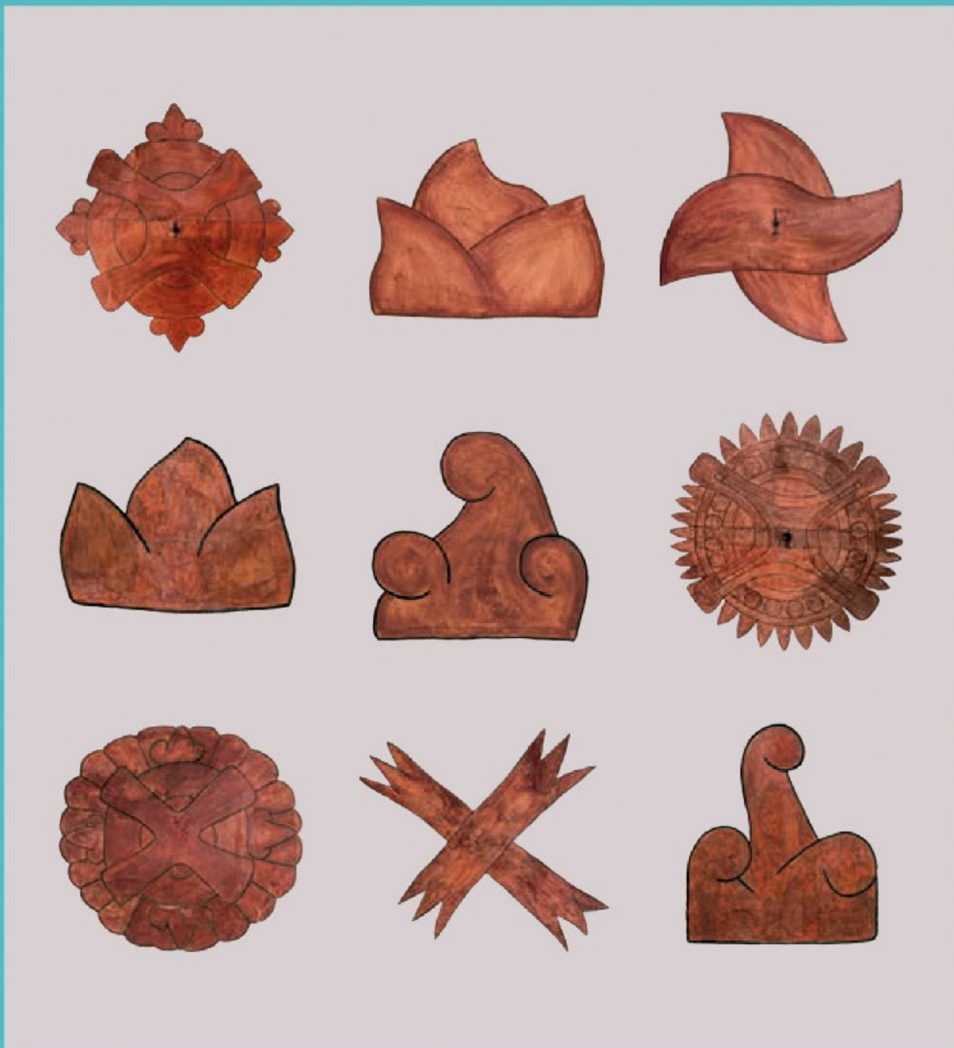
LIBRO PARA EL MAESTRO



Matemáticas

Primer grado

Bloque 2. Fractales

Bloque 3. Los mapas y las escalas

Bloque 2

Secuencia 14 Fracciones y decimales 2 (LT, pp. 98-109)

Tiempo de realización	Siete sesiones.
Eje temático	Número, álgebra y variación.
Tema	Número.
Aprendizajes esperados	Convierte fracciones decimales a notación decimal y viceversa. Aproxima algunas fracciones no decimales usando la notación decimal. Ordena fracciones y números decimales.
Intención didáctica	Que los alumnos usen números fraccionarios o decimales al resolver problemas que impliquen comparar, ordenar, identificar o comunicar cantidades en distintos contextos. Que conozcan y usen la propiedad de densidad de los números fraccionarios y decimales al intercalar números.
Recursos audiovisuales o informáticos para el alumno	**Audiovisuales** Sesión 2. *Escritura decimal y escritura mixta de una fracción impropia* Sesión 4. *De fracción común a fracción decimal y viceversa* Sesión 5. *¿Dónde lo ubico?* Sesión 6. *Propiedad de densidad* **Informático** Sesión 6. *¿Qué número hay entre estos dos?*
Materiales de apoyo para el maestro	**Audiovisual** *La propiedad de densidad en los números fraccionarios y decimales* **Bibliográfico** Ávila, A., S. García, (2008) *Los decimales: más que una escritura*. México, Publicaciones INEE.

