LIBRO PARA EL MAESTRO

Matemáticas

Primer grado

Bloque 2. Fractales

Bloque 3. Los mapas y las escalas

Bloque 3

Secuencia 27 Fracciones y decimales positivos y negativos 2 (LT, pp. 188-193)

Tiempo de realización	Tres sesiones.
Eje temático	Número, álgebra y variación.
Tema	Adición y sustracción.
Aprendizaje esperado	Resuelve problemas de suma y resta con números enteros, fracciones y decimales positivos y negativos.
Intención didáctica	Que los alumnos resuelvan problemas en situaciones que implican suma y resta con números fraccionarios y decimales, positivos y negativos; combinados.
Recursos audiovisuales o informáticos para el alumno	**Audiovisuales** Sesión 1. *Uso de la calculadora para sumar números positivos y negativos* Sesión 2. *Sumar y restar decimales y fracciones con signo* **Informático** Sesión 3. *Problemas complejos de suma y resta*
Materiales de apoyo para el maestro	**Audiovisual** *La suma y resta de fracciones y decimales positivos y negativos*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Resuelvan problemas que implican la adición de números fraccionarios y decimales, positivos y negativos.
- Sesión 2. Resuelvan problemas que implican la sustracción de números fraccionarios y decimales positivos y negativos.
- Sesión 3. Resuelvan problemas que implican adición y sustracción de números fraccionarios y decimales positivos y negativos.

Acerca de...

Para que los alumnos resuelvan problemas y adquieran autonomía para usar el algoritmo de la suma de números fraccionarios y decimales, positivos y negativos; así como para tomar decisiones de cómo operar la sustracción de fracciones y decimales positivos y negativas de manera efectiva, basada en los conceptos de valor absoluto y números opuestos, es conveniente que se enfrenten a situaciones contextualizadas en las que se combinen este tipo de números, que induzcan al alumno a:

Juegos con números

1. Reúnete con otro compañero para hacer esta actividad y la siguiente.
Acomoden los siguientes números en el cuadrado mágico de manera que la suma sea $-\frac{3}{2}$.
Los nueve números son:

$-5,\ \frac{1}{2},\ -7,\ \frac{12}{3},\ -6,\ -0.5,\ -\frac{3}{2},\ 6,\ \frac{20}{4}$

- Plantear la resolución del problema, lo que implica decidir qué tipo de operación realizar y qué tipo de números están involucrados en la resolución.
- Operar efectivamente aplicando los algoritmos aprendidos a lo largo de las secuencias anteriores.
- Usar indistintamente el tipo de números (fraccionarios o decimales) que se adapten mejor al contexto del problema.
- Validar la solución encontrada.

Dado que en esta secuencia los problemas implican el uso de fracciones y decimales positivos y negativos, es importante que el alumno aprenda a resolverlos usando sólo fracciones, o sólo decimales; lo que implica un dominio de la equivalencia y los procedimientos para hacer la representación de una fracción en decimal y viceversa. No se trata de usar equivalencias representativas como $\frac{1}{2} = 0.5$, o $\frac{1}{4} = 0.25$ que pudieran memorizarse fácilmente; sino del análisis del contexto del problema para tomar una decisión sobre el procedimiento y el tipo de números a usar.

La secuencia aborda primero problemas de adición, luego de sustracción y, por último, problemas que implican la adición y la sustracción combinadas. Cada situación planteada involucra todos los aspectos estudiados en las secuencias de este aprendizaje esperado y constituyen en sí mismas una retroalimentación de lo aprendido, así como la manifestación del aprendizaje del alumno.

Sobre las ideas de los alumnos

Después de las tres secuencias anteriores dedicadas a este aprendizaje esperado, es factible que los alumnos tengan un dominio suficiente para el planteamiento de los problemas, el uso de referentes conceptuales como el valor absoluto, el uso de recursos gráficos y la aplicación correcta de los algoritmos aprendidos. Sin embargo, el hecho de combinar diferentes números y plantear problemas con dos o más operaciones (suma y resta) puede crear conflicto para su resolución en el alumno. Los errores más recurrentes pueden ser:

Conceptuales: sea sobre el significado y equivalencia entre enteros, fracciones y decimales; de representación, por ejemplo la ubicación de un número en la recta; o de *ausencia de referentes* como el valor absoluto o el simétrico.

En los procedimientos aritméticos: fallas en la aplicación del algoritmo para encontrar equivalencias entre fracciones o entre fracciones y decimales; o bien en la aplicación del algoritmo de adición de números positivos y negativos.

En el planteamiento de los procedimientos: defectos como la falta de concordancia entre los datos del problema y la o las operaciones a realizar.

¿Cómo guío el proceso?

En la sesión 1 los contextos de cuadrados mágicos y “adivinar” números son el pretexto para que el alumno plantee sumas de fracciones y decimales positivos y negativos. En la plenaria, observe los diferentes planteamientos y haga notar las diferencias entre ellos; y que aun así conducen al mismo resultado.

En referencia al cuadrado mágico de la actividad 1, cuyo resultado es:

-6	$\frac{12}{3}$	$\frac{1}{2}$
6	-0.5	-7
$-\frac{3}{2}$	-5	$\frac{20}{4}$

Aproveche la oportunidad para que los alumnos validen cada una de las sumas de las filas, las columnas y las diagonales usando y comentando los pasos del algoritmo.

En la sesión 2 los alumnos plantearán la solución de problemas sobre el calentamiento global usando fracciones o decimales. Permita que ellos decidan qué números usar, sin embargo, en la confrontación exponga los dos procedimientos. Es importante que en el problema 3 las respuestas a las preguntas de los incisos sean consensadas.

Para el inciso a), se deben sumar las variaciones desde 1900 hasta 1980, una de las formas de resolución usando fracciones es la siguiente:

$$\left(-\frac{3}{10}\right) + \left(-\frac{5}{10}\right) + \left(+\frac{19}{50}\right) + \left(-\frac{1}{10}\right) + \left(+\frac{11}{100}\right) = \frac{4}{100}$$

Es una buena oportunidad para repasar el algoritmo de la suma, en este caso el común denominador sería el 100.

Para la pregunta b) se deben restar los (−0.1) °C (que es la variación de 1940 a 1960) a los 18.3°C que es la temperatura media en Roma en 1960. La operación es la siguiente:

$$(18.3) - (-0.1) = 18.4$$

Aproveche el momento de validación para repasar el algoritmo de la resta con decimales positivos y negativos.

Para la pregunta c), del mismo modo que en la pregunta anterior, hay que restar lo siguiente:

$$(13.1) - (0.38) = 12.72$$

Los alumnos deben convertir la fracción $\frac{19}{50}$ al decimal 0.38.

Para la última pregunta, inciso d), la operación que deben realizar es la siguiente:

$$(17.5) - [(0.11) + (0.375)] = 17.015$$

Plantee la operación con paréntesis para repasar el uso de los mismos en operaciones combinadas.

En la sesión 3 se resolverán problemas en diversos contextos. Aproveche este espacio para:

- Confrontar procedimientos y resultados diferentes.
- Encontrar errores que se cometieron en la resolución.
- Buscar la mejor explicación a los procedimientos.
- Repasar los algoritmos usados.

El problema 2 de esta sesión involucra la representación gráfica en la recta numérica de fracciones y decimales. En caso de que los alumnos no lo noten, adviértales que del inicio a la meta el valor de la recta es 1. Es probable que surjan estas formas de resolución:

Sumando fracciones

$$(3/4 + \frac{95}{1000} = \frac{845}{1000})$$

Sumando decimales

$$(0.75 + 0.095 = 0.845)$$

Como una resta incompleta donde falta el minuendo, usando fracciones:

$$(\frac{845}{1000}) - \frac{95}{1000} = \frac{750}{1000} = \frac{3}{4}),$$ o

La misma situación anterior; pero usando decimales:

$$(0.845 - 0.095 = 0.750)$$

Pautas para la evaluación formativa

Para que la evaluación de la secuencia sea formativa, tome en cuenta varios productos de la actividad de los alumnos:

- El planteamiento de cada uno de los problemas y el planteamiento alternativo (cuando se usan fracciones y decimales positivos y negativos).
- El uso de apoyos gráficos de representación.
- El uso correcto del algoritmo.
- La validación del procedimiento y el resultado.

¿Cómo apoyar?

Es importante que a los alumnos con rezago se les planteen problemas en contextos más sencillos, donde se usen números fraccionarios y decimales fácilmente identificables. Esto servirá para que el alumno practique y evitar su frustración.

A estas alturas del ciclo escolar, se debe tener certeza del grado de dominio que cada alumno tiene. Use esta información para conformar equipos de apoyo entre los mismos alumnos.

¿Cómo extender?

Existen infinidad de retos para originar en los alumnos cuyo avance resultó satisfactorio, la oportunidad de extender este aprendizaje esperado:

Más cuadrados mágicos.

Sumas y restas combinadas usando enteros, fracciones y decimales positivos y negativos.

Problemas que involucren otros aprendizajes, por ejemplo: jerarquía de operaciones, sucesiones y ecuaciones.

Secuencia 28 Porcentajes 2 (LT, pp. 194-203)

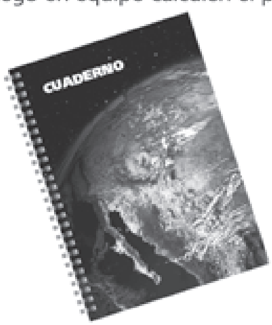
Tiempo de realización	Cinco sesiones.
Eje temático	Número, álgebra y variación.
Tema	Proporcionalidad.
Aprendizajes esperados	Resuelve problemas de cálculo de porcentajes, de tanto por ciento y de la cantidad base.
Intención didáctica	Que los alumnos profundicen sus conocimientos sobre porcentajes al calcular la cantidad base o el tanto por ciento dados los otros datos y al interpretar porcentajes mayores a 100%.
Recursos audiovisuales o informáticos para el alumno	**Audiovisuales** Sesión 2. *De muchas maneras*. Sesión 3. *Con el IVA incluido.* Sesión 4. *¿Qué tanto por ciento es…?* **Informático** Sesión 5. *Más de porcentajes*
Materiales de apoyo para el maestro	**Audiovisual** *La cantidad base o el tanto por ciento*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Expresen el tanto por ciento como una fracción y como un decimal.
- Sesión 2. Resuelvan problemas que impliquen el cálculo de porcentajes usando diversos procedimientos: con base en porcentajes conocidos, con base en el 1%, multiplicando por la fracción o el decimal equivalente al tanto por ciento.
- Sesión 3. Resuelvan problemas que implican el cálculo de la cantidad base si se conoce el tanto por ciento y el resultado de aumentar o disminuir ese tanto por ciento.
- Sesión 4. Resuelvan problemas que implican el cálculo del tanto por ciento si se conoce la cantidad base y el resultado de aumentar o disminuir ese tanto por ciento.
- Sesión 5. Resuelvan problemas diversos sobre cálculos de porcentajes, interpretar porcentajes mayores a 100.

2. En grupo, comparen sus procedimientos para calcular el precio sin descuento, luego en equipo calculen el precio sin descuento de estos otros cuadernos.



Con descuento: $40.50

Sin descuento: ______

Con descuento: $90.00

Sin descuento: ______

Acerca de...

En la secuencia 19 los alumnos calcularon porcentajes con diferentes procedimientos excepto el que consiste en una multiplicación por el tanto por ciento expresado como un número decimal. En la primera sesión de la presente secuencia los alumnos aprenderán a expresar el tanto por ciento como una fracción con denominador 100 y como un número decimal. Estas expresiones del tanto por ciento se usarán en la sesión 2 para que los alumnos conozcan un procedimiento más para calcular porcentajes: multiplicar la cantidad base por el tanto por ciento expresado como fracción o como número decimal.

Recuerde que en el cálculo de porcentajes se involucran tres cantidades. En la expresión

El 20% de 400 es 80

se tiene el tanto por ciento (20%), la cantidad base (400) y el porcentaje (80). En la secuencia 19 los alumnos calcularon porcentajes a partir del tanto por ciento y de la cantidad base. Ahora ampliarán sus conocimientos al resolver problemas donde tengan que calcular la cantidad base (sesión 3) o el tanto por ciento que una cantidad representa de otra (sesión 4). Estos problemas son más complejos y requieren de un profundo conocimiento y comprensión de este tema. En la sesión 5, además de reafirmar sus conocimientos, los alumnos trabajarán con porcentajes mayores al 100%.

Sobre las ideas de los alumnos

Es probable que los alumnos no sepan identificar cuál es el 100% en el problema que están resolviendo, por ejemplo, en la sesión 3 el precio de los cuadernos no es el 100% sino el 90% y el precio con IVA incluido es el 116%, no el 100%. Con estos dos saberes se puede calcular el 1% (valor unitario) y conociendo el 1% se puede calcular el 100% que es el precio sin descuento en el primer caso, y sin IVA en el segundo.

En la tabla de la sesión 5, es probable que para los alumnos sea difícil comprender expresiones como 150% o 125% debido a que consideran que "tantos de cada 100" el "tantos" debe ser menor que 100. Lo mismo puede suceder cuando se pide que encuentren qué tanto por ciento es 34 de 85 (sesión 4) pues consideran que, al ser "tantos de cada 100", no tiene sentido porque 85 es menor que 100.

¿Cómo guío el proceso?

En la plenaria de la sesión 1 enfatice que para determinar el decimal que corresponde al tanto por ciento se divide entre 100, esto les será útil para calcular el 1% (1 entre 100 es 0.01) o el 115% (115 entre 100 es 1.15). Analice que para casos como el 80%, la expresión decimal es 0.80 y que este número es equivalente a 0.8. Haga notar que la segunda cifra decimal, el cero, se puede eliminar.

En la puesta en común de la sesión 2 analice la conexión entre los diferentes procedimientos presentados para calcular el 65% de 80. Estos procedimientos no son ajenos entre sí, todos están relacionados. Por ejemplo, en el procedimiento de Teresa, al calcular 1% de 80 se divide 80 entre 100 y luego se multiplica por 65:

$$\frac{80}{100} \times 65$$

Esto es equivalente al procedimiento de Julio que expresó 65% como fracción y lo multiplicó por 80. Observe:

$$80 \times \frac{65}{100}$$

Y que su vez es equivalente al procedimiento de Luis que expresó 65/100 como un decimal:

$$80 \times 0.65$$

Analice también que la regla de tres que usó Lulú la lleva a una expresión equivalente a la de Teresa y Julio, al despejar la x obtiene:

$$x = \frac{65 \times 80}{100}$$

En la sesión 3 es importante que haga notar a los alumnos que el precio con descuento no es 100% sino 90% y que el precio sin descuento es el

100%, puede preguntar ¿el precio sin descuento será mayor o menor que el precio con descuento?, esto permitirá hacer una primera estimación del resultado. Lo que está en juego es calcular la cantidad base.

Lo que han estudiado en las secuencias de proporcionalidad (7 y 18) así como lo que saben de porcentajes son herramientas para abordar estos problemas. Es posible que algunos de ellos los resuelvan mentalmente, por ejemplo, si se hizo el 10% de descuento y ya con descuento el segundo cuaderno costó $90, entonces sin descuento su precio es de $100. Otros casos son más difíciles, por ejemplo, para el precio del último cuaderno quizá los alumnos tengan que hacer una regla de tres.

En la sesión 4 los alumnos tienen que calcular qué tanto por ciento es una cantidad de otra; en la actividad 4 se presentan varias maneras de hacerlo, en la puesta en común analice junto con ellos que estas maneras están muy relacionadas entre sí.

En la sesión 5 los alumnos se enfrentarán a porcentajes mayores al 100% (150%, 125%, 175%, 200%), es posible que tengan dificultades en comprenderlos, trabaje con ellos algunos ejemplos de manera grupal, analice por ejemplo que 200% es el doble de la cantidad, 300% es el triple, 150% es la cantidad más su mitad, etcétera.

Pautas para la evaluación formativa

Observe si los alumnos tienen dificultades con el manejo de las fracciones y los decimales.

Identifique a quienes aún tienen problemas para comprender qué es el tanto por ciento, por ejemplo, quienes no logran ubicar que el entero con el que se trabaja es el 100%, que el 50% es su mitad, que el 200% es su doble, el 20% es su quinta parte, etcétera.

Observe quiénes no pueden calcular los porcentajes, cantidad base o tanto por ciento pedidos con ninguno de los procedimientos que se trabajan en las sesiones y a quienes no logran establecer correctamente una proporción para aplicar la regla de tres.

¿Cómo apoyar?

Si la dificultad está en el manejo de las fracciones y decimales se sugiere hacer un repaso de los aspectos que se requieren para esta secuencia 28.

Si el problema está en que aún no comprenden ni saben aplicar alguno de los procedimientos trabajados en la sesión, es recomendable plantear otros problemas y que ellos mismos elijan un procedimiento y pasen a explicarlo al frente, explicar a otros demanda el esfuerzo de entender lo que se está haciendo para externarlo.

Con respecto a la regla de tres, se sugiere retomar el trabajo con las sesiones 5 y 6 de la secuencia 18 para afianzar esta técnica.

¿Cómo extender?

Haga preguntas de reflexión acerca de porcentajes más complejos, por ejemplo:

- ¿Cómo expresarías con el tanto por ciento la razón 1 de cada 1 000?, ¿1 de cada 10 000?, ¿10 de cada 1 000?, ¿100 de cada 1 000?
- ¿Cómo expresarías con el tanto por ciento la razón 3 de cada 25?, ¿3 de cada 75?, ¿0.5 de 0.25?

3. Reúnete con un compañero para hacer las restantes actividades de la sesión.

Anoten el tanto por ciento de asistencia de cada grupo.

1°A	1°B	1°C
Alumnos: 40	Alumnos: 45	Alumnos: 50
Asistieron: 30	Asistieron: 35	Asistieron: 40
Asistió ________ %	Asistió ________ %	Asistió ________ %

Secuencia 29 Variación lineal 2 (LT, pp. 204-213)

Tiempo de realización	Cinco sesiones.
Eje temático	Número, álgebra y variación.
Tema	Funciones.
Aprendizaje esperado	Analiza y compara situaciones de variación lineal a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica. Interpreta y resuelve problemas que se modelan con estos tipos de variación.
Intención didáctica	Que los alumnos comparen diversos tipos de variación lineal y no lineal; y determinen la razón de cambio de un proceso o fenómeno modelado con una función lineal. Asimismo, que construyan la gráfica de una situación de variación lineal y analicen la relación entre la inclinación de la recta y la razón de cambio.
Vínculos con otras asignaturas	Geografía Interpreta representaciones cartográficas para obtener información de diversos lugares, regiones, paisajes y territorios.
Recursos audiovisuales o informáticos para el alumno	**Audiovisuales** Sesión 2. *Expresiones algebraicas de relaciones funcionales* Sesión 3. *Gráficas de relaciones funcionales* Sesión 4. *Puntos que informan* Sesión 5. *Comparación de gráficas* **Informático** Sesión 5. *Gráficas de variación lineal*
Materiales de apoyo para el maestro	**Audiovisual** *Razón de cambio*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Resuelvan problemas que impliquen reconocer el concepto de razón de cambio en una situación de variación lineal.
- Sesión 2 Analicen expresiones de la forma $y = ax$ y de la forma $y = ax + b$, asociadas a situaciones de variación lineal.
- Sesión 3. Definan las características de las gráficas asociadas a expresiones algebraicas de la forma $y = ax$.
- Sesión 4. Obtengan la expresión algebraica de una relación funcional a partir de su gráfica.
- Sesión 5. Comparen relaciones lineales a partir de su representación gráfica y de la obtención de la expresión algebraica.

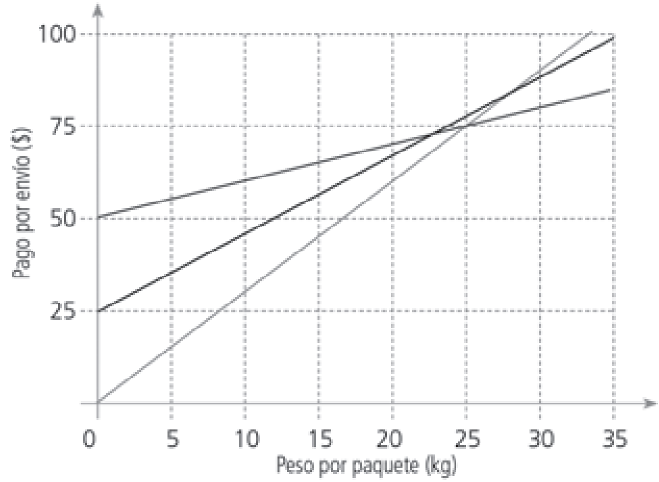
Acerca de...

En esta secuencia los alumnos abordarán el concepto de razón de cambio, analizando situaciones y fenómenos modelados mediante una función lineal. La razón de cambio servirá para definir la expresión algebraica de una función lineal y la pendiente de la recta asociada a la gráfica. Para lograr esto se llevará a cabo la secuencia de actividades que se detalla:

Se inicia con la definición de una razón como el cociente entre dos cantidades; esto es, $a = \frac{y}{x}$. Si la razón es constante para distintos valores de las cantidades x y y, entonces la relación entre ellas es de variación lineal.

En otras actividades se estudia la expresión algebraica asociada a una relación de variación lineal. Se definen las expresiones $y = ax$ y $y = ax + b$ como

2. La gráfica muestra la relación del pago por envío (en pesos) y el peso por paquete (en kg), correspondientes a las tres empresas de servicio de paquetería.



casos de relación funcional, en donde la variable y está en función de la variable x.

Se define la gráfica de una relación de variación lineal como puntos que están sobre una misma recta. La razón de cambio $a = \frac{y}{x}$ se define como la pendiente de la recta en la gráfica.

Se comparan rectas graficadas en un mismo plano cartesiano, con respecto a la razón de cambio (o pendiente) y la ordenada al origen de cada recta.

Se finaliza definiendo la expresión algebraica de una relación de variación lineal, como $y = ax + b$, donde a es la razón de cambio y b es la ordenada al origen.

Sobre las ideas de los alumnos

Un recurso que los alumnos pueden aplicar para entender la noción de razón de cambio es lo que saben respecto de la constante de proporcionalidad. Cabe recordarles que, si bien la constante de proporcionalidad es una razón, no toda situación de variación lineal es de proporcionalidad.

Es importante que entiendan que a mayor valor de la razón $a = \frac{y}{x}$, mayor es la pendiente de la recta graficada; y viceversa. Lo anterior se puede observar como un mayor ángulo de inclinación de la recta con respecto de la horizontal.

Algunos posibles errores y dificultades que los alumnos pueden tener son:

- Dificultades para construir y comprender los conceptos de pendiente de la recta y de ordenada al origen.
- Problemas para identificar que al obtener la razón de cambio entre los dos conjuntos de cantidades relacionadas en puntos de la gráfica, obtienen el valor de la pendiente.
- Dificultad para comprender la relación que existe entre el valor de la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta en la gráfica.
- Dificultades para obtener la expresión algebraica de una relación de variación lineal, a partir de la información contenida en la gráfica o en la tabla de datos, en especial cuando la expresión incluye ordenada al origen.
- Errores al efectuar operaciones básicas con lápiz y papel; por tanto, considere la posibilidad de que usen calculadora como herramienta de cálculo y para comprobar resultados.

¿Cómo guío el proceso?

En la sesión 1 los alumnos obtendrán el *rendimiento* de un vehículo al calcular la razón entre la distancia recorrida y la cantidad de gasolina. Ese dato les servirá para completar una tabla que relaciona la distancia, la cantidad de gasolina y la razón entre ambas cantidades en tres diferentes tramos de carretera. Para obtener la razón, oriéntelos para que dividan la distancia entre la cantidad de gasolina planteadas en un inicio; por ejemplo $\frac{42 \text{ km}}{3 \text{ L}}$, o bien, $\frac{70 \text{ km}}{5 \text{ L}}$

La sesión 2 plantea un problema donde los estudiantes deben comparar dos opciones de trabajo y elegir la más conveniente. En sus primeras respuestas, es probable que elijan el plan de ventas B como el más conveniente, pues es la opción que ofrece un sueldo base de 50 pesos. Esta decisión no ha implicado algún tipo de trabajo matemático, por ello será necesario que completen la tabla de datos e identifiquen cómo varía la ganancia o sueldo en relación con el número de artículos vendidos en cada plan. De esta manera podrán identificar los rangos de cantidades de artículos vendidos para los cuales conviene más un plan de ventas que otro, y finalmente, obtendrán la expresión algebraica.

El trabajo de los estudiantes en la sesión 3 está orientado a obtener la expresión algebraica y la gráfica de una situación problemática a partir de la razón de cambio. Como resultado de la actividad, definirán la gráfica de una relación de variación lineal, así como la relación entre la razón de cambio y la pendiente de la recta.

Las situaciones planteadas en las sesiones 4 y 5 implican analizar las rectas graficadas en un mismo plano cartesiano, para comparar la razón de cambio de cada una e identificar cuál tiene mayor o menor inclinación o pendiente. Además, en la sesión 5 se analizarán rectas con distintos valores de la pendiente y de la ordenada al origen para obtener la expresión algebraica.

Pautas para la evaluación formativa.

Observe si los estudiantes comprenden que el factor que media entre dos conjuntos de cantidades es la razón de cambio, cuyo valor debe ser constante para asegurar que la relación entre esos conjuntos de cantidades sea de variación lineal. Por consiguiente, la evaluación del desempeño de los alumnos debe contribuir a que:

- Comprendan el concepto y las características de una relación de variación lineal, en sus distintas representaciones.
- Conozcan y manejen las representaciones gráficas, tabulares y algebraicas de una relación de variación lineal; y puedan transitar de una representación a otra.
- Relacionen conceptos vinculados con ciertas formas de representación; por ejemplo, la razón de cambio con la constante de proporcionalidad; o bien, el valor de la pendiente con el ángulo de inclinación de la recta.
- Comprendan los conceptos de razón de cambio y pendiente de la recta, relacionando los registros gráficos, tabular y algebraico.

¿Cómo apoyar?

Para los alumnos que presenten dificultades para obtener la expresión de una relación funcional, repase con ellos una estrategia genérica que siga estos pasos:

- Identificar las cantidades o variables enunciadas en la situación problemática.
- Obtener la razón de cambio entre los conjuntos de cantidades y verificar que sea constante.
- Identificar si el valor numérico que se suma al producto de la razón por la variable es distinto de cero.
- Plantear la expresión algebraica y evaluarla con algunas cantidades para verificar que es correcta.

¿Cómo extender?

A los alumnos en condiciones de profundizar en esta secuencia, propóngales varias expresiones algebraicas a partir de las cuales deban identificar aquellas que son de variación lineal, luego la razón de cambio, la ordenada al origen, la pendiente de la recta y, para algunos casos, elaborar la gráfica correspondiente. Proponga expresiones como las siguientes:

$$y = -2x + 1.5$$
$$y = 5$$
$$y = \frac{1}{2}x$$
$$y = x^2 + 1$$

Proponga expresiones con pendiente u ordenada al origen negativa, decimal, fracción; o bien, funciones constantes (sin la variable x). Pídales que escriban un problema que se modele con las funciones lineales identificadas.

Secuencia 30 Ecuaciones 3 (LT, pp. 214-219)

Tiempo de realización	Cuatro sesiones.
Eje temático	Número, álgebra y variación.
Tema	Ecuaciones.
Aprendizajes esperados	Resuelve problemas mediante la formulación y solución algebraica de ecuaciones lineales.
Intención didáctica	Qué el alumno desarrolle habilidad para plantear y resolver ecuaciones lineales de la forma $ax + b = c$, $ax + b = cx + d$.
Recursos audiovisuales o informáticos para el alumno	**Audiovisuales** Sesión 2. *Resolución de ecuaciones* Sesión 4. *La balanza*
Materiales de apoyo para el maestro	**Audiovisual** *Plantear y resolver ecuaciones de primer grado por diversos métodos* **Bibliográficos** "De la primaria a la secundaria" en *Orientaciones didácticas,* SEP, pp. 189-190. Khan Academy (2019). *Ecuaciones simples: resolviendo una variedad de formas. Ejemplos*. Disponibles en https://es.khanacademy.org/math/eb-1-secundaria/eb-chapter-4-simple-equations#eb-what-an-equation-is

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Planteen y resuelvan ecuaciones lineales de la forma $ax + b = c$ y $ax + b = cx + d$, a partir de averiguar el valor de x.
- Sesión 2. Resuelvan $ax + b = cx + d$ ecuaciones de la forma mediante la técnica de descomponer y reducir términos.
- Sesión 3. Planteen y resuelvan ecuaciones de la forma $ax + b = cx + d$, utilizando las propiedades de la igualdad.
- Sesión 4. Planteen y resuelvan ecuaciones de la forma $ax + b = c$ y $ax + b = cx + d$, utilizando el método de la balanza y las técnicas estudiadas en la secuencia 21.

Acerca de...

En esta secuencia los alumnos estudiarán las propiedades de la igualdad y emplearán las técnicas estudiadas en la secuencia 21 para plantear y resolver ecuaciones lineales, profundizando en dicho conocimiento al aplicarlo en ecuaciones de la forma $ax + b = c$ y $ax + b = cx + d$.

Un aprendizaje importante en esta secuencia es que el alumno aplique y domine los métodos de resolución de ecuaciones; para esto se recomienda iniciar la resolución algebraica de ecuaciones lineales mediante la manipulación de la literal aplicando sucesivamente operaciones inversas en ecuaciones sencillas de la forma $ax + b = c$ y mediante la aplicación de las propiedades de la igualdad en ecuaciones más generales y complejas de la forma $ax + b = cx + d$, donde a, b, c y d son números enteros, decimales o fraccionarios.

Sobre las ideas de los alumnos

Los alumnos han tenido contacto en secuencias anteriores con las ecuaciones de primer grado y con los métodos de resolución que utilizarán en esta secuencia.

Es probable que al inicio presenten dificultades para resolver ecuaciones de las formas $ax + b = c$ y

$ax + b = cx + d$, debido a que requieren más de un paso para resolverlas, así como la posibilidad de utilizar y combinar las cuatro operaciones básicas. Dichas dificultades en muchas ocasiones se deben a la poca o deficiente comprensión de los procedimientos de resolución estudiados en la secuencia anterior, pues con dichos procedimientos era factible que los estudiantes cayeran en la mecanización del procedimiento, debido a que solo se requería seleccionar entre realizar una suma o resta (forma $x + a = b$) o, en su defecto, una multiplicación o división (forma $ax = b$).

Por esta razón se debe poner especial atención en que los estudiantes comprendan los métodos de resolución, para ello se deben presentar diversas variantes en las ecuaciones tratadas, así como en los números asignados para los coeficientes de las variables y los términos independientes, a fin de que se despierte en los estudiantes la capacidad de analizar y seleccionar la operación que sea necesario realizar de acuerdo a los requerimientos de la ecuación.

¿Cómo guío el proceso?

En la sesión 1 es conveniente que el maestro haga hincapié en los tipos de datos de la situación problemática de inicio, para que los alumnos identifiquen el tipo de ecuaciones que van a manejar durante el desarrollo de la secuencia. A la mitad de la actividad, es necesario hacer una pausa para identificar las dudas y dificultades presentadas, así como el planteamiento de distintos ejemplos para confirmar procedimientos.

En la actividad 3 es recomendable que el maestro resuelva en el pizarrón el primer inciso y que después cada uno de los equipos indique algunos de sus procedimientos para compartir con el grupo y especificar los pasos de cada uno de los métodos analizados en la sesión.

De igual manera, al comenzar la sesión 2, actividad 7 es conveniente que el maestro explique paso a paso de uno de los ejemplos de la actividad, para aclarar dudas e identificar las diferencias entre las ecuaciones de la forma $ax + b = c$ y $ax + b = cx + d$, aunque cabe mencionar que la lógica de los procedimientos es la misma para cualquier tipo de forma de ecuación.

Para la sesión 4, actividad 4, los alumnos pueden continuar solos, aunque, si es necesario, puede intervenir mediante la aclaración de dudas para que los estudiantes identifiquen adecuadamente los pasos a seguir en la resolución de ecuaciones, recuperando los métodos tratados hasta el momento.

Pautas para la evaluación formativa

De manera específica, la actividad 3 de la sesión 1 y el ejercicio 7 de la sesión 2 brindan elementos para poder identificar el grado de aprendizaje que cada estudiante tiene con respecto al propósito de la secuencia; debido a que buscan que el alumno resuelva ecuaciones lineales de la forma $ax + b = c$ y $ax + b = cx + d$ respectivamente.

Por su parte, la actividad 1 de la sesión 4 está enfocada a evaluar el alcance de los estudiantes con respecto al aprendizaje esperado al solicitar que resuelvan situaciones problemáticas planteando y resolviendo ecuaciones lineales utilizando procedimientos algebraicos.

¿Cómo apoyar?

Para apoyar a los alumnos que presentan mayores dificultades de aprendizaje se recomienda nombrar a algunos de los alumnos más aventajados como tutores, para que ellos monitoreen a sus compañeros en la resolución de sus actividades y en la comprensión del contenido.

¿Cómo extender?

Puede solicitar a los estudiantes más aventajados que planteen una situación problemática para una o dos de las ecuaciones resueltas en el ejercicio 3 de la sesión 1, ejercicio 7 de la sesión 2 y en el ejercicio 4 de la sesión 4; con lo cual pondrán en práctica los conocimientos adquiridos en la primera secuencia de este tema.

Secuencia 31 Sucesiones 2 (LT, pp. 220-223)

Tiempo de realización	Dos sesiones.
Eje temático	Número, álgebra y variación.
Tema	Patrones, figuras geométricas y expresiones equivalentes.
Aprendizaje esperado	Formula expresiones algebraicas de primer grado a partir de sucesiones y las utiliza para analizar propiedades de la sucesión que representan.
Intención didáctica	Que el alumno formule en lenguaje común y algebraico las reglas de sucesiones con progresión aritmética.
Recursos audiovisuales o informáticos para el alumno	**Audiovisuales** Sesión 1. *Pitágoras, su escuela y los números figurativos* Sesión 1. *Reglas de sucesiones* Sesión 2. *Reglas equivalentes de sucesiones* **Informático** Sesión 2. *Reglas de sucesiones*
Materiales de apoyo para el maestro	**Audiovisual** *Aspectos didácticos de las sucesiones con progresión aritmética*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Expresen la regla algebraica de sucesiones numéricas con progresión aritmética de la forma ax.
- Sesión 2. Expresen la regla algebraica de sucesiones numéricas con progresión aritmética de la forma $ax + b$.

Acerca de...

Esta es la segunda secuencia del aprendizaje esperado y las actividades de las dos sesiones que la integran plantean la generalización, la cual consiste en que los alumnos encuentren y enuncien las regularidades por medio de una expresión algebraica con la cual pueden obtener cualquier término de una sucesión numérica con progresión aritmética de la forma ax y $ax + b$, a partir del análisis de los primeros tres o cinco términos de ella.

Este paso a la simbolización algebraica representa un gran reto para los estudiantes y por ello se recomienda iniciar el tema abordando casos de sucesiones sencillas como sucede en la actividad 1 y 2 de la sesión 1. Una vez lograda la expresión algebraica de la regla que genera una sucesión,

2. Resuelve en pareja esta actividad y la siguiente.

Consideren la siguiente sucesión numérica.

$$2, 7, 12, 17, 22, \ldots$$

a) ¿Qué tienen en común los números de esa sucesión? ____________________

es necesario utilizarla para analizar y conocer más de sus características, como se hace en la actividad 1 y 2 de la sesión 2.

Con este trabajo continúa el estudio de los procesos de generalización y de la equivalencia de expresiones en matemáticas, desde el conocimiento de las sucesiones con progresión aritmética que se complementa y vincula con el trabajo desarrollado en las secuencias de ecuaciones y variación lineal.

Sobre las ideas de los alumnos

En la primera secuencia los alumnos trabajaron con sucesiones de figuras y las analizaron para definir la regla verbal que la genera; encontraron términos siguientes y otros que corresponden a posiciones más alejadas, como la posición 20. También generaron las sucesiones numéricas a partir de la regla verbal. Ahora podrán utilizar y analizar esos conocimientos para determinar cuál es la regla algebraica de la forma ax o $ax + b$, que genera una sucesión con progresión aritmética.

¿Cómo guío el proceso?

En la primera sesión se inicia con la revisión de sucesiones de figuras que son especiales y a lo largo de la historia se han estudiado, por lo cual se considera conveniente que los alumnos las conozcan y analicen.

Las actividades 2, 3 y 4 presentan sucesiones numéricas con las cuales se pueden determinar algunos términos, como el 20, con la intención de generar las reglas algebraicas que les corresponden.

En la sesión 2, los alumnos inician completando una tabla que permite analizar y relacionar el lugar del término, el valor del término, el procedimiento para hallar cada término y la regla verbal de la sucesión en lenguaje común. De esta manera, paso a paso, se llega a la regla algebraica. En la actividad 2, la tabla se concentra en los 5 primeros términos y las reglas en lenguaje común. A partir de la actividad 3 se analizan diferentes reglas algebraicas para determinar y relacionar cuáles son los primeros términos de las sucesiones. Particularmente, en la actividad 4 los alumnos podrán analizar las expresiones algebraicas; en el caso de los incisos d) y e) podrá plantearles qué ocurre cuando n es igual que 1, en especial el segundo inciso. También puede hacer referencia a la jerarquía de las operaciones y probar que: $2(1 + 1) = 2(2)= 4$ o $2(1 + 1)= (2 + 2) = (2 + 2)= 4$.

Pautas para la evaluación formativa

Como aspectos relevantes que permiten observar el avance de los estudiantes, se le propone que aprecie:

Las respuestas de los incisos que integran la actividad 4 de la sesión 1.

Las reglas algebraicas de las sucesiones numéricas de la actividad 5 de la sesión 2.

¿Cómo apoyar?

Si en la actividad 2 de la sesión 2, observa que los alumnos tienen dificultades para generar la regla algebraica, utilice la tabla de la actividad 1 como referente para desglosar término a término hasta la posición n.

¿Cómo extender?

Puede pedir a los estudiantes que obtengan la regla general de la sucesión de la actividad 2 de la sesión 1.

3. Relacionen cada regla con la sucesión que le corresponde.

a) $5n + 2$	( )	7, 10, 13, 16, ...
b) $3n + 4$	( )	7, 11, 15, 19, ...
c) $2n + 5$	( )	7, 12, 17, 22, ...
d) $4n + 3$	( )	7, 9, 11, 13, ...

Secuencia 32 Existencia y unicidad 3 (LT, pp. 224-231)

Tiempo de realización	Cinco sesiones.
Eje temático	Forma, espacio y medida.
Tema	Figuras y cuerpos geométricos.
Aprendizajes esperados	Analiza la existencia y unicidad en la construcción de triángulos y cuadriláteros, y determina y usa criterios de congruencia de triángulos.
Materiales para el alumno	Juego de geometría.
Intención didáctica	Que los alumnos construyan y usen los criterios de congruencia de triángulos para probar algunas propiedades de los paralelogramos.
Recursos audiovisuales o informáticos para el alumno	**Audiovisuales** Sesión 1. *Figuras congruentes* Sesión 3. *Criterios de congruencia de triángulos* Sesión 4. *Propiedades de los paralelogramos* **Informático** Sesión 3. *Criterios de congruencia de triángulos*
Materiales de apoyo para el maestro	**Audiovisual** *Criterios de congruencia de triángulos y su uso*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Construyan la noción de congruencia de figuras como aquellas que tienen la misma forma y la misma medida.
- Sesión 2. Reconozcan los datos necesarios y suficientes para construir dos triángulos que sean congruentes.
- Sesión 3. Enuncien los criterios de congruencia de triángulos e identifiquen el criterio que garantiza la congruencia de dos triángulos.
- Sesión 4. Desarrollen el razonamiento deductivo al probar algunas propiedades de cuadriláteros.
- Sesión 5. Resuelvan problemas de construcción que impliquen la existencia y unicidad de cuadriláteros.

Acerca de...

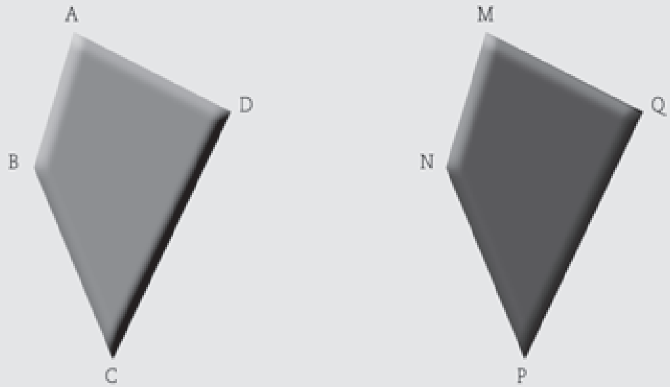
En la secuencia 9 los alumnos resolvieron situaciones problemáticas acerca de los ángulos opuestos por el vértice, ángulos correspondientes y alternos internos o externos entre paralelas. Tuvieron la oportunidad de conocer pruebas sencillas para desarrollar su razonamiento deductivo.

En la secuencia 23 se ejercitó el razonamiento deductivo al explorar dos propiedades importantes de los triángulos: que la suma de sus ángulos interiores es siempre 180° y que la suma de dos lados siempre es mayor que el tercer lado. A partir de estas dos propiedades se exploró la existencia de triángulos de determinadas medidas.

En esta secuencia se continúa con el desarrollo del razonamiento deductivo, ahora con la aplicación de los criterios de congruencia de triángulos y al trabajar con algunos cuadriláteros y sus propiedades.

Es importante que sean los propios alumnos quienes, previo trabajo con actividades, logren establecer cuáles son las condiciones necesarias y suficientes para garantizar la congruencia de dos triángulos, estas condiciones, que reciben el nombre de *criterios de congruencia de triángulos*, son tres: LLL, LAL y ALA. Los alumnos aplicarán estos criterios para garantizar la con-

Dos figuras que tienen la misma forma y la misma medida son figuras **congruentes**. Cuando dos figuras son congruentes pueden ponerse una encima de la otra y todos sus lados y ángulos coinciden. Los lados o los ángulos que coinciden se llaman correspondientes. Por ejemplo, los siguientes cuadriláteros son congruentes.



El lado AB es correspondiente al lado MN. El ángulo A es correspondiente al ángulo M

gruencia de triángulos y para conocer algunas propiedades de los paralelogramos. Recuerde que no es un propósito en este grado que los alumnos hagan pruebas rigurosas desde el punto de vista matemático, ni tampoco que empleen simbología geométrica para hacer sus deducciones. Se trata de sus primeros acercamientos al modo de pensar propio de las matemáticas: hacer deducciones. Lo importante es que lo comprendan y lo desarrollen para que, a partir de ciertos conceptos o propiedades geométricas que conocen, prueben otros.

Sobre las ideas de los alumnos

Los alumnos han trabajado con figuras que poseen igual forma y medida desde la escuela primaria, así que tienen esta noción; en esta secuencia se le da el nombre: figuras congruentes. Recuerde que el vocabulario geométrico es importante porque permite comunicarnos de una manera más precisa, no obstante, es probable que los alumnos las sigan llamando figuras iguales. Puede comentar con los alumnos que esta última expresión no es tan precisa porque puede ser que sean “iguales” en forma pero diferente medida o “iguales” en medidas pero diferente forma (como un cuadrado y un rombo que miden 4 cm de lado).

Si bien el razonamiento deductivo se ha trabajado en dos secuencias anteriores (9 y 23), es muy probable que los alumnos sigan teniendo problemas para hacer Deducciones. No se preocupe, es normal; no espere que todos los alumnos avancen en la misma medida

¿Cómo guío el proceso?

En la primera actividad de la sesión 1 es importante que si los alumnos tienen duda sobre cuáles figuras tienen igual forma y medida, las calquen, recorten y pongan una encima de la otra para ver si sus lados y ángulos coinciden. Esta actividad de poner una figura encima de otra permite construir la noción de lados o ángulos correspondientes en figuras congruentes. Lo mismo para las siguientes dos actividades, en las que los alumnos compararán sus triángulos, se espera que noten que si se dan las tres medidas de ángulos los triángulos no necesariamente serán congruentes mientras que si se dan las medidas de los lados sí lo son; este será un primer acercamiento a la congruencia de triángulos.

Si bien en la sesión 2 sólo se menciona hacer dos veces la actividad de *Los mensajes*, sería conveniente hacerla las veces que sean necesarias hasta que los alumnos por sí solos se den cuenta de que:

- No necesitan escribir las tres medidas de lados y tres medidas de ángulos en cada mensaje.
- No siempre es posible construir un triángulo congruente a otro si sólo se conocen dos lados o dos o tres ángulos.
- Dadas las tres medidas de lados, se construyen triángulos congruentes aunque no se sepa lo que miden los ángulos.
- Las ternas de medidas que se requieren son: tres lados (LLL), dos lados y el ángulo comprendido entre ellos (LAL) dos ángulos y el lado adyacente a ellos (ALA).

Aunque en la sesión 2 aún no estudian los criterios de congruencia, la actividad de los mensajes realizada varias veces permitirá que los mismos alumnos los descubran y enuncien.

En la sesión 3 los alumnos darán un paso con respecto a la congruencia de triángulos, pasarán de los casos particulares trabajados en la sesión 2, a enunciar de manera general los datos. Si en la primera actividad nota que los alumnos ponen palomita a una afirmación que no es verdadera, no los corrija y permita que en la puesta en común se discutan todas las afirmaciones, pida que usen los triángulos construidos en sesiones anteriores como ejemplos para mostrar la falsedad.

En la sesión 4, verifique que antes de responder las preguntas los alumnos efectivamente hagan las hipótesis que se piden, recuerde que parte del aspecto formativo de la enseñanza de la geometría es que los alumnos aprendan a hacer hipótesis y luego traten de probarlas. Las figuras de apoyo y las preguntas mostradas en cada caso son herramientas auxiliares para que los alumnos comprueben si su hipótesis es falsa o verdadera. La misma recomendación es aplicable en la sesión 5, es importante que los alumnos analicen los datos que se dan y antes de intentar trazar la figura digan si existe o no y den argumentos geométricos de su respuesta. Por ejemplo: este cuadrilátero no existe porque la suma de los cuatro ángulos interiores de un cuadrilátero debe ser 360° y estas medidas son menos de 360°.

Pautas para la evaluación formativa

Observe si los alumnos logran:

- Comunicar la noción de congruencia de triángulos.
- Enunciar con sus propias palabras los criterios de congruencia.
- Utilizar el razonamiento deductivo al probar algunas propiedades de cuadriláteros.
- Resolver problemas de construcción que impliquen la existencia y unicidad de construcción de cuadriláteros.

¿Cómo apoyar?

Puede repetir la actividad de *Los mensajes* las veces que sea necesario hasta que note que en los mensajes de los alumnos van los datos mínimos necesarios para construir triángulos congruentes, analice junto con ellos los mensajes.

Proponga construcciones con regla y compás de triángulos y cuadriláteros y, al inicio, guíe paso a paso las construcciones haciéndolas en el pizarrón, después dé más autonomía a los alumnos dejando que ellos solos hagan las construcciones.

¿Cómo extender?

Plantee preguntas como las siguientes:

¿Existe un rectángulo cuyos lados midan 3 cm, 4 cm y su diagonal mida 3.5 cm?, ¿por qué?

¿Existe un rombo cuyo lado mida 2 cm y su diagonal menor mida 1 cm?, ¿por qué?

Dos triángulos que tienen iguales un lado y dos ángulos respectivamente, ¿son congruentes?, ¿por qué?

Secuencia 33 Perímetros y áreas 3 (LT, pp. 232-237)

Tiempo de realización	Tres sesiones.
Eje temático	Forma, espacio y medida.
Tema	Magnitudes y medidas.
Aprendizajes esperados	Calcula el perímetro de polígonos y del círculo, y áreas de triángulos y cuadriláteros desarrollando y aplicando fórmulas.
Intención didáctica	Que los alumnos resuelvan problemas que impliquen el cálculo de perímetros y áreas con expresiones algebraicas. Asimismo, que resuelvan problemas reales que involucran el cálculo de perímetros y áreas.
Recursos audiovisuales o informáticos para el alumno	**Audiovisuales** Sesión 1. *Expresiones algebraicas para calcular perímetros* Sesión 3. *Áreas y perímetros en situaciones reales*
Materiales de apoyo para el maestro	**Audiovisual** *Perímetros y áreas con expresiones algebraicas*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Calculen perímetros de figuras geométricas cuyos lados son expresiones algebraicas.
- Sesión 2. Calculen áreas de figuras geométricas cuyas dimensiones son expresiones algebraicas.
- Sesión 3. Resuelvan problemas reales que implican el cálculo de perímetros y áreas.

Acerca de...

En la secuencia 10 los alumnos estudiaron el perímetro de figuras geométricas, en la 24 construyeron las fórmulas para el cálculo del área de triángulos y cuadriláteros. En las primeras dos sesiones de esta secuencia, seguirán trabajando con estas dos magnitudes al calcular perímetros y áreas con expresiones algebraicas y al vincular estos contenidos con ecuaciones. Se trata de pasar de casos particulares donde las dimensiones de las figuras son números a trabajar con literales. En la sesión 3 resolverán problemas reales que implican el cálculo de perímetros y áreas.

Sobre las ideas de los alumnos

Desde el punto de vista geométrico y de medida, la principal dificultad que suelen tener los alumnos es confundir el perímetro y el área. Normalmente esto se debe a que no tuvieron las experiencias necesarias para conceptualizar cada una de estas magnitudes. Quizás se pasó muy rápido a realizar cálculos y usar fórmulas antes de que construyeran estas nociones, es decir, aprendieron a calcular algo que no saben qué es.

Desde el punto de vista algebraico, los alumnos pueden cometer algunos errores, por ejemplo, si el lado de un triángulo mide $2m + 1$ es probable que ellos lo consideren como $3m$ (suman el 2 con el 1).

¿Cómo guío el proceso?

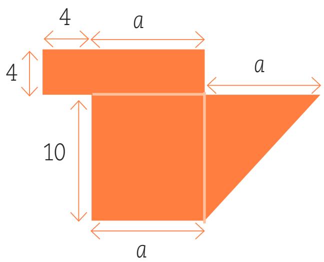
En la sesión 1, puede preguntar a los alumnos: ¿qué elementos de la figura geométrica se deben considerar para obtener el perímetro? Otro aspecto en el que se debe tener cuidado es la simplificación de términos semejantes, donde se hará necesario operar ya sea sumando o restando según se requiera. En la puesta en común es importante enfatizar la equivalencia de las expresiones algebraicas que resulten. En el caso del triángulo equilátero pueden obtener expresiones como:

$$3\,(2m - 1)$$
$$6m - 3$$
$$2m + 2m + 2m - 1 - 1 - 1$$

Invite a los alumnos a que verifiquen si son equivalentes.

En la sesión 2 haga notar a los alumnos que las figuras tienen asignadas una expresión algebraica o una medida numérica en algunas de sus dimensiones, pregunte: ¿es necesario en las figuras geométricas tener todas las dimensiones? ¿Por qué? En la actividad 2 los alumnos deben plantear la ecuación lineal que les permitirá obtener el valor de la incógnita. En la actividad 3, dependiendo de la forma en que dividan la figura podrán encontrar diferentes expresiones. Por ejemplo, si la dividen en dos rectángulos y un triángulo, obtienen:

$$A = 4\,(4 + a) + 10a + 10\,\tfrac{a}{2}$$



Simplificando:

$$A = 16 + 19a$$

La figura puede descomponerse de otras maneras, aproveche para repasar cómo simplificar las diferentes expresiones y para probar la equivalencia.

Pautas para la evaluación formativa

- Observe si los alumnos distinguen bien el perímetro y el área.
- En el caso del área identifique a quienes no recuerdan cómo calcular el área de las figuras geométricas, permita el uso de un formulario.
- Verifique si los alumnos identifican los elementos geométricos necesarios para saber usar las fórmulas y saben manipular las expresiones algebraicas para simplificarlas.
- Revise que no hagan invención de fórmulas o que omitan dimensiones para determinar el perímetro o el área de la figura geométrica.
- Verifique que apliquen las propiedades adecuadamente y que no confundan las fórmulas de una figura con otra o de área con perímetro.

¿Cómo apoyar?

Puede remitir a quienes tienen problemas en distinguir área de perímetro a las secuencias correspondientes (10 y 24) o hacer un alto grupal y repasar estos conceptos.

Si el problema está en recordar las fórmulas, permita el uso de un formulario, incluso puede tener uno a la vista en el salón de clase para que los alumnos lo consulten cuando sea necesario.

Si alguno no simplifica correctamente las expresiones, reúnalo con un compañero para que lo apoye.

En el problema 4 de la sesión 3, los alumnos pueden considerar que no pueden calcular el área porque lo que se les presenta es un cuerpo geométrico, sin embargo, el problema implica que el alumno determine el área lateral del cuerpo geométrico más el área de las dos bases. Debe orientar a los alumnos para que al identificar la forma que tiene cada cara lateral del cuerpo geométrico puedan resolver el problema.

¿Cómo extender?

Plantee problemas como los siguientes:

Se tiene un cuadrado cuyo lado mide $m - 3$

¿La literal m puede valer 3?, ¿por qué?, ¿qué valores puede tomar?

Un alumno dice que m sólo puede tener valores mayores que 4, ¿está en lo correcto?, ¿por qué?

Secuencia 34 Volumen de prismas 3 (LT, pp. 238-243)

Tiempo de realización	Tres sesiones.
Eje temático	Forma, espacio y medida.
Tema	Magnitudes y medidas.
Aprendizajes esperados	Calcula el volumen de prismas rectos cuya base sea un triángulo o un cuadrilátero, desarrollando y aplicando fórmulas.
Intención didáctica	Que los alumnos resuelvan problemas que impliquen el cálculo del volumen y la capacidad de prismas rectos que tienen por base un triángulo o un cuadrilátero.
Materiales para el alumno	Juego de geometría, cartulina, tijeras, pegamento. Envases cuya capacidad sea de un litro; arroz o alguna semilla pequeña.
Recursos audiovisuales o informáticos para el alumno	**Audiovisuales** Sesión 1. *Capacidad* Sesión 2. *Relación entre volumen y capacidad* Sesión 3. *La capacidad en nuestra vida* **Informático** Sesión 2. *Volumen y capacidad*, disponible en: <http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/2esomatematicas/2quincena10/2quincena10_contenidos_1a.htm> y <http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/2esomatematicas/2quincena10/2quincena10_ejercicios_1b.htm>.
Materiales de apoyo para el maestro	**Audiovisual** *Capacidad y volumen... una relación compleja*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Reconozcan la capacidad como una magnitud diferente al volumen pero que guarda una estrecha relación con él.
- Sesión 2. Identifiquen la relación entre el decímetro cúbico y el litro y realicen algunas conversiones entre litro, mililitro, metro cúbico, decímetro cúbico y centímetro cúbico.
- Sesión 3. Resuelvan problemas que impliquen las nociones y el cálculo de capacidades y volúmenes.

Acerca de...

Los alumnos iniciaron el estudio del volumen en primaria. En la secuencia 11 continuaron ese

1. Reúnete con un compañero para trabajar todas las actividades de esta sesión. La imagen muestra una caja en forma de cubo sin tapa y un cubo de madera, ambos con las mismas medidas. Respondan las preguntas y argumenten sus respuestas.

1. Trabajen todas las actividades de esta sesión en pareja.

Necesitan tres recipientes diferentes que tengan capacidad de un litro y arroz suficiente para llenar uno de ellos. Además, requerirán una cartulina, su juego de geometría, tijeras y pegamento.

estudio al repasar la noción de volumen y diferenciarla de otras magnitudes como el peso. En esa misma secuencia calcularon volúmenes de prismas rectangulares a partir del conteo de las unidades cúbicas que los forman y llegaron a la fórmula para calcular el volumen de prismas rectangulares.

En la secuencia 25 continuaron el estudio de esta magnitud al generalizar la fórmula *Volumen igual a área de la base por la altura* para prismas cuya base es un triángulo o un cuadrilátero como rombo, romboide o trapecio. Asimismo, resolvieron diversos problemas que implican el cálculo del volumen de esos tipos de prismas.

Continuando con el estudio del volumen, en la presente secuencia lo diferenciarán de otra magnitud de los objetos: la capacidad. La capacidad está muy relacionada con el volumen pero no son lo mismo. Mientras que un cubo de madera sólida tiene un cierto volumen, su capacidad es cero porque en él no se puede guardar, almacenar o verter nada. Una caja hueca sí tiene la capacidad de contener algo, una manera de medir su capacidad es midiendo el volumen del objeto que lo llena, es decir: la capacidad de un recipiente corresponde al volumen del cuerpo que lo llena.

La unidad para medir la capacidad es el litro, el estudio de las semejanzas y diferencias de volumen y capacidad incluye estudiar las equivalencias entre las unidades de estas dos magnitudes, la relación entre el decímetro cúbico y el litro es básica para diversos problemas reales como la construcción de empaques de cierta capacidad o de tinacos o cisternas para almacenar agua. En la sesión 2 los alumnos experimentarán que la capacidad de un cuerpo que tenga como volumen un decímetro cúbico es un litro, y de ahí podrán trabajar con otras equivalencias, por ejemplo, la capacidad de un recipiente de un metro cúbico es 1000 litros y la de un centímetro cúbico es un mililitro.

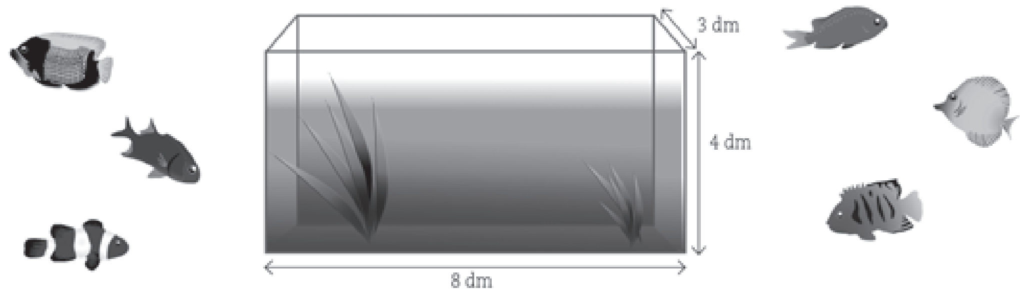
Sobre las ideas de los alumnos

El estudio de las diferentes magnitudes como la longitud, el área, el peso, la capacidad o el volumen no es una tarea sencilla para los alumnos. Lo primero que hay que lograr es que diferencien una magnitud de otra, que exploren que cuerpos con el mismo volumen pueden tener diferente peso, cuerpos de menor volumen pueden pesar más que otros con un volumen mayor, pues entra en juego el material del que están hechos, tal como se exploró en la secuencia 11. Con respecto a la capacidad es probable que los alumnos piensen que es lo mismo que el volumen porque capacidad y volumen se calculan con la misma fórmula, no obstante ser magnitudes diferentes. Es importante que los alumnos den ejemplos de cuerpos que tienen el mismo volumen, pero diferente capacidad para que logren diferenciar una magnitud de otra.

¿Cómo guío el proceso?

Es muy importante que en la puesta en común de la sesión 1 se discuta ampliamente lo que entienden los alumnos por volumen y capacidad. Para la segunda actividad, incluso se podrían conse-

1. Reúnete con un compañero para resolver este y los tres problemas siguientes. Se recomienda que haya 4 litros de agua por cada pez de cierto tipo. ¿Cuántos peces como máximo pueden estar en la siguiente pecera si se sigue esta recomendación?



guir dados que midan un centímetro por arista y, por equipos, construir las cajitas con cartulina, llenarlas con los dados y comprobar que la capacidad de las cajitas es igual al volumen del cuerpo que lo llena, en este caso al prisma que se forma con los dados. Por ejemplo, una caja que mide 5 cm por 4 cm por 2 cm se va a llenar con dados de 1 cm por arista, vemos que le caben 40 dados, entonces la capacidad de la caja es 40 cm^3, lo cual puede calcularse si se calcula, precisamente, el volumen de la caja. También es muy importante que en la sesión 2 los alumnos hagan primero una hipótesis sobre la capacidad del decímetro cúbico y luego efectivamente se lleven los recipientes a la sesión y con arroz (o alguna semilla fina como el alpiste) se llene cada recipiente y el contenido se vacíe en el decímetro cúbico para que los alumnos comprueben que un decímetro cúbico equivale a un litro.

En la puesta en común de la sesión 3 analice, junto con los alumnos, aquellos problemas que tienen varias respuestas correctas, es importante que se formen la idea de que existen problemas con respuestas correctas diferentes.

Pautas para la evaluación formativa

Identifique si los alumnos:

- Diferencian la capacidad del volumen.
- Comprenden que la capacidad de un recipiente es el volumen del cuerpo que lo llena, si comprobaron que un litro equivale a un decímetro cúbico.
- Al resolver los problemas se les dificulta la comprensión de los mismos, el manejo de las equivalencias o las operaciones que deben hacer.

¿Cómo apoyar?

Para quienes no logran distinguir entre capacidad y volumen será necesario poner más ejemplos de objetos y recipientes. Pida que imaginen una pecera hecha de un vidrio muy, muy grueso, el volumen que ocupa la pecera es mayor que el de su capacidad porque el vidrio muy grueso hace que el interior sea menor que el exterior, en este caso la capacidad es el volumen del cuerpo que cabe dentro de la pecera, pero es diferente al volumen que ocupa. Si el problema está en el manejo de equivalencias será necesario conseguir recipientes graduados (jarras, biberones, jeringas) para que los alumnos trabajen con los litros, decilitros, mililitros, etcétera.

Cuando lean un problema pida que expliquen con sus propias palabras lo que entienden y cómo podrían resolverlo, esto hará que reflexionen más sobre lo que leen.

¿Cómo extender?

Plantee la siguiente pregunta:

¿Por qué piensas que hay tanques de gas de 20 kg?, ¿se vende el gas por kilogramos?, ¿por qué no se vende de acuerdo con la capacidad (litros o metros cúbicos) del tanque?

Secuencia 35 Gráficas circulares 2 (LT, pp. 244-249)

Tiempo de realización	Dos sesiones.
Eje temático	Análisis de datos.
Tema	Estadística.
Aprendizajes esperados	Recolecta, registra y lee datos en gráficas circulares.
Intención didáctica	Que los alumnos lean y presenten datos en gráficas circulares.
Recursos audiovisuales o informáticos para el alumno	**Audiovisual** Sesión 1. *Construcción de gráficas circulares mediante hoja de cálculo* **Informático** Sesión 2. *Gráficas circulares*
Materiales de apoyo para el maestro	**Audiovisual** *Construcción de gráficas circulares* **Bibliográficos** Arteaga, P., *et al*. (2011). "Las tablas y gráficos estadísticos como objetos culturales", en *Números*, vol. 76, núm. 1, pp. 55-67. Batanero, C., *et al*. (2010). "Análisis de la complejidad semiótica de los gráficos producidos por futuros profesores de educación primaria en una tarea de comparación de dos variables estadísticas", en *Enseñanza de las Ciencias*, vol. 28, núm. 1, pp. 141-154.

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Lean, interpreten y construyan gráficas circulares.
- Sesión 2. Construyan gráficas circulares.

Acerca de...

En esta secuencia, además de continuar con la lectura, interpretación y construcción de gráficas circulares, se pretende que los alumnos evalúen críticamente los datos estadísticos que recolecten y muestren, así como a discernir los argumentos que apoyen los resultados obtenidos cuando tengan la necesidad de realizar un sondeo, una entrevista o llevar a cabo un fenómeno aleatorio, como se solicitará en la secuencia 38. También es importante que sean capaces de comunicar sus opiniones respecto a sus informaciones estadísticas.

En la secuencia 12 los estudiantes aprendieron a completar la construcción de gráficos circulares, saben que para representar un dato deben considerar a qué proporción del círculo de la

Sesión 1

Para empezar

La información estadística generalmente se presenta en tablas de frecuencia y gráficas. Las representaciones gráficas tienen el propósito de revelar visualmente el comportamiento de los datos, de ahí que sea importante seleccionar adecuadamente el tipo de gráfica que se utilizará para representar adecuadamente los datos que se quiere comunicar. ¿Cuántos tipos de gráficas estadísticas conoces? Busca algunos ejemplos y observa qué tipo de información se presenta en esas gráficas. En las dos siguientes sesiones continuarás con la elaboración, lectura e interpretación de gráficas circulares o de sectores.

gráfica corresponde y para ello pueden utilizar una tabla como la siguiente:

%	100	75	50	25
°(grados)	360	270	180	90

En esta secuencia podrán aplicar ese conocimiento y además aplicar la regla de tres para representar cualquier valor en una gráfica circular.

Sobre las ideas de los alumnos

Tal vez algunos alumnos tengan dificultades para construir gráficas circulares que impliquen:

- Representar más de tres datos, debido a que significa trazar más de tres sectores en el círculo de la gráfica, lo cual se complica. Aun cuando ya cuenten con la regla de tres para establecer la proporción entre el valor de cada dato y los 360° de una circunferencia, los alumnos todavía pueden tener problemas para plantear adecuadamente cada proporción.
- Representar valores decimales de cantidades o porcentajes debido a que pueden tener errores de cálculo al establecer la relación de proporcionalidad con la superficie que les corresponde. Por ejemplo, representar 12.5% o 33.33%.

Además, recuerde que se recomienda representar hasta cinco sectores en una gráfica circular, pues cuando hay más, son pequeños y es difícil de comprender la relación de cada dato con el todo.

¿Cómo guío el proceso?

En "Para empezar" se presentan ejemplos de gráficas que son utilizadas para comunicar diferentes tipos de datos estadísticos; es importante que se revisen para destacar las características propias de cada una y mostrar las diferencias con respecto a la gráfica circular. Si es necesario retome la definición de gráfica circular de la secuencia 12.

Al realizar las siguientes actividades de la sesión 1 deberá destacar que los datos a representarse quizá ya estén dados o en ocasiones, los tienen que recopilar al aplicar una encuesta, registrar a partir de un sondeo o como resultado de experimento, como lo sugiere la actividad 2.

En el caso de la sesión 2, se presentan diferentes datos de la población, particularmente de la población joven, con el interés de no sólo estudiar cómo construir una gráfica circular, sino de aprender algunas de sus características y evaluar la calidad de la información que se presenta, como se sugiere en la actividad 2. En este caso, se les deberá preguntar cuál es su opinión y si ellos conocen a alguien que se encuentre en cada sector.

Pautas para la evaluación formativa

Algunas actividades que dan cuenta del avance obtenido por los alumnos son:

- Elaboración de la tabla de frecuencias y gráficas circulares que presenten los resultados del sondeo realizado por los estudiantes en la actividad 2 de la sesión 1.
- Construcción de la gráfica circular de la actividad 3 de la sesión 2.
- Identificación de título, etiquetas, y otros elementos apropiados para la representación gráfica circular de la actividad 2 de la sesión 2.

¿Cómo apoyar?

Si observa que hay problemas o dificultades al leer e interpretar las gráficas de la actividad 1 de la sesión 1, sugiera elaborar una tabla de frecuencias e identificar los apellidos que corresponden con cada mapa.

Si en la primera sesión los alumnos tienen dificultades para contestar el inciso c) de la actividad 2, pida que identifiquen el apellido que es más frecuente en su grupo y en su escuela.

En el caso de la segunda sesión, si los alumnos tienen problemas en leer la información presentada en la infografía de la entrada, puede pedir que entre todos lean los datos.

¿Cómo extender?

Solicite que busquen datos en periódicos, mensajes, infografías, entre otras fuentes para identificar qué tipo de datos es conveniente representar en una gráfica circular y cuáles no.

Secuencia 36 Medidas de tendencia central 2 (LT, pp. 250-255)

Tiempo de realización	Dos sesiones.
Eje temático	Análisis de datos.
Tema	Estadística.
Aprendizaje esperado	Usa e interpreta las medidas de tendencia central (moda, media aritmética y mediana) y el rango de un conjunto de datos, y decide cuál de ellas conviene más en el análisis de los datos en cuestión.
Intención didáctica	Que los alumnos comprendan y apliquen las propiedades de la media aritmética, mediana y moda al resolver problemas.
Recursos audiovisuales o informáticos para el alumno	**Audiovisuales** Sesión 1. *¿Cómo cambia la media aritmética?* Sesión 2. *Propiedades de las medidas de tendencia central*
Materiales de apoyo para el maestro	**Audiovisual** *Uso de las TIC en las medidas de tendencia central*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Determinen que las medidas de tenencia central se encuentran entre los valores extremos del conjunto de datos.
- Sesión 2. Calculen la media, mediana y la moda.

Acerca de...

En esta secuencia se analizarán las propiedades de la media aritmética de diferentes conjuntos de datos.

Se inicia determinando las medidas de tendencia central de un conjunto de datos para identificar que las medidas se encuentran entre los valores extremos del conjunto de datos y pueden tomar valores iguales o diferentes a los que contiene el conjunto.

Después, se indaga de qué manera los valores máximos, mínimos o nulos pueden afectar o no las medidas de tendencia central.

Sobre las ideas de los alumnos

Concepciones erróneas respecto a las medidas de tendencia central:

- Dificultad en el tratamiento de valores atípicos.
- No reconocer que la media aritmética se ve afectada por valores atípicos.
- Calcular la media aritmética sin comprender su significado.

1. Forma un equipo para trabajar esta actividad y las dos que siguen.

En la tabla se muestra el precio de una lata de atún en 5 tiendas diferentes.

Tienda	1	2	3	4	5
Precio de la lata de atún	\$14.90	\$16.25	\$14.90	\$15.90	\$16.75

c) Representen la situación en la gráfica. Utilicen distintos colores para distinguir la media aritmética, la moda y la mediana de los precios registrados.

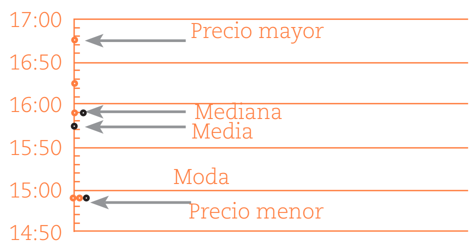
Precios de una lata de atún ($)

- Hallar la media aritmética de los valores de las frecuencias, en lugar de la media de los datos.
- Dificultad para obtener las medidas de tendencia central a partir de los gráficos.
- Confundir la mediana con la moda o la media aritmética.
- Considerar a la mediana como el valor que está en la posición central sin ordenar los datos.
- Considerar que las medidas de tendencia central pueden tomar valores fuera del rango de los datos.
- Cuando aparece un valor nulo entre los datos, tienden a omitirlo al determinar la media aritmética.
- El valor de las medidas de tendencia central debe estar contenido en los datos que se muestran, y al obtener un valor diferente pero comprendido en el rango consideran que no puede ser una de estas medidas.

¿Cómo guío el proceso?

En la sesión 1, los problemas que se abordan para analizar las propiedades de la media contienen valores numéricos. Como se observa, el valor de la media será uno que estará entre los precios mínimo y máximo de los de las latas de atún.

Si bien la media no tiene por qué coincidir con ninguno de los precios de las latas de atún, el precio no puede ser $19.00 porque esta cantidad se encuentra fuera del rango de precios. El valor del promedio tiene sentido porque la cantidad es continua y la parte decimal se interpreta como los centavos del precio, aunque hay ocasiones en que la media puede ser un valor que no tiene sentido en el contexto planteado. La gráfica que se muestra permitirá que los alumnos visualicen la posición de las diferentes medidas de tendencia central. Esto les ayudará a comprender y definir cuál medida es la más representativa del conjunto de datos.



Observe cómo la mejor medida para este conjunto de datos es la mediana porque el 50% de datos está arriba y de ella, el otro 50% por debajo.

Observe que en este caso la moda coincide con el menor precio y la mediana con el precio de $15.90, en cambio la media aritmética es $15.74 y es diferente de cualquier precio de la tabla, pero comprendido entre el dato mayor y el menor.

Además, se podrá identificar que aun cuando se omita algún valor extremo del conjunto de datos, la mediana y la moda no se verán afectadas porque no dependen de estos valores (máximo o mínimo), sino de la posición del dato y del precio que más se repite, respectivamente. En las actividades 2 y 3 grafique los precios y represéntelos con puntos. Compare y visualice cómo las medidas de tendencia central se modifican.

Sesión 2. Si el precio de una lata de atún disminuye o aumenta entonces el precio promedio disminuye o aumenta respectivamente.

En el inciso b) de la actividad 1 hay en la tabla un precio de cero pesos, al determinar el promedio de los precios, este precio no afecta el total de la suma de precios porque se mantiene igual, pero este total debe dividirse entre los cinco precios y no entre cuatro precios como algunos alumnos pueden pensar. Por lo que el valor del promedio se ve afectado.

En cambio, la mediana corresponde a un valor que queda al centro al ordenar los datos en forma creciente o decreciente y no se ve afectada. Si el tamaño del conjunto de datos es un número impar, entonces la mediana es el valor numérico que se encuentra en el centro. Si el número de datos es par, la mediana es el promedio de los valores centrales.

En los conjuntos de datos que se muestran pueden observar cuál es el dato que más se repite, y aun cuando eliminen alguno de los valores extremos del conjunto de datos, la frecuencia absoluta del dato que más se repite no se ve afectada.

Pautas para la evaluación formativa

El alumno sabe:

- Que las medidas de tendencia central se ubican entre los valores extremos y pueden ser iguales o no a alguno de los datos.
- Que los valores nulos se toman en cuenta al determinar la media aritmética.
- Que los valores mayores, menores o nulos afectan a la media aritmética, pero no a la mediana y moda.
- Interpretar el valor de la medida de tendencia central en el contexto del problema.
- Determinar todas las medidas de tendencia central para datos numéricos.

¿Cómo apoyar?

Si observa que los alumnos no saben qué hacer, sugiérales que analicen las características del conjunto de datos que se presentan. Si se agrupan en un rango menor o mayor, si el conjunto es homogéneo o heterogéneo. Si tiene valores muy grandes, muy pequeños o ceros y cuál número se repite más veces. Llévelos a reflexionar que no es necesario hacer cálculos para tener una idea de cuáles son las características del conjunto de datos y cómo serán las medidas de tendencia central de ese conjunto.

¿Cómo extender?

- Plantee problemas en los que los alumnos identifiquen las propiedades de las medidas de tendencia central en situaciones como las siguientes:

  Las tallas de playeras de un grupo de alumnos son:

  M, M, Ch, Ch, Ch, G, G, G, EX, G,
  M, M, M, Ch, M, M, M, G, G, EX

  a. Obtén la moda del conjunto de datos.
  b. ¿Se puede obtener la media y la mediana? Justifica tu respuesta.
- Conjuntos de datos en los que aparecen varios valores cero.

Estadísticas familiares

1. Reúnete con un compañero y realicen esta y la siguiente actividad.
Completen la tabla con cuatro de los precios que se registraron en la actividad 1 de la primera sesión.

a) Calculen el valor de las medidas de tendencia central. Usen calculadora.

Situación 1					
Tienda	1	2	3	4	5
Precio de la lata de atún		$100.00			

Secuencia 37 Medidas de tendencia central 3 (LT, pp. 256-261)

Tiempo de realización	Tres sesiones.
Eje temático	Análisis de datos.
Tema	Estadística.
Aprendizajes esperados	Usa e interpreta las medidas de tendencia central (moda, media aritmética y mediana) y el rango de un conjunto de datos, y decide cuál de ellas conviene más en el análisis de los datos en cuestión.
Intención didáctica	Que los alumnos analicen y determinen qué medida de tendencia central es conveniente emplear para representar a un conjunto de datos y comunicar información.
Recursos audiovisuales o informáticos para el alumno	**Audiovisuales** Sesión 1. *El Inegi* Sesión 2. *Las medidas de tendencia central* Sesión 3. *Relación entre el rango y la posible dispersión de los datos* **Informático** Sesión 3: *Las medidas de tendencia central y el rango*
Materiales de apoyo para el maestro	**Audiovisual** *El rango de un conjunto de datos*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Comparen las medidas de tendencia central para elegir cuál es la más representativa de un conjunto de datos.
- Sesión 2. Comparen las medidas de tendencia central para elegir cuál es la más representativa al comparar varios conjuntos de datos.
- Sesión 3. Determinen el rango en un conjunto de datos y definan qué tan dispersos están los datos.

Acerca de...

En esta secuencia se busca que se identifique cuál es la mejor medida estadística que representa un conjunto de datos y su variabilidad.

Se comienza obteniendo las medidas de tendencia central y rango de un conjunto de datos.

A partir de ello se analiza cómo cambian o se mantienen dichas medidas al omitir los valores extremos del conjunto de datos, para elegir la medida que mejor represente a los datos en cada caso.

Se analiza el rango porque es un valor que proporciona información sobre qué tan dispersos están los datos.

Se comparan las medidas de tendencia central de dos conjuntos de datos para identificar qué medida representa mejor a cada conjunto.

Con la información que arrojan las medidas de tendencia central y la que mejor representa al conjunto de datos se toman decisiones en el contexto del problema de acuerdo con la variable que se analiza.

Por último, se emplean recursos gráficos para comparar las medidas de tendencia central y ver cuál es la que representa mejor al conjunto de datos.

Para saber cuándo usar alguna de las medidas de tendencia central se tiene que considerar lo siguiente:

- Si el rango es mínimo, los datos son cercanos entre sí. La mejor medida que representa al conjunto de datos será la media aritmética.
- Si el rango es máximo, los datos están alejados unos de otros. La mejor medida que representa al conjunto de datos será la mediana.

- Si el conjunto de datos pertenece a una variable cualitativa nominal u ordinal, la medida más representativa será la moda.

Sobre las ideas de los alumnos

Algunas ideas que tienen los estudiantes son:

- Piensan que la mejor medida estadística que representa al conjunto de datos será la media aritmética no importando el tipo de variable que refiere el conjunto de datos ni la distribución de los datos.
- Presentan dificultades para analizar el conjunto de datos, priorizan el procedimiento de obtención del promedio.

¿Cómo guío el proceso?

En la actividad 1 de la primera sesión se muestra un conjunto de salarios con un salario muy alto, oriente al alumno a que revise las características de los salarios, después, permita que el alumno identifique la mejor medida que representa a los salarios. Propicie el análisis a partir de la representación gráfica de las medidas para que identifiquen el salario más representativo. ¿La media y la moda pueden ser la medida que mejor representa al conjunto? Para este caso el valor que mejor representa a los salarios es el de la mediana. Pida a los alumnos que observen como el salario mayor influye en el valor de la media aritmética, por lo que este valor no es representativo del conjunto.

En la actividad 2, al omitir el salario mayor, los salarios están más cerca unos de otros, por lo que el valor que mejor los representa es la media aritmética. Comparen los promedios obtenidos en las actividades 1 y 2, propicie que los alumnos analicen qué promedios se mantuvieron iguales. ¿A qué se debe esto? ¿Cuáles cambiaron? ¿Por qué? Permita que argumenten sus respuestas.

En las actividades 1 y 3 de la segunda sesión, destaque el hecho de que al obtener la mejor medida que representa al conjunto de datos se pueden tomar decisiones en torno a una situación.

En la actividad 3 la media aritmética debe calcularse sumando el valor de todos los datos y luego dividiendo ese resultado entre la cantidad de datos.

Sesión 3. Pida a los alumnos que se apoyen con la gráfica para identificar si los tiempos están o no dispersos. Que señalen los promedios para ver su ubicación y así podrán observar cuál promedio representa mejor a los tiempos registrados en cada conjunto.

Pautas para la evaluación formativa

El alumno sabe:

- Si el valor de rango es mínimo entonces la media aritmética será la mejor medida para representar al conjunto de datos.
- Si el conjunto de datos contiene valores atípicos y el valor de rango es máximo entonces la mediana será la mejor medida para representar al conjunto de datos.
- Si la variable es nominal u ordinal, y además el conjunto de datos contiene valores que no se pueden ordenar, entonces la moda será la mejor medida para representar al conjunto de datos.

¿Cómo apoyar?

Si los alumnos presentan dificultades para realizar las actividades, propicie que analicen el conjunto de datos y que, a partir de la representación gráfica, identifiquen cuál es la medida de centro que representa al conjunto de datos: recuerde la interpretación de cada medida.

Permita que usen la calculadora o la hoja electrónica de cálculo para hacer las operaciones necesarias. Puede emplear las funciones definidas para ello dentro de esta herramienta electrónica.

¿Cómo extender?

Emplee la hoja electrónica para obtener las medidas de tendencia central.

Secuencia 38 Probabilidad 2 (LT, pp. 262-267)

Tiempo de realización	Dos sesiones.
Eje temático	Análisis de datos.
Tema	Probabilidad.
Aprendizajes esperados	Realiza experimentos aleatorios y registra los resultados para un acercamiento a la probabilidad frecuencial.
Intención didáctica	Obtener la probabilidad frecuencial de un evento.
Recursos audiovisuales o informáticos para el alumno	**Audiovisuales** Sesión 1. *Probabilidad frecuencial en los juegos* Sesión 2. *Probabilidad frecuencial de un evento*
Materiales de apoyo para el maestro	**Audiovisual** *Probabilidad frecuencial*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Registren las frecuencias de los resultados obtenidos en un juego de azar.
- Sesión 2. Obtengan la probabilidad frecuencial de un evento a partir de su frecuencia relativa.

Acerca de...

En esta secuencia se realizan diferentes juegos de azar usando monedas y dados como generadores aleatorios. La intención es registrar los resultados obtenidos en diferentes rondas de cada juego, reunir los resultados y establecer la frecuencia relativa que corresponde al cociente entre la frecuencia absoluta de un evento y el número total de lanzamientos, extracciones o ensayos que se realizaron. Al inicio de cada juego se pide a los alumnos realizar una predicción de los resultados que cree que pueden ocurrir; esto corresponde al manejo de su intuición y las falsas creencias que pueden tener. En el desarrollo de las sesiones se presenta la vinculación con otros contenidos a partir de lo cual se espera que los estudiantes puedan comprender mejor qué es la probabilidad frecuencial de un evento, y relacionar este concepto, por ejemplo, con los de frecuencia absoluta, relativa, porcentaje, proporcionalidad y construcción de gráficas circulares.

Sobre las ideas de los alumnos

En la primera secuencia los estudiantes ya identificaron qué es una situación de azar y comenzaron a registrar los resultados obtenidos a partir de realizar la experiencia aleatoria. En esta secuencia se define a la frecuencia relativa como la probabilidad frecuencial de un evento. Tal vez algunos alumnos todavía tengan dificultades para aceptar que los resultados obtenidos cuando se lleva a cabo el juego y los resultados al volver a jugar pueden ser diferentes; por otra parte, también quizá les resulte difícil aceptar que pueden pasar muchas rondas hasta que otra vez se obtenga un mismo resultado; por eso precisamente es que se levanta un registro de lo que va ocurriendo en cada ocasión que se realiza una ronda o un juego.

Será importante que los alumnos aprendan a registrar y leer esos resultados y no lo consideren como un proceso mecánico, para lo cual se requiere que los anime a leer entre esos datos, por ejemplo, en el juego de la escalera se les pregunta por el número de lanzamientos de la moneda necesarios para llegar a uno de los extremos.

¿Cómo guío el proceso?

En "Para empezar" se propone un recorrido histórico del desarrollo de la Probabilidad, se considera importante hacer este tipo de reflexiones para mostrarle a los estudiantes que las matemáticas son una construcción sociocultural del conocimiento, aunque han existido hombres sobresalientes, la mayoría de los trabajos se desarrollan en un equipo de trabajo, por ejemplo, la relación que se dio a partir del intercambio de cartas entre Pascal y Fermat. Esta introducción espera despertar el interés de los estudiantes al apreciar no sólo como juegos lúdicos a los juegos de azar sino a una puerta hacia el desarrollo del pensamiento probabilístico y más allá, hacia el pensamiento estocástico. Es importante que en el juego de la escalera se entienda que es sólo la ficha la que se usa, no una por cada uno de los jugadores; se trata de que la ficha avance hacia arriba o hacia abajo dependiendo del resultado del volado. También es importante no solamente registrar el resultado que consideren los alumnos a priori, como se solicita en el inciso a) y b) de la actividad 1, sino por qué lo consideran, para conocer sus intuiciones, y también se espera que paulatinamente cambien a partir de la experiencia de estos juegos.

Para poder visualizar las tendencias de los resultados se requiere acumular el mayor número posible de experiencias; es precisamente por esa razón que se reúnen en las tablas los resultados de las rondas realizadas por las parejas o equipos para analizar lo que ocurre a nivel en la escala de todo el grupo, como se plantea en la actividad 5 de la sesión 1 y en la 3 de la sesión 2.

En la actividad 4 de la sesión 2 se propone elaborar una gráfica circular con los resultados obtenidos, ésta es una oportunidad más de vincular los conocimientos adquiridos en otras secuencias y aplicarlos, como ocurre también con las fracciones, decimales y porcentajes.

Pautas para la evaluación formativa

En esta secuencia se pretende que los estudiantes obtengan la probabilidad frecuencial, por lo tanto, algunos de los aspectos decisivos para su aprendizaje son:

- Completar correctamente la tabla de la actividad 4 de la sesión 1.
- Realizar la actividad 7 de la sesión 2.

¿Cómo apoyar?

Si al inicio observa que algunos alumnos tienen dificultades para analizar los resultados posibles, conviene elaborar un diagrama de árbol que elaboren entre todos para comprender cuáles pueden ser los resultados. Por ejemplo, se puede usar en la actividad 6 de la sesión 2, para identificar todos los resultados con los que gana Joel y con los que gana Emma.

Un aspecto que es importante analizar y no dejar pasar, es el hecho de que el valor máximo de la frecuencia relativa es 1 y el mínimo es 0. Por lo tanto, esos también son los valores máximo y mínimo de la probabilidad frecuencial; por ser la comparación de las veces que es favorable un resultado entre el total de los ensayos que se hacen.

¿Cómo extender?

Utilice variantes de las condiciones de los juegos, por ejemplo, después de realizar el juego de la actividad 6 de la sesión 1, en el que Joel gana si al lanzar los dados, coinciden los números y Emma gana cuando son diferentes. Ahora pida que ellos propongan otra combinación, como puede ser que Joel gana si un dado cae en números menores que 4 o que sumen 7.

Otra actividad que pueden realizar es elaborar las tablas de frecuencia y las gráficas circulares en la hoja electrónica de cálculo e incluso usar la función ALEATORIO para simular lanzamientos con dados.

Otro análisis que se puede hacer en el caso del juego de la escalera es contar cuántas rachas de tres águilas (o soles) salieron, ya que seguramente algunos alumnos contestaron que en tres o cuatro lanzamientos llegarían al extremo de la escalera pues la ficha está a la mitad; esa es una de las falacias que pueden tener los estudiantes y que será conveniente eliminar.

Evaluación (LT, pp. 268-269)

Con el fin de valorar algunos de los aprendizajes logrados en este tercer bloque se evaluarán avances en el trabajo individual de los alumnos.

Reactivo 1. Enteros, fracciones y decimales positivos y negativos

Con la resolución de este reactivo se podrá valorar si los alumnos han aprendido a sumar, restar y multiplicar números naturales, decimales y fraccionarios positivos y negativos.

Los alumnos deben evaluar diferentes valores de x en la expresión algebraica y determinar para qué valores se cumple que el resultado sea positivo. Los alumnos analizarán que:

- Si $x = 0$, el resultado es cero.
- Si $x > 0$, el resultado será un número negativo.
- Si $x < 0$, el resultado será un número positivo.

Los dos primeros términos de la expresión serán valores simétricos que, al sumarse, darán como resultado 0 por lo que los alumnos pueden observar que solamente deben cambiar de signo la cifra a evaluar, incluso sin hacer la operación. La dificultad puede radicar al operar números decimales y fraccionarios.

Reactivo 2. Porcentaje

Permite valorar si el alumno puede resolver problemas que impliquen obtener el porcentaje, cantidad base o tasa de una cantidad. Este problema considera una tasa mayor a 100%.

El precio del vestido con IVA incluido es de $232 y corresponde a 116%, por lo que el precio sin IVA del vestido corresponde a 100%. El valor desconocido del vestido corresponde a la cantidad base.

La interpretación errónea de los alumnos puede ser obtener el 116% del precio del vestido y considerarlo como cantidad base.

Reactivo 3. Variación lineal

Se pretende conocer si el alumno puede resolver problemas que impliquen identificar la razón de cambio, dada una expresión de la forma: $y = a\,x + b$. Los alumnos deben identificar que la razón de cambio es $a = \frac{y}{x}$ donde y será la distancia y x el tiempo. Por lo que la razón de cambio en la expresión $d = 3t + 5$ es $\frac{d}{t} = 3$.

Reactivo 4. Ecuaciones

Con este problema se podrá valorar si el alumno puede resolver una ecuación de la forma:

$$ax + b = c$$

$$2.624 + x = 31.2$$

$$x = 31.2 - 2.624$$

$$x = 28.576$$

Posibles errores o dificultades:

- Cambio de signo en la transposición de términos.
- Operar con números decimales (errores de cálculo, de olvido de llevar cifras del orden mayor o restar al número mayor el menor sin importar si está en el minuendo o sustraendo).

Reactivo 5. Sucesiones

La resolución de este problema demostrará si el alumno puede identificar la expresión algebraica que genera cualquier término de la sucesión numérica con progresión aritmética de la forma ax a partir del análisis de los primeros términos que conforman la sucesión.

En la sucesión 4, 8, 12, 16, 20... La constante es 4 y por lo tanto la regla general es $4n$.

Los errores que pueden cometer los alumnos derivan de falsas generalizaciones como:

$$n + 4,\; n - 4 \text{ y } \frac{4}{n}$$

Reactivos 6 y 7. Volumen

Mediante el reactivo 6 se valorará si los alumnos pueden resolver problemas que impliquen el cálculo del volumen y si identifican las dimensiones del prisma.

El volumen del primer prisma es:

$$bah = 10 \text{ cm}^3$$

Como cada dimensión del prisma aumenta 4 veces, entonces el volumen del nuevo prisma es:

$$V = (4b)(4a)(4h)$$
$$V = (64)bah$$

y como $bah = 10\ \text{cm}^3$, entonces
$V = (64)(10\ \text{cm}^3) = 640\ \text{cm}^3$

Los alumnos pueden suponer que, si las dimensiones aumentan el cuádruple, entonces el volumen también aumenta cuatro veces. Es posible que algunos consideren que sólo algunas de las dimensiones aumentan, por ejemplo, que el área de la base aumenta cuatro veces o confundir 4 veces con el doble. Para conocer de qué manera lo realizan, pida que escriban la manera en que lo determinaron.
Con la resolución del reactivo 7 se identificará si el alumno puede diferenciar la capacidad del volumen de un prisma y hacer su equivalencia. Este problema implica establecer la equivalencia entre el volumen de un prisma y su capacidad, considerando que 1 000 cm^3 equivalen a un litro. Otros posibles errores de los alumnos radican en emplear equivalencias erróneas.

Reactivo 8. Probabilidad
Permite saber si el alumno puede resolver problemas en donde identifique la probabilidad frecuencial de un evento. Para identificar cuál es el resultado menos probable, se debe registrar el conjunto de resultados que arroja el evento. Sea Sol denotado por (S) y Águila por (A)

S, A, A, A	S, S, A, A	A, A, A, A	A, S, A, A
S, A, A, S	S, S, A, S	A, A, A, S	A, S, A, S
S, A, S, A	S, S, S, A	A, A, S, A	A, S, S, A
S, A, S, S	S, S, S, S	A, A, S, S	A, S, S, S

Se observa que el evento que tiene sólo una posibilidad de ocurrir es cuando todas las monedas caen en águila o en sol, el resto tiene al menos dos posibilidades de ocurrir. Uno de los errores de los alumnos pueden ser considerar que los señalados con color son diferentes, sin embargo, hay cuatro posibilidades que muestran que puede caer una cara águila y el resto soles.

Reactivo 9. Porcentaje
Aquí se valora si el alumno puede resolver problemas que implican determinar el complemento del 100%, cuando responda que, si el terreno representado por el rectángulo representa 75%, falta el complemento que corresponde a 25%.

Reactivo 10. Existencia y unicidad
Permite determinar si el alumno puede resolver problemas que impliquen el trazo de cuadriláteros. Para ello deben saber que la suma de los ángulos interiores debe ser 360°. Como a partir de los ángulos dados la suman es 295°, no se puede trazar un cuadrilátero. Para tener las condiciones indispensables se deben cambiar las medidas de los ángulos de tal manera que al sumarlos den 360°. Existen un sinfín de posibilidades, por ejemplo: 60°, 80°, 100° y 120°.

Reactivo 11. Gráfica circular
La solución correcta indicará que el alumno puede resolver problemas que impliquen trazar una gráfica circular y obtener las medidas de tendencia central de un conjunto de datos. Los alumnos deben obtener el sector que corresponde a cada frecuencia y realizar el gráfico. Para obtener la media aritmética deben multiplicar cada dato por su frecuencia, sumarlos y dividirlos entre el total de datos. En este problema, el valor es de 1.81 hijos, es decir, en promedio se tiene 2 hijos por familia. La mediana corresponde al dato que esté en la ubicación 17, que corresponde a 2 hijos. La moda es 2 hijos.

Reactivo 12. Medidas de tendencia central
El reactivo pondrá de relieve la capacidad del alumno para resolver problemas que impliquen interpretar las propiedades de las medidas de tendencia central y elegir la medida que mejor represente al conjunto de datos. El alumno aplicará lo que sabe sobre la obtención de la media, la mediana, la moda y el rango del conjunto de datos. Recordará que valores muy grandes o muy pequeños afectan a la media aritmética. Que al tener un valor de cero la media disminuye su valor y esto debe ser tomado en cuenta al calcularla. Que cuando en un conjunto de datos el rango es mayor, entonces el conjunto es disperso.
La medida que representa mejor a un conjunto de datos se selecciona en función de la característica de los datos:

- Si el conjunto de datos es menos disperso, entonces la mejor medida será la media.
- Si el conjunto de datos es muy disperso la mejor medida será la mediana porque no se ve afectada por los valores mayores o menores al depender de la posición del dato.

Bibliografía

Alsina, C., *et al.* (1999). *Simétrica dinámica*, Madrid, Síntesis (Matemáticas: cultura y aprendizaje, 13).

Ávila, A. y S. García (2011). *Los decimales: más que una escritura. Reflexiones sobre su aprendizaje y enseñanza*, México, Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (Materiales para apoyar la práctica educativa).

Berlanga, R., *et al*. (2003). *Las matemáticas, perejil de todas las salsas*, México, Fondo de Cultura Económica.

Centeno Pérez, J. (1990). *Números decimales. ¿Por qué? ¿Para qué?*, Madrid, Síntesis.

Clark, D. (2002). *Evaluación constructiva en matemáticas*, México, Grupo Editorial Iberoamérica.

Córdoba, A. (2006). *La saga de los números*, Barcelona, Crítica.

Cortés, R. (2012). *Historia de la geometría euclidiana y sus aplicaciones para la enseñanza*, trabajo de finalización de grado. Universidad de Valladolid. Disponible en: http://uvadoc.uva.es/handle/10324/1716 (Consultado el 20 de junio de 2018).

García, S. (2014). *Sentido numérico*, México, Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (Materiales para apoyar la práctica educativa).

______ y O. López (2011). *La enseñanza de la geometría*, México, Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (Materiales para apoyar la práctica educativa).

Gracián, R. E. (2005). *Diccionario Auroch de matemáticas*, México, Auroch Lukambanda.

Grupo Beta (1999). *Proporcionalidad geométrica y semejanza*, Madrid, Síntesis (Matemáticas: cultura y aprendizaje, 14).

Escareño, F. (2016). *Aritmética para todos*, México, Trillas.

Itzcovich, H. (2004). "La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas: las opciones didácticas en función de las distintas concepciones", en Gvirtz, S. y M. E. de Podestá, comps., *Mejorar la escuela: acerca de la gestión y la enseñanza*, Buenos Aires, Granica.

Martínez, M., J. (2008). *Competencias básicas en matemáticas*, Madrid, Wolters Kluwer, 2008.

Mochón, S., *et al*. (2000). *Matemáticas con la hoja electrónica de cálculo*, México, Secretaría de Educación Pública (Enseñanza de las matemáticas con tecnología).

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Recopilación, organización e interpretación de datos*, México, Trillas, 2000.

Ogawa, Y. (2004). *La fórmula preferida del profesor*. Editorial ePub. Disponible en https://pitacoradeclase.files.wordpress.com/2013/01/la-formula-preferida-del-profesor-yoko-ogawa1.pdf (Consultado el 20 de junio de 2018).

Perelman, Y. (2003). *Matemáticas recreativas*, México, Planeta.

Ravela, P., *et al*. (2017). *¿Cómo mejorar la evaluación en el aula? Reflexiones y propuestas de trabajo para docentes*, Montevideo, Librería Renart.

Reid, C. (2008). *Del cero al infinito: por qué son interesantes los números*, México, Consejo Nacional para la Cultura y las Artes.

Santos, L. M. (2006). *La resolución de problemas matemáticos, Fundamentos cognitivos*, México, Trillas (Biblioteca de la Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas).

Segovia, I. (1989). *Estimación en cálculo y medida*, Madrid, Síntesis.

Secretaría de Educación Pública (2000). *Libro para el maestro. Matemáticas. Educación secundaria*, México.

______ (2011). *El manual del alumno. Competencias para el México que queremos: hacia PISA 2012*, México.

Struik, D. (1980). *Historia concisa de las matemáticas,* México, Consejo Editorial del Instituto Politécnico Nacional.

Ursini, S. (2005). *Enseñanza del álgebra elemental. Una propuesta alternativa*, México, Trillas (Biblioteca de la Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas).

PAGINAS DE INTERNET

GeoGebra. Disponible en: www.geogebra.org (Consultado el: 7 de octubre de 2017).

Instituto Nacional de Estadística y Geografía (Inegi), disponible en http://www.inegi.org.mx/default.aspx (Consultado el 20 de junio de 2017).

Roger, A., "Math is the hidden secret to understanding the world", en TED. Disponible en https://www.ted.com/talks/roger_antonsen_math_is_the_hidden_secret_to_understanding_the_world (Consultado el 3 de abril de 2018).

Anexo 1. Recortables

Esta sección contiene material recortable para apoyarle en el desarrollo de las secuencias que abordan aspectos relacionados con el volumen de prismas rectos.

Es importante que cuente con los desarrollos planos de los cuerpos geométricos que se trabajan frecuentemente durante las secuencias para que pueda modelarlos, con el fin de que los alumnos tengan una percepción concreta de tales cuerpos.

Puede recortarlos y pegarlos sobre una hoja de cartón para que tengan una mayor durabilidad.

Si usted lo considera pertinente, proporcione a los alumnos los desarrollos planos para que los reproduzcan y los armen, así podrán apreciar las características de sus caras y encontrar las relaciones entre las dimensiones de sus lados y el volumen de los cuerpos. Además, puede variar las medidas de alguno de los lados y mantener fijos los demás para que aprecien la manera en que tales cambios afectan el volumen de los cuerpos.

Los cinco recortables que aparecen al final le serán de mucha utilidad para trabajar en particular la sesión 2 de la secuencia 25, donde los alumnos podrán observar lo que sucede con el volumen de un nuevo cuerpo que se genera cuando se unen varios prismas.

Estamos convencidos de que los alumnos y usted mismo se sorprenderán ante las maravillas que se pueden apreciar mediante el manejo de material concreto en la construcción de los conceptos geométricos.