LIBRO PARA EL MAESTRO

Matemáticas

Segundo grado

TELEsecundaria

Índice

II. Sugerencias didácticas específicas

Punto de partida (LT, págs. 10 y 11)

Con esta batería de reactivos se pretende apoyar al maestro en la valoración del dominio que tienen los estudiantes de los aprendizajes esperados de primero de secundaria.

Reactivo 1. Sucesiones de números y figuras. Con la resolución de este reactivo los alumnos muestran sus conocimientos y habilidades para determinar los términos siguientes y el término enésimo de una sucesión de figuras con progresión lineal de la forma: $a\boldsymbol{n}$. En la sucesión que se presenta a los alumnos, el cuadrado que corresponde a la figura $\boldsymbol{n}$ tiene $4\boldsymbol{n}$ cuadritos. Los cuadrados de las figuras 6 y 10 tienen 24 y 40 cuadritos, respectivamente.

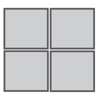


Figura 1

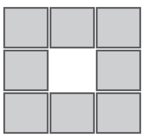


Figura 2

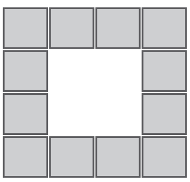


Figura 3

Reactivo 2. Ecuaciones de primer grado. En la resolución de los incisos que implica este reactivo los alumnos deberán traducir un problema verbal en una expresión algebraica; en este caso, en una ecuación que lo modele para encontrar la solución mediante la aplicación de los conocimientos adquiridos.

En el inciso a) los alumnos deben traducir la situación a la expresión $\frac{m}{2} = \frac{p-8}{2} = 18$, donde m representa la edad de la madre, y p, la edad del padre. Así, la edad de la madre es 36 y la del padre 44 años.

En el inciso b), la ecuación correspondiente es: $3s + 4c = 1\,200$, pero cada suéter vale \$50 más que una camisa, así, la expresión algebraica equivalente es:

$$3(c+50) + 4c = 3c + 150 + 4c = 7c + 150 = 1\,200$$

Litros	17	25	28	35	43	55	64	78	81
Minutos	3.4	5.0	6.6	7.0	8.6	11.0	12.8	15.6	16.2

El precio de una camisa es de \$150, y el de un suéter, \$200.

En el inciso c) la ecuación lineal es: $2n - 6 = \frac{n}{2}$; al aplicar operaciones inversas hasta despejar n se obtiene:

$$2n - \frac{n}{2} = 6 \qquad \frac{4}{2}n - \frac{1}{2}n = \frac{3}{2}n = 6 \qquad n = \frac{12}{3} = 4$$

Reactivo 3. Proporcionalidad directa. Con la respuesta de este reactivo se observa si los alumnos reconocen una situación de proporcionalidad directa y establecen alguna estrategia que les permita obtener los valores faltantes.

En el inciso a) se considera un promedio de bombeo de sangre por minuto distinto al de la tabla a fin de que los estudiantes no recuperen de ella el valor señalado, por lo que:

$$24\text{ h} \times 60\text{ min} \times 5.5\text{ L} = 7\,920\text{ L}$$

Reactivo 4. Porcentaje. En este reactivo se podrá observar el grado de dominio de los alumnos sobre el uso de las operaciones básicas y el manejo de porcentajes. En la tabla se agrega un renglón que permite identificar en términos de porcentajes la parte que representa de la cantidad base, en este caso se llama "Precio sin IVA" equivalente a 100%.

Artículo	Precio sin IVA	Precio con IVA	Descuento	Precio total
	100%	116%	en %	(+ IVA – descuentos incluidos)
Lavadora	$4939.66	$5730.00	20	$4584.00
Comedor	$11890.00	$13792.40	15	$11723.54
Refrigerador	$6688.89	$7759.11	10	$6983.20
Estufa	$5336.21	$6190.00		
Recámara	$5964.29	$6918.57	16	$5811.60

En el caso de la estufa, no tiene un porcentaje de descuento, así que los estudiantes o usted pueden proponer uno o no aplicar ninguno.

Para contestar el inciso a) se considera el monto de los precios totales para descontar el 5% equivalente a $0.05 = \frac{5}{100}$. Hay al menos dos maneras de proceder para obtener el total:

A. Sumar los precios totales y descontar al total el 5%.

Artículo	Precio sin IVA	Precio con IVA	Descuento	Precio total
	100%	116%	en %	(+ IVA – descuentos incluidos)
Comedor	$11890.00	$13792.40	15	$11723.54
Recámara	$5964.29	$6918.57	16	$5811.60
				$17535.14
			menos 5%	$876.75
				$16658.38

B. Descontar de cada precio total 5% y luego sumar las cantidades para obtener el total final. En el caso del inciso b), los alumnos pueden proceder de manera semejante. El precio total del comedor y refrigerador es:

Artículo	Precio sin IVA	Precio con IVA	Descuento	Precio total	Descuento adicional 5%	
	100%	116%	en %	(+ IVA – descuentos incluidos)	5%	
Comedor	$11890.00	$13792.40	15	$11723.54	$586.18	$11137.36
Refrigerador	$6688.89	$7759.11	10	$6983.20	$349.16	$6634.04
						$17771.40

Reactivo 5. Volumen de prismas. Con este reactivo los alumnos muestran sus conocimientos y habilidades sobre el volumen de prismas, conversión entre medidas de longitud del Sistema Internacional y la ubicación espacial. Debido a la posición en que se deben colocar las cajas dentro del contenedor, se espera que determinen el número de cajas que se pueden colocar por el frente (largo del contenedor), 5 y 8 cajas por el ancho, y así en el fondo del contenedor habrá $8 \times 5 = 40$ cajas. Dada la altura de 28 dm se forman tres niveles más. Por lo tanto, en el contenedor caben $40 \times 4 = 160$ cajas. Otra opción consiste en calcular el volumen (capacidad) del contenedor y el volumen que ocupan las cajas, de donde se tiene:

$$8\text{ m} \times 4\text{ m} \times 2.8\text{ m} = 89.6\text{ m}^3$$
$$\rightarrow 80\text{ dm} \times 40\text{ dm} \times 28\text{ dm} = 89\,600\text{ dm}^3$$

Éste es el volumen que le cabe al contenedor, y el volumen de cada caja es:

$$16\text{ dm} \times 5\text{ dm} \times 7\text{ dm} = 560\text{ dm}^3$$

Por lo tanto, se divide el volumen del contenedor entre el volumen de cada caja:

$$89\,600 \div 560 = 160$$

Reactivo 6. Perímetro y área de figuras compuestas. Este reactivo implica calcular el perímetro y el área total de la figura compuesta por figuras rectangulares. La parte superior de la figura mide de largo 170 cm y de altura 20 cm de cada lado. La parte inferior de la figura es irregular y mide en total 270 cm más. Así, el perímetro es 500 cm. Para obtener el área total se puede calcular el área de cada sección, identificadas de izquierda a derecha:

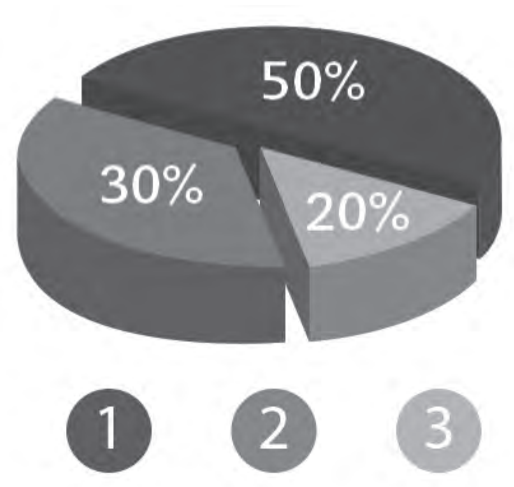
Reactivo 7. Medidas de tendencia central y gráfica circular. Se espera que los alumnos reconozcan que la medida de tendencia central conveniente es la moda, porque representa la marca de pantalones que la gente prefiere. En este caso, esa marca es la 1 pues la prefieren 15 de las 30 personas entrevitadas; además, esto representa el 50%, y el otro 50% se reparte entre las opciones 2 y 3, de la siguiente forma:

$$\frac{30}{6} = \frac{100\%}{x\%} \rightarrow x = 20\%$$

$$\frac{30}{9} = \frac{100\%}{x\%} \rightarrow x = 30\%$$

Por lo tanto, la gráfica circular se obtiene al distribuir de manera proporcional los 360° que tiene el círculo entre el tanto por ciento correspondiente a cada valor obtenido.

Marca de pantalones que la gente prefiere



Bloque 1

Secuencia 1 Multiplicación y división de números decimales positivos (LT, págs. 14-21)

Tiempo de realización	4 sesiones
Eje temático	Número, álgebra y variación
Tema	Multiplicación y división
Aprendizaje esperado	Resuelve problemas de multiplicación y división con fracciones y decimales positivos.
Intención didáctica	Que los alumnos desarrollen habilidad para multiplicar y dividir números decimales y sepan usar estas operaciones al resolver problemas.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisuales** • *Multiplicaciones por 10, por 100, por 1 000* • *División por 10, por 100, por 1 000*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recurso audiovisual** • *La multiplicación y división con fracciones y decimales positivos*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Aprendan la técnica para multiplicar un número natural o decimal por una potencia de 10.
- Sesión 2. Aprendan a usar la técnica para dividir un número natural o decimal entre una potencia de 10.
- Sesión 3. Comprendan el significado de multiplicar dos números decimales y usen el algoritmo de esta operación al resolver problemas.
- Sesión 4. Comprendan el significado de dividir dos números decimales y usen el algoritmo de esta operación al resolver problemas.

Acerca de...

El estudio de esta secuencia se inicia con un ejercicio en el que dos alumnos multiplican un número natural por una potencia de 10; uno de ellos usa papel y lápiz y el otro, calculadora. La finalidad es que se den cuenta de que hay una técnica para multiplicar por una potencia de 10 que permite hallar el resultado más rápido que la calculadora, por lo que vale la pena conocerla y usarla. Este mismo juego se extiende a la multiplicación de un decimal por una potencia de 10 y después a la división de un natural o decimal entre una potencia de 10.

Para darle significado a la multiplicación entre dos números decimales, se utiliza como apoyo gráfico un cuadrado como unidad cuadrada dividida en centésimos (véase la sesión 3). También se calcula el área de diferentes rectángulos cuyos lados están expresados en décimos de unidad de longitud, mientras que su producto, que es la unidad de área, está expresado en centésimos de unidad de área.

Este mismo recurso se usa para la división cuando se conoce el área y la medida de un lado del rectángulo. La intención es que los alumnos generalicen la idea de que, si multiplican décimos por décimos, en el resultado debe haber centésimos. Si multiplican décimos por centésimos, en el resultado debe haber milésimos. Dicho de otra manera: el producto debe contener tantas cifras decimales como la suma de las cifras decimales de los factores.

Un aspecto importante que se analiza en esta secuencia es la relación inversa entre multiplicación y división a partir de casos concretos como:

- Multiplicar por 0.1 tiene el mismo efecto que dividir entre 10.
- Dividir entre 0.1 tiene el mismo efecto que multiplicar por 10.

En general, para dividir entre un decimal se usa la técnica de multiplicar el dividendo y el divisor por la misma potencia de 10, con la finalidad de que el divisor sea un número natural.

Sobre las ideas de los alumnos

No obstante que las técnicas para multiplicar o dividir por potencias de 10 ahorran tiempo al efectuar cálculos, los alumnos tienden a no usarlas. Se ha observado que muchos de ellos ponen filas de ceros en los productos parciales en vez de sólo correr el punto decimal o agregar ceros cuando multiplican o dividen por potencias de 10. Otros prefieren usar la calculadora cuando no es necesario. Una posible causa es que no entienden por qué funcionan las técnicas y se olvidan de ellas. Es necesario cuestionar sistemáticamente si el cálculo se puede hacer mentalmente, si es necesario escribir la operación o usar la calculadora.

Muchos alumnos suelen confundir potencia de 10 con múltiplo de 10. Conviene aclararles que los múltiplos de 10 son de la forma $10n$, esto es, $10(1) = 10$, $10(2) = 20$, $10(3) = 30$, etcétera, mientras que las potencias de 10 son de la forma 10^n, es decir, $10^1 = 10$, $10^2 = 100$, $10^3 = 1000$, $10^4 = 10000$, etcétera. Para multiplicar por un múltiplo de 10 es necesario multiplicar por 10 y luego por n. Por ejemplo,

$$2.5 \times 60 = 2.5 \times 10 \times 6$$

¿Qué material se necesita?

Si les es posible, al finalizar el trabajo de la primera sesión vean el audiovisual *Multiplicaciones por 10, por 100, por 1000*, para que reafirmen o rectifiquen sus aprendizajes; al término de la segunda sesión, se sugiere utilizar el audiovisual *División por 10, por 100, por 1000.*

Algunas actividades requieren el uso de calculadora; procure que haya al menos una por pareja, pero es necesario controlar su uso.

¿Cómo guío el proceso?

La multiplicación y la división con decimales tienen un uso social muy amplio. Puede iniciar el estudio de la secuencia solicitando ejemplos de problemas en los que se utilizan estas operaciones y, de paso, ver qué tanto saben de ellas.

La actividad 1 de la sesión 1 requiere el uso de una calculadora por pareja. Dé el tiempo suficiente para realizar el ejercicio y observe si, a medida que transcurre, el alumno que usa papel y lápiz obtiene más rápido el resultado una vez que se da cuenta de que, para multiplicar un número natural por una potencia de 10, basta con agregarle ceros. Una vez que realizan las rondas propuestas, asegúrese de que las reglas que formulan en la actividad 2 y en la 3b de la sesión 1 son claras y precisas. Algunos alumnos suelen decir, erróneamente, que se recorren los ceros, cuando lo que se recorre es el punto decimal y, en algunos casos, se requiere agregar ceros.

Observe si usan las técnicas formuladas para resolver rápidamente los problemas de la actividad 5 de la sesión 1, y si logran ver que en la actividad 7 de la sesión 1 se puede multiplicar por una potencia de 10 y luego por un dígito.

Apoye a los alumnos para que revisen con detalle las actividades 4 a 7 de la sesión 2, ya que es necesario dejar claro que $0.1 = \frac{1}{10}$ y multiplicar por $\frac{1}{10}$ equivale a obtener la décima parte, es decir, a dividir entre 10. Por otra parte, dividir entre $\frac{1}{10}$ es la operación inversa de multiplicar por $\frac{1}{10}$, por lo tanto, dividir entre $\frac{1}{10}$ equivale a multiplicar por 10.

La unidad cuadrada que se utiliza en la sesión 3 es un buen recurso para que los alumnos vean los tamaños relativos de una unidad, un décimo y un centésimo. Muchos alumnos todavía piensan que $\frac{1}{100}$ es mayor que $\frac{1}{10}$

También ilustra que al multiplicar décimos por décimos se obtienen centésimos, y que al dividir centésimos entre décimos se obtienen décimos.

La propiedad que se ilustra en el segundo recuadro de formalización de la sesión 4 es la misma que permite encontrar fracciones equivalentes; es conveniente establecer esta relación.

En una división, si el dividendo y el divisor se multiplican por el mismo número, el cociente no se altera. Por ejemplo:

$$15 \div 3 = 5;\ (15 \times 4) \div (3 \times 4) = 60 \div 12 = 5;\ (15 \times 10) \div (3 \times 10) = 150 \div 30 = 5.$$

$$\text{En general, } a \div b = (a \times n) \div (b \times n).$$

Cuando el divisor de una división es un número decimal, es necesario multiplicarlo por 10, 100, 1 000, etcétera, para convertirlo en entero; sin embargo, hay que multiplicar el dividendo por el mismo número para que el cociente no se altere.

Esta propiedad es la que permite convertir el divisor decimal en un número natural para poder hacer la división.

$$\frac{a}{b} = \frac{an}{bn};\ a \div b = an \div bn$$

Pautas para la evaluación formativa

Con la finalidad de verificar en qué medida se va logrando la intención didáctica de esta secuencia, es necesario hacer un registro de lo siguiente.

a) Ante un problema como: "Un kilogramo de tortillas cuesta $14.50. ¿Cuánto debo pagar por 10 kg?".
   - ¿El alumno es capaz de obtener el resultado inmediatamente?
   - ¿Sucede lo mismo ante un problema que implica dividir un decimal entre una potencia de 10?

b) Ante un problema como: "Javier dio 3.5 vueltas alrededor de una pista de 2.5 km de longitud. ¿Cuántos kilómetros recorrió en total?".
   - ¿El alumno logra obtener y expresar el resultado correcto sin necesidad de usar una calculadora?
   - ¿Sucede lo mismo con un problema que implica dividir entre un decimal? Por ejemplo: "Javier recorrió 8.75 km alrededor de una pista que mide 2.5 km de longitud. ¿Cuántas vueltas dio?".

¿Cómo apoyar?

En la sesión 1, si observa que después de jugar varias rondas con la calculadora una pareja no logra darse cuenta de que basta con agregar ceros, juegue con ellos, use lápiz y papel, y ellos la calculadora. Es muy probable que después de resolver algunas operaciones adopten la técnica y la usen. Si es necesario, haga lo mismo cuando se usen decimales.

Si en la actividad 7 de la sesión 1 los alumnos no logran ver que, por ejemplo, para multiplicar 12.40×15 se puede multiplicar por 10, que da 124, y luego sumar a este resultado la mitad de 124, que es 62, para obtener un total de 186, haga una puesta en común para que usted o algún alumno lo explique.

Si un alumno no logra ver que dividir entre $\frac{1}{10}$ tiene el mismo efecto que multiplicar por 10, use una calculadora y ponga varios ejemplos en los que se multiplique un número natural por 0.1, para que se vea que el resultado siempre es 10 veces mayor.

¿Cómo extender?

En cada sesión proponga una operación y pida que inventen un problema que se pueda resolver con ella. Analicen algunos de los problemas propuestos para ver si son claros, si la pregunta está bien formulada y si tiene una sola respuesta, varias o ninguna.

Secuencia 2 Multiplicación y división de fracciones positivas (LT, págs. 22-31)

Tiempo de realización	5 sesiones
Eje temático	Número, álgebra y variación
Tema	Multiplicación y división
Aprendizaje esperado	Resuelve problemas de multiplicación y división con fracciones y decimales positivos.
Intención didáctica	Que los alumnos desarrollen habilidad para multiplicar y dividir números fraccionarios y sepan usar estas operaciones al resolver problemas.
Materiales	• Juego de geometría • Papel cartulina o cartoncillo
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisuales** • *Una vuelta y media* • *Multiplicar, a veces, también es dividir* **Informático** • *Multiplicar por el recíproco*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recurso audiovisual** • *La multiplicación y división con fracciones y decimales positivos*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Desarrollen una técnica para calcular una fracción de un número natural ($\frac{a}{b}$ de n) y la relacionen con la multiplicación $\frac{a}{b} \times n = n \times \frac{a}{b}$
- Sesión 2. Desarrollen una técnica para averiguar cuántas veces cabe una fracción en un número natural y la relacionen con la división $n \div \frac{a}{b}$
- Sesión 3. Conozcan el significado del factor recíproco y cuál es el efecto que produce en una figura a escala.
- Sesión 4. Desarrollen una técnica para dividir un número natural entre una fracción, o una fracción entre otra fracción, apoyados en la noción de recíproco de un número.
- Sesión 5. Usen las técnicas para multiplicar o dividir números fraccionarios al resolver problemas.

Acerca de...

Ésta es la primera de dos secuencias definidas para estudiar específicamente la multiplicación y división de fracciones. Se inicia con un problema que no resulta extraño para los alumnos. Se trata de una pista de carreras cuya longitud es de 400 m, en la que se requiere calcular la distancia recorrida al dar x cantidad de vueltas. Se pone a los alumnos ante la necesidad de averiguar cuánto es $\frac{a}{b}$ de 400 y, enseguida, este mismo problema se traslada a otras cantidades.

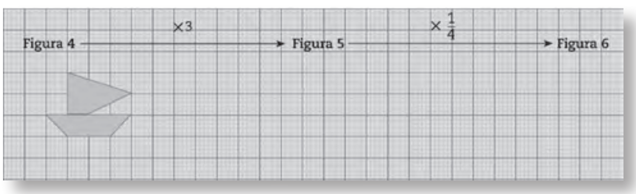
El problema fundamental en esta parte es pasar de la expresión $\frac{a}{b}$ de n a la multiplicación $\frac{a}{b} \times n = n \times \frac{a}{b}$. Es preciso que los alumnos comprendan la relación anterior, pues están acostumbrados a que el resultado de multiplicar dos números naturales es siempre un número mayor que los dos factores: por ejemplo, $5 \times 9 = 45$, que es la traducción de 5 **veces** 9 o 9 **veces** 5; sin embargo, el significado de esta operación cambia en el conjunto de los números racionales, por ejemplo, $\frac{1}{2} \times 4 = 2$, significa $\frac{1}{2}$ *de* 4.

Se continúa con la división de un natural entre una fracción, ante el problema de averiguar cuántas veces cabe una medida en otra. A diferencia de la multiplicación, esta idea sí se vincula directamente con la división de naturales. En este caso, lo que se complica es entender el porqué de la técnica o algoritmo, puesto que no se trata simplemente de decir que se multiplica el primer numerador por el segundo denominador y el primer denominador por el segundo numerador, ni tampoco que se multiplica en cruz sin saber por qué, pues cuando no se comprende por qué se llevan a cabo algunos pasos, fácilmente se olvida el orden en que deben realizarse. Por ello, el recurso que se utiliza para entender la técnica de la división es la noción del recíproco, en el contexto de la construcción de figuras a escala.

Sobre las ideas de los alumnos

Cuando se trata de calcular una fracción unitaria de un número natural, $\frac{1}{b}$ de n, los alumnos no tienen mucha dificultad, basta con dividir n entre b. Sin embargo, cuando se trata de calcular $\frac{a}{b}$ de n muchos alumnos insisten en hacer una sola operación, obtienen $\frac{1}{b}$ de n y se olvidan de multiplicar por a.

Muchos alumnos prefieren ir directamente a la técnica sin entender por qué se aplica de tal o cual manera. El dibujo a escala es un buen recurso para entender que dividir entre $\frac{a}{b}$ equivale a multiplicar por $\frac{b}{a}$, pero hay que destinar el tiempo necesario para que los alumnos hagan los trazos que se requieren y vean lo que pasa con las figuras y con los factores de escala que se utilizan. Tampoco es fácil que noten de inmediato que, por ejemplo, la aplicación de dos factores consecutivos, $\times 3$ y $\times \frac{1}{4}$ equivalen a la aplicación de un solo factor: $\times \frac{3}{4}$



La idea de la multiplicación y la división como operaciones inversas debe cobrar fuerza en esta secuencia. En el contexto del dibujo a escala, la finalidad es que los alumnos vayan de una figura A a una figura B mediante la aplicación de un factor de escala $\times \frac{a}{b}$. Al plantear la pregunta: ¿cómo se regresa de la figura B a la figura A?, es importante que verifiquen que eso se logra aplicando a B el factor inverso $\times \frac{b}{a}$, lo que equivale a dividir entre $\frac{a}{b}$

¿Qué material se necesita?

Procure que todos los alumnos tengan papel cuadriculado y una regla para el trazo de figuras a escala, así como escuadras y papel cartulina o cartoncillo para trazar las figuras de la sesión 5.

¿Cómo guío el proceso?

Para introducir la secuencia, después de leer la sección “Para empezar”, comente brevemente con los alumnos acerca de las pistas de atletismo, si las han visto, si saben cuánto mide una vuelta alrededor de la pista, e inicien la resolución de las actividades. Si observa que algunos alumnos tienen dificultades para llenar la primera tabla, realice uno de los cálculos con la participación del grupo. Por ejemplo, para saber cuántos metros corrió Elena, es necesario que los alumnos tengan claro primero que los 400 m equivalen a $\frac{8}{8}$; después, que dividirán esta cantidad en ocho partes iguales ($400 \div 8 = 50$) y, finalmente, que de esas ocho partes iguales Elena recorrió cinco; por lo tanto, basta con multiplicar $50 \times 5 = 250$. Para encontrar la cantidad de vueltas, pueden hacerlo por aproximaciones: 400 cabe más de cuatro veces en 1 900 y menos de cinco, de donde $4 \times 400 = 1\,600$; ya sólo faltaría saber cuánto representan los 300 m faltantes. Para eso basta observar que 100 m es la cuarta parte de 400, por lo que 300 equivale a tres cuartas partes. Así, 1 900 equivale a $4\frac{3}{4}$ vueltas.

Respecto a las preguntas que se presentan después de la tabla de la actividad 1 de la sesión 1, hay que verificar, en particular, en el inciso d), si los alumnos identifican la fracción $\frac{7}{10}$ a partir de las operaciones que se hacen.

En la actividad 2 de esta sesión se usa indistintamente la escritura decimal o fraccionaria. Hay que ver si los alumnos logran establecer la equivalencia. Esto se retomará en la última sesión, en la que se vincula la escritura decimal con el porcentaje.

Es probable que en los problemas de la actividad 3 se usen procedimientos diferentes. Por ejemplo, en el inciso a), $\frac{1}{3}$ *de* $24 = 8$; $\frac{1}{4}$ *de* $24 = 6$;

$\frac{3}{8}$ *de* $24 = 9$. Y $8 + 6 + 9 = 23$, entonces, sólo un alumno prefiere natación.

Otro procedimiento es: $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{23}{24}$, entonces, $\frac{1}{24}$, uno de 24 prefiere natación.

En los problemas de división es probable que recurran al valor unitario. Por ejemplo, en la actividad 3 de la sesión 2, para saber cuántas veces cabe $\frac{1}{3}$ de metro en 12 metros, se puede averiguar que en un metro cabe tres veces, por lo tanto, en 12 metros cabe $12 \times 3 = 36$ veces. Ahora bien, si $\frac{1}{3}$ cabe 36 veces, $\frac{2}{3}$, que es el doble de $\frac{1}{3}$, cabe 18 veces.

Al inicio de la sesión 3 conviene aclarar que un factor de escala es un número que multiplica las medidas de los lados de una figura para hacerla más grande o más chica. Procure que sean los propios alumnos quienes concluyan que, si el factor de escala es mayor que 1, la figura se hace más grande; si es menor que 1, se hace más chica, y, si es igual a 1, la figura queda igual.

Sugiérales que, al calcular las medidas con una escala determinada, las expresen como fracciones y no como decimales, ya que algunos de éstos son periódicos.

En la sesión 5, donde deben construir un rompecabezas más grande que el que se muestra, procure que después de que decidan quién hará cada pieza, comenten cómo calcularán las medidas que les tocan. Si les salió mal, no es necesario que usted se los diga, ellos se darán cuenta de que las piezas no embonan y deberán revisar el procedimiento que usaron para calcular las medidas. Es común que su razonamiento sea: "Si la pieza medía 4 y ahora debe medir 5, entonces hay que sumar 1 a cada medida", lo que llevará a que las piezas **no** embonen. Si esto ocurre, pregúnteles qué hicieron en las dos sesiones anteriores para obtener una figura mayor o una menor que la original. Es muy importante hacer una puesta en común de los procedimientos utilizados, pues entre todos se ayudarán a comprender mejor.

Pautas para la evaluación formativa

Con la finalidad de verificar en qué medida se va logrando la intención didáctica que aparece en la ficha descriptiva, y lo que se dice en la sección "¿Qué busco?", es necesario hacer un registro de lo siguiente:

a) Ante un problema como: "Un automóvil da $3\frac{2}{5}$ vueltas alrededor de una pista de 5 km. ¿Qué distancia recorrió el automóvil?".
   - ¿El alumno es capaz de obtener los $\frac{2}{5}$ de 5 para sumarlo a los 15 km de las tres vueltas recorridas?
   - ¿Representa la multiplicación convencional, $3\frac{2}{5} \times 5$, o calcula mentalmente el resultado?

b) Ante un problema como: "¿Cuántos vasos de $\frac{3}{4}$ de litro se pueden llenar con 15 L de agua de naranja?".
   - ¿El alumno es capaz de ver que el problema puede resolverse mediante la división $15 \div \frac{3}{4}$?
   - ¿Es capaz de resolver la división o suma muchas veces $\frac{3}{4}$ hasta completar 15?

c) Ante un problema como: "Si a una figura A se le aplica un factor de escala $\times\ \frac{3}{5}$, para obtener la figura B, ¿cuánto debe medir en la figura B un lado que en la figura A mide $\frac{2}{3}$?".
   - ¿El alumno es capaz de plantear la multiplicación $\frac{3}{5} \times \frac{2}{3}$, resolverla y expresar el resultado?

d) Ante un problema como: "Para obtener la figura B se usó el factor de escala $\times\ \frac{4}{5}$. ¿Cuál es el factor de escala que se debe utilizar para pasar de la figura B a la original?".
   - ¿El alumno responde inmediatamente que se trata del factor recíproco $\frac{5}{4}$?

¿Cómo apoyar?

Si los alumnos no logran resolver problemas como los de la pista de atletismo, sugiérales que dibujen la pista y anoten cuántos metros corresponden a la mitad, la tercera parte, etcétera.

Si no logran resolver problemas de división en los que se trata de averiguar cuántas veces cabe una cantidad en otra, sugiérales que hagan sumas.

Si nota que no entienden los problemas de escala, será necesario calcular las medidas y trazar las figuras para que noten si hubo algún error.

¿Cómo extender?

Utilice variantes en los problemas de escala: que unas veces encuentren las medidas de la figura reproducida; otras, la escala; otras, las medidas originales.

Secuencia 3 Multiplicación de números enteros

(LT, págs. 32-37)

Tiempo de realización	4 sesiones
Eje temático	Número, álgebra y variación
Tema	Multiplicación y división
Aprendizaje esperado	Resuelve problemas de multiplicación y división con números enteros, fracciones y decimales positivos y negativos.
Intención didáctica	Que los alumnos desarrollen habilidad para multiplicar números enteros y usen estas operaciones al resolver problemas.
Materiales	• Papel cuadriculado • Regla • Lápices de colores
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisuales** • *La regla de los signos de la multiplicación de números enteros y el plano cartesiano* • *La regla de los signos de la multiplicación de números enteros* **Informático** • *Multiplicación y división de números con signo*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recurso audiovisual** • *La multiplicación y división con números enteros, fracciones y decimales positivos y negativos* **Bibliografía** • Gallardo, Aurora y Abraham Hernández (s.f.). "Emergencia de los números enteros". Disponible en http://www.matedu.cinvestav.mx/~maestriaedu/docs/asig5/Agallardo.pdf (Consultado el 17 de julio de 2019).

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Extiendan el concepto de multiplicación de números naturales como una suma de sumandos repetidos para obtener el producto de números enteros.
- Sesión 2. Reconozcan los argumentos para determinar que el producto de un número entero positivo por uno negativo es un número entero negativo.
- Sesión 3. Comprendan la regla de los signos de la multiplicación de números enteros al graficar los valores de y cuando se tiene una relación de la forma $y = mx$.
- Sesión 4. Apliquen la regla de los signos de la multiplicación de números enteros en diferentes situaciones.

Acerca de...

Esta es la primera de dos secuencias definidas para estudiar específicamente la multiplicación y división de números enteros, y es la primera de tres secuencias que se definen para el logro del aprendizaje esperado: resuelve problemas de multiplicación y división con números enteros, fracciones y decimales positivos y negativos.

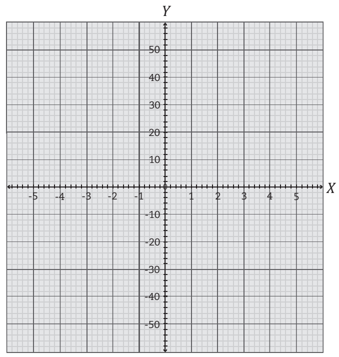
El estudio de esta secuencia se centra en la multiplicación de números enteros e inicia con una situación que puede facilitar la comprensión de la regla de los signos en la multiplicación de números enteros.

Posteriormente se recurre a la observación y análisis del patrón que siguen algunas multiplicaciones en las que deberán encontrar el factor que se desconoce o incluso la multiplicación que falta para completar la sucesión con la finalidad de que lleguen a la regla de los signos. Más adelante ubicarán los puntos que corresponden a una relación lineal de la forma $y = mx$, en la que a partir del valor que tome m y dando a x valores enteros positivos y negativos, se obtiene el valor de y.

En las sesiones 3 y 4 se incluye la representación gráfica y tabular de multiplicaciones que se pueden asociar a situaciones de relación funcional lineal estudiadas en primer grado, como una forma más de dar significado a la multiplicación de números enteros y, en particular, a la regla de los signos. A partir de la visualización y el análisis de la recta, se espera que los alumnos comprendan qué sucede con la multiplicación de números enteros y cuál es el valor del producto, pretendiendo que los alumnos puedan comprender y aplicar las reglas de los signos de la multiplicación de una manera no memorística.

1. Reúnete con un compañero y completen la siguiente tabla.

x	4	3	2	1	0	−1	−2	−3	−4
$y = -6x$									



a) ¿Cuál es la operación que se realiza entre −6 y x? __________

b) Si el valor de $x = 3$, y se sustituye en la expresión $y = -6x$, ¿qué valor tiene y? __________

c) Dibujen en el plano cartesiano los puntos de coordenadas (x, y) correspondientes a esta tabla.

d) Si $x = 5$, ¿cuánto vale y? __________

¿Cómo pueden comprobar que el resultado es correcto? __________

¿Qué material se necesita?

Hojas de papel cuadriculado, una regla y lápices de colores para la ubicación y reconocimiento de los puntos y el trazo de las rectas propuestas en la sesión 3.

En la sesión 2, se sugiere ver el informático *Multiplicación y división de números con signo*. En la sesión 3 es importante que cuando vean el audiovisual *La regla de los signos de la multiplicación de números enteros y el plano cartesiano*, tracen alguna de las gráficas que se presenten.

En la sesión 4, se sugiere utilizar el audiovisual *La regla de los signos de la multiplicación de números enteros*, con el fin de practicar la multiplicación de enteros.

De ser posible, se recomienda ver el audiovisual para el maestro, en el que conocerá parte de la historia de los números enteros y sus operaciones, con lo cual se pretende analizar algunos aspectos que es necesario considerar en el estudio de este contenido.

¿Cómo guío el proceso?

Es conveniente que usted observe previamente el audiovisual *La multiplicación y división con números enteros, fracciones y decimales positivos y negativos* para que tenga mayor información acerca del origen y desarrollo de este conjunto de números. Después de que los alumnos lean la sección "Para empezar", comente brevemente con ellos acerca del origen de los números enteros y sus operaciones. Con las actividades de la sesión 1 se espera que los alumnos observen a la multiplicación de los números enteros como una extensión de la multiplicación de los números naturales, como en el caso de las multiplicaciones:

$$4 \times (-2),\ 4 \times (-3) \text{ y } 4 \times (-4).$$

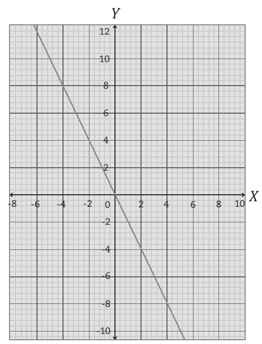
Con las actividades de la sesión 2 se espera que los alumnos observen que al multiplicar un número entero negativo por un número entero positivo su producto es negativo, independientemente de la posición del factor negativo. Desde el punto 3 de esta sesión es importante la reflexión que hagan los alumnos acerca de que un factor se conserva y va disminuyendo de uno en uno convirtiéndose después del cero en un número negativo y que, al contrario de lo que ahí sucede, el producto va creciendo hasta convertirse en número positivo. Esto es una forma de razonar el resultado de multiplicar números con signo (regla de los signos).

Al hacer la representación gráfica de la expresión $y = -6x$ en la sesión 3, se pretende que observen que los resultados de la tabla son correctos si los puntos obtenidos generan una recta que pasa por el origen. Con base en esto, se puede responder el inciso f).

En la actividad 3, es probable que los alumnos usen sólo valores positivos para x, de 0 a 5 o de 1 a 6. En caso de ocurrir así, señale que también deben considerar valores negativos e incluso, si los propusiera, pida que realicen la gráfica en su cuaderno y que consideren valores como −10, −20 o mayores con la idea de observar la regularidad.

Recuerde que deben ser los propios alumnos quienes den sus descripciones y conclusiones.

3. Observen la siguiente gráfica y completen la tabla.



x	y = ________

Pautas para la evaluación formativa

Con la finalidad de apreciar en qué medida se va logrando la intención didáctica es conveniente que centre su atención en lo siguiente:

a) Ante la solicitud de expresar la multiplicación que representa la situación de Joel, ¿el alumno puede expresar el puntaje de las primeras tres rondas, es decir, $3 \times (-4)$?

b) Ante la solicitud de completar una tabla puede apreciar, por ejemplo, si el alumno identifica que los factores son negativos.

c) Ante una situación como: "Sobre el mismo plano cartesiano ubiquen los puntos de $y = 2x$ para: $x = 2$; $x = 4$; $x = -2$; $x = -4$".

¿El alumno contesta que el producto será positivo para los valores positivos de x y negativo cuando x tiene valores negativos? ¿Pasará o no por el origen la recta que tracen? ¿Por cuáles cuadrantes del plano cartesiano pasará?

d) Ante un problema como: "Cada semana Ana retira \$ 200.00 del banco durante 4 semanas, ¿cuánto dinero se retira en total?", revisar si el alumno puede expresar esa situación con la operación correspondiente o si recurre a otra estrategia. ¿Puede determinar el signo del producto?

¿Cómo apoyar?

Recuerde que esta secuencia presenta la dificultad de encontrar la relación entre los signos de los factores y el resultado de la multiplicación. Así, ante la situación: "Encontrar cinco pares de números que multiplicados den -12", aunque los alumnos ya conocen varias relaciones que se aplican en la multiplicación entre números naturales, se encontrarán con la problemática de la multiplicación de un número negativo por otro número positivo, o de dos números negativos. Algunos alumnos se apoyan en uno de los modos en los cuales se ha tratado la multiplicación con los números naturales y en las primeras dos sesiones de esta secuencia. Por ejemplo, recordando que 4×3 se define como la suma $3 + 3 + 3 + 3 = 12$ y entonces propongan 4 y (-3) como uno de los pares posibles puesto que $4 \times (-3) = (-3) + (-3) + (-3) + (-3) = -12$.

Es importante alentar este uso natural de la multiplicación, en este caso sin necesidad de explicitar que se trata de una extensión de la multiplicación ya definida en los números naturales.

5. Escribe los resultados que faltan.

4(–6) =	4(–10) =	(–16) (–4) =
3(–6) =	3(–10) =	(–16) (–3) =
2(–6) =	2(–10) =	(–16) (–2) =
1(–6) =	1(–10) =	(–16) (–1) =
0(–6) =	0(–10) =	(–16)0 =
(–1) (–6) =	(–1) (–10) =	(–16)1 =
(–2) (–6) =	(–2) (–10) =	(–16)2 =
(–3) (–6) =	(–3) (–10) =	(–16)3 =
(–4) (–6) =	(–4) (–10) =	(–16)4 =

Secuencia 4 Proporcionalidad directa e inversa

(LT, págs. 38-45)

Tiempo de realización	4 sesiones
Eje temático	Número, álgebra y variación
Tema	Proporcionalidad
Aprendizaje esperado	Resuelve problemas de proporcionalidad directa e inversa y de reparto proporcional.
Intención didáctica	Que el alumno distinga relaciones que no son de proporcionalidad de las que sí lo son, y entre éstas distinga las que son de proporcionalidad directa de las que son de proporcionalidad inversa.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisuales** • *Tablas de proporcionalidad* • *La proporcionalidad en la vida cotidiana* **Informáticos** • *Para completar tablas* • *Problemas de proporcionalidad directa e inversa*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recurso audiovisual** • *La proporcionalidad directa e inversa y el reparto proporcional* **Bibliografía** • Secretaría de Educación Pública (2018). *Matemáticas. Primer grado. Libro para el maestro. Telesecundaria,* México, SEP, pp. 49-51.

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Reconozcan algunas características que distinguen a las tablas de proporcionalidad directa de las tablas de proporcionalidad inversa.
- Sesión 2. Identifiquen cocientes constantes en tablas de proporcionalidad directa y productos constantes en tablas de proporcionalidad inversa.
- Sesión 3. Distingan tablas que no representan una relación de proporcionalidad de otras que sí representan una relación proporcional directa y una inversa.
- Sesión 4. Resuelvan problemas de valor faltante cuya resolución requiere identificar el tipo de relación implícita (proporcionalidad directa o inversa).

Acerca de...

En primaria y en primer grado de secundaria los alumnos resolvieron problemas de proporcionalidad directa e identificaron tablas donde las cantidades involucradas tienen esta relación. En segundo grado seguirán desarrollando su razonamiento proporcional al continuar el estudio de la proporcionalidad directa e iniciar con la proporcionalidad inversa.

Es importante mencionar que, al abordar problemas de proporcionalidad, los estudiantes tienen que:

- Reconocer las magnitudes implicadas en la situación planteada.
- Establecer la relación entre ellas: si una aumenta, la otra también, o si una aumenta, la otra disminuye.
- Identificar si estos aumentos o disminuciones se hacen de manera proporcional.

- Identificar la constante de proporcionalidad (cocientes constantes o productos constantes). Recurrir a tablas en esta secuencia es una forma de apoyar los aspectos anteriores.

Sobre las ideas de los alumnos

Es muy probable que los alumnos consideren que una situación determinada representa una relación de proporcionalidad si se suma o resta una cantidad (razonamiento aditivo). Un ejemplo de este tipo de razonamiento puede darse en la tabla 3 de la sesión 1 porque las cantidades disminuyen de 50 en 50; sin embargo, será necesario ayudarles a recordar a qué se le llama relación de proporcionalidad.

También es común que una vez que los alumnos aprenden a resolver problemas de proporcionalidad, generalicen erróneamente la aplicación de los procedimientos (por ejemplo, la regla de tres) para resolver otro tipo de problemas en los que no son útiles. Con el propósito de que los alumnos corrijan estos errores, a lo largo de la secuencia se introducen situaciones que no son de proporcionalidad.

¿Cómo guío el proceso?

Permita que los alumnos resuelvan los problemas con los procedimientos que elijan; puede ser de utilidad para usted consultar lo que se dice acerca de los posibles procedimientos en los problemas de proporcionalidad directa en la secuencia 7 "Variación proporcional directa 1" del libro para el maestro de primer grado.

Respecto a la proporcionalidad inversa, se espera que lo primero que noten los alumnos sean las relaciones inversas entre las magnitudes de la situación, por ejemplo:

- Al aumentar los minutos de ducha, disminuye el número de duchas para las que alcanza el agua del tinaco (sesión 1, tabla 2).
- Al aumentar la velocidad, disminuye el tiempo del recorrido (sesión 2, tabla 5).
- Para mantener el área constante del rectángulo, al aumentar el largo disminuye el ancho (sesión 3, tabla 7).

Es importante que identifiquen también que esta variación inversa es proporcional. Es decir, que si en estas relaciones una cantidad aumenta al doble, la otra disminuye a la mitad, o si aumenta al triple, la otra disminuye a la tercera parte, etcétera, por ejemplo:

- Si las duchas duran 5 minutos, el agua del tinaco alcanza para 6 duchas; entonces, si duran 10 minutos, alcanzará para 3 duchas. También es importante que observen que entre los datos de este problema está la cantidad promedio de agua que se gasta por minuto para bañarse.
- En el caso del primer problema de la sesión 2, la constante es la distancia que debe recorrer Raúl, así que si el auto va a 50 km/h tardará 8 horas, pero si aumenta al doble la velocidad (100 km/h), entonces disminuirá el tiempo a la mitad (4 horas).

De viaje

1. Trabajen en pareja para resolver los siguientes ejercicios. El señor Raúl viajará de Tlaxcala a Salamanca. La distancia que va a manejar es de aproximadamente 400 kilómetros. Completen las siguientes tablas.

- En la tabla 7 de la sesión 3, la constante es el área que debe tener el jardín, por lo que deberán observar que si tiene 3 m de largo, deberá tener 20 m de ancho, y que si el largo se duplica (6 m), entonces el ancho disminuye a la mitad (10 m). Oriente a los alumnos para que noten estas relaciones.

El reconocimiento del producto constante en la proporcionalidad inversa es la base para determinar los valores faltantes. Se espera que los alumnos descubran los productos constantes desde el trabajo que se realiza en la actividad 2 de la sesión 1 (condición 6 de la tabla); enfatice esta particularidad en la puesta en común al final de la sesión 1 y pida que la comprueben en cada una de las tablas de variación que trabajen.

Una vez que reconocen el producto constante en una tabla de variación inversamente proporcional, pueden completar los valores faltantes planteando en forma verbal una ecuación, por ejemplo, en la tabla 7 de la sesión 3, ¿qué número debemos multiplicar por 4 para que nos dé 60?, o también se puede plantear de la siguiente manera: $4x = 60$.

En todo momento puede permitir el uso de la calculadora, debido a que lo importante en esta secuencia es el razonamiento proporcional y no necesariamente la operatoria.

En el primer problema de la sesión 4, es probable que los alumnos quieran apoyarse en una tabla. Si es así, déjelos que la elaboren. Al finalizar pregunte quiénes usaron alguna otra estrategia para responder y pida que la compartan con el grupo.

1. Con dos compañeros forma un equipo para resolver los siguientes problemas. Un automóvil va a la velocidad que se indica en la imagen. Si mantiene esa velocidad promedio:

a) ¿En cuánto tiempo recorrerá 500 km? ____

b) ¿Qué distancia habrá recorrido en 3 horas y cuarto? ____

c) Si su velocidad promedio aumenta 10 km/h, ¿en cuánto tiempo recorrerá los mismos 500 km? ____

El problema 2 de esta sesión puede pensarse de diferentes formas. Por ejemplo, usar 10 500 m como longitud de circuito y calcular cuántos metros representan la cuarta parte del circuito (2 625 m); así se tiene que $1\frac{1}{4}$ vueltas equivale a sumar $10\,500 + 2\,625 = 13\,125$ m, que en kilómetros son 13.125

Otra forma es pensar en multiplicar directamente las dos cantidades involucradas (longitud del circuito y número de vueltas):

$$10\frac{1}{2} \times 1\frac{1}{4} = \frac{21}{2} \times \frac{5}{4} = \frac{105}{8} = 13\frac{1}{8}$$

Si los alumnos no recurren a este procedimiento, es conveniente mostrárselo y que revisen la equivalencia en metros de las cantidades obtenidas como fracción.

Pautas para la evaluación formativa

Observe el trabajo de los alumnos para detectar si logran:

- Identificar las magnitudes involucradas en las situaciones (duchas-litros, velocidad-tiempo, etcétera).
- Establecer el tipo de variación: directa o inversa (si una aumenta, la otra también en la misma proporción; si una aumenta, la otra disminuye).
- Establecer si hay o no proporcionalidad en la variación: si una cantidad aumenta (o disminuye) n veces, la otra también disminuye (o aumenta) n veces. Esto es, hay un factor interno entre las cantidades.
- Aplicar algún procedimiento para calcular los valores faltantes, como multiplicar o dividir los valores conocidos, de acuerdo con el tipo de variación que se presenta.

¿Cómo apoyar?

Para que los alumnos identifiquen el tipo de variación (directa o inversa), puede plantear preguntas como: si aumenta la velocidad, ¿el tiempo del recorrido aumenta o disminuye?

Si lo que desea es que determinen si es proporcional, puede hacer que los alumnos noten: si el largo aumenta al doble, ¿el ancho disminuye a la mitad?

Cuando la dificultad esté en los cálculos, puede trabajar con los alumnos primero cantidades menores a las mencionadas en las sesiones y con relaciones mitad-doble, tercio-triple, cuarta parte-cuádruple, décima parte-diez veces, que intuitivamente los alumnos comprenden mejor.

¿Cómo extender?

Puede variar las cantidades en las situaciones, por ejemplo, proponer fracciones y decimales dentro del mismo problema.

Secuencia 5 Sistemas de ecuaciones 2 × 2. Método gráfico (LT, págs. 46-53)

Tiempo de realización	4 sesiones
Eje temático	Número, álgebra y variación
Tema	Ecuaciones
Aprendizaje esperado	Resuelve problemas mediante la formulación y solución algebraica de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.
Intención didáctica	Que los alumnos resuelvan situaciones que requieran el planteamiento de un sistema de ecuaciones y utilice el método gráfico para encontrar su solución.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisuales** • *¿Qué es un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas?* • *Método gráfico* **Informático** • *Solución de un sistema de ecuaciones como intersección de rectas*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recurso audiovisual** • *Métodos de resolución de sistemas de ecuaciones 2 × 2* **Bibliografía** • Secretaría de Educación Pública (2017). "Multiplicación y división", en *Aprendizajes clave para la educación integral. Plan y programas de estudio para la educación básica*, México. SEP. Disponible en https://www.aprendizajesclave.sep.gob.mx/sec-ae-pensamiento-mate2.html (Consultado el 17 de julio de 2019). • Khan Academy (2019). *Resolución de sistemas de ecuaciones por medio de gráficas*. Disponible en https://es.khanacademy.org/math/cc-eighth-grade-math/cc-8th-systems-topic/cc-8th-systems-graphically/v/solving-linear-systems-by-graphing (Consultado el 17 de julio de 2019).

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Retomen conocimientos acerca de la resolución de ecuaciones del tipo $ax + b = c$, a fin de que sirvan de base para la resolución de sistemas de ecuaciones.
- Sesión 2. Reconozcan situaciones que originan el planteamiento de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y que sepan expresar el sistema.
- Sesión 3. Conozcan y utilicen el método gráfico para la resolución de un sistema de ecuaciones lineales.
- Sesión 4. Resuelvan problemas donde apliquen el método gráfico en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

Acerca de...

En primer grado los alumnos iniciaron el estudio del álgebra y ya han resuelto ecuaciones del tipo $ax + b = c$. En esta secuencia se continúa el trabajo con el tema de ecuaciones, ahora con problemas que implican el planteamiento de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, conocidas también como sistemas de ecuaciones 2×2. Resolver estos sistemas implica, por una parte, reconocer que en el problema hay dos incógnitas y que cada una debe representarse con una literal diferente. Por otra parte, también es necesario reconocer la relación entre las incógnitas para establecer el sistema y que los valores que se obtengan satisfagan ambas ecuaciones.

Desde primer grado los alumnos saben que las incógnitas de un problema se representan con letras (literales). Aquí observarán que se usan con mayor frecuencia la x y la y. El método de solución de un sistema de ecuaciones lineales que se aborda en esta secuencia es el gráfico.

Sobre las ideas de los alumnos

Puesto que aquí empieza el estudio de los sistemas de ecuaciones, es necesario retomar el trabajo sobre ecuaciones lineales que los estudiantes vieron en primer grado y las ideas que sobre este tema construyeron. Sin embargo, deberán tener claridad sobre las diferencias entre esos problemas y los que estudiarán aquí, a fin de que no crean que estas ecuaciones se resuelven con el planteamiento de una sola ecuación, sin reparar que en el problema hay dos incógnitas y que una sola ecuación con dos incógnitas no les permitirá solucionar el problema. Los alumnos también suelen creer que siempre que se tiene una ecuación con una incógnita se debe obtener una solución, por lo que será necesario destacar que el sistema puede tener una solución, un número infinito de soluciones o no tener solución.

¿Cómo guío el proceso?

En la sesión 1, los alumnos tendrán que resolver un problema a través de una ecuación del tipo $ax + b = c$. La actividad puede servir como diagnóstico para detectar algunas dificultades en el planteamiento, escritura, interpretación y resolución de ecuaciones. Incluso da pie para recordar las propiedades de la igualdad estudiadas en primer grado con el recurso de la balanza.

En la sesión 2 se plantea un problema y una serie de preguntas para que los alumnos aprendan a identificar las incógnitas y a plantear las dos ecuaciones del sistema; también deberán observar que cada ecuación relaciona los datos del problema. Por ejemplo, la primera ecuación ($x + y = 50$) relaciona la cantidad de niños y adultos que asistieron, y la segunda ($10x + 20y = 8$), relaciona el precio del boleto por niño, el precio del boleto por adulto y la cantidad reunida.

La sesión 3 introduce el método gráfico como una forma de resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. El primer paso consiste en despejar la misma incógnita en ambas ecuaciones. El uso de las tablas permite determinar los valores que después se usarán para ubicar los puntos de la gráfica. Es importante señalar que los valores que se dan a una de las variables son arbitrarios (variable independiente) y se piensan en función del contexto del problema; los valores que se obtienen al sustituirlos en la ecuación despejada y hacer las operaciones correspondientes permiten conocer el valor de la otra variable (variable dependiente).

Para resolver el sistema

1. Trabajen en pareja para encontrar la solución del sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas de la actividad 5 de la sesión 2.

Ecuación 1: $x + y = 500$
Ecuación 2: $10x + 20y = 8000$

Donde las incógnitas son ______ y ______, y representan: ______________

a) Hagan una estimación de la solución del problema, ¿cuántos niños y cuántos adultos consideran que fueron a la exposición? ______________
b) ¿En qué se basa su estimación? ______________
c) ¿Piensan que el valor de x y y puede ser un número decimal? Discutan en grupo y con el maestro sus ideas.

En este caso se puede permitir el uso de la calculadora, pues el énfasis está en obtener los valores faltantes y no en la operatividad.

Una vez que se tienen en cada tabla los valores de las dos columnas, se ubican los puntos (x, y) en el plano cartesiano y el resultado es una recta para cada tabla.

En el problema planteado por la exposición de artesanos, las dos rectas se intersecan (cortan) en un punto cuyas coordenadas son la solución del sistema: $x, y = 200, 300$. Es necesario que los alumnos se acostumbren a comprobar los valores en ambas ecuaciones, pues llega a suceder que se obtienen valores que hacen verdadera una ecuación, pero no la otra.

Hecho esto, es necesario interpretar los datos en función del contexto del problema: ¿qué representa x?, ¿qué representa y?, ¿cómo responden estos valores al problema?

Usted puede hacerlos reflexionar al respecto preguntando, por ejemplo: ¿piensan que el valor de x y y puede ser un número decimal? ¿Por qué?

La actividad 6 permitirá que los alumnos descubran que algunos sistemas de ecuaciones pueden tener una solución, un número infinito de soluciones o no tener ninguna. Al intentar resolverlas, se darán cuenta de que hay sistemas que no tienen solución, como es el caso del sistema de ecuaciones II:

$$2x + y = 4$$
$$2x + y = 1$$

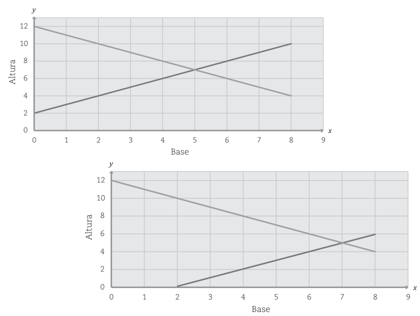
ya que representan rectas que son paralelas y nunca se cortarán; o, en el caso del sistema de ecuaciones III:

$$2x + y = 4$$
$$4x + 2y = 8$$

que tiene una infinidad de soluciones porque ambas ecuaciones representan la misma recta. Otra forma de interpretarlo consiste en decir que estas rectas se intersecan infinidad de veces, esto es, que el sistema tiene un número infinito de soluciones.

En la sesión 4, el estudiante resolverá otros problemas en los que tiene que plantear o analizar el sistema de ecuaciones que lo resuelve, así como la gráfica que le permitirá encontrar la solución del problema.

b) Encierren con un óvalo la gráfica que corresponde al sistema de ecuaciones correcto.



Pautas para la evaluación formativa

En el desarrollo de esta secuencia hay varios aspectos importantes a los cuales se debe poner atención:

- En la primera sesión conviene observar las habilidades de los alumnos para plantear ecuaciones de primer grado al traducir del lenguaje común al lenguaje algebraico, así como para operar algebraicamente y obtener el valor de la incógnita.
- En la segunda sesión es conveniente evaluar si los alumnos reconocen las incógnitas del problema y traducen del lenguaje común al lenguaje algebraico las condiciones del problema para plantear las dos ecuaciones que formarán el sistema.

1. En parejas resuelvan el siguiente problema. En una exposición para apoyar a los artesanos de Michoacán se vendieron 500 boletos, incluidos niños y adultos. Para entrar, los niños pagaron $10 y los adultos $20. Se obtuvo una venta por los boletos de $8000 pesos. ¿Cuántos niños y cuántos adultos asistieron a la exposición? Para resolver este problema contesten en su cuaderno la siguiente pregunta.
   a) ¿Cuántas y cuáles son las cantidades que se desconocen en el problema, es decir, las incógnitas del problema?
   b) Representen con las literales *x* y *y* esas incógnitas, y mencionen qué representa cada una.

Incógnita	¿Qué representa?
x	
y	

- En la tercera y cuarta sesiones conviene verificar la comprensión del método gráfico para resolver el sistema observando si los valores que asignen los alumnos a las variables dependientes tienen lógica de acuerdo con el sistema que tabulan, así como la relación de los valores de la tabla con los puntos de la gráfica. Finalmente, hay que ver cómo interpretan la solución del sistema en el contexto del problema.

¿Cómo apoyar?

Si observa que a algunos estudiantes se les dificulta plantear las ecuaciones, es decir, traducir del lenguaje común al algebraico, apóyelos analizando con ellos el texto del problema y luego modelando el planteamiento de la ecuación para que identifiquen qué partes están bien representadas.

Si los estudiantes no consiguen elaborar la gráfica, puede apoyarlos trazando usted la gráfica en el pizarrón, al mismo tiempo que ellos la hacen en su libro o cuaderno.

¿Cómo extender?

Presente a los estudiantes más problemas que impliquen el planteamiento de un sistema de ecuaciones. Cada vez, permita que vayan esbozando el sistema y elaborando las gráficas con menos ayuda. Al final de cada problema pida a los estudiantes que interpreten la respuesta con base en el contexto del problema, es decir, qué significan los valores obtenidos para las incógnitas en la situación dada.

También puede darles un sistema de ecuaciones y que ellos piensen en una situación que podría representar dicho sistema.

Secuencia 6 Sucesiones y expresiones equivalentes 1 (LT, págs. 54-59)

Tiempo de realización	3 sesiones
Eje temático	Número, álgebra y variación
Tema	Patrones, figuras geométricas y expresiones equivalentes
Aprendizaje esperado	Verifica algebraicamente la equivalencia de expresiones de primer grado formuladas a partir de sucesiones.
Intención didáctica	Que los alumnos comprendan que dos expresiones pueden escribirse de manera diferente y ser equivalentes cuando representan la misma situación.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisuales** • *Expresiones algebraicas equivalentes* • *Operaciones algebraicas*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recurso audiovisual** • *Sucesiones numéricas y expresiones equivalentes* **Bibliografía** • Matesfacil. *Progresiones o sucesiones*. Disponible en https://www.matesfacil.com/ESO/progresiones/ejercicios-resueltos-sucesiones.html (Consultado el 17 de julio de 2019). • Secretaría de Educación Pública (2001). *Libro para el maestro*. *Educación Secundaria*. *Matemáticas*, México, SEP, pp. 154-157.

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Encuentren la regla que sigue una sucesión de números y la representen con una expresión algebraica. También encuentren expresiones algebraicas equivalentes a partir de otras dadas previamente.
- Sesión 2. Determinen si dos expresiones algebraicas son equivalentes y argumenten por qué.
- Sesión 3. Encuentren la regla de sucesiones numéricas, propongan expresiones algebraicas equivalentes y verifiquen que sí lo son.

Acerca de...

En primer grado, los alumnos iniciaron el estudio del álgebra y trabajaron con sucesiones sencillas de números para observar las regularidades o patrones que siguen, a fin de obtener la regla algebraica que las origina.

En esta secuencia se continúa trabajando el tema de patrones en sucesiones numéricas, no sólo para analizar las regularidades y encontrar la regla, sino para trabajar la equivalencia de expresiones algebraicas con base en que las distintas expresiones algebraicas pueden representar la misma sucesión.

Sobre las ideas de los alumnos

Es importante considerar que esta secuencia es la primera del segundo grado que aborda el tema de expresiones equivalentes a partir de sucesiones numéricas. Por ello, se inicia con la representación del patrón que subyace a una sucesión y la forma en que se obtiene cualquiera de sus elementos. Es probable que los estudiantes tengan algunas dificultades para representar la regla con una expresión algebraica (si esto sucede, será necesario dar un espacio para volver a trabajar esto en el grupo); sin embargo, no se debe perder de vista el propósito fundamental de esta secuencia: comprender la equivalencia de expresiones algebraicas.

¿Cómo guío el proceso?

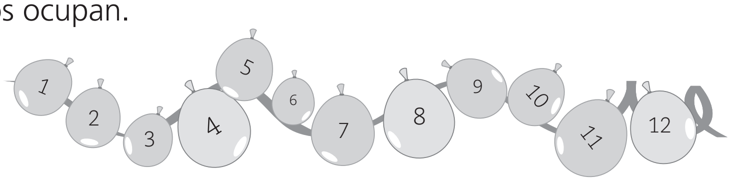
Gran parte de la primera sesión retoma el trabajo realizado en primer grado acerca de reconocer la regularidad en una sucesión y expresarla en forma algebraica. Así, en el punto 2, los alumnos tendrán que encontrar una expresión algebraica que dé lugar a la sucesión de números que corresponden a los globos azules (4, 8, 12, 16, etcétera); en este caso es $4n$ (donde n representa el lugar que le corresponde a cada globo azul). Esta sucesión se representa en la tabla del punto 4.

Es importante que los alumnos no confundan el lugar que corresponde a cada globo azul con el número que tiene en la hilera de globos. En la hilera tiene el 4, pero ocupa el lugar 1 entre los globos azules; el que tiene el 8 es el segundo de los globos azules, y así sucesivamente.

Al final se presenta una serie de expresiones para que los estudiantes identifiquen con cuáles se genera la misma sucesión. Por el formato de la tabla, es de esperar que los estudiantes sustituyan n dando los valores del 1 a 6 de acuerdo con la tabla y observen la sucesión que se forma. En esta primera actividad verán que, aunque algunas expresiones algebraicas estén escritas de diferente forma, generan la misma sucesión.

2. Reúnete con un compañero para realizar las siguientes actividades de esta secuencia.

En lugar de globos azules, Adriana y Paola utilizan números para designar el lugar que aquéllos ocupan.



a) ¿Cuál es la sucesión que se obtiene con los números de los globos azules? ____________

____

b) Escriban en su cuaderno una expresión algebraica que represente la sucesión.

En la sesión 2 se presenta una sucesión de números y se proponen cuatro expresiones algebraicas para que identifiquen la que corresponde a la sucesión.

Los alumnos no sólo tienen que reconocer y argumentar cuál es la correcta, sino decir también por qué las otras no lo son. Este puede ser un buen momento para trabajar con ellos algunas reglas de escritura y de operaciones algebraicas. Por ejemplo, una vez que los estudiantes hayan encontrado la respuesta correcta y hayan dado argumentos, se les puede explicar que la expresión $3(n + 1)$ representa una multiplicación, donde el 3 multiplica todos los términos que están dentro del paréntesis, de donde se tiene que la expresión a la izquierda de signo igual es equivalente a la expresión de la derecha.

$$3(n + 1) = 3n + 3$$

Las actividades 2 y 3 también intentan hacer que los alumnos reconozcan diferentes expresiones que den lugar a la sucesión de números propuesta, por lo que el énfasis tiene que estar en las expresiones equivalentes y no en encontrar el patrón de la sucesión.

3. Trabajen en pareja las actividades de esta sesión. Encuentren la regla de la siguiente sucesión de números.

Términos de la sucesión	–10	–8	–6	–4						
Posición que ocupa el término en la sucesión	1	2	3	4	5	6	7	8	9	n

La sesión 3 propone actividades que buscan consolidar las reglas de escritura algebraica. Se inicia presentando un audiovisual que refuerza este aspecto. Enseguida, se sugiere revisar la actividad 2 de manera grupal, puesto que se dan algunos ejemplos que permiten analizar las propiedades de la igualdad y otras que pertenecen a las operaciones básicas. Es necesario comentar que no se trata de dejar a un lado el contenido principal de la secuencia para estudiar las propiedades de las operaciones y de la igualdad, sino de observarlas en la obtención de expresiones equivalentes. Por ejemplo, cuando algunos alumnos escriben $5mn$ y otros $5nm$, deberán saber que en ambos casos el producto es el mismo y las expresiones son equivalentes. Para comprobarlo, se dan valores arbitrarios a las literales y se realizan las operaciones correspondientes. Este trabajo ayudará a los estudiantes a realizar las transformaciones de expresiones algebraicas equivalentes que se proponen en actividades posteriores.

Pautas para la evaluación formativa

En este trabajo será conveniente poner atención a los siguientes aspectos:

- La habilidad para reconocer la regularidad o patrón de una sucesión de números y para expresarla algebraicamente.
- La argumentación que den al señalar que dos expresiones son equivalentes. Dicha argumentación se puede basar, en este momento, en mostrar que al sustituir las literales por un valor cualquiera, se obtiene el mismo resultado en ambas expresiones.
- El manejo de la operatividad algebraica que iniciaron desde primer grado, pero que aquí estarán aplicando continuamente.

¿Cómo apoyar?

Si observa que algunos estudiantes tienen problemas en reconocer las regularidades de las sucesiones y en expresar la regla algebraicamente, apóyelos mediante preguntas como: ¿qué le tengo que hacer al número ___ (sumar, restar, multiplicar) para obtener el número ___?

También aproveche las veces que crea conveniente el trabajo con expresiones algebraicas, las reglas para escribir y operar algebraicamente; por ejemplo, las distintas formas en que puede representarse una multiplicación: $a \times a$; $(a)(a)$; $a\,a$; $a \cdot a$.

6. Encuentren dos expresiones algebraicas equivalentes para las siguientes sucesiones de números o expresiones algebraicas.

Sucesión	Expresiones algebraicas equivalentes	
	1	2
10, 18, 26, 34, …		
70, 64, 58, 52, …		
–4, 0, 4, 8, …		
–24, –27, –30, –33, …		
$(9n – 5) + (3n + 1)$		
$(3n – 4) – (n – 2)$		

¿Cómo extender?

Presente a los estudiantes más sucesiones de números que impliquen números negativos, decimales o fracciones sencillas. También puede darles una expresión algebraica que represente una sucesión y pedir que la anoten, así como otra expresión que sea equivalente a la ya dada.

Secuencia 7 Figuras geométricas y equivalencia de expresiones 1 (LT, págs. 60-65)

Tiempo de realización	3 sesiones
Eje temático	Número, álgebra y variación
Tema	Patrones, figuras geométricas y expresiones equivalentes
Aprendizaje esperado	Formula expresiones de primer grado para representar propiedades (perímetros y áreas) de figuras geométricas y verifica equivalencia de expresiones, tanto algebraica como geométricamente (análisis de las figuras).
Intención didáctica	Que los alumnos desarrollen la habilidad de generalizar procedimientos utilizando el lenguaje algebraico para formular expresiones equivalentes con las que puedan calcular el perímetro y el área de figuras geométricas básicas.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisual** • *Figuras geométricas y expresiones equivalentes* **Informático** • *Expresiones equivalentes 1*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recurso audiovisual** • *Expresiones de primer grado para representar propiedades de figuras geométricas y equivalencia de expresiones*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Logren un acercamiento intuitivo y geométrico al concepto de equivalencia de expresiones algebraicas valiéndose del perímetro y el área de figuras geométricas. Asimismo, que conozcan que una manera de verificar la equivalencia entre dos expresiones algebraicas es asignar valores a las literales que las componen.
- Sesión 2. Transformen y manipulen expresiones algebraicas para obtener expresiones equivalentes mediante la reducción de términos semejantes.
- Sesión 3. Determinen y verifiquen si diversas expresiones algebraicas son o no equivalentes, mediante la asignación de valores a las variables y la reducción de términos semejantes.

Acerca de...

Ésta es la primera de dos secuencias dedicadas a estudiar la noción de *equivalencia de expresiones algebraicas*, valiéndose de contextos geométricos. Los estudiantes tienen como antecedente el cálculo del perímetro de polígonos y el área de triángulos y cuadriláteros. En esta secuencia se intenta que el alumno, en un primer momento, *verifique* la equivalencia de dos expresiones al asignar valores numéricos a las literales de ambas. En un segundo momento se espera que obtenga otras expresiones equivalentes al transformar y manipular las literales, los números y las operaciones que las relacionan. Lo anterior implica utilizar la reducción de términos semejantes aplicando las propiedades de la igualdad (observe el recurso audiovisual *Expresiones de primer grado para representar propiedades de figuras geométricas y equivalencia de expresiones*).

Sobre las ideas de los alumnos

En la primaria los alumnos trabajaron, aunque no de manera formal, con la equivalencia de perímetros y áreas al transformar figuras geométricas, por ejemplo, al cortarlas y reacomodarlas para obtener otras, sin que su área varíe al realizar dichas transformaciones. Asimismo, en primer grado de secundaria los alumnos continuaron familiarizándose con tal concepto al manipular figuras (Secuencia 24. "Perímetros y áreas 2").

¿Qué material se necesita?

Se sugiere observar y analizar junto con los estudiantes el recurso audiovisual *Figuras geométricas y expresiones equivalentes*, con el fin de que se les prepare para la transición de la aritmética al álgebra. También debe utilizarse al máximo el recurso informático *Expresiones equivalentes 1* para que vayan adquiriendo destreza y confianza al distinguir la equivalencia de expresiones algebraicas y dominar la manipulación algebraica básica.

¿Cómo guío el proceso?

En la sesión 1, actividad 1, se pide que los alumnos escriban dos expresiones algebraicas equivalentes para cada figura. Por ejemplo, para la figura 1: una opción es $6n$. Si los alumnos tuvieran dificultades para escribir la otra expresión, invítelos a pensar en sumar: $n + n + n + n + n + n$. Otras expresiones posibles son: $2n \times 3$ o $3n \times 2$.

Para la actividad 3, las expresiones que pueden obtener son:

3. Observen las siguientes figuras. Supongan que ambas tienen las mismas medidas.

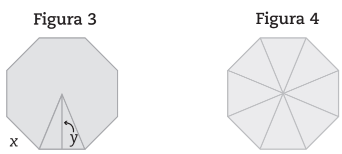


Figura 3	
$A = \dfrac{P \cdot a}{2}$	$A = \dfrac{8xy}{2}$
Figura 4	
$(\frac{xy}{2}) + (\frac{xy}{2}) + (\frac{xy}{2}) + (\frac{xy}{2}) + (\frac{xy}{2}) + (\frac{xy}{2}) + (\frac{xy}{2}) + (\frac{xy}{2}) = \frac{8xy}{2}$	

Es necesario insistir en que una forma de verificar que las expresiones algebraicas son equivalentes es asignar valores numéricos a las literales y apreciar que se consigue el mismo resultado. Para obtener expresiones algebraicas, se parte de calcular el perímetro y el área de figuras geométricas básicas y compuestas cuyas dimensiones están expresadas con literales.

En la sesión 2 se busca reafirmar la obtención de expresiones algebraicas equivalentes a partir del empleo de fórmulas para calcular áreas y perímetros. La actividad 3 se inicia con la manipulación algebraica al obtener distintas expresiones para calcular el perímetro de una figura compuesta. Dos posibles errores que los alumnos podrían cometer al resolver esta actividad son:

- Expresar áreas en vez de perímetros por influencia de la actividad anterior.
- Pensar que el perímetro de la figura compuesta se puede obtener sumando el perímetro de cada una de las figuras que lo componen, lo cual es válido para el área, no para el perímetro. Un aspecto importante por considerar, y que debe quedar muy claro para los estudiantes, es que, a diferencia del cálculo del área total de figuras compuestas, el perímetro total no se obtiene mediante la suma directa de los perímetros de las figuras que la conforman. Esto obliga a llevar a cabo un análisis más fino para encontrar dos expresiones equivalentes. Se sugiere que, en el momento en que usted lo juzgue pertinente, vean y analicen el recurso audiovisual *Figuras geométricas y expresiones equivalentes*, para enriquecer o reforzar el contenido.

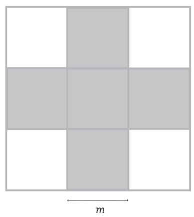
La sesión 3 se dedica a realizar manipulaciones de expresiones algebraicas equivalentes y a verificarlas numéricamente. Se trata de hacer el ejercicio contrario a lo que se había estado haciendo; es decir, se parte de una expresión algebraica y luego se pide a los alumnos que escriban expresiones equivalentes a ella; por último, que las verifiquen geométricamente, promoviendo el pensamiento reversible. En la actividad 1, una forma de ver si las expresiones son equivalentes consiste en hacer manipulaciones como:

- Sumar términos semejantes: $(x + 2) + (x + 3) + (x + 4) = 3x + 9$.
- Multiplicar el factor común por los términos que vienen entre paréntesis: $2a\,(h + 1) = 2ah + 2a$.

Expresión 1	Expresión 2
$(x + 2) + (x + 3) + (x + 4)$	$3x + 12$
$3a(x - 6 + b)$	$3ax - 9a + 3b$
$ah + ah + 2a$	$2a(h + 1)$

En el numeral 2, inciso b) algunas posibles respuestas son las siguientes:

2. La imagen está formada sólo por cuadrados que miden *m* de lado.
   a) Escriban dos expresiones equivalentes para calcular el perímetro de la cruz que se forma con los cuadrados verdes.
   ______________ y ______________
   b) Escriban dos expresiones equivalentes para calcular el área total de los cuadrados en color blanco. __________ y __________
   c) Verifiquen la equivalencia de todos los pares de expresiones asignando valores numéricos a las literales de las expresiones de los incisos anteriores.
   ______________ y ______________

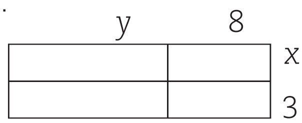


$(m \times m) + (m \times m) + (m \times m) + (m \times m)$ o $4(m \times m)$ o $4m^2$

En la actividad 4, se propone el recurso informático *Expresiones equivalentes 1*.

En la actividad 5, un posible dibujo geométrico para la expresión $(x + 3)\ (y + 8)$ es el siguiente.

Para el área:



Y una expresión algebraica que se desprende es:
$(x + 8)\ (y + 3) = xy + 8y + 3x + 24$

Para el perímetro:
$2(x + 8) + 2(y + 3) = 2x + 16 + 2y + 6$

Pautas para la evaluación formativa

El docente observará desde el inicio de esta secuencia el desarrollo de los alumnos en cuanto a su habilidad para manejar el lenguaje matemático al revisar que escriban correctamente las expresiones algebraicas; por ejemplo, que no confundan exponentes con coeficientes y, sobre todo (y más importante), que las expresiones obtenidas reflejen bien el área o perímetro de las figuras geométricas involucradas.

Asimismo, en las tres sesiones hay diversas oportunidades para observar la evolución cognitiva propuesta (abstracción). Ya desde la primera sesión se pide expresamente que los alumnos escriban en el libro lo obtenido y que argumenten en pareja sus respuestas (actividad 6 de la sesión 1).

En la sesión 2 (actividad 4a), se les pide que, una vez obtenidas las expresiones equivalentes, las relacionen y verifiquen que, efectivamente, son equivalentes. En la actividad 3 de la sesión 3 se plantea una dificultad mucho mayor, pues no sólo escribirán expresiones equivalentes, sino que también tendrán que argumentar cuál de las propuestas de dos equipos es la correcta, por lo que tendrán que justificar los procedimientos que siguieron para obtenerlas y, además, deberán comprobar que la otra equivalencia sea correcta mediante manipulación algebraica.

¿Cómo apoyar?

Si lo considera adecuado, cuando observe que los alumnos tienen dificultades para obtener expresiones algebraicas equivalentes, puede proponer más ejercicios para calcular el perímetro y el área de figuras geométricas diversas que puedan ser trazadas, recortadas y manipuladas. Con esta actividad el alumno podrá visualizar la transformación algebraica.

También resulta usual que en la manipulación algebraica los alumnos cometan errores al hacer las sustituciones con valores numéricos en las expresiones algebraicas; por ejemplo: restan mal, no agrupan las expresiones correctamente, extienden ciertas propiedades de las operaciones a otras situaciones donde no se aplica, por ejemplo, la expresión $(3 + b)a$ es equivalente a $3a + ab$, mientras que $(3 + b) + a$ no es equivalente a $3 + a + a + b$.

¿Cómo extender?

Pudiera resultar interesante para los alumnos que ya dominen con suficiencia la manipulación algebraica encontrar expresiones equivalentes para $(x + a) + (y + b)$, así como $(x - a) + (y - b)$ y $(x - a) + (y + b)$, con lo que se sentarían las bases para la introducción de los productos notables.

Secuencia 8 Polígonos 1

(LT, págs. 66-73)

Tiempo de realización	4 sesiones
Eje temático	Forma, espacio y medida
Tema	Figuras y cuerpos geométricos
Aprendizaje esperado	Deduce y usa las relaciones entre los ángulos de polígonos en la construcción de polígonos regulares.
Intención didáctica	Que los alumnos distingan las diagonales de otras líneas que se pueden trazar en un polígono. Además, que hagan razonamientos inductivos para calcular el número de diagonales en un polígono convexo o no convexo.
Materiales	• Juego de geometría • Geoplano • Hojas cuadriculadas
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisuales** • *Polígonos* • *¿Qué es una diagonal?* **Informático** • *Diagonales y triangulación*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recurso audiovisual** • *Relaciones entre los ángulos de polígonos en la construcción de polígonos regulares* **Bibliografía** • López Escudero, Olga Leticia y Silvia García Peña (2011). *La enseñanza de la Geometría*, México, Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (Materiales para apoyar la práctica educativa). Disponible en https://www.inee.edu.mx/wp-content/uploads/2019/01/P1D401.pdf (Consultado el 17 de julio de 2019).

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Identifiquen polígonos en una red de polígonos y los clasifiquen en regulares e irregulares a partir de las características de sus lados y ángulos.
- Sesión 2. Establezcan qué líneas rectas o inclinadas corresponden a las diagonales de un polígono. Den argumentos para refutar un enunciado mediante contraejemplos.
- Sesión 3. Que los alumnos reconozcan los polígonos convexos y los no convexos y hagan un análisis inductivo para deducir el número de diagonales para triangular un polígono.
- Sesión 4. Que los alumnos realicen hipótesis y las validen respecto a la triangulación de polígonos convexos a partir del trazo de todas sus diagonales desde un solo vértice.

Acerca de...

Esta secuencia es la primera de tres secuencias correspondientes a los polígonos. El objetivo final es que los estudiantes construyan polígonos y aprecien las relaciones entre las características de sus lados y ángulos y deduzcan su uso.

Se pretende que los alumnos hagan razonamientos inductivos al observar las regularidades que surgen cuando se aumenta el número de lados de los polígonos, para luego intentar argumentar deductivamente y probar sus hipótesis.

Sobre las ideas de los alumnos

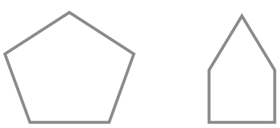
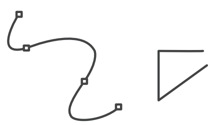
Es probable que los alumnos estén acostumbrados a identificar como polígonos únicamente a los regulares convexos, como el pentágono y el hexágono. En esta lección se enfrentarán a una diversidad de polígonos al incluir los irregulares y los no convexos.

En la literatura se conocen como *polígonos equiláteros* (los que tienen sus lados iguales entre sí), *equiangulares* (los que tienen sus ángulos iguales entre sí) y *regulares* (que tienen ángulos y lados iguales entre sí).

¿Cómo guío el proceso?

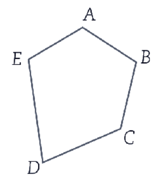
En la sesión 1 se analizarán las características de los polígonos. Se recomienda comentar con los alumnos qué es un polígono y destacar las siguientes propiedades:

1) Se forman de segmentos, es decir, fragmentos o porciones de recta.
2) Dichos segmentos son consecutivos, es decir, van uno detrás del otro.
3) Los segmentos delimitan la forma, se cierran.

Son polígonos	No son polígonos
	

Con la actividad 1 se espera que los alumnos reconozcan más fácilmente algunos polígonos regulares (sin llamarlos así todavía), como el pentágono, triángulo, rombo, entre otros. Los incisos d) y e) permiten que se representen otros polígonos menos comunes (los irregulares, sin nombrarlos así todavía), como los polígonos de 10, 15 y hasta 20 lados. Para responder el inciso e) hay varias posibilidades.

En este punto valdría la pena preguntar a los alumnos qué características tienen en común los polígonos que hallaron (las tres propiedades que se dijeron anteriormente). Los alumnos aprenderán también a etiquetar o a nombrar los polígonos por medio de sus vértices, y comprobarán que un mismo polígono se puede nombrar de diferentes maneras, por ejemplo: $ABCDE$, $DCBAE$.



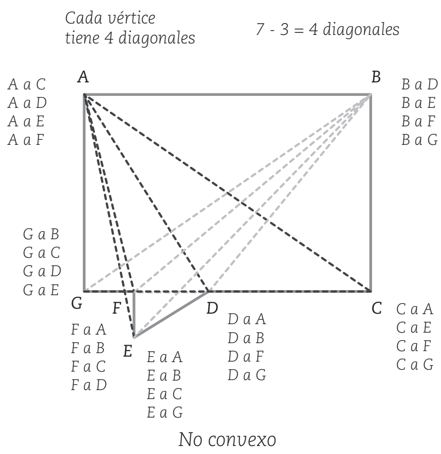
Para completar la tabla de la actividad 2 no es indispensable medir. En general se pueden identificar las características a simple vista. Aun así, podría ocurrir que algunos alumnos sientan la necesidad de medir; o bien, si ante cierta figura surgen dudas, se les puede sugerir que midan.

Hay ciertas figuras (MNL y $TKLN$) que pueden dar lugar a cierta confusión debido a que las medidas de los lados son muy cercanas, pero no iguales. Por lo anterior, la cuarta característica de la tabla puede provocar dudas. Habría que aclarar que ambos polígonos son irregulares con dos lados iguales y dos ángulos iguales.

Para revisar la tabla se sugiere armar pequeños debates. Si los alumnos no identifican los errores, puede ayudarlos mostrándoles o preguntándoles, ante determinada figura, ¿están seguros de que todos los ángulos o lados son iguales? Tras completar la tabla, se destacará que tales características corresponden a polígonos irregulares y, por contraste, los que sí tienen todos sus lados y ángulos iguales son los regulares (retomar la definición del glosario).

En la sesión 2 aprenderán a distinguir las diagonales de un polígono de otras líneas que no lo son. En la actividad 1, algunas imágenes podrían causar confusión (por ejemplo: 8, 10, 12); se espera que los alumnos argumenten valiéndose del uso del contraejemplo.

En la sesión 3, los alumnos aprenderán a triangular polígonos trazando algunas diagonales. En la actividad 2 trazarán todas las diagonales de cada vértice. Los polígonos de la fila inferior pueden resultar más complicados. El primero debe quedar así:



Procure nombrar los vértices por medio de letras, así resultará más sencillo identificar y nombrar las diagonales que salen desde cada vértice. Para verificar que la cantidad de diagonales sea correcta, cuente el número de vértices del polígono y a ese número réstele 3 (esto, porque no se cuenta el vértice de origen y los dos vértices adyacentes), el total obtenido debe coincidir con las diagonales trazadas e identificadas por los alumnos. Esto se trabajará en la sesión 4, por lo que en esta sesión no debe decirles a los alumnos dicha fórmula.

Dado que la intención de este ejercicio es que los alumnos distingan y marquen las diagonales, surgirá la dificultad de que algunas diagonales queden encimadas, por lo que una manera fácil de organizar y nombrar las diagonales es la siguiente: *A* a *C*, *A* a *D*, etcétera.

En la actividad 4 se darán cuenta de que un polígono se puede triangular de diferentes maneras y que, en todas ellas, el número de triángulos siempre es el mismo.

En la actividad 5, si los alumnos tienen dificultades para llenar las columnas 3 y 4, puede ayudarlos trazando en el pizarrón un hexágono y pidiendo que escojan un vértice y que analicen, de los cinco vértices, a cuáles llega una diagonal del vértice que eligieron: sólo a dos vértices, y a tres no. También se aconseja que, tras llenar la tabla, si es que todavía no se han dado cuenta, se les señale que en cada caso se resta el número de lados menos 3 (por los tres vértices de los que no salen diagonales: los consecutivos y el que no se cuenta). Por último, en la sesión 4 se busca que aprecien, para el caso particular de los polígonos convexos, una triangulación más sencilla para este tipo de polígonos, esto es, trazar diagonales desde un solo vértice. Con esta triangulación es menos difícil deducir el número de diagonales para un polígono de n lados.

Pautas para la evaluación formativa

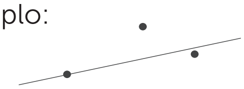
Observe las dificultades y errores que puedan tener los alumnos:

- Para reconocer las diagonales de un polígono.
- Para reconocer los polígonos convexos y no convexos.
- Para hacer generalizaciones al llenar las tablas.
- Para hacer deducciones.

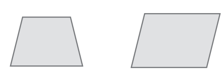
¿Cómo apoyar?

Si los alumnos tienen dificultades para hacer uso de contraejemplos, puede proponerles ejemplos adicionales. Pídales que traten de refutar las siguientes afirmaciones con un contraejemplo:

- Afirmación: Cualesquiera tres puntos siempre se encuentran alineados.
- Contraejemplo:



- Afirmación: Sea *ABCD* un cuadrilátero. Si *AB* = *CD*, entonces *ABCD* es un rectángulo.
- Contraejemplos:



¿Cómo extender?

Proponga ejercicios inversos al cálculo del número de diagonales. Por ejemplo, si un polígono se puede triangular con 14 diagonales, ¿cuántos lados tiene? ¿Y si se puede triangular con 27 diagonales? ¿Y si tiene 4857 diagonales? Esto se puede resolver con la ecuación: $n - 3$ = número de diagonales.

Secuencia 9 Conversión de medidas 1

(LT, págs. 74-81)

Tiempo de realización	3 sesiones
Eje temático	Forma, espacio y medida
Tema	Magnitudes y medidas
Aprendizaje esperado	Resuelve problemas que implican conversiones en múltiplos y submúltiplos del metro, litro, kilogramo, y de unidades del Sistema Inglés (yarda, pulgada, galón, onza y libra).
Intención didáctica	Que los alumnos identifiquen qué unidades son pertinentes para medir distancias y longitudes, así como el uso de unidades usuales del Sistema Internacional (SI) y del Sistema Inglés.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisual** • *La longitud en el Sistema Inglés* **Informático** • *Conversión de medidas de longitud*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recurso audiovisual** • *Conversión de medidas*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Desarrollen estrategias de cálculo para convertir múltiplos y submúltiplos del metro para medir y comparar longitudes.
- Sesión 2. Conozcan y usen las equivalencias entre múltiplos y submúltiplos del metro para determinar distancias y longitudes en espacios geográficos, así como algunas equivalencias con unidades del Sistema Inglés.
- Sesión 3. Usen las equivalencias entre las unidades de longitud del Sistema Internacional y las del Sistema Inglés.

Acerca de...

En la educación primaria los alumnos comenzaron a trabajar la noción de longitud y distancia, haciendo comparaciones entre objetos o mediante un intermediario; también aprendieron a usar instrumentos de medición, como el metro y la regla graduados. Usaron las unidades de medida para longitudes pequeñas y grandes en la resolución de problemas y tuvieron acercamientos a la relación entre los múltiplos y submúltiplos del metro. Ahora deberán conocer también las equivalencias de estas unidades con el Sistema Inglés, ya que es muy común encontrar productos etiquetados según uno o ambos sistemas. Por otra parte, desarrollarán estrategias de cálculo rápido para hacer conversiones, tanto dentro del Sistema Internacional como entre éste y el Sistema Inglés.

Sobre las ideas de los alumnos

Los alumnos probablemente aprendieron que cuando se convierte una unidad a otra mayor deben dividir, y cuando la conversión es de una unidad mayor a otra menor es necesario multiplicar. Esto, aprendido así, simplemente, causa confusión, y después de un tiempo ya no saben cuándo multiplicar o cuándo dividir. Por lo tanto, es necesario que comprendan esa relación asociada al sistema decimal, esto es, que analicen el número de veces que una unidad contiene a la otra.

Por otra parte, esta relación no se da de igual forma entre las unidades del Sistema Inglés, pero es importante que adquieran una noción de su equivalencia con el Sistema Internacional, pues comúnmente se encuentran productos empacados con estas unidades de medida.

¿Cómo guío el proceso?

Comience con la lectura del texto introductorio e intercambien ideas y experiencias al respecto.

Es importante que reflexionen sobre la diferencia entre las distancias que recorren la luz y el sonido en el mismo tiempo. Esto ayudará más adelante en la comprensión de por qué se usan unidades como el **año luz** para medir distancias muy grandes como las que existen entre los cuerpos celestes.

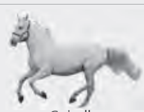
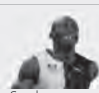
Esta secuencia también permite hacer con el grupo una reflexión sobre el porqué de múltiplos y submúltiplos del metro para medir longitudes y distancias terrestres y para medir seres muy pequeños, respectivamente. Por ejemplo, podría preguntar a los alumnos cómo se mediría la longitud de seres tan pequeños si sólo existiera el metro, o bien, cómo se podría medir con él la distancia de un punto a otro del territorio nacional. Incluso proponga que anoten en milímetros la distancia entre alguna de las ciudades que se indican en la sesión 2 o que escriban en kilómetros la longitud de alguno de los animales de la sesión 3.

En los problemas planteados en la sesión 1, aunque se habla de velocidad, no se pide que realicen la conversión entre unidades de tiempo, los cálculos se centran en las distancias y la equivalencia dentro del Sistema Internacional.

En el cálculo de distancias entre las ciudades señaladas en el mapa de la sesión 2, actividad 1, aunque se involucra el concepto de escala, ésta aparece en los datos del problema y el trabajo no se centra en ella, sino en la transformación de múltiplos y submúltiplos de la unidad de longitud.

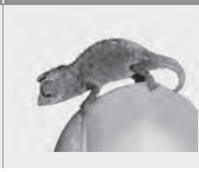
Por otra parte, es común encontrar en revistas, documentales e información de internet, el uso de unidades de longitud del Sistema Inglés en la información que se lee acerca de la vida animal o de lugares donde se desarrollan actividades ecoturísticas o en los datos sobre el sistema solar y el universo, por lo que resulta necesario que los alumnos realicen transformaciones de un sistema al otro y comprendan la información que incluya cualquiera de estos sistemas de medida en distancias o longitudes. Es recomendable revisar el audiovisual *La longitud en el Sistema Inglés* con la finalidad de que conozcan un poco más acerca de este sistema.

Para realizar cálculos con las unidades de longitud del Sistema Internacional es importante que los alumnos sepan, por una parte, que el metro es la unidad fundamental de longitud y, por otra, su relación con los múltiplos y submúltiplos, así como la correspondencia entre todos ellos; esto es, que comprendan que el decámetro contiene diez veces al metro, pero que, a su vez, el decámetro está contenido diez veces en el hectómetro y que éste cabe diez veces en el kiló-

Ser vivo		 Guepardo	 Halcón peregrino	 Avestruz	 Pez espada
Distancia recorrida en una hora	km		300		
	m	120 000		65 000	100 000
Ser vivo		 Liebre	 Tintorera	 Caballo	 Ser humano (Usain Bolt)
Distancia recorrida en una hora	km	75		50	37.58
	m		7 000		

metro. Con los submúltiplos sucede algo semejante, pues cada unidad menor está contenida diez veces en su antecesor, esto es, el milímetro cabe diez veces en el centímetro; el centímetro, diez veces en el decímetro, y éste, diez veces en el metro.

Comprender estas relaciones ayudará a entender la regla de que para convertir una unidad mayor a una menor se debe multiplicar por 10, 100, 1000, etcétera, y cuando se trata de una unidad menor a una mayor, hay que dividir entre estos mismos números. Estos conceptos y procedimientos se estudiaron en las secuencias 1 y 2. Una pregunta pertinente es: ¿qué operación debes hacer si quisieras escribir en metros la longitud del murciélago abejorro? ¿Por qué?

Rana monte Iberia Eleuth (9.2 mm)	Camaleón Brookesia mínima de Madagascar (2.4 cm)	Murciélago abejorro (2.9 cm)
		

Recuerde que pedir a los alumnos que reflexionen y expliquen por qué decidieron hacer una operación u otra, por qué eligieron un procedimiento u otro, etcétera, favorece la comprensión de lo que están realizando y les ayuda a desarrollar su capacidad de argumentación.

Al término de la secuencia se propone observar el recurso informático *Conversión de medidas de longitud*, donde pondrán en práctica lo aprendido en esta secuencia.

Pautas para la evaluación formativa

Uno de los aspectos importantes en la medición es la colocación del instrumento de medida, observe si al medir los segmentos del mapa (sesión 2) los alumnos colocan la regla de manera correcta. Otro aspecto que da cuenta de que se comprende la conversión de unidades es cuando los alumnos argumentan por qué multiplican o dividen para transformar de una unidad de medida a otra, pues muchas veces sólo repiten reglas que aprendieron de memoria sin saber por qué ni cómo funcionan. También puede observar si en todos los casos realizan las operaciones por escrito o si son capaces de hacer cálculos mentales, pues en la conversión dentro del SI las operaciones de multiplicación o división son entre 10, 100, 1000, etcétera, que son aspectos trabajados desde la primaria.

Cómo apoyar

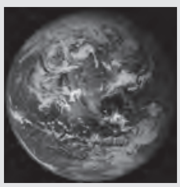
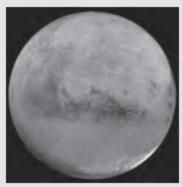
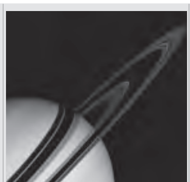
Posiblemente algunos alumnos tengan dificultades para responder problemas como calcular la altura del árbol en metros en función de la velocidad del koala, pues éste avanza 447 cm/s. En este caso se pueden apoyar en una tabla donde se anote el avance por segundo y, a la vez, su equivalente en metros:

Tiempo (s)	Longitud (cm)	Longitud (m)
1	447	4.47
2	894	8.94
3	1 341	13.41

Si lo considera necesario, revise las sesiones 1 y 2 de la secuencia 1.

Cómo extender

Pida que realicen una investigación acerca de la distancia a la que se encuentran algunas estrellas, o bien, dé usted la distancia a una, por ejemplo, la Estrella Polar, que está a 323 años luz de la Tierra, y pida que den el equivalente en kilómetros.

		
Tierra	Marte	Saturno
7926.21	4216.63	74897.6

Secuencia 10 Perímetro y área de polígonos regulares (LT, págs. 82-89)

Tiempo de realización	4 sesiones
Eje temático	Forma, espacio y medida
Tema	Magnitudes y medidas
Aprendizaje esperado	Calcula el perímetro y el área de polígonos regulares y del círculo a partir de diferentes datos.
Intención didáctica	Que los alumnos resuelvan problemas que implican calcular el perímetro y el área de polígonos regulares a partir de diferentes datos.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	Audiovisual • *El área de polígonos* Informático • *Área de polígonos regulares*
Materiales de apoyo para el maestro	Recurso audiovisual • *Perímetro y área de polígonos regulares y del círculo*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Determinen el área de polígonos regulares a partir del conteo de unidades y de su descomposición en otros polígonos.
- Sesión 2. Calculen el área de polígonos regulares e irregulares a partir de su transformación en un cuadrilátero.
- Sesión 3. Deduzcan la fórmula para calcular el área de polígonos regulares.
- Sesión 4. Resuelvan problemas que impliquen el cálculo del perímetro o el área de polígonos regulares.

Acerca de...

Los alumnos han tenido contacto con la idea de perímetro y área en la primaria. En primer grado de secundaria trabajaron el cálculo de estas magnitudes en triángulos y cuadriláteros. En este segundo grado lo harán con otros polígonos.

Es importante fortalecer la parte conceptual del área, por lo que antes de abordar la deducción de la fórmula (sesión 3), en las dos primeras sesiones los alumnos calculan y ordenan áreas de polígonos a partir de otros recursos, en particular del conteo de unidades cuadradas, descomposición en otras figuras o de su transformación en cuadriláteros. Con las transformaciones de unos polígonos en otros se trabaja la conservación del área y se prepara a los alumnos para la deducción de fórmulas.

Sobre las ideas de los alumnos

Es común que los alumnos confundan el perímetro con el área. El conteo de unidades cuadradas para determinar el área es un recurso que les permite fortalecer la idea de que el área se mide en unidades cuadradas y el perímetro no, lo que ayuda a erradicar esta confusión entre perímetro y área.

Otra concepción errónea entre los alumnos es pensar que si una figura tiene mayor perímetro que otra, entonces tiene mayor área; para erradicar esta idea se propone la actividad 4 de la sesión 1.

También es importante suprimir en los alumnos la idea de que sólo con fórmulas es posible calcular áreas.

¿Cómo guío el proceso?

En la actividad 1 de la sesión 1 los alumnos utilizarán los procedimientos que consideren pertinentes para el cálculo de las áreas. Es probable que decidan contar los cuadrados que quedan dentro de las figuras y, en aquellos casos en que están incompletos, cuando sea posible, compensar unas partes con otras. Un procedimiento diferente es considerar las 16 unidades cuadradas del cuadrado completo y restar el área de las figuras que quedan fuera del polígono. Este procedimiento puede aplicarse muy bien a cualquiera de los polígonos. También es probable que dividan el polígono en otras figuras y calculen el área de cada parte, ya sea por el conteo de unidades o incluso mediante fórmulas; este procedimiento puede aplicarse en el polígono 3, que puede dividirse en un rectángulo y dos triángulos isósceles. Si cuenta con geoplanos, puede utilizarlos en esta actividad y aprovechar para proponer otras figuras diferentes que los alumnos podrán formar con ligas.

Al hacer la puesta en común de esta sesión 1, reflexione con los alumnos sobre la idea de que el octágono de la actividad 3 se dividió en polígonos de tres maneras distintas y, no obstante, el área obtenida es la misma. Esta idea que parece obvia puede no ser tan clara para algunos alumnos.

En la sesión 2, verifique que primero estimen el área de los polígonos de la izquierda y los ordenen del que tenga menor área al de mayor área. También observe que, efectivamente, calquen y recorten cada figura de la izquierda para obtener la de la derecha. El propósito es que los alumnos se formen la idea de que no es necesario saber una fórmula para calcular el área de todos los polígonos, pues pueden transformarlo en otro polígono cuya área sí sepan calcular, como los cuadriláteros que estudiaron en primer grado.

La sesión 3 inicia con el cálculo del área de un pentágono regular dadas las medidas de su lado y su apotema. Es importante que no diga a los alumnos cómo hacerlo, mucho menos que les enseñe la fórmula; precisamente se espera que, al resolver las cinco actividades de esta sesión, los alumnos deduzcan dicha fórmula $\left(A = \frac{P \times a}{2}\right)$. En las primeras dos actividades se trabajan casos particulares y en la tercera se da el caso general.

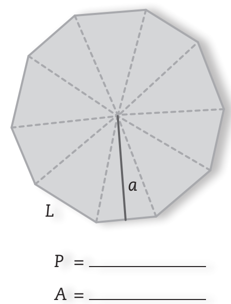
En la puesta en común de la sesión 4 (actividad 8), invite a los alumnos que hayan resuelto algún problema sin usar la fórmula a que platiquen a sus compañeros lo que hicieron. El propósito es que los alumnos noten que si bien la fórmula para el área de polígonos regulares es una herramienta muy eficaz, hay otros procedimientos que también resultan serlo; por ejemplo, la primera figura de la actividad 4 puede dividirse en un rectángulo y un triángulo y no usar la fórmula del polígono regular.

Pautas para la evaluación formativa

Observe si durante el desarrollo de las actividades de esta secuencia los alumnos:

- Distinguen el perímetro del área.
- Utilizan unidades lineales para calcular perímetros y unidades cuadradas para calcular el área.
- Utilizan diferentes procedimientos para determinar el perímetro y el área.
- Distinguen qué medidas de las figuras emplear cuando así se pide en las actividades.
- Aplican las fórmulas para calcular el área de polígonos regulares y sustituyen los valores y operan con ellos correctamente.

¿Cómo apoyar?



Si a los alumnos se les dificulta la actividad 1 de la sesión 1, proponga otros polígonos más sencillos, primero formados sólo por cuadrados, luego por cuadrados y triángulos cuya área sea la mitad de la unidad cuadrada. De ser posible, utilice geoplanos y ligas.

En las actividades donde se trabaja con literales (actividad 3, sesión 3; actividad 7, sesión 4) puede proponer que sustituyan las literales por números, y ya que hayan trabajado el caso numérico, pasar a la literal.

¿Cómo extender?

Proponga actividades de cálculo de perímetros y áreas de polígonos regulares cuyas dimensiones sean literales, por ejemplo, que sus lados midan *b* unidades y su apotema *z* unidades.

Secuencia 11 Volumen de prismas (LT, págs. 90-97)

Tiempo de realización	4 sesiones
Eje temático	Forma, espacio y medida
Tema	Magnitudes y medidas
Aprendizaje esperado	Calcula el volumen de prismas y cilindros rectos.
Intención didáctica	Que los alumnos resuelvan problemas que implican calcular el volumen de prismas.
Materiales	• Tijeras • Pegamento • Recortables de las páginas 285 y 287
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisual** • *Moldes para cajas* • *Volumen de prismas* **Informático** • *Prismas y volúmenes*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recurso audiovisual** • *El volumen de prismas y cilindros rectos* **Bibliografía** • Sáiz Roldán, Mariana (s.f.). "El volumen. ¿Por dónde empezar?". Disponible en http://www.matedu.cinvestav.mx/~maestriaedu/docs/asig4/ConfMagist.pdf (Consultado el 17 de julio de 2019).

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Construyan prismas cuya base sea un polígono regular.
- Sesión 2. Determinen el volumen de un prisma con diferentes unidades cúbicas para profundizar en la noción de volumen.
- Sesión 3. Desarrollen la fórmula para calcular el volumen de un prisma cuya base es un polígono regular.
- Sesión 4. Resuelvan problemas que impliquen el cálculo del volumen de prismas.

Acerca de...

En primer grado, los alumnos trabajaron la fórmula *Volumen = área de la base por altura* para calcular el volumen de prismas cuya base es un triángulo o un cuadrilátero. En esta secuencia determinarán si para un prisma cuya base es un polígono regular también se puede usar la misma fórmula (sesión 3).

El trabajo con cuerpos geométricos, en este caso con prismas, es un terreno fértil para desarrollar la visualización e imaginación espacial (sesión 1). Asimismo, para el tratamiento del volumen de prismas es importante que los alumnos desarrollen la habilidad de interpretar la representación plana de un prisma (dibujo en dos dimensiones); por eso, en la primera sesión se pide a los alumnos identificar el desarrollo plano (molde) para construir prismas a partir de su representación plana y después se pide que los construyan.

Recuerde que una premisa fundamental en el tratamiento didáctico del volumen es que no es adecuado trabajarlo sólo con figuras dibujadas.

Otra idea importante es explorar la unidad de medida. En la sesión 2 se trabaja con la idea de diferentes unidades de medida para determinar el volumen de un prisma.

Sobre las ideas de los alumnos

Una dificultad consiste en asociar el cuerpo geométrico con el desarrollo plano que permite construirlo. Otra dificultad se da cuando deben asociar las dimensiones de la figura con la fórmula correspondiente.

En el caso de los polígonos regulares, cuando tengan que medir la apotema, quizá no lo hagan de manera perpendicular a uno de los lados; considere esto al trabajar las actividades.

También puede pasar que no recuerden las fórmulas del área del rombo o del trapecio (sesión 3); permita que usen un formulario.

¿Cómo guío el proceso?

En la sesión 1 verifique que los alumnos trazan las pestañas antes de armar los prismas y que sean exactamente las necesarias, que no sobre ni falte alguna. Este ejercicio desarrolla su imaginación espacial. También es necesario que verifique que los alumnos sí arman los prismas, pues esto les ayudará a establecer la relación entre el desarrollo plano y su representación plana, así como la manera de interpretar dicha representación, habilidad necesaria para el trabajo con el volumen.

En la sesión 2 es importante que, al comparar los datos de la tabla, se vea la diferencia entre permitir que la unidad de volumen (en este caso los chocolates) se seccione o no. Si no se permite que se partan los chocolates, el resultado solamente podrá ser con chocolates enteros o completos, con lo que el número de chocolates que quepa será menor que si se permite que se partan, pues de esta manera cabrán más. Trabaje esto en la puesta en común al comparar los resultados.

En la sesión 3 es muy probable que los alumnos transfieran lo que aprendieron en primero y respondan que sí se usa la misma fórmula para todos los prismas: invítelos a que lo prueben con las actividades propuestas. Es muy importante que armen los prismas cuyos moldes están en su material recortable, páginas 109 y 111, y que calculen el volumen con los dos procedimientos que se indican; además de confirmar su hipótesis, seguirán practicando el cálculo de volúmenes de prismas cuya base es un triángulo o un cuadrilátero (contenido que estudiaron en primer grado).

Los problemas 2 y 4 de la sesión 4 involucran también la magnitud llamada capacidad. Si lo considera necesario, puede hacer un alto grupal para discutir acerca de la diferencia entre volumen y capacidad, y de la relación entre el decímetro cúbico y el litro.

Durante el trabajo de esta secuencia permita el uso de la calculadora; el propósito principal es el trabajo con el volumen y se espera que la operatoria no sea un obstáculo ni un aspecto al que tengan que invertirle mucho tiempo.

Pautas para la evaluación formativa

Observe si los alumnos logran:

- Identificar el desarrollo plano para construir prismas a partir de una representación plana.
- Reconocer el nombre de algunos cuerpos geométricos.
- Determinar el volumen de un prisma con diferentes unidades.
- Usar correctamente la fórmula para calcular el volumen de un prisma cuya base es un polígono regular (no necesariamente que la memorice, sino que la sepa aplicar).
- Tomar correctamente las medidas necesarias para calcular el volumen de un prisma.
- Resolver problemas que implican el cálculo del volumen de prismas cuya base es un polígono regular.

¿Cómo apoyar?

Siempre que haya dudas sobre la interpretación de un prisma dibujado, proponga su construcción.

Permita usar formularios para que los alumnos los consulten en caso necesario.

Organice discusiones grupales sobre cómo usar las fórmulas.

¿Cómo extender?

Proponga más ejercicios sobre el cálculo de volúmenes de prismas cuyas dimensiones son literales. Por ejemplo, un prisma hexagonal donde los lados de la base midan y unidades, su apotema d unidades y tenga una altura de z unidades.

Plantee otros problemas verbales donde haya que calcular alguna de las dimensiones del prisma cuando se conocen las demás y el volumen. Por ejemplo: Un recipiente en forma de prisma cuya base es un hexágono regular tiene capacidad de 15 litros. Si el lado del hexágono mide 10 cm y su apotema 8.6 cm, ¿cuánto mide la altura del prisma?

Secuencia 12 Probabilidad clásica 1 (LT, págs. 98-105)

Tiempo de realización	3 sesiones
Eje temático	Análisis de datos
Tema	Probabilidad
Aprendizaje esperado	Determina la probabilidad teórica de un evento en un experimento aleatorio.
Intención didáctica	Que los alumnos resuelvan problemas que implican determinar la probabilidad teórica de un evento.
Materiales	• Canicas, dados y urnas
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisuales** • *Los valores de la probabilidad* • *¿Qué es la probabilidad teórica?* **Informático** • *Probabilidad teórica*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recurso audiovisual** • *De la probabilidad frecuencial a la teórica*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Determinen la probabilidad teórica de un evento en un experimento aleatorio. Utilicen el modelo de urnas para obtener la probabilidad teórica de dos eventos, las comparen entre sí y las contrasten con su probabilidad frecuencial.
- Sesión 2. Comparen la probabilidad teórica a partir de la noción de probabilidad frecuencial de un evento en el que se ha considerado un número grande de ensayos.
- Sesión 3. Utilicen la fórmula para calcular la probabilidad teórica de un evento y el diagrama de árbol como recurso para enumerar todos los resultados posibles y comparar eventos equiprobables y no equiprobables.

Acerca de...

En primer grado, los alumnos comprendieron que para obtener la probabilidad frecuencial de un evento se realiza el experimento un número de veces y se compara cuántas veces se obtuvo el resultado esperado respecto al número de intentos efectuados. Ahora se conocerán y estudiarán las condiciones en que se realiza dicho experimento y cuáles son todos los resultados posibles, y a partir de ellos, contar los resultados favorables del evento de interés. Se apreciará que el cálculo de la probabilidad teórica de un evento no implica la realización del experimento, sino el conteo exhaustivo de los resultados posibles y de los favorables al evento. Para iniciar el estudio se considera una situación en la que cada evento simple tiene las mismas oportunidades de ocurrir, es decir, deben ser eventos simples equiprobables; luego se obtiene la probabilidad frecuencial para comparar sus valores y concluir que, después de muchos ensayos, ese valor se acercará al que se obtiene mediante su cálculo teórico.

Sobre las ideas de los alumnos

La noción de probabilidad teórica puede ser difícil de comprender para algunos alumnos. Es posible que tengan errores y algunas dificultades, por ejemplo, al obtener el conteo de todos los resultados posibles del experimento y el conteo de los favorables del evento. Otra dificultad es el concepto de proporción que se requiere para comparar la razón entre los resultados favorables y los posibles. Y uno más sería la habilidad de distinguir entre el azar y lo deducible. Aunque se espera que por la edad de los estudiantes ya hayan adquirido la capacidad de usar procedimientos sistemáticos para realizar el inventario de todos los resultados posibles y de las variaciones o combinaciones posibles, cierto es que dependen de la instrucción para asimilar procedimientos de conteo y combinación que les permitan desarrollar su intuición de azar y construir intuiciones secundarias. Por ejemplo, se espera que ya suceda en el caso de la interpretación de que la frecuencia relativa de un evento es su probabilidad frecuencial, más allá de que utilicen y reconozcan una fórmula para obtenerla, sino porque los alumnos tienen la convicción y evidencia de que así ocurre y, por lo tanto, la utilizan para hacer sus predicciones y es parte de su conocimiento. Se espera que en algún momento algo semejante ocurra con la probabilidad teórica y la incorporen a su conocimiento probabilístico.

¿Cómo guío el proceso?

En la sesión 1, considere cuáles son las respuestas de los estudiantes, antes de realizar ningún experimento o conteo, al “Para empezar” y a la pregunta del problema 1; es decir, cuáles son las intuiciones que los alumnos tienen y, si es posible, registre algunas de ellas para después retomarlas y revisar sus respuestas. Es necesario verificar que los alumnos cuentan con las urnas y si plantean las razones correctamente en el caso del inciso c) de la situación 1. También verifique que se conforman las urnas de la manera en que se solicita en el problema y que se realiza el experimento en las condiciones señaladas; incluso puede sugerir iniciar las primeras rondas junto con ellos para guiar el proceso del juego y el registro de los resultados.

En la actividad 2 de la sesión 1 es importante que los alumnos comprendan que mientras uno de ellos utiliza la urna A para hacer las 20 extracciones de la canica y registrar correctamente cada resultado en la tabla, el otro alumno utiliza la urna B.

Por ejemplo, los siguientes resultados corresponden al registro que hizo una pareja de estudiantes:

Abel

Urna	Color que se obtiene en cada extracción																			
A	R	A	R	A	A	A	R	R	R	A	A	R	R	A	R	A	R	R	R	R

Beatriz

Urna	Color que se obtiene en cada extracción																			
B	R	R	R	A	A	A	R	R	R	A	A	R	R	A	R	A	R	R	R	A

Posteriormente, en la actividad 3 se completará el concentrado de acuerdo con la frecuencia absoluta y relativa de cada posible evento dependiendo de la urna A o B.

	Número de extracciones	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Resultados de la urna A	Número de veces que sacas una canica azul (Frecuencia absoluta)	0	1	1	2	3	4	4	4	4	5	6	6	6	7	7	8	8	8	8	8
	$\frac{\text{Número de veces que sacas una canica azul}}{\text{Número total de veces que se saca una canica de la urna}}$ (Frecuencia relativa)	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{6}{11}$	$\frac{6}{12}$	$\frac{6}{13}$	$\frac{7}{14}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{8}{16}$	$\frac{8}{17}$	$\frac{8}{18}$	$\frac{8}{19}$	$\frac{8}{20}$
Resultados de la urna B	Número de veces que sacas una canica azul (Frecuencia absoluta)	0	0	0	1	2	3	3	3	3	4	5	5	5	6	6	7	7	7	7	8
	$\frac{\text{Número de veces que sacas una canica azul}}{\text{Número total de veces que se saca una canica de la urna}}$ (Frecuencia relativa)	$\frac{0}{1}$	$\frac{0}{2}$	$\frac{0}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{13}$	$\frac{6}{14}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{7}{17}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{7}{19}$	$\frac{8}{20}$

Se sugiere no simplificar las fracciones para que los alumnos no pierdan de vista la razón entre el número de veces que se saca una canica azul y el de las extracciones realizadas.

En la sesión 2, se reúnen los resultados del juego de la sesión 1 en un concentrado general con el propósito de representarlos gráficamente para, desde ahí, comparar la probabilidad frecuencial con la teórica y observar la tendencia de los resultados, por lo cual se requiere un número grande de resultados (de acuerdo con la ley de los grandes números). Para un mejor análisis, se recomienda concentrarlos en una tabla como la propuesta que elaboren en su cuaderno.

Se sugiere cerrar con la revisión de las respuestas de las situaciones iniciales para que los alumnos reflexionen sobre sus intuiciones y los resultados de la experimentación realizada.

En la sesión 3 se requiere que los alumnos tengan un dado no cargado para que realicen la primera parte de la sesión. Y, nuevamente, solicite que respondan desde su intuición las primeras preguntas. En la actividad 2 deben completar el diagrama de árbol propuesto como recurso para realizar la enumeración de los resultados posibles y el conteo de los resultados favorables al evento de interés.

También se aborda la manera de plantear la razón que corresponde a la probabilidad teórica, resultados favorables sobre resultados posibles.

En la actividad 3 se trata de obtener la probabilidad frecuencial de lanzar un dado y observar los eventos "obtener 3" y "obtener 6", para comparar sus probabilidades después de 24 lanzamientos. En la actividad 4 se busca contrastar los resultados esperados debido al cambio de las condiciones del dado (que es el generador aleatorio de esta situación), pues ahora estará cargado hacia una cara. El propósito es observar cuánto varían las frecuencias y qué implicaciones tendría respecto al valor de la probabilidad teórica que se calcula en condiciones ideales.

Durante el trabajo de esta secuencia puede permitir el uso de la calculadora. El propósito principal es el trabajo con la probabilidad teórica a partir de la frecuencial y se espera que la operatoria no sea un obstáculo ni un aspecto al que los alumnos tengan que invertirle demasiado tiempo.

Pautas para la evaluación formativa

Observe si los alumnos logran:

- Identificar que la frecuencia relativa de un resultado es la probabilidad frecuencial de un evento.
- Determinar el número total de resultados posibles de cada experimento.
- Determinar el número total de resultados favorables de cada evento.
- Plantear correctamente la razón que corresponde tanto a la probabilidad frecuencial como a la que corresponde a la probabilidad teórica (no necesariamente que la memoricen, sino que la sepan aplicar).
- Distinguir entre evento, espacio de resultados (espacio muestral), experimento, probabilidad frecuencial y probabilidad teórica, así como la escala de la probabilidad.
- Aplicar la fórmula para calcular la probabilidad teórica de un evento y el diagrama de árbol como recurso para enumerar todos los resultados posibles.

¿Cómo apoyar?

Se espera que los alumnos no tengan dificultades para realizar los experimentos, sin embargo, en caso necesario, puede pedir que utilicen urnas, cajas o bolsas no transparentes. Si no tienen canicas, pueden utilizar papelitos de igual tamaño y grosor que tengan la letra A (de azul) y R (de rojo), de acuerdo con el contenido de cada urna. Si no cuentan con un dado, pueden construirlo a partir del desarrollo plano de un cubo; en este caso, considere enumerar las caras opuestas así: 1-6, 2-5, 3-4.

Si observa que tienen problemas para enumerar los resultados, recomiende el uso del diagrama de árbol como un modelo que genera de forma sistemática el conteo.

Organice las discusiones grupales para revisar el registro de los resultados, con lo cual garantiza que de alguna manera sean confiables.

¿Cómo extender?

Proponga otros eventos para calcular su probabilidad teórica y compárenlos. Por ejemplo, en el caso del dado, puede proponer que determinen la probabilidad de que el número obtenido al tirarlo sea menor que 3 o mayor que 3, o bien que el número obtenido sea par o impar. Lo puede extender, retomando la situación del "Para empezar" y calcular las probabilidades teóricas de los eventos "cae 3 y 6" con respecto a "cae 3 y 3". También lo puede hacer con el problema de las urnas. Por ejemplo, sacar, sin ver, una canica y que ésta sea roja, o sacar, sin ver, dos canicas al mismo tiempo y que las canicas sean azules.

Evaluación Bloque 1

(LT, págs. 106–107)

Con el propósito de observar el avance en el logro de los aprendizajes de los estudiantes, además de las consideraciones que usted haya realizado, se presentan a continuación los resultados y orientaciones del instrumento de evaluación del bloque 1.

Reactivo 1. Multiplicación y división de decimales y fracciones. Con las diferentes operaciones que se proponen se pretende valorar en los alumnos su conocimiento y habilidad para aplicar los significados asociados a las operaciones aditivas y multiplicativas de fracciones y números decimales, así como, su comprensión de las propiedades de estas operaciones con los diferentes tipos de números. Estos aspectos son parte del desarrollo del sentido numérico de los estudiantes. En el inciso a), el cociente es un número mayor que el dividendo, 4 500.2, porque una interpretación de la situación es cuántas veces cabe un centésimo en 45 unidades con dos milésimos. La respuesta en el inciso b) es 0.0005843, un número menor que el factor 5.843, pero mayor que un diezmilésimo, y se puede interpretar como la diezmilésima parte de 5.843. En el caso del inciso c), la respuesta es: $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$, la multiplicación: $\frac{3}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Otra interpretación de esa multiplicación es obtener mitad de $\frac{3}{6}$, y dado que esa fracción es equivalente a $\frac{1}{2}$, entonces se está calculando la mitad de la mitad. En el inciso d) la respuesta es: la centésima parte del primer factor. En el inciso e), $\frac{5}{12}$ es el cociente, la división de fracciones es equivalente a la multiplicación del dividiendo por el recíproco del divisor. Y, finalmente, el inciso f) implica la división $\frac{7}{4} \div \frac{1}{4} = \frac{7}{4} \times \frac{4}{1} = \frac{28}{4} = 7$.

Reactivo 2. Proporcionalidad directa, área de figuras y volumen de prismas rectos. Con este reactivo se evalúa en los alumnos la habilidad de resolver problemas que implican la medición del área de figuras compuestas y el volumen del prisma recto. Además, la situación también implica determinar las medidas dado el factor de escala. Las medidas de los lados de la torre M´ dada la M, son:

M	20 cm	12 cm	14 cm	4 cm	10 cm	16 cm	30 cm
M´	$\frac{40}{3}$ cm	8 cm	$\frac{28}{3}$ cm	$\frac{8}{3}$ cm	$\frac{20}{3}$ cm	$\frac{32}{3}$ cm	10 cm

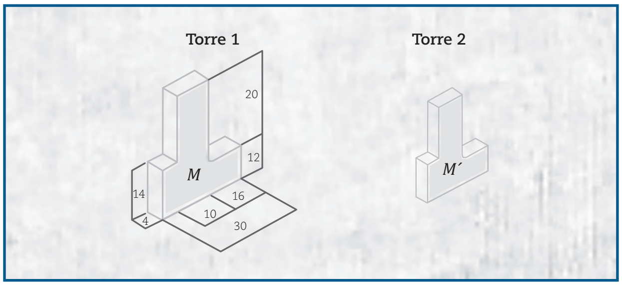
El área de la cara M´ es: $\frac{2272}{3}$ cm^2

Y el volumen de la torre es: $\frac{18176}{3}$ cm^3

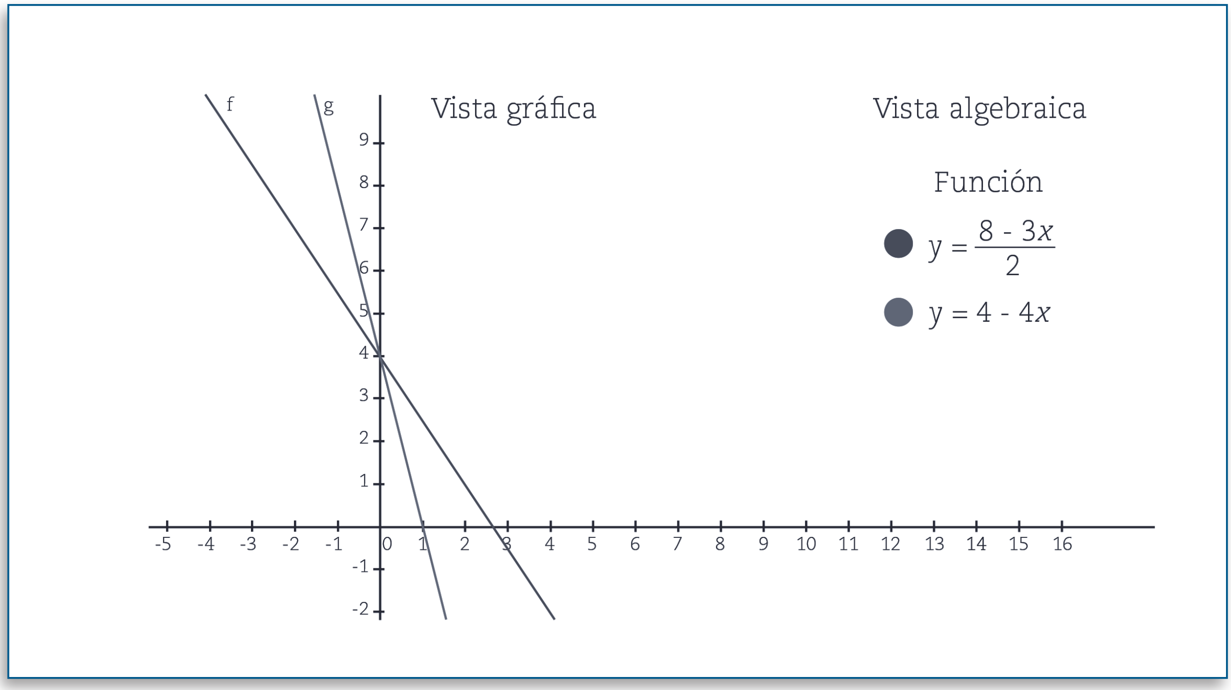
Reactivo 3. Proporcionalidad inversa. El alumno debe reconocer que las cantidades de la situación que se presentan tienen una relación de variación inversamente proporcional. Entre mayor sea el número de pasajeros, más barato cuesta el viaje.

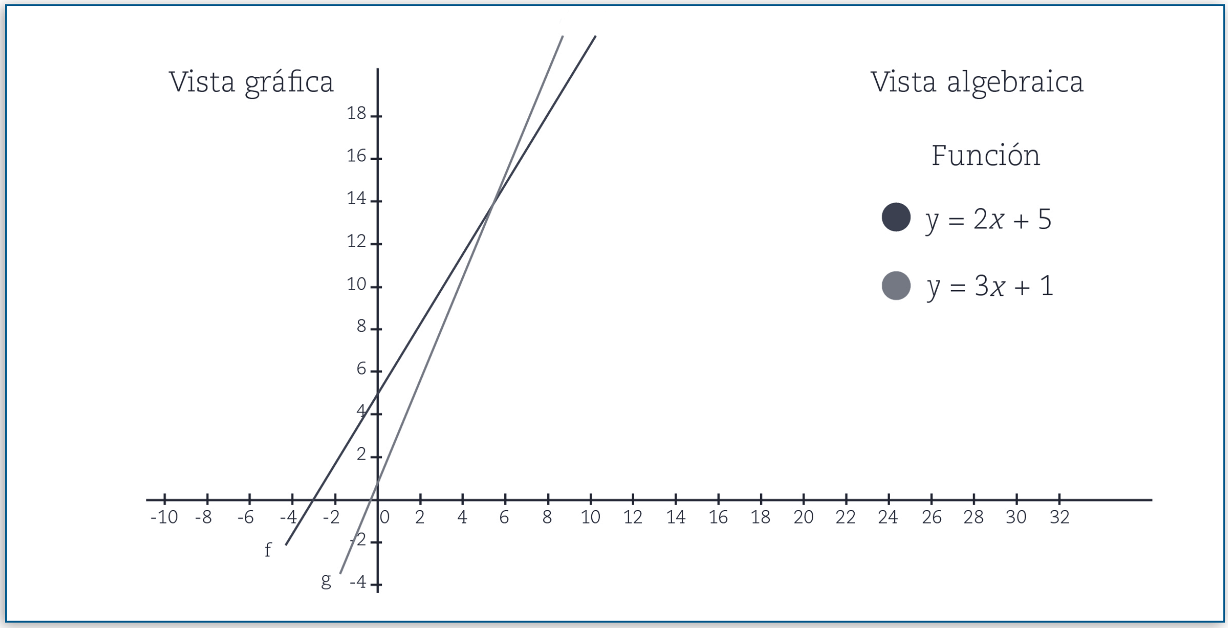
Pasajeros	4	8	10	13	16	22
Costo	\$ 3250	\$ 1625	\$ 1300	\$ 1000	\$ 812.5	\$ 590

Esta situación presenta una condición que pone límite al costo mínimo por pagar y es la capacidad del autobús: solamente 30 pasajeros lo pueden abordar.



Reactivo 4. Método gráfico de resolución de sistema de ecuaciones. En este reactivo se valora la capacidad del estudiante para aplicar el método gráfico e interpretar la solución. En el primer sistema es necesario despejar de ambas ecuaciones la incógnita *y*. En el caso del segundo sistema, ya están despejadas las ecuaciones, pero para encontrar la solución se requieren valores mayores que 4, y generalmente el estudiante utiliza para tabular los valores de −2 a 2, por lo que se verá en la necesidad de encontrar más puntos hasta que se intersequen las rectas.





Reactivo 5. Conversión de medidas de longitud. En este reactivo se valora la resolución de problemas de medición de longitud y área que implican la conversión entre medidas del Sistema Inglés y del Internacional.

Así, para determinar el costo de la malla que se requiere para cercar la bodega, primero se debe determinar su perímetro:

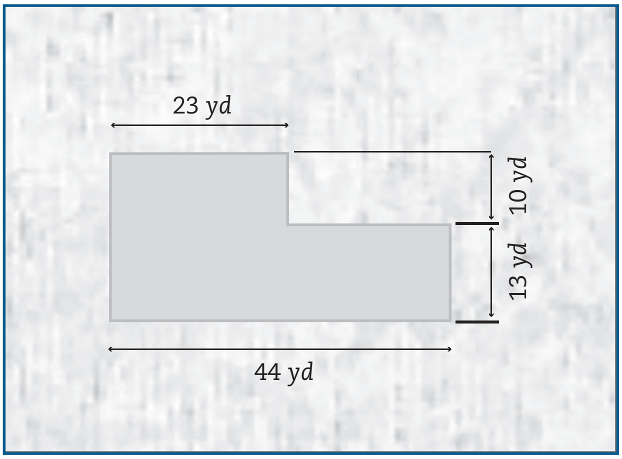
$$23 + 23 + 44 + 13 + 21 + 10 = 134 \text{ yd}$$

que en metros es:

$$134 \times 0.9144 = 122.5296$$

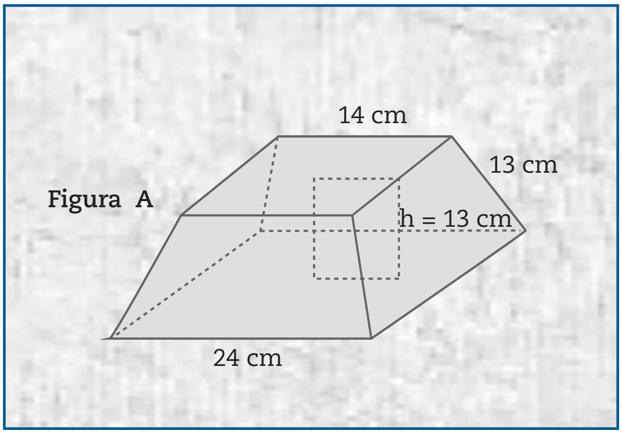
Este resultado se multiplica por el precio del metro de malla, por lo que su costo es de \$17 154.14.

Para determinar el número de losetas que cubrirán el piso de la bodega, se puede proceder determinando el área de la bodega en dos partes, una cuadrada y otra rectangular. La primera mide 13 yd por lado y la segunda es de 11 yd × 13 yd. Por lo tanto, el área es: 312 yd^2.



Reactivo 6. Sucesiones y expresiones equivalentes. Con este reactivo se valora la capacidad del alumno para expresar algebraicamente la regla que genera una sucesión y encontrar expresiones equivalentes, dando cuenta de su habilidad en la manipulación algebraica. En la primera sucesión dos expresiones equivalentes son: $6n + 1 = 3(2n + \frac{1}{3})$.

Reactivo 7. Volumen de prismas rectos. En la determinación del volumen de los cuerpos que se proponen en este reactivo se espera que el alumno muestre el desarrollo de su habilidad para representar cada volumen como la suma de los volúmenes de prismas rectos con bases triangulares y rectangulares, como se estudió en la secuencia. Además, se vincula con el planteamiento de ecuaciones que se viene desarrollando desde primer grado, al expresar las medidas del segundo cuerpo en forma algebraica. El volumen del primer cuerpo es equivalente a la suma de los volúmenes de dos prismas, uno con base rectangular (5 × 13 × 14) y el otro con base cuadrada (14 × 14 × 13). Por lo tanto, los resultados son: 910 cm^3 y 2 548 cm^3, respectivamente.



Reactivo 8. Probabilidad clásica. Con este reactivo se puede observar si el alumno determina la probabilidad clásica de un evento. Esto implica determinar el número total de casos, es decir, el espacio muestral; contar el número de casos favorables al evento que se defina y establecer la razón entre estos dos conteos. Una dificultad que tiene este reactivo es considerar que las canicas están numeradas del 0 al 9.

Las respuestas correctas son: a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{3}{5}$; c) El evento que tiene mayor probabilidad es sacar una canica con un número mayor que 3; hay 6 resultados favorables de 10 posibles.