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Relacionen números fraccionarios con sus correspondientes expresiones decimales en una escala dividida en décimos.
- Sesión 2. Relacionen números fraccionarios con sus correspondientes expresiones decimales en una recta numérica.
- Sesión 3. Usen la equivalencia y la división como recursos para determinar si una fracción es decimal o no.
- Sesión 4. Expresen, mediante fracciones y decimales la relación que guardan una parte y el todo.
- Sesión 5. Conviertan fracciones en decimales y viceversa, al tener que ubicar números en intervalos de la recta.
- Sesión 6. Conozcan la propiedad de densidad de los números fraccionarios y decimales.
- Sesión 7. Utilicen la conversión de fracciones a decimales y viceversa, al resolver diversos problemas.

Acerca de...

En esta secuencia se consolida lo que se estudió en la secuencia 3, Fracciones y decimales 1, mediante la resolución de problemas en contextos de medición y con el uso de la recta numérica.

Se estudia la propiedad de densidad en los números fraccionarios y decimales, según la cual, a diferencia de los números naturales, entre dos números fraccionarios o decimales siempre hay otro número fraccionario o decimal. Por ejemplo, $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$ está $\frac{3}{6}$. Entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{3}{6}$ está $\frac{5}{12}$

En relación con las fracciones no decimales, los alumnos sabrán expresarlas mediante decimales periódicos, que al igual que las decimales, provienen de un número fraccionario, pero, mientras los decimales finitos son exactos, los periódicos son aproximaciones.

Sobre las ideas de los alumnos

No es común que cuando se lee un número decimal se diga el orden al que corresponde la última cifra (décimos, centésimos, milésimos…) y esto hace más difícil interpretar el significado del número. Para el número 0.6, en general se dice "cero punto seis", en vez de "seis décimos". Si fuera 0.6 m, sería necesario agregar la unidad de referencia para tener una idea más clara de la cantidad, "seis décimos de metro", que significa un metro dividido en 10 partes iguales, de las cuales se consideran seis.

Cabe destacar que entender una cantidad como 0.6 m encierra varios elementos a tomar en cuenta; un error común es interpretar 0.6 m como 6 cm, cuando se trata de 60 cm. La clara comprensión de estos conceptos debe consolidarse en esta segunda secuencia sobre números fraccionarios y decimales. Actividades como las número 1 y 2 de la sesión 4, son útiles para avanzar en el significado de los números.

Por otra parte, los alumnos suelen preguntar: ¿cómo se hace para convertir un número mixto en una fracción? ¿Cuál se multiplica por cuál? Ante tales preguntas, es conveniente evitar el uso de algoritmos y pedirles que hagan la conversión de manera razonada. Si, por ejemplo, se trata de expresar con una fracción el número $5\frac{2}{3}$, se les puede apoyar con preguntas tales como, ¿cuántos tercios hay en un entero? ¿Y en cinco enteros? ¿Cuántos tercios son en total? De esta manera pueden llegar a ver que la fracción buscada es $\frac{17}{3}$, quince corresponden a los cinco enteros, más otros dos.

Al ubicar números en la recta numérica muchos estudiantes no consideran el intervalo en el que se encuentran. Por ejemplo, si el punto se encuentra entre 3 y 4, a tres marcas de una unidad dividida en cinco partes iguales, es común entre los alumnos poner $\frac{3}{5}$ en vez de $3\frac{3}{5}$. El concepto de intervalo se profundiza con actividades como las dos primeras de la sesión 5.

Muchos alumnos piensan que, por ejemplo, entre $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{5}$ o entre 0.7 y 0.8, no hay otros números. Para salvar este obstáculo hay que insistir en la noción de equivalencia, de manera que en un número como $\frac{2}{5}$ los alumnos puedan ver muchas otras representaciones del mismo, tales como $\frac{4}{10}$, $\frac{6}{15}$, etcétera.

¿Cómo guío el proceso?

Un buen punto de partida de la primera actividad de la sesión 1 es que los alumnos sepan leer la escala de los recipientes y lo que significa cada número, pídales que la lean en voz alta. Si dicen "cero punto uno", "cero punto dos" …, pídales que digan el orden que le corresponde a la última cifra a la derecha del punto. Por ejemplo, "un décimo", "dos décimos", etcétera, e insista en esto para que se acostumbren. Deben saber que un décimo es una de diez partes iguales en que se divide la unidad, en este caso, un litro.

Es probable que los alumnos no tengan dificultad para reconocer a 0.5 (cinco décimos), como $\frac{1}{2}$, pero quizá sí la tengan en la primera botella cuya marca está a la mitad entre 0.3 (tres décimos) y 0.4 (cuatro décimos). ¿Tienen claro que 0.3 = 0.30 = 0.300…? Si no, un cuadrado unidad dividido en 100 partes iguales puede ser útil para distinguir los décimos, centésimos e incluso los milésimos.

La actividad 3 está pensada para que los alumnos verifiquen sus respuestas de las actividades 1 y 2, afirmando la idea de que una fracción es una manera de expresar una división y esta operación permite encontrar la expresión decimal que corresponde.

La información que contienen algunas rectas de la sesión 2 favorece el uso de la escritura mixta, pero puede suceder que algunos alumnos usen fracciones mayores que 1 o impropias. Si esto sucede, favorezca el diálogo para que todos sepan cómo se obtuvieron las fracciones impropias. Procure que las explicaciones se orienten a convertir el entero en una fracción y luego sumarle la fracción adicional. Por ejemplo, en $2\frac{3}{8}$, el razonamiento puede ser: en 2 enteros hay 16 octavos, más 3 octavos es igual a $\frac{19}{8}$. Este tipo de reflexión será importante en la actividad 5.

Si se parte de la escritura decimal, por ejemplo, 1.25 (un entero 25 centésimos), el razonamiento es similar. Un entero equivale a 100 centésimos, más 25 centésimos, es igual a $\frac{125}{100}$, o bien, $1\frac{25}{100}$

El esquema de las tiras de la sesión 4 contribuye a consolidar la idea de fracción como parte de un todo. Se sugiere dibujar el esquema en el pizarrón o en una cartulina para llevar a cabo lo que indica la actividad 1. Hay que hacer notar que algunas fracciones son decimales y otras no.

El esquema permite realizar algunas comparaciones, por ejemplo, se puede ver que $\frac{2}{3}$ es menor que $\frac{3}{4}$ e igual que $\frac{4}{6}$. Observe cómo realizan la actividad 2, lo más probable es que tomen la medida del segmento con algún objeto y la trasladen al esquema para ver con cuál fracción coincide.

La actividad 3 permite ver que la fracción $\frac{a}{b}$ también sirve para comparar una parte representada por a con el todo representado por b. Por ejemplo, ¿qué parte es 45 cm de un metro? Dado que 1 m = 100 cm, 45 cm es $\frac{45}{100}$ de metro, que equivale a 0.45

En la sesión 5 nuevamente se aborda el trabajo en la recta numérica, con la idea de ubicar números, pero no en puntos específicos sino en ciertos "tramos" de la recta. El primer tramo señalado es de cero a dos décimos, se ubican allí todos los números que son mayores que 0 y menores que 0.2

Esta actividad obliga a expresar números de distintas maneras. Por ejemplo, para saber en qué parte se ubica $\frac{2}{5}$ fue necesario expresarlo como 0.4, así se puede ver que está entre 0.2 y 0.5, en la parte B.

En la sesión 6 se formaliza la propiedad de densidad de los números fraccionarios y decimales, según la cual, entre dos números fraccionarios o decimales cualesquiera, siempre hay un número fraccionario o decimal. La primera actividad ayuda a pensar que un segmento de recta se puede ir dividiendo a la mitad y siempre habrá un número que corresponda al punto medio. Aun cuando físicamente ya no sea posible, numéricamente se puede hacer una cantidad infinita de veces. Algunos problemas que llevan a usar esta propiedad tienen que ver con la medición. Por ejemplo, un clavo mide más de $\frac{2}{5}$ de pulgada, pero menos de $\frac{3}{5}$. ¿Cuál puede ser la medida del clavo?

La séptima sesión repasa los aspectos principales que se estudiaron en las dos secuencias que corresponden al primer aprendizaje esperado del programa. Se recomienda volver a trabajar los asuntos que no hayan quedado suficientemente claros.

Pautas para la evaluación formativa

Escriba en el pizarrón números al azar, fraccionarios, decimales, mixtos. Pida que identifiquen el mayor de todos, luego el menor, alguno que sea mayor que uno, alguno que sea menor que un medio; finalmente pida que los ordenen.

Observe si saben convertir números fraccionarios en decimales y a la inversa, si han memorizado la equivalencia de algunos números, como $0.5 = \frac{1}{2}$, $0.25 = \frac{1}{4}$

Escriba diferentes intervalos de números, por ejemplo, los representados en la recta de la actividad 1, sesión 5. Pida que encuentren números situados en esos intervalos.

¿Cómo apoyar?

Un apoyo importante consiste en insistir en la lectura correcta de los números. Otro más, en que el paso de una escritura a otra sea suficientemente claro y no se limite a memorizar una regla que se olvidará fácilmente. Un tercer punto es ayudarlos a concluir que, en general, los números pueden representarse de distintas maneras. Es necesario conocerlas porque para realizar distinto tipo de cálculos, a veces unas convienen más que otras.

¿Cómo extender?

Plantee preguntas diversas para que los alumnos piensen en las propiedades de las diferentes clases de números. Por ejemplo:

- ¿Qué número natural hay entre 26 y 30? La respuesta puede ser 27, 28, o 29.
- ¿Qué número natural hay entre 48 y 49? La respuesta es ninguno.
- ¿Qué número hay entre 4.5 y 4.6? Hay infinidad de números, uno de ellos es 4.57, que es mayor que 4.5 y menor que 4.6
- ¿Qué número hay entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$? Hay infinidad de números, uno de ellos es $\frac{3}{6}$ o $\frac{1}{2}$ o 0.5

Secuencia 15 Fracciones y decimales positivos y negativos 1 (LT, pp. 110-115)

Tiempo de realización	Tres sesiones.
Eje temático	Número, álgebra y variación.
Tema	Adición y sustracción.
Aprendizaje esperado	Resuelve problemas de suma y resta con números enteros, fracciones y decimales positivos y negativos.
Intención didáctica	Que los alumnos resuelvan problemas en situaciones que implican sumar y restar con números fraccionarios y decimales, positivos y negativos.
Recursos audiovisuales o informáticos para el alumno	**Audiovisuales** Sesión 1. *¿Cómo sumar números fraccionarios con signo?* Sesión 2. *Ahora la resta* Sesión 3. *¿Cómo sumar y restar números fraccionarios y decimales con signo?* **Informático** Sesión 3. *Algoritmo para sumar y restar números fraccionarios y decimales con signo*
Materiales de apoyo para el maestro	**Audiovisual** *Conceptos erróneos usuales de la suma y resta de fracciones y decimales positivos y negativos*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Resuelvan problemas o situaciones que implican una adición con números fraccionarios positivos y negativos.
- Sesión 2. Resuelvan problemas que implican una sustracción con números fraccionarios positivos y negativos.
- Sesión 3. Resuelvan problemas que implican una adición o una sustracción de números decimales positivos y negativos.

Acerca de...

En las secuencias anteriores relativas a este Aprendizaje esperado se analizó la ubicación, comparación y representación de números posi-

Suma de fracciones positivas y negativas

1. De manera individual analiza la situación y contesta las preguntas.

El depósito de leche de una compañía pasteurizadora recibe y vende leche. Los números de la tabla indican la cantidad que recibe o vende, con relación a la capacidad de litros que puede almacenar.

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
$\frac{7}{8}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

tivos y negativos por medio de recursos gráficos; posteriormente, se operó con ellos y se formalizó el algoritmo para sumar y restar números enteros; dándole significado a partir del estudio del valor absoluto y los números simétricos. Ahora los alumnos se enfrentarán a problemas en los que las cantidades son fracciones y números decimales positivos y negativos. Se presentan contextos donde los números naturales ya no son suficientes y se debe hacer uso de este tipo de números, tema que en esta secuencia se aborda:

- Suma de fracciones positivas y negativas, donde se enfrenta a los alumnos a situaciones en las que buscan diferentes estrategias para sumar y restar estos números hasta llegar a la regla ya antes estudiada: para los sumandos con signos iguales (sumar los valores absolutos y conservar el signo de los sumandos) y para los sumandos con signos diferentes (restar los valores absolutos y poner en la suma el signo del número con mayor valor absoluto). Esta situación implica además referentes previos sobre la suma de fracciones con diferente denominador.
- Restar fracciones positivas y negativas a través de situaciones que exigen reflexionar el significado de “restar un número positivo” o “restar un número negativo” si se tiene una cantidad positiva o negativa; para concluir que restar un número negativo equivale a sumar su simétrico.
- Sumar y restar números decimales positivos y negativos, que requiere, además de aplicar la regla de los signos, usar los referentes de ubicación del punto decimal al realizar sumas o restas.

Es importante que los alumnos conciban estas reglas como universales, en tanto se aplican para cualquier tipo de números positivos y negativos, sean enteros, fracciones o decimales.

Sobre las ideas de los alumnos

Al integrar las reglas para sumar y restar fracciones y decimales con las reglas de los signos es común que los alumnos se respeten una de ellas olvidando la otra. Algunos de los errores o nociones equivocadas que tienen los alumnos en estas temáticas son:

- Percibir siempre la fracción $\frac{a}{b}$ como una parte a de un todo b. Lo que ocasiona que no se comprenda el significado de las fracciones negativas. El signo negativo (dado a toda la fracción) no “cabe” en una relación parte-todo.
- Concebir a las fracciones y los decimales negativos sin ubicación en la recta numérica o en alguna otra representación. En la mayoría de los casos, los enteros aparecen identificados en una recta numérica (porque ésta ha sido graduada en esos términos y se escriben o rotulan) más no las fracciones y los decimales.
- Errores de equivalencia de fracciones entre sí y entre fracciones y decimales.
- Equivocaciones al aplicar los algoritmos de suma y resta con fracciones de diferente denominador.
- Fallas en la simplificación de fracciones.
- Los alumnos saben que entre los números naturales, el que tiene más cifras es mayor que otro con menos cifras, por lo que extienden esta propiedad de los naturales a los números decimales y consideran, por ejemplo, que 0.3 es menor que 0.129, o que 0.478 es mayor que 0.6

Estas situaciones son una oportunidad de aprendizaje en tanto el maestro convierta los

3. Completen las siguientes sumas de números fraccionarios con signo.

$\frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{5}{15} + \_\_\_ = \_\_\_$

$\left(-\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{1}{4}\right) = \left(-\frac{8}{12}\right) + \left(-\frac{3}{12}\right) = \_\_\_$

$\left(\frac{1}{7}\right) + \left(-\frac{3}{9}\right) = \left(\frac{9}{63}\right) + \left(-\frac{21}{63}\right) = \_\_\_$

$\left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{2}{11}\right) = \left(-\frac{11}{22}\right) + \left(-\frac{4}{11}\right) = \_\_\_$

errores en una fuente de reflexión en torno a la razón por la cual los resultados no tienen consistencia lógica a partir del contexto usado en los problemas.

¿Cómo guío el proceso?

Respecto de la sesión 1, cuando los alumnos resuelvan la situación de la compañía pasteurizadora, analizarán dos procedimientos para la misma pregunta del inciso c). Asegúrese que comprendan cada uno de ellos con preguntas como: ¿por qué en el primer procedimiento se hace la operación $\frac{7}{8} - \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$?, ¿de dónde resulta $\frac{5}{8}$?

Es importante que los alumnos adviertan que se llega al mismo resultado por cualquiera de los procedimientos.

Si los alumnos no pueden realizar las operaciones de la actividad 3, no les indique cómo hacerlo y aproveche la actividad 4, de cierre, para confrontar lo que hicieron y para formalizar la información de la tabla. Solicite a algunos alumnos que escriban para todos sus compañeros sus procedimientos y observen si se cumplen las reglas de los algoritmos. Es oportuno también que revisen el procedimiento para obtener el común denominador y el uso de fracciones equivalentes.

En la sesión 2 se usa como contexto calcular el valor de una caja con base en el valor de las tarjetas que contiene. Lo anterior implicará que el alumno realice sumas y restas con fracciones comunes. En caso de que tengan nociones y procedimientos equivocados, por ejemplo, que consideren que como resultado de la resta de un número negativo a otro negativo, la cantidad disminuye: $\left[-\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{2}{4}\right]$; aproveche la confrontación para, con ayuda de todos los alumnos, construir la forma de resolver estas operaciones, que está sintetizada en el inciso d) de la actividad 4: Restar equivale a sumar el opuesto. Al monitorear el trabajo de los alumnos, ponga atención en sus errores; observe cuáles son sus intuiciones al llenar el cuadro de la actividad 2, y cuando contrasten realizando la operación del cuadro de la actividad 3, observe si operan siguiendo las reglas.

Otro aspecto al que se debe poner atención es a la idea errónea de que el aumento o disminución en el valor (ejercicio de la caja en la sesión 2) depende más de la fracción que de su signo. Los alumnos deben concluir que cualquier número positivo es mayor que cualquier número negativo; y viceversa, cualquier número negativo es menor que cualquier número positivo. El contexto de sumar y restar números debe generar lo anterior.

Es importante que el alumno comience a validar sus concepