnos logran:

- Plantear sistemas de ecuaciones lineales que resuelven un problema, traduciendo del lenguaje común al lenguaje algebraico.
- Obtener el valor de las incógnitas siguiendo los pasos del método de igualación o el de sustitución.

Es importante señalar que no es motivo de evaluación que los estudiantes aprendan de memoria los pasos de cada método, ya que una vez comprendidas las ideas principales que implica cada uno, el alumno puede omitir pasos o hacer dos en uno, lo cual es válido, pues significa que ha comprendido el método.

En la tercera sesión es conveniente valorar si los métodos y las diferencias sustanciales entre ellos han sido comprendidos por los estudiantes. En el momento en que se plantea un problema y se les pide que lo resuelvan por el método que crean más conveniente, lo que hay que evaluar es que lleguen a la solución, no tanto el método utilizado.

¿Cómo apoyar?

Si ve que algunos estudiantes tienen problemas para plantear el sistema de ecuaciones, es decir, comprender el problema y traducirlo del lenguaje común al lenguaje algebraico, apóyelos analizando con ellos el texto del problema y las ecuaciones que plantean para que identifiquen qué partes no están bien representadas, sobre todo cuando hay involucrados coeficientes fraccionarios o decimales.

Si los estudiantes presentan dificultades para operar algebraicamente en cualquiera de los métodos, éste es un buen momento para recordar cómo sumar, restar, dividir y multiplicar algebraicamente. Dedique el tiempo necesario para que no queden dudas al respecto.

¿Cómo extender?

Presente a los estudiantes algunos problemas que impliquen el planteamiento de un sistema de ecuaciones. Elija problemas que requieran el uso de números fraccionarios o decimales, ya que operar con ellos presenta mayor dificultad. Recuerde que la adquisición de la destreza en la manipulación algebraica es una de las intenciones didácticas.

Secuencia 21 Relación funcional 1
(LT, págs. 162-167)

Tiempo de realización	3 sesiones
Eje temático	Número, álgebra y variación
Tema	Funciones
Aprendizaje esperado	Analiza y compara situaciones de variación lineal y proporcionalidad inversa, a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica. Interpreta y resuelve problemas que se modelan con este tipo de variación, incluyendo fenómenos de la física y otros contextos.
Intención didáctica	Que los alumnos estudien fenómenos de variación inversamente proporcional mediante sus representaciones tabular, gráfica y algebraica vinculadas a la noción de proporcionalidad inversa que ya conocen.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisual** • *Diversos tipos de variación* **Informático** • *Problemas de distintos tipos de variación*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recurso audiovisual** • *La variación lineal y de proporcionalidad inversa*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Reconozcan algunas características cualitativas de la lectura de gráficas que representan relaciones de variación entre dos cantidades. Grafiquen relaciones de proporcionalidad directa.
- Sesión 2. Distingan y analicen la representación gráfica de situaciones que implican variación lineal e inversamente proporcional. Obtengan la expresión algebraica de una relación de variación inversamente proporcional.
- Sesión 3. Analicen situaciones que corresponden a una relación de variación inversamente proporcional mediante la visualización matemática en las representaciones tabular, gráfica y algebraica.

Acerca de...

En los últimos grados de primaria y en primero de secundaria los alumnos analizaron y resolvieron problemas que implican la relación entre cantidades que varían de forma directamente proporcional, reconocieron la expresión algebraica general que la representa ($y = kx$), y la representaron en una tabla y en gráficas; también analizaron la relación funcional lineal.

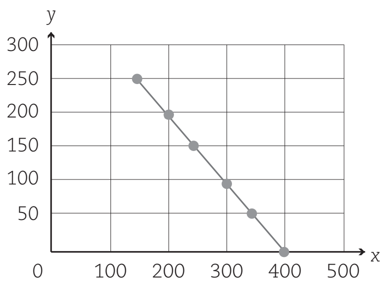
En segundo grado, los estudiantes profundizan en este tipo de relaciones y avanzan en ellas al estudiar situaciones que implican variación inversamente proporcional, tema que empezaron a revisar desde la secuencia 4, cuando aprendieron las propiedades aritméticas de la proporcionalidad inversa.

Ahora se espera que articulen las diversas representaciones que tiene una relación inversamente proporcional y las diferencien de los otros tipos de relaciones que ya han estudiado, para continuar así con el proceso de construcción del concepto de función. En esta secuencia los alumnos deberán identificar y analizar el tipo de relación funcional que hay entre las cantidades que se presentan en cada situación. Por ejemplo, determinar si una cantidad aumenta y la otra aumenta o disminuye, si el aumento o la disminución se hace de manera proporcional y cuál es la constante de proporcionalidad, ya sea a partir del cociente o del producto entre las cantidades. Estos aspectos deberán identificarse y visualizarse en los diferentes tipos de representación, tanto algebraica como gráfica y tabular.

Sobre las ideas de los alumnos

Muchos alumnos no distinguen entre una gráfica que representa cualquier relación lineal y la que representa una relación de proporcionalidad directa, pues en ambos casos la gráfica es una línea recta, pero la diferencia principal es que la última pasa por el origen.

En el caso de una relación inversamente proporcional, los alumnos pueden pensar que la expresión algebraica general asociada es $y = -kx$ y, por lo tanto, que la gráfica es una línea recta con pendiente negativa, como se observa en la siguiente imagen:



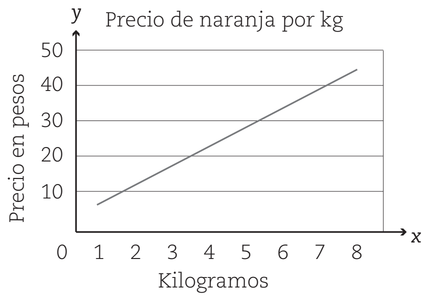
Para contrarrestar estas ideas e intuiciones que algunos pudieran tener, se propone el análisis de este tipo de relaciones y su representación gráfica. Quizá algunos alumnos requieran que se trace la línea recta en el plano y no consideren que una sucesión de puntos alineados también puede representar un tipo de relación de variación, pero con valores discretos.

¿Cómo guío el proceso?

En la actividad 1, inciso a), deje que los alumnos indentifiquen a qué frutas corresponden los puntos de la gráfica mediante el procedimiento que se les facilite; no es necesario que todos sigan un mismo camino. En el inciso b) tendrán la oportunidad de confrontar su interpretación de la información que presenta la tabla y la forma en que determinaron a qué correspondía cada punto. En cuanto a la actividad 2, identificarán que la fruta más vendida es la naranja (vendió 40 kg) y deberán elaborar una tabla de precios como la siguiente:

Kg	1	2	3	4
Precio	\$5.50	\$11.00	\$16.50	\$22.00

La gráfica asociada, una vez que se unen los puntos, es:



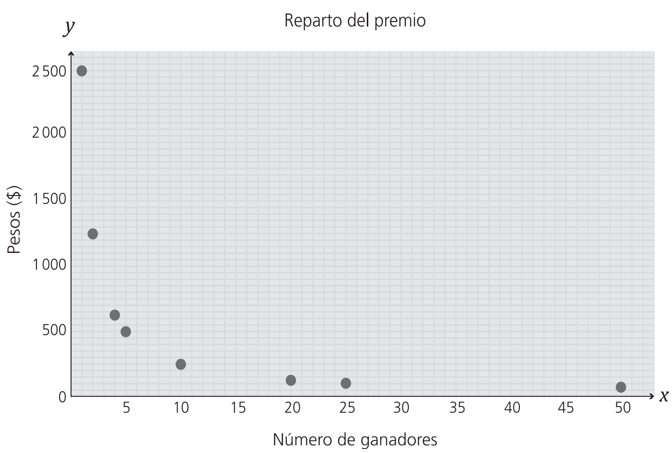
Se espera que no tengan dificultades para visualizar las preguntas de los incisos b) y c), pues la variación es directamente proporcional y en la gráfica, al prolongarse la recta pasa por el origen, lo que significa que $0\ kg$ equivalen a 0 pesos, siendo 5.5 la constante (k) de proporcionalidad. Para responder el inciso d) pueden proceder de diferentes maneras. Por ejemplo, pueden prolongar la línea recta de la gráfica y ubicar el valor de $y = 275$ o expresar algebraicamente la relación como $275 = 5.5x$, al despejar se tiene $x = \frac{275}{5.5} = 50$.

Es importante promover en los alumnos la articulación entre las distintas representaciones; de hecho, la actividad pretende generar el análisis de la relación entre éstas. Si en la clase no surgen diferentes procedimientos, deberá pedirles que verifiquen sus respuestas utilizando las gráficas, la tabla y la expresión algebraica. De este modo se espera que desarrollen habilidades para visualizar matemáticamente el comportamiento de una relación funcional y reconozcan sus características.

En la actividad 1 de la sesión 2, los alumnos deberán reconocer cuál es la gráfica que corresponde a la situación planteada. En ella hay una relación de variación que corresponde a una función lineal, y la expresión algebraica que representa el costo del transporte de las cajas de manzanas es $y = 15x + 300$. En este caso, los alumnos deberán identificar que la gráfica corresponde a una línea recta que cruza el eje de las ordenadas (el eje y) en 300, pero que representa un aumento. La segunda situación (actividad 2) plantea determinar el costo de transportar una caja de manzanas dadas las condiciones de pago. La relación de variación es inversamente proporcional, y al graficar los valores se observa una sucesión de puntos que no es lineal y va decreciendo. Si se toman dos puntos cualesquiera, se observa que el producto de los valores de las coordenadas (x, y) son iguales para cada punto. Por ejemplo, si se consideran $(1, 700)$ y $(2, 350)$, el producto es 700 porque $1 \times 700 = 700$ y $2 \times 350 = 700$. De ahí que la expresión algebraica es $700 = xy$, que es equivalente a $y = \frac{700}{x}$

En la sesión 3, actividad 1, se presentan dos situaciones que corresponden a una relación de variación inversamente proporcional en un contexto geométrico. Este caso se puede aprovechar para discutir en el grupo si se podrían dar valores negativos a la base o a la altura del rectángulo. Es probable que algunos alumnos respondan que sí y hasta calculen el segundo valor en función del valor asignado al primero. Sin embargo, esto puede dejarse como tarea para investigación, y centrarse en el análisis y comparación entre los datos y la gráfica que los representa.

Finalmente, la situación de repartir el premio entre los ganadores si éstos aumentan, también corresponde a una situación de variación inversamente proporcional. Se recomienda analizar y comparar en el grupo los aspectos que se indican en la actividad 3, para reconocer las características de las diferentes representaciones que tienen: por ejemplo, que la gráfica es una curva llamada hipérbola, que decrece, y el producto de las coordenadas es una constante.



Pautas para la evaluación formativa

Observe el trabajo de los alumnos para ver si logran:

- Leer e interpretar los puntos ubicados en un plano y reconocer que entre más a la derecha se ubica un punto, mayor es el valor de la abscisa, y entre más arriba se encuentre, mayor es el valor de su ordenada.
- Identificar que las magnitudes en las situaciones corresponden a un tipo de relación funcional, esto es, una está en función de la otra.
- Establecer el tipo de variación que se da en los problemas planteados en la secuencia: directa, inversa o lineal, y si hay o no proporcionalidad en la variación.

Lo anterior es a partir del análisis de las representaciones tabular, gráfica y algebraica.

- Reconocer las características de la gráfica y de la expresión algebraica en una variación inversamente proporcional.

¿Cómo apoyar?

Para que identifiquen el tipo de variación, puede pedir que revisen las situaciones de la secuencia 4 y grafiquen los valores. También puede pedir que las gráficas elaboradas en las diferentes actividades de la secuencia se plasmen en cartulina, papel bond o en hojas cuadriculadas para tenerlas como un catálogo y analizarlas juntas para observar las semejanzas y diferencias en relación con sus representaciones algebraica y tabular.

En todo momento puede permitir el uso de la calculadora debido a que lo importante en esta secuencia es el razonamiento proporcional y no necesariamente la operatoria.

¿Cómo extender?

Puede variar las cantidades involucradas en las situaciones, por ejemplo, poner fracciones o decimales.

Proponga actividades conocidas o realizadas por ellos, en las que se establezcan relaciones de proporcionalidad directa o inversa.

También se les puede pedir que escriban algunos problemas de variación que impliquen una constante fraccionaria o decimal.

Secuencia 22 Polígonos 2
(LT, págs. 168-177)

Tiempo de realización	4 sesiones
Eje temático	Forma, espacio y medida
Tema	Figuras y cuerpos geométricos
Aprendizaje esperado	Deduce y usa las relaciones entre los ángulos de polígonos en la construcción de polígonos regulares.
Intención didáctica	Que los alumnos resuelvan problemas de construcción de figuras geométricas.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisuales** • *Ángulos internos y externos de un polígono* • *Ángulos centrales de un polígono regular*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recurso audiovisual** • *Relaciones entre los ángulos de polígonos en la construcción de polígonos regulares*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Deduzcan una fórmula para calcular la suma de los ángulos internos de un polígono.
- Sesión 2. Analicen la relación entre los ángulos internos y externos de un polígono para determinar el valor de la suma de cada tipo de ángulos.
- Sesión 3. Analicen y determinen la medida del ángulo central de un polígono regular.
- Sesión 4. Resuelvan problemas que implican determinar y usar las medidas de los ángulos interno, central y externo de un polígono y establezcan sus relaciones.

Acerca de...

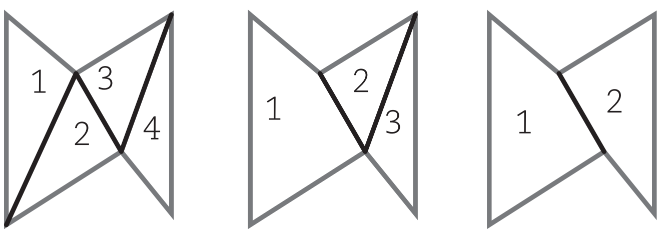
Esta secuencia es la segunda de tres que apuntan al desarrollo de los conocimientos y habilidades que permitan a los estudiantes deducir y usar las relaciones entre los ángulos de polígonos en la construcción de polígonos regulares. Se proponen actividades para que los alumnos continúen explorando algunas regularidades de los polígonos relacionadas con sus ángulos central, internos y externos. En particular, en el caso de los ángulos internos de un polígono regular, se espera que expresen de manera general el valor de su suma y, como ellos puedan, explicarlo sin llegar a una expresión algebraica.

Sobre las ideas de los alumnos

Los alumnos ya justificaron las relaciones entre las medidas de los ángulos internos de los triángulos y los paralelogramos, y es importante que lo tengan claro, ya que ahora se trata de que utilicen ese conocimiento para establecer la relación que hay entre los ángulos internos de cualquier polígono. En particular, las primeras dos actividades de la sesión 1 recuperan lo estudiado en la secuencia 8, y se espera que los alumnos apliquen la triangulación de las figuras tanto para verificar como para transferir a otras relaciones. Al reconocer que la suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180°, podrían establecer la fórmula de la suma de los ángulos internos de los polígonos. De ese modo también pueden ver las relaciones entre las medidas de los ángulos externos y la del central. Tal vez a algunos alumnos se les dificulte utilizar los instrumentos geométricos; es conveniente que los apoye y, si es necesario, pida que observen videos que muestren la manera en que se utilizan. Por ejemplo, en la actividad 3 de la sesión 1, los alumnos deberán medir los ángulos internos de diferentes polígonos, y en algunos casos tendrán que prolongar los lados para realizar la medición. Otras relaciones que deben reconocer son las de los ángulos complementarios y suplementarios.

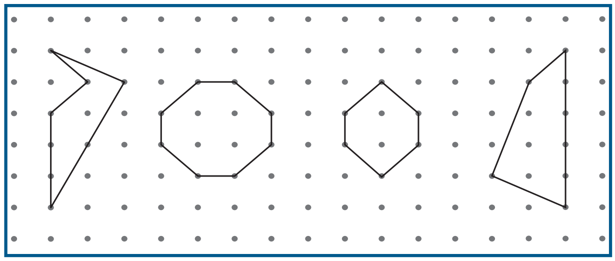
¿Cómo guío el proceso?

En el caso de la actividad 3 de la sesión 1, tal vez en algunos casos obtengan valores diferentes de la suma de los ángulos internos por error en el manejo del transportador al medir algunos ángulos. De ocurrir lo anterior, pídales que propongan una manera de verificar las medidas que han obtenido a partir de los conocimientos geométricos que ya estudiaron. Por ejemplo, en la secuencia 8 aprendieron a trazar y determinar las diagonales de un polígono y a triangularlo, se espera que en este caso propongan, como modo de verificación, triangular los polígonos; de no surgir la idea, exprésela usted. En cuanto a los polígonos no convexos que aparecen en la tabla, pida que expliquen de qué manera los triangularon para determinar el valor de la suma de los ángulos internos. Es posible que algunos alumnos realicen diferentes combinaciones al momento de formar triángulos y paralelogramos para determinar la suma de los ángulos internos de los polígonos no convexos. La siguiente imagen ilustra lo anterior:



$$4 \times 180° = 2 \times 180° + 360° = 2 \times 360° =$$

En el dibujo de los polígonos irregulares que se indica en la actividad 4, solicite que también incluyan polígonos no convexos. En la retícula pueden construir polígonos irregulares sin mayor dificultad; sin embargo, para los polígonos regulares es probable que algunos utilicen los puntos y midan igual las distancias entre los puntos de manera horizontal, vertical y diagonal. Asegúrese de que no cometan ese error al trazar los lados de los polígonos regulares.

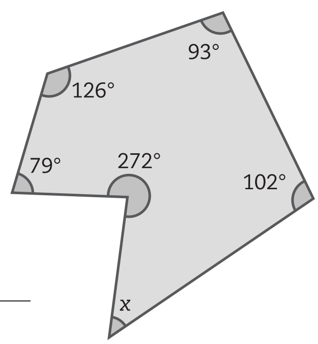


De ocurrir esto, invite a los alumnos a buscar otros caminos para construirlos, considerando sus conocimientos previos en cuanto a las características de los polígonos regulares, una de las cuales es que sus lados tienen la misma medida.

En la actividad 6 pida que expliquen de qué manera determinaron la suma de los ángulos en el caso de los polígonos regulares e irregulares y, particularmente, que muestren algunos ejemplos cuando el polígono es no convexo. Esta acción permite que los alumnos no sólo trabajen con figuras prototipo, sino que desarrollen sus habilidades de visualización, construcción y comunicación. Vincule lo comentado en las actividades 5 y 6 con la fórmula que se señala en la actividad 7.

En la sesión 2, actividad 1, se retomará la fórmula establecida al final de la sesión 1. En la actividad 2, los alumnos tendrán que deducir la manera de determinar la medida de un ángulo interno desconocido; para ello les resultará útil la fórmula.

$$180° (n - 2) = x - (79° + 126° + 93° + 102° + 272°)$$
$$180° (6 - 2) = x - 672°$$
$$180° (4) - 672° = x$$
$$720 - 672 = x$$
$$48° = x$$



$x =$ 48°

En la actividad 3 la incógnita cambia, pues sabiendo la suma de los ángulos internos, ahora se pregunta por el número de lados del polígono. Para esto resultará útil la fórmula, por ejemplo:

$$(n-2)\,180 = 21\,060$$

$$n-2 = \frac{21\,060}{180}$$

$$n-2 = 117$$

$$n = 117 + 2 = 119$$

$$n = 119$$

Comprobación:

$$(119-2)\,180 =$$

$$117 \times 180 = 21\,060$$

Además, a partir de esa deducción es posible establecer la relación entre el ángulo interno de un vértice del polígono y los ángulos externos que le corresponden, de la cual se deduce que son suplementarios. En las actividades 5 y 6, los alumnos analizarán lo que ocurre con la suma de los ángulos externos del polígono. Se sugiere que para dar respuesta al inciso b) de la actividad 8, se utilice alguno de los polígonos de la actividad 3 de la sesión anterior para analizar y establecer las relaciones que encuentran de un tipo de polígono a otro y determinar en cada caso que el valor de la suma de los ángulos externos, uno por cada vértice, es de 360°. Recuerde que no se debe dar por sentada una propiedad o característica a partir de un par de ejemplos, sino de proponer conjeturas y probarlas, es decir, desde un razonamiento deductivo. Parte de ese razonamiento implica visualizar, clasificar y probar.

En la sesión 3 los alumnos aprenderán que cada polígono regular se puede circunscribir, y a partir de ahí establecer relaciones con su ángulo central, ángulos internos y externos que le permitirán comprender el proceso de construcción de los polígonos regulares por medio de ese procedimiento.

Para terminar, en la sesión 4, los alumnos deberán resolver problemas que requieren la aplicación de las relaciones y propiedades estudiadas en las sesiones anteriores. Pida siempre justificar sus respuestas con argumentos geométricos, es decir, que aludan a las relaciones, características y propiedades que se han estudiado para desarrollar su habilidad de comunicación y de razonamiento deductivo.

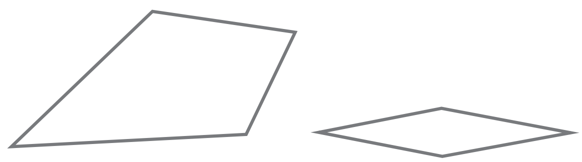
Pautas para la evaluación formativa

Observe el trabajo de los alumnos para ver si logran:

- Establecer la relación entre los ángulos internos de los polígonos y, en el caso de polígonos regulares, expresar la forma general de calcular la suma total.
- Establecer la relación entre un ángulo interno y los ángulos externos que le corresponden a cada vértice de un polígono. El ángulo interno y uno de los ángulos externos al vértice suman 180°. En el caso de la actividad 9 de la sesión 2, al justificar la respuesta, puede observar este aspecto.
- Establecer la medida del ángulo central de un polígono regular.

¿Cómo apoyar?

Si observa que los alumnos tienen dificultades para medir los ángulos internos de los polígonos y encontrar una relación, proponga que midan polígonos regulares de 4, 5 y 6 lados, y particularmente en el caso de los cuadriláteros sugiera que midan los siguientes:



En general, pida que copien los polígonos que se presentan en la actividad, pero utilizando una escala que les permita ampliar y reducir las medidas originales para que prueben si las medidas de los ángulos internos, externos y central son iguales o cambian, y de esta manera también se desarrollen las habilidades de dibujo y visualización.

Otra actividad de apoyo que puede proponer es que los alumnos escriban una lista de palabras del vocabulario geométrico que conocen, y que agreguen un ejemplo para ilustrar cada palabra. De este modo también desarrollan sus habilidades de dibujo y comunicación.

¿Cómo extender?

En la sesión 1 puede pedir que dibujen polígonos de siete, ocho, doce y más lados que sean irregulares y algunos no convexos para sumar los ángulos internos con el propósito de establecer las relaciones y generalizar inductivamente, para luego hacerlo de manera deductiva a partir del análisis de las características y establecer relaciones y probarlas.

Secuencia 23 Conversión de medidas 2

(LT, págs. 178-183)

Tiempo de realización	3 sesiones
Eje temático	Forma, espacio y medida
Tema	Magnitudes y medidas
Aprendizaje esperado	Resuelve problemas que implican conversiones en múltiplos y submúltiplos del metro, litro, kilogramo y de unidades del Sistema Inglés (yarda, pulgada, galón, onza y libra).
Intención didáctica	Que los alumnos desarrollen la habilidad para establecer equivalencias entre los múltiplos y submúltiplos del kilogramo y del litro, que son las unidades de masa y capacidad del Sistema Internacional de Unidades, así como la conversión entre unidades del Sistema Inglés más usuales y el Internacional a partir de la estimación de magnitudes cercanas a su entorno.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisuales** • *Unidades de masa (peso) en el Sistema Inglés* • *El volumen de los líquidos en el Sistema Inglés*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recurso audiovisual** • *Conversión de medidas*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Desarrollen estrategias de cálculo para convertir medidas de masa del Sistema Internacional que corresponden al peso de personas, animales y objetos, apoyándose en la relación de proporcionalidad directa.
- Sesión 2. Conviertan de kilogramo a libra, de libra a kilogramo, de gramo a onza y viceversa, estableciendo relaciones de proporcionalidad directa entre ellas. Además, que estimen medidas de capacidad que corresponden a diversas situaciones expresadas en múltiplos y submúltiplos del litro, y desarrollen procedimientos para convertir cantidades en múltiplos y submúltiplos del litro.
- Sesión 3. Establezcan estrategias para convertir de litro a galón, de litro a onza y viceversa. Apliquen los conocimientos adquiridos para calcular las equivalencias entre unidades de medida de masa y capacidad de los dos sistemas que les permitan resolver diversas situaciones.

Acerca de...

Además del acercamiento que puedan tener algunos alumnos a las unidades de capacidad y masa (peso) desde experiencias externas a la escuela, a lo largo de la primaria los alumnos realizaron actividades en las que fue necesario utilizar algunas de las unidades del Sistema Internacional para expresar la cantidad de masa (peso) de un cuerpo o producto, así como la capacidad que tienen algunos recipientes y contenedores. En este grado usarán dicho conocimiento para resolver problemas de conversión entre múltiplos y submúltiplos de las unidades de masa y capacidad del Sistema Internacional. También realizarán conversiones de las unidades de un sistema a otro, ya que, actualmente, la información sobre el contenido y capacidad de la mayoría de los productos que se adquieren empacados se expresa en ambos sistemas. Es importante hacer las siguientes consideraciones:

- La masa es la cantidad de materia que contiene un cuerpo y nunca cambia; la unidad básica para medirla es el kilogramo. El peso es la acción que ejerce la fuerza de gravedad sobre cualquier cuerpo en la Tierra, y cambia si el cuerpo está en la Luna o en otro lugar del espacio. Coloquialmente, llamamos peso de los cuerpos u objetos a lo que en estricto sentido es su masa.

- La medición de la capacidad mantiene una relación estrecha con la medición del volumen. Ambos cálculos corresponden a medir un espacio. En el caso del volumen se trata del espacio que ocupa un cuerpo, mientras que en el de la capacidad se trata del espacio que hay en el interior del cuerpo.

Sobre las ideas de los alumnos

La idea de que el tamaño de un objeto lo hace más pesado que otro que ocupa menos espacio es común entre los alumnos. Por ejemplo, la clásica adivinanza de "¿qué pesa más, un kilogramo de plumas o un kilogramo de plomo?", recibe muchas veces la respuesta de que pesa más el kilogramo de plumas, pues los estudiantes imaginan el volumen que ocupa en contraposición al espacio que ocupa esa cantidad de plomo. Por esto, desde la primaria se plantean actividades que permiten desechar la idea de que el volumen está directamente asociado al peso o a la forma de los objetos; sin embargo, en muchas personas es difícil cambiar esa idea. Por otra parte, la noción acerca de las unidades está poco desarrollada en muchos de ellos, de ahí la importancia de que hagan estimaciones y, cuando sea posible, las comprueben.

¿Cómo guío el proceso?

El contexto con que se introduce la secuencia invita a los alumnos a comentar y así recuperar lo que conocen del tema, ya sea porque tienen hermanos pequeños o porque conocen a alguien que los tenga.

Esto permite también que relacionen el desarrollo de los niños con una alimentación adecuada, que conozcan el uso indistinto de unidades del Sistema Internacional y de unidades del Sistema Inglés, y que establezcan estrategias y procedimientos para hacer las conversiones a partir de sus equivalencias.

En la actividad 1 de la sesión 1, en los ejercicios de elegir la unidad que consideren adecuada para medir la masa (el peso) o la capacidad, se presenta la oportunidad de que comenten si lo que eligieron es la única opción o puede expresarse mediante alguna otra. Por ejemplo, por lo general el peso de un elefante se indica en toneladas; sin embargo, es usual que se indique en kilogramos. Lo que resultaría desatinado es darlo en gramos, aunque esto pueda proponerse como un ejercicio de conversión.

a) El peso aproximado de un colibrí es de:

☐ 0.0120 toneladas ☐ 0.120 kilogramos ☐ 12 gramos ☐ 1 200 miligramos

b) El peso aproximado de un elefante es de:

☐ 5 toneladas ☐ 500 kilogramos ☐ 50 000 gramos ☐ 500 hectogramos

c) El peso aproximado del libro de Matemáticas 2 de Telesecundaria es de:

☐ 450 decigramos ☐ 0.450 kilogramos ☐ 450 gramos ☐ 4 500 miligramos

d) La **dosis** de un medicamento en cápsula es de:

☐ 20 decigramos ☐ 0.200 kilogramos ☐ 2 000 gramos ☐ 2 miligramos

Es importante comentar con los alumnos acerca de las ventajas que da internet para obtener información de cualquier país y sobre gran cantidad de temas. La información puede incluir unidades de medida del Sistema Internacional o del Sistema Inglés, por lo tanto, es importante que los alumnos conozcan ambas y puedan establecer equivalencias entre ellas.

En las actividades 5 de la sesión 1 y 9 de la sesión 2 procure que los alumnos observen la relación entre las unidades del Sistema Internacional que consiste en que los múltiplos de la unidad básica aumentan en potencias de 10 ($10^1 = 10$, $10^2 = 100$, $10^3 = 1000$, etcétera) y los submúltiplos disminuyen en potencias de 10 ($10^{-1} = \frac{1}{10}$, $10^{-2} = \frac{1}{100}$, $10^{-3} = \frac{1}{1000}$, etcétera), y cómo se les asocian los prefijos *deca*, *hecto*, *kilo*, *deci*, *centi* y *mili*.

Tonelada métrica	Quintal métrico	Kilo-gramo	Hecto-gramo	Deca-gramo	Gramo	Deci-gramo	Centi-gramo	Mili-gramo
T	Q	kg	hg	dag	g	dg	cg	mg
1 000 kg	100 kg	1 000 g	100 g	10 g	1 g	0.1 g	0.01 g	0.001 g

Recuerde a los alumnos que en secuencias anteriores analizaron cómo obtener el producto de cualquier número por dichas potencias, así que es conveniente resaltar esos vínculos. Asimismo, ya trabajaron el tema de la variación proporcional directa que les permite usarla como estrategia de cálculo para encontrar la equivalencia entre las unidades de capacidad y masa del Sistema Internacional y el Sistema Inglés.

En la sesión 3 se recurre al contexto de la construcción, donde se combinan las unidades de masa (peso) y de capacidad de ambos sistemas de medición. El propósito central de este trabajo no consiste en que los alumnos memoricen la equivalencia entre las unidades del Sistema Inglés y las del Sistema Internacional, por lo que puede elaborarse una tabla con las equivalencias en una cartulina y dejarla a la vista de todos para que la consulte quien lo necesite, como en el caso en que se usan onzas para indicar masa (peso) y onzas para capacidad, por lo que el primer paso es discriminarlas.

Por una parte, es necesario que sepan cómo relacionar las cantidades y qué operación permite conocer la equivalencia entre ambos sistemas y pasar de un múltiplo a un submúltiplo y viceversa. Además, es indispensable que los alumnos adquieran la noción de las unidades que están estudiando, por ejemplo, que si se habla de una onza de leche puedan imaginar que es una cantidad mucho menor que un litro, o bien, que si algo pesa una libra, significa que su peso es casi de medio kilogramo. Para completar los valores de las tablas en la primera sesión, deberán decidir si multiplican o dividen los valores dados y recordar que para convertir de una unidad menor a una mayor se divide, y para convertir de unidades mayores a otras menores, se multiplica.

En el primer problema de la actividad 7 de la sesión 3 se puede recurrir a dividir $1000\ kg$ entre 150 varillas, o bien, $2500\ kg$ entre 375 varillas; en ambos casos se obtiene el mismo resultado que corresponde al decimal periódico 6.6666, habrá que aprovechar esto para que los alumnos comenten qué consideran que sea mejor: truncar (6.66) o redondear la cantidad (6.7 o 7) y por qué. Es posible hacer un análisis interesante acerca de las situaciones en que redondear la cantidad afecta o no el resultado; por ejemplo, ¿es igual redondear en una dosis de medicamento que en el agua contenida en una cubeta de agua?, o bien, ¿redondear el peso de una varilla o el peso de un artículo de oro?

En los siguientes problemas, además de hacer conversiones, los alumnos deberán recurrir a otros conocimientos que ya han adquirido, como el cálculo de áreas o el uso de expresiones del tipo $y = 10x$ o $\frac{x}{10}$, donde x es la cantidad conocida y y representa la solicitada.

Pautas para la evaluación formativa

Se deberá observar la estrategia que siguen los alumnos para determinar qué hacer cuando convierten unidades de medida dentro del Sistema Internacional. Por ejemplo, un aumento de ceros o recorrido del punto decimal cuando se hace necesario al multiplicar o dividir por 10, 100, 1000, etcétera. Observe que plantean correctamente las relaciones de proporcionalidad entre los elementos que tienen y los que van a calcular. También es necesario que los alumnos muestren claridad y certeza acerca de por qué eligen una determinada operación para obtener la respuesta a los problemas. Así como el uso de expresiones ya estudiadas: $y = ax$ o $y = \frac{x}{a}$ para expresar de manera general el procedimiento de conversión.

¿Cómo apoyar?

Es importante que los alumnos reflexionen acerca de que convertir una unidad menor a una mayor consiste en ver cuántas veces cabe ésta en la unidad pequeña, por lo que hay que dividir, y que cuando se convierte una unidad mayor a una menor, significa saber cuántas veces cabe ésta en la unidad mayor, por lo que habrá que multiplicar. Un recurso que puede ayudar es que los alumnos analicen la relación metro-centímetro-milímetro para convertir de uno a otro, pues son unidades que se usan con frecuencia.

¿Cómo extender?

Solicite a los alumnos realizar una pequeña investigación acerca de qué unidades de capacidad y de masa (peso) se usan en algunas regiones de México. También podrían investigar acerca de la medida llamada *pinta* (cuya capacidad de medida equivale a 16 onzas, si se trata de la estadounidense, mientras que la pinta del Reino Unido equivale a 20 onzas) que aún se usa. Cuando los problemas requieren sólo la conversión entre unidades del mismo sistema, solicite que obtengan la equivalencia en el otro sistema. Asimismo, pida que vinculen las conversiones con lo estudiado en la secuencia de potencias; por ejemplo, que represen ten los múltiplos y submúltiplos de una unidad de la forma: $0.01 = \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2} = 10^{-2}$.

Secuencia 24 Área del círculo

(LT, págs. 184-189)

Tiempo de realización	3 sesiones
Eje temático	Forma, espacio y medida
Tema	Magnitudes y medidas
Aprendizaje esperado	Calcula el perímetro y área de polígonos regulares y del círculo a partir de diferentes datos.
Intención didáctica	Que el alumno resuelva problemas que implican calcular el área del círculo a partir de diferentes datos.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisual** • *El área del círculo* **Informático** • *Cálculo del área del círculo según Arquímedes*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recurso audiovisual** • *Perímetro y área de polígonos regulares y del círculo*

¿Qué busco?

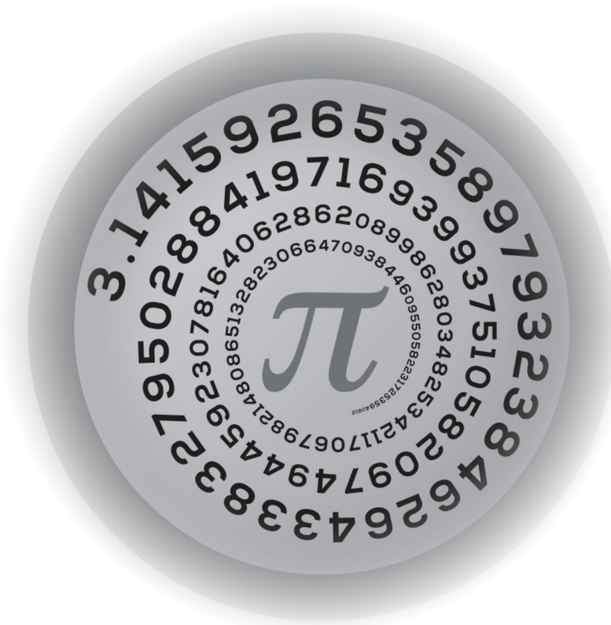
Que los alumnos:

- Sesión 1. Determinen el área aproximada de círculos a partir del conteo de unidades cuadradas.
- Sesión 2. Deduzcan la fórmula para calcular el área del círculo.
- Sesión 3. Resuelvan problemas que impliquen calcular el área de círculos a partir de diferentes datos.

Acerca de...

Los alumnos han estudiado en otros grados escolares cómo calcular el área de diferentes polígonos. En este segundo bloque se enfrentarán al problema de calcular, por primera vez, el área de una figura con lado curvo: el círculo. Tienen como antecedente el conocimiento del número π, que usaron para calcular el perímetro del círculo.

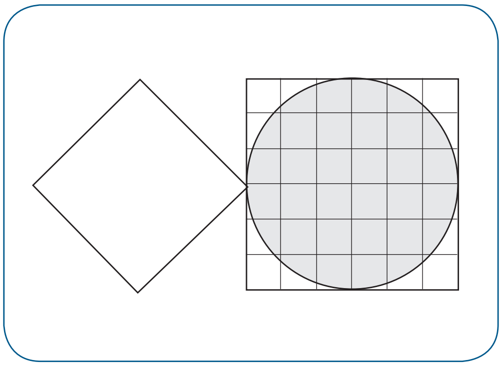
Es importante seguir reforzando la parte conceptual del área, por lo que antes de abordar la deducción de la fórmula (sesión 2), en la primera sesión se pide a los alumnos que calculen el área del círculo a partir del conteo de unidades cuadradas. Asimismo, las actividades de conteo les permitirán construir la idea de que no es posible calcular el área del círculo de manera exacta, incluso aunque conozcan y usen la fórmula. Ellos saben que el valor de 3.14 asignado a π es aproximado, ya que se trata de un número irracional (es decir, es un decimal infinito sin periodo). Sin embargo, también deberán concluir que, para cuestiones prácticas, este valor es aceptable.



¿Cómo guío el proceso?

Es importante que en la sesión 1 permita que los alumnos traten de calcular el área de los círculos con sus propios recursos y no proporcione la fórmula. Si llegara a haber algún alumno que ya la conozca, permítale usarla, y en la puesta en común se mostrará como un procedimiento más; también servirá para comparar con los resultados que encuentren por otros métodos.

En la actividad 1 es probable que decidan contar los cuadrados de color que forman parte del círculo y, en aquellos casos en que están incompletos, compensar de manera aproximada unas partes con otras. Otro procedimiento es considerar el área del cuadrado completo y restar el área de las partes que quedan fuera del círculo. También es probable que dividan el círculo en otras figuras y calculen el área de la figura y luego aumenten, aproximadamente, el área de las partes que quedan fuera. Por ejemplo, para el círculo:



Por conteo los alumnos pueden calcular el área del cuadrado (18 unidades cuadradas) y sumarla con el área de las figuras que quedan fuera; se observa que de una de las partes son casi 2.5 unidades cuadradas, así que de las cuatro son 10 unidades cuadradas, por lo que el área aproximada del círculo es 28 unidades cuadradas.

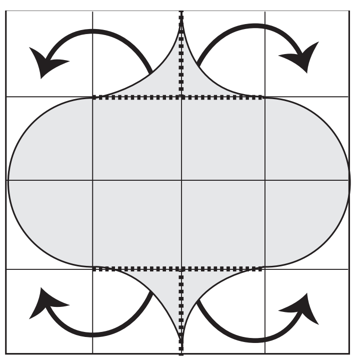
En la puesta en común de la actividad 4 ponga especial énfasis en los argumentos que den los alumnos para explicar la opción que hayan subrayado en la actividad 2, se espera que se den cuenta de que el área del círculo está entre tres y cuatro veces el cuadrado del radio; esta idea es un buen recurso para estimar el área de círculos y, además, prepara a los alumnos para comprender la fórmula que estudiarán en la sesión 2.

Con la resolución de las actividades llegarán a darse cuenta de que el área del círculo está más cerca de tres veces el cuadrado del radio que cuatro veces (lo que equivale aproximadamente a 3.14 veces el cuadrado del radio).

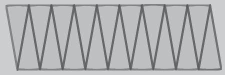
En la sesión 2, las preguntas los guiarán a la deducción de la fórmula. En la actividad 4, en la puesta en común, invite a los estudiantes que hayan comprendido a que expliquen alguno de los procedimientos trabajados, tanto el del paralelogramo como el de los polígonos regulares cuyos lados van en aumento. Se sugiere que para la actividad 1 los alumnos tracen un círculo y lo dividan en varios sectores circulares a fin de que formen una figura similar al paralelogramo y noten que, entre más sectores obtengan, la figura que puede formarse se acercará más a un paralelogramo, sin llegar a serlo exactamente. Este procedimiento también es útil para enfatizar que no es posible calcular el área exacta del círculo.

En la sesión 3, los alumnos podrán seguir diferentes procedimientos para calcular el área de las figuras propuestas. Quienes lo deseen, podrán hacer uso del conteo de unidades cuadradas, usar la fórmula que trabajaron en la sesión 2 y, en algunos casos, observar que es más sencillo trabajar por compensación: imaginar que se corta la figura de alguna manera, y el sobrante se coloca en un lado donde embona bien y permite calcular con mayor exactitud. Por ejemplo, en la figura siguiente se puede formar un rectángulo si se recorta por las líneas punteadas y las partes resultantes se colocan donde indican las flechas. El área de esta figura es 8 unidades cuadradas.

Si en la puesta en común no surgen diferentes procedimientos después de que los alumnos expongan los propios, usted puede sugerir otros.



Si pudiéramos dividir un círculo en más partes y formar una figura como la siguiente:



Observaríamos que cada vez se parece más a un romboide cuya área es:

$$A = base \times altura$$

Como la base del romboide es la mitad del perímetro del círculo, entonces: $\frac{P}{2} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{2} = \pi \cdot r$ y la altura del romboide corresponde al radio del círculo; por lo tanto, el área del círculo es:

$$A = \pi \cdot r \cdot r, \quad \text{o bien,} \quad A = \pi \cdot r^2$$

Pautas para la evaluación formativa

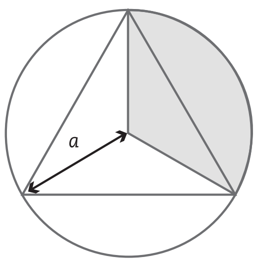
Observe si durante el trabajo con esta secuencia los alumnos:

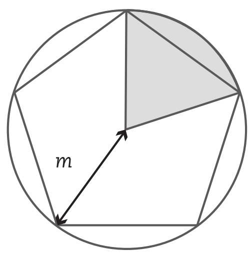
- Utilizan diferentes procedimientos para determinar el área de las figuras y no se limitan sólo al uso de fórmulas.
- Aplican correctamente la fórmula ya establecida y en ella sustituyen los valores y los operan de forma adecuada.
- Operan de manera correcta con números naturales, fracciones o decimales que surgen en los cálculos que deben realizar.

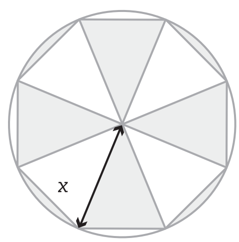
En caso de que note que el problema está en la operatoria, sobre todo al trabajar con medidas que implican decimales o fracciones, puede recordar en grupo la manera de resolver las operaciones que estén obstruyendo su avance.

Si lo considera pertinente, también puede recordarle al grupo lo que es el área (es decir, una medida de superficie) y cómo se calcula en las figuras trabajadas con anterioridad: rectángulos, paralelogramos, cuadrados, triángulos, polígonos regulares; sobre todo cómo obtener el área de los romboides y de los polígonos regulares, porque se requieren para trabajar la sesión 2.

e) Los polígonos de las siguientes imágenes son regulares. Anota la expresión que corresponde al área de la parte de color.







Área = ____________ Área = ____________ Área = ____________

¿Cómo apoyar?

Si a los alumnos se les dificulta el cálculo por conteo de unidades, puede hacer un alto y resolver en grupo los dos primeros casos.

¿Cómo extender?

Proponga que calculen el área de círculos cuyo radio sea, por ejemplo: x, $2a$, $5m$... o cuyo diámetro sea z, $2a$, $7m$, etcétera.

Secuencia 25 Medidas de tendencia central y de dispersión 1 (LT, págs. 190-199)

Tiempo de realización	3 sesiones
Eje temático	Análisis de datos
Tema	Estadística
Aprendizaje esperado	Usa e interpreta las medidas de tendencia central (moda, media aritmética y mediana), el rango y la desviación media de un conjunto de datos y decide cuál de ellas conviene más en el análisis de los datos en cuestión.
Intención didáctica	Que los alumnos interpreten la información estadística presentada en sitios oficiales y la utilicen para analizar y comparar la distribución de conjuntos de datos considerando la tendencia central, así como su dispersión a partir del rango y desviación media.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisual** • *Cómo obtener la desviación media de un conjunto de datos*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recurso audiovisual** • *Lectura de gráficas estadísticas*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Interpreten información estadística obtenida de fuentes oficiales que implican a las medidas de tendencia central y rango. Asimismo, que utilicen la información estadística como referente para deducir y analizar conjuntos de datos y determinen cuáles son las medidas que conviene usar como representativas de la situación.
- Sesión 2. Analicen la dispersión entre los datos de un conjunto respecto a la media aritmética, obteniendo así la desviación media del conjunto.
- Sesión 3. Recolecten y registren datos obtenidos mediante una encuesta, los organicen y obtengan las medidas de tendencia central y de dispersión para analizar y comparar con los valores de otros conjuntos. Analicen la variación y la tendencia central de pares de conjuntos de datos que corresponden a diferentes situaciones y tomen decisiones pertinentes.

Acerca de...

Ésta es la primera de dos secuencias en las que los alumnos de segundo grado estudiarán las medidas de tendencia central, el rango y la desviación media. Desde tercero de primaria los alumnos estudian las medidas de tendencia central y, a partir de sexto grado, se explicita el estudio de la primera de las medidas de dispersión: el rango. Estos contenidos se ubican en el tema de Estadística del eje Análisis de datos. Este eje tiene entre sus propósitos propiciar que los estudiantes adquieran conocimientos y desarrollen habilidades propias de un pensamiento estadístico y probabilístico (llamado *pensamiento estocástico*).

Dichos conocimientos y habilidades no deben concebirse sólo como una manera de comunicar la información, sino como un instrumento útil para la búsqueda de argumentos, del pensamiento crítico que se puede reflejar en ejercer una ciudadanía libre y crítica. De ahí que la propuesta de actividades para esta secuencia se centre en valorar si la información obtenida de una fuente pública oficial es representativa o no del entorno inmediato de los estudiantes.

Es importante que los alumnos comprendan que las medidas de variación (o dispersión) complementan las de tendencia central para caracterizar una distribución de datos. El primer contacto con la idea de dispersión se da cuando el interés por realizar un estudio estadístico se reduce a analizar un conjunto de datos sin pretender generalizar los resultados del análisis (que es descriptivo). Luego, formalmente, la primera medida de dispersión que estudian es el rango, fácil de calcular e interpretar. En esta secuencia (en la sesión 2) se les presenta a los alumnos el problema de medir la dispersión respecto a una medida de posición central (media aritmética); posteriormente, se reformula en la comparación de dos distribuciones considerando su dispersión. En ambos problemas se abordan los conceptos de desviación respecto a la media, y una de sus propiedades es que no puede tomar valores negativos.

Otro aspecto fundamental en el estudio de la estadística es el paso de lo particular a lo general, y en secundaria se fomenta su logro mediante el cálculo de medias aritméticas y de las medidas de variación, como la desviación media. En el desarrollo de la secuencia se solicita obtener las diferentes medidas, tanto de tendencia central como de dispersión, para que analicen y comparen el comportamiento de cada distribución, aprendan a reconocer la implicación que tiene cada medida y logren determinar cuál es la más conveniente de utilizar ante una determinada necesidad de información.

Sobre las ideas de los alumnos

Tal vez los alumnos crean que el estudio de las medidas de tendencia central, rango y desviación media se limita a conocer sus procedimientos rutinarios de cálculo; sin embargo, no es así, sino encontrar medios que ayuden a comprender, interpretar, analizar e inferir las distribuciones de los datos a partir de referentes como la media aritmética, la moda, la mediana, el rango y la desviación media, para ser capaz de analizar con rigor las situaciones, interpretar argumentos, manipular los datos, ser críticos y tomar decisiones.

¿Cómo guío el proceso?

En la construcción del concepto de dispersión, antes de abordar la fórmula para calcular la desviación media (sesión 2), es importante que en la sesión 1 permita que los alumnos, con sus propios recursos, traten de deducir de qué manera consideran que se obtuvo la información presentada en el portal de *Cuéntame*, es decir, a quiénes se les preguntó y cuántas personas participaron. Es posible que algunos alumnos contesten que todas las personas del país fueron encuestadas; tal vez otros digan que sólo los adultos o mayores de 18 años; en cualquier caso, considere la información que aparece en el recuadro de "Dato interesante" y destaque la frase de *una población determinada*. Si le es posible, después de las deducciones que den los alumnos, consulten la Encuesta intercensal de 2015 para conocer de manera específica los detalles. El propósito de la actividad 1 es que los alumnos aprendan a cuestionarse acerca de la información planteada en diversas fuentes, tanto en aspectos de obtención y tratamiento de datos, así como de su representatividad, es decir, qué tanto se consideran incluidos o qué tanto dicha información corresponde a lo que observan en su entorno. De ahí que se proponga trabajar a partir de las preguntas que Emma se plantea: ¿Cuál es el grado de escolaridad más frecuente?, ¿cuál es el grado promedio de escolaridad (media aritmética)? y ¿cuál es el grado máximo y mínimo de escolaridad?

Dichas preguntas presentan una propuesta de conjunto de datos para recordar, reflexionar y analizar el significado, la representación y la manera de obtener las medidas de tendencia central y del rango.

En la sesión 2, apoyados con la representación gráfica de la sesión anterior, los alumnos deberán dar con la diferencia de cada dato respecto al valor de la media aritmética, y luego de las distancias (porque implica obtener el valor absoluto de las diferencias) para conocer el valor de la desviación media; con este fin deberán comprender que ese valor es positivo, y entre más cercano a cero implica que los datos están alrededor del valor de la media aritmética. Por ejemplo:

Dato	Diferencia con respecto a la media aritmética	
0	0 – (*media aritmética*) =	
1	1 – (*media aritmética*) =	
2	2 – (*media aritmética*) =	

En la gráfica de barras de la actividad 3 se representa otro conjunto de datos que corresponde a las respuestas de 30 personas más; los alumnos deberán leerla e interpretarla. Un aspecto importante de este conjunto es que hay dos personas que no tienen ningún grado de estudio. Los alumnos deberán considerar cómo afecta esta situación y recordar que en el cálculo de la media aritmética se divide la suma de los valores entre el total de los datos.

Podrán observar, además, que el valor del rango de este conjunto es igual que el del anterior, pero los datos son diferentes. Es importante destacar cuáles son los valores que influyen en el cálculo de la desviación media, tanto para el caso de un valor de la desviación media alrededor de 0 o un valor muy grande.

Finalmente, en la sesión 3 los alumnos deberán definir a qué personas deben encuestar para reunir y organizar los datos en el plano. Es probable que, por el entorno donde se ubican las telesecundarias, los valores de los datos sean menores que 10, y contrastarán con los obtenidos por Joel y Emma. Si ocurriera esta situación, debe considerar que la estadística también implica incertidumbre. De ahí que un aspecto importante es la comparación de los conjuntos a partir de sus medidas de tendencia central y de dispersión y así sacar conclusiones, como en el caso de la actividad 7.

Pautas para la evaluación formativa

Observe si, durante el trabajo con esta secuencia, los alumnos:

- Utilizan los procedimientos para determinar las medidas de tendencia central de un conjunto de datos y del rango.
- Aplican correctamente el procedimiento para obtener la desviación media de un conjunto de datos (no dan resultados negativos, sustituyen los valores y los operan correctamente).
- Representan correctamente los datos, las frecuencias y los valores de las medidas de tendencia central y de dispersión que se les indica.
- Interpretan correctamente los datos que se presentan en tablas y gráficas.

¿Cómo apoyar?

Si a los alumnos se les dificulta el cálculo de alguna de las medidas de tendencia central o del rango, pueden consultar las secuencias 26, 36 y 37 del libro de primer grado y los recursos audiovisuales correspondientes. Se espera que las preguntas de la actividad 2 sean lo suficientemente claras para que recuerden y distingan cómo obtener e interpretar cada una de las medidas de tendencia central. En el caso de la desviación media, primero se obtienen las diferencias respecto a la media aritmética, y luego la distancia; la primera acepta resultados positivos y negativos, y la segunda sólo positivos. Destaque que un dato puede tener valor 0, y se debe considerar en el conteo del total de los datos. Los valores atípicos (o muy grandes o pequeños) influyen en el cálculo de la media aritmética y, por lo tanto, de la desviación media.

¿Cómo extender?

Pida reunir los datos recolectados en la encuesta que realizaron para obtener las medidas de tendencia central y variación para comparar con los otros conjuntos de datos y la información publicada en el portal del Inegi. ¿Es aceptable la información del portal como representativa del grado de escolaridad promedio en el país?

Secuencia 26 Histogramas y polígonos de frecuencia (LT, págs. 200-209)

Tiempo de realización	5 sesiones
Eje temático	Análisis de datos
Tema	Estadística
Aprendizaje esperado	Recolecta, registra y lee datos en histogramas, polígonos de frecuencias y gráficas de línea.
Intención didáctica	Que los alumnos lean, interpreten y presenten información estadística en histogramas y polígonos de frecuencia.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisuales** • *Histograma* • *Polígonos de frecuencia* **Informático** • *Polígonos de frecuencia*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recurso audiovisual** • *Análisis de datos*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Lean e interpreten la información presentada en histogramas para conocer sus elementos y analizar la forma que tienen.
- Sesión 2. Analicen los intervalos en que se agrupan los datos para elaborar e interpretar histogramas.
- Sesión 3. Construyan histogramas a partir de tablas de frecuencia de datos agrupados en intervalos. Interpreten la información que presenta un histograma respecto a los intervalos en que se organizan los datos.
- Sesión 4. Construyan e interpreten polígonos de frecuencias a partir de su representación tabular e histograma.
- Sesión 5. Reconozcan los tipos de gráficos estadísticos que conviene utilizar cuando los datos están agrupados o sin agrupar.

Acerca de...

En esta secuencia los alumnos aprenderán a elaborar, leer e interpretar histogramas y polígonos de frecuencias. La característica principal de estos tipos de gráficos estadísticos es que los datos están organizados en intervalos. Desde primaria los alumnos han interpretado y presentado información en gráficas de barras y de pastel que implican datos numéricos sin agrupar o datos categóricos (por ejemplo: ¿cuál es el color de ojos de las personas?, ¿cuál es el deporte favorito?, etcétera). A partir de esta secuencia, los alumnos aprenderán a organizar los datos en tablas de frecuencia agrupados en intervalos de igual tamaño y a presentarlos en histogramas y polígonos de frecuencia.

Una de las principales tareas en esta secuencia es analizar y aprender a organizar los datos en intervalos de igual tamaño y a determinar el punto medio de ese intervalo, mediante el cual es posible construir las gráficas. También es importante que los alumnos comprendan que la altura de la barra de cada histograma corresponde a la frecuencia del intervalo (expresada en frecuencias absolutas o relativas o en porcentaje). Estas representaciones gráficas permiten visualizar la variabilidad de los datos, así como la tendencia central, por eso se vinculan con la secuencia anterior. La diferencia ahora es que están agrupados en intervalos debido a que es posible presentar grandes cantidades de datos y, en el caso de los polígonos de frecuencias, es posible mostrar en un mismo plano dos o más conjuntos de datos y realizar comparaciones. De este modo, los alumnos adquieren conocimientos y desarrollan habilidades propias de un pensamiento estadístico y probabilístico (cuya representación en histogramas y polígonos de frecuencias es utilizada para exponer resultados de experimentos aleatorios cuando se tiene una gran cantidad de ensayos). Con esto se espera que fortalezcan los recursos que tienen para analizar y comprender la información que los rodea. En el siguiente bloque aprenderán a elaborar e interpretar gráficas de línea.

Sobre las ideas de los alumnos

Los alumnos pueden considerar que las gráficas de barra y los histogramas son el mismo tipo de gráficas estadísticas. Se espera que al finalizar la secuencia los alumnos reconozcan las diferencias entre ambos. Por ejemplo, en un histograma, el ancho de las barras corresponde al tamaño de los intervalos. Si dichos intervalos tienen el mismo tamaño, entonces la anchura de las barras es la misma en todo el gráfico y se dibujan sin dejar espacios entre ellas. Además, en un histograma hay tantas barras como intervalos se definan, mientras que en una gráfica de barras cada barra corresponde a un dato o categoría sin importar el ancho de la barra.

En cuanto al polígono de frecuencias se refiere, en lugar de barras, las frecuencias de cada intervalo se representan con un punto, que parte del punto medio del intervalo y se coloca a la altura de la frecuencia del mismo. Los alumnos deberán comprender que al agrupar los datos en intervalos se pierde de vista la frecuencia de un dato específico, tanto en el histograma como en el polígono de frecuencias; en este último caso, por ejemplo, habrá que insistir en que no es correcto darle significado a la línea que une los puntos consecutivos del polígono, porque solamente se está representando la frecuencia (absoluta o relativa, o porcentaje) por intervalo y no por cada valor del intervalo.

¿Cómo guío el proceso?

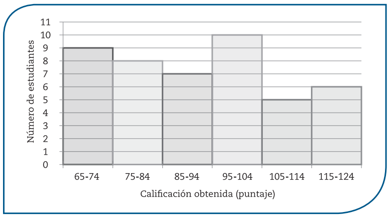
La secuencia se inicia proporcionando un conjunto de datos que corresponden a las respuestas de una encuesta. Los alumnos deberán organizarlos y presentarlos en las gráficas de acuerdo con el criterio que indicaron.

Se espera que la mayoría de los estudiantes utilice gráficas de barras y represente los datos sin agrupar, y que no tengan dificultades para realizar y contestar lo solicitado en los incisos d) al g). En particular porque en la secuencia anterior obtuvieron las medidas de tendencia central de otros conjuntos. El propósito es que trabajen con datos sin agrupar y elaboren una gráfica que utilizarán para comparar y contrastar con el histograma que se presenta en la actividad 2, destacando las características de una y otra. Se espera que al ubicar la media aritmética del conjunto de datos en el histograma, observen que ahora en el eje horizontal están representados intervalos y que deberán aproximar su ubicación, además de que la frecuencia del intervalo equivale a la suma de las frecuencias de todos los datos que están en ese intervalo. Sin embargo, la tendencia central de los datos se debe observar en la gráfica que ellos construyeron. El análisis entre una gráfica y otra se debe hacer vis a vis, es decir, comparando los ejes horizontales, luego los verticales, las barras de una y otra gráfica, etcétera.

Posteriormente, se sugiere comentar y analizar la información del recuadro para identificar las partes que integran un histograma. En la sesión 2, la atención se centra en los intervalos. Se estudia el caso de los intervalos de igual tamaño. Hay que aclarar que es posible construir histogramas con tamaños de intervalo diferentes, como los que se muestran en el Inegi o en otros sitios, generalmente el primero o el último intervalo son de diferente tamaño, como en la gráfica de la actividad 2 (Fuente: Encuesta Nacional de Hábitos, Prácticas y Consumo Culturales, octubre 2018. En http://www.conaculta.gob.mx/encuesta_nacional.php).

Es importante que los alumnos aprendan que los intervalos se pueden representar por su punto medio y, a partir de él, también construir las gráficas. Reflexione con ellos: es posible que ninguno de los datos originales sea igual al valor del punto medio del intervalo; sin embargo, es un representante de todos los datos que pertenecen a ese intervalo. Si lo considera necesario, también cuestione el tipo de información que se muestra en el eje vertical de las gráficas: frecuencias, frecuencias relativas o porcentajes.

En la sesión 3, los alumnos elaborarán histogramas y completarán las tablas de frecuencias de las situaciones que se presentan. En la sesión 4, los alumnos aprenderán a trazar el polígono de frecuencias a partir del histograma. Y también reflexionarán sobre el número de intervalos que conviene definir y el rango de los valores.



En la sesión 5, se propone completar la tabla de frecuencias de una situación que implica intervalos con valores decimales. Se recomienda resaltar que una característica más de estos nuevos gráficos es que se pueden representar datos continuos y no sólo discretos, como ocurre en la gráfica de la actividad 2 de la sesión 2, que corresponde al número de libros que se tienen en casa. Aunque estadísticamente podemos obtener la marca de clase del intervalo de 1-10 libros (5.5 libros), lo cierto es que el contexto sólo acepta un número exacto de libros.

En el caso de la sesión 3, actividad 1, los alumnos aprenderán que en un plano es posible presentar dos o más polígonos de frecuencias referidos a dos o más conjuntos de datos que corresponden a la misma situación, lo que hace que sea posible su comparación.

Finalmente, en la actividad 4 de la sesión 5, se pretende que los estudiantes sean capaces de leer e interpretar el tipo de información que representa cada gráfica y que la relacionen con la correspondiente de forma correcta.

Pautas para la evaluación formativa

Observe si durante el trabajo con esta secuencia los alumnos:

- Elaboran histogramas y polígonos de frecuencias con precisión (incluyen título del gráfico, escala de los ejes, rótulos).
- Interpretan de forma adecuada los datos que se presentan en tablas y gráficas.
- Obtienen y representan correctamente datos, frecuencias y valores de las medidas de tendencia central que se les indica.
- Aplican de manera apropiada el procedimiento para obtener el punto medio de cada intervalo y determinan el número de intervalos en que es adecuado organizar un conjunto de datos.
- Relacionan acertadamente el tipo de gráfica estadística con la información que presentan.

¿Cómo apoyar?

Si los alumnos tienen dificultades para comprender que se pierde precisión al indicar la frecuencia de un dato en particular, pida que consideren las actividades 1 y 2 de la sesión 1, específicamente el caso de las personas que asignaron 10 como puntaje, donde observarán que ese dato tiene una frecuencia de 2, es decir, dos personas de las treinta que contestaron asignaron 10 puntos como grado de satisfacción.

Sin embargo, en el caso del histograma de la actividad 2, no aparece explícitamente el 10, pero se sabe que ese dato se encuentra en el intervalo 9-11 y que la frecuencia del intervalo es 5, la cual engloba a las personas que dieron como puntaje 9, 10 u 11. Además, si nos referimos a ese intervalo por su punto medio (o marca de clase), diremos que es 10 y la frecuencia, 5. De tal manera que es importante que los estudiantes sean conscientes de cuál es el procesamiento que se da a los datos.

Un conjunto con una gran cantidad de datos permite comprender mejor su tendencia y distribución al agruparlos en intervalos y presentarlos por medio de un histograma o polígono de frecuencias, pero se pierde precisión sobre un dato en particular.

¿Cómo extender?

Pida que elaboren la tabla de frecuencias y el histograma de los datos de la actividad 2 de la sesión 1, de la secuencia 25 (los datos que Joel obtuvo en la encuesta). Luego pida que ubiquen las medidas de tendencia central que obtuvieron, compárenlas con la gráfica de la actividad 3 de esa sesión y observen los cambios entre una y otra gráfica. ¿Cuántos intervalos consideraron?, ¿de qué tamaño son?

También pueden elaborar en un mismo plano los polígonos de frecuencias que corresponden a los 3 conjuntos de datos que se obtienen de la encuesta de Joel, de Emma y del grupo, y observar su distribución respecto al valor del grado de escolaridad promedio de México.

Evaluación Bloque 2

(LT, págs. 210– 211)

Con el propósito de observar el avance en el logro de los aprendizajes de los estudiantes, además de las consideraciones que usted haya realizado, se presentan a continuación los resultados y orientaciones del instrumento de evaluación del bloque 2.

Reactivos 1, 2 y 3. Multiplicación y división de números enteros, fracciones y decimales. Con estos reactivos se valora el desarrollo de los alumnos respecto a su sentido numérico y su manejo de las operaciones de multiplicación y división. Más allá de proponer operaciones en las que deben obtener los resultados correctos, se plantean situaciones en las que los alumnos movilizan sus habilidades para mostrar la comprensión del significado e interpretación de las operaciones básicas de números enteros, fracciones y decimales negativos y positivos.

Reactivo 1. Valora los conocimientos y habilidades de los alumnos respecto a la aplicación de las reglas de los signos de números enteros. Cuando se indica que la suma de los números es -12 puede implicar que ambos números son negativos o de diferente signo, siendo el negativo de mayor valor absoluto. Al considerar la segunda condición, el cociente es -5, se determina que los números son de diferente signo, debido a que el cociente es negativo. La respuesta correcta es -15 y 3, porque $-15 + 3 = -12$ y $-15 \div 3 = -5$.

Reactivo 2. Valora el conocimiento de las fracciones y la división con este tipo de número. Particularmente, la tarea implica reversibilidad del pensamiento, pues dado el cociente, se debe determinar el dividendo y el divisor, además de aplicar la regla de los signos en la división. Partiendo de este aspecto, se puede determinar uno de los dos elementos: dividendo -3 y divisor 4 (o dividendo 3 y divisor -4).

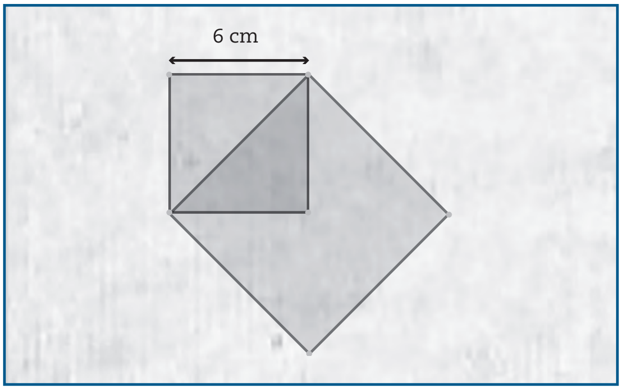
Reactivo 3. Permite observar el aprendizaje que han obtenido de la multiplicación con decimales. Como primer paso, los factores son de diferente signo. Hay un conjunto de respuestas correctas posibles. Si se considera la multiplicación como una suma repetida, uno de los factores puede ser -1.5 y el otro 3, o 1.5 y -3. Otro par de factores posibles es -0.5 y 9 (o 0.5 y -9). También puede ser 0.75 y 6. Si se considera que el producto es el resultado de dos factores y su operación inversa es la división, al dividir el producto -4.5 entre 1, se obtiene -4.5, que es otra combinación posible y denota también el desarrollo del sentido numérico. Es recomendable pedir a los estudiantes que justifiquen sus respuestas.

Reactivo 4. Potencias de exponente entero y conversión de medidas de masa (peso). De acuerdo con lo que establece la base del reactivo, la expresión que permite saber cuánto dinero se obtendrá de la venta es $50^3 = 125\,000$, y 5.51 lb es el peso promedio de un pollo de los que transporta el camión y es equivalente a 2.5 kg. Se debe considerar que 1 lb $= 0.454$ kg.

Reactivo 5. Notación científica. Se evalúa que los alumnos comprendan la manera de operar y expresar la notación científica. En la situación presentada ambas expresiones tienen la misma potencia, entonces la respuesta implica la diferencia entre los factores que no son potencia: $2.5 - 1.9 = 0.6$.

Y aplicando las reglas de la notación decimal, la diferencia es: 6×10^4. Tal vez, algunos alumnos anoten como respuesta 0.6×10^5, pero no están considerando la regla de la escritura de la notación científica: el primer factor debe tener un dígito entero.

Reactivo 6. Aproximación a la raíz cuadrada. Se espera que los alumnos apliquen alguna de las estrategias estudiadas en la secuencia para aproximar raíces cuadradas y determinen el valor de la medida del lado del cuadrado naranja. Dada la figura, los alumnos pueden establecer que uno de los lados del cuadrado naranja es la diagonal del cuadrado menor, en el que cada lado mide 6 cm. Así, la medida del lado del cuadrado naranja es aproximadamente: $\sqrt{2} \times 6 \approx 8.48$ cm.



Reactivo 7. **Reparto proporcional.** Los alumnos deben comprender que el monto total de utilidades se debe repartir entre todos los alumnos de la escuela. Así, el primer paso es determinar cuántos alumnos hay. Como resultado de sumar la cantidad de alumnos que hay en cada grado se sabe que son 106: $(20 \times 2) + 18 + (16 \times 3) = 40 + 18 + 48 = 106$. En este punto de la resolución puede ocurrir que algunos alumnos se equivoquen.

En la siguiente parte del proceso de resolución, se divide el monto de las utilidades entre el número total de alumnos, el cociente es 23 y representa la cantidad de dinero que cada alumno de la escuela recibirá. Finalmente, se determina el monto por grado y la tabla completa es la siguiente:

Primero	Segundo	Tercero	Cuarto	Quinto	Sexto
$ 460	$ 460	$ 414	$ 368	$ 368	$ 368

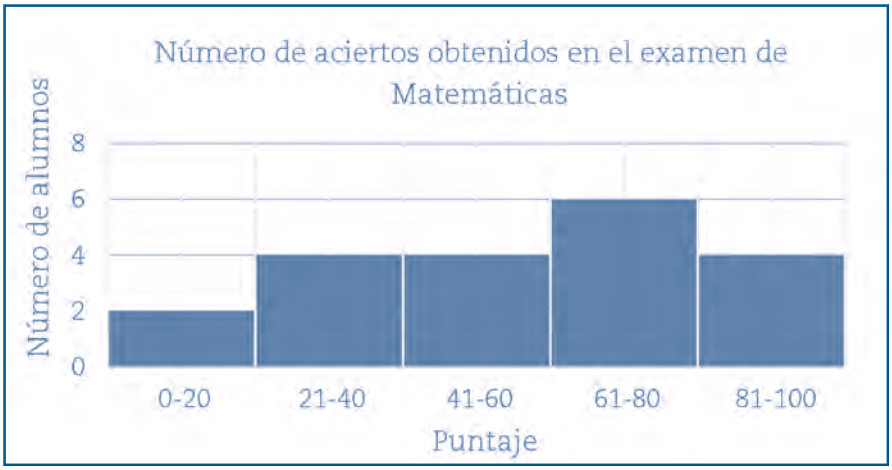
Reactivo 8. **Área del círculo.** Valora la manera en que reconocen y aplican el cálculo del área del círculo en una situación de la vida real. En este caso, para conocer el área del mantel circular, debe obtener la medida del radio o considerar la mitad de la medida del diámetro. El área del mantel es mayor que un metro cuadrado, pero menor que dos; sin embargo, deberá comprar dos madejas de estambre y le sobrará un poco.

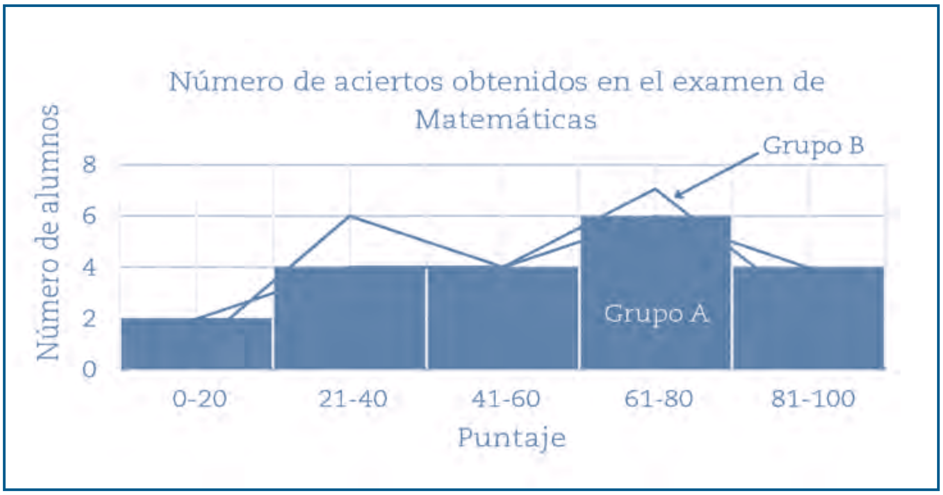
Área del mantel	Número de madejas de estambre
1 m^2	1
$A = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \pi r^2 = \pi(0.75)^2$ $= \pi(0.5625) = 1.76625$	2

Reactivo 9. **Medidas de tendencia central y de dispersión, histograma y polígonos de frecuencias.** Evalúa el aprendizaje del estudiante respecto a conocimientos y habilidades que le permitan analizar, comprender e interpretar mejor una situación. No se evalúa solamente si saben calcular los valores de las medidas estadísticas ni de construir las gráficas. Para contestar el inciso a) se requiere calcular la media aritmética y la desviación media de cada grupo.

Grupo	Media aritmética	Desviación media
A	58.5	19.95
B	55.25	20.025

Con estos valores se observa que el grupo con mejor desempeño es el A, tanto porque tiene mejor valor en la media aritmética como por tener menor desviación media. En cuanto al inciso b) el histograma puede estar formado de 4 a 5 columnas, lo importante es que estén claramente identificados los intervalos y se respeten las principales características de un histograma. Por ejemplo, las barras van continuas y el eje vertical representa la frecuencia, en este caso, el número de alumnos que obtuvieron los puntos señalados en cada intervalo.





Y en el caso del inciso c), se pide el trazo de los polígonos de frecuencias a partir del primer histograma mostrado, derivando en el segundo.

La segunda parte de los reactivos son de opción múltiple.

Reactivo 1. Multiplicación de números enteros, fraccionarios y decimales. Valora el aprendizaje de la generalización de la aplicación de la regla de los signos en la multiplicación de números con signo. La respuesta correcta es el inciso b): Uno, tres o cinco.

Reactivos 2 y 3. Sucesiones de figuras y números y expresiones equivalentes. Evalúa la capacidad para reconocer expresiones algebraicas equivalentes que generen una sucesión de números determinada. En el caso del reactivo 2, las respuestas correctas son los incisos b) $\frac{1}{2}(n+1)$, e) $0.5n + 0.5$ y f) $\frac{1}{2}n + 0.5$. Tal vez algunos alumnos consideren como correcta las opciones de los incisos a) y c). Si eso ocurre, los alumnos aún no aplican la distribución de la multiplicación respecto de la suma, porque la expresión equivalente es $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$. En el caso de seleccionar el inciso d), la expresión equivalente es $x + \frac{1}{2}$. En el reactivo 3, las respuestas correctas son los incisos b) $\frac{1}{2}n$ y g) $0.5n$.

Reactivo 4. Sistemas de ecuaciones. Método de igualación. En el inciso a) se valora que los alumnos comprendan el procedimiento que se sigue al aplicar el método de igualación. La respuesta correcta es: $4x + 3x = 7 + 28$.

Método de sustitución. En el inciso b) se valora que comprendan y apliquen el procedimiento que se sigue con el método de sustitución. La respuesta correcta es: $-7y = 14 - 42$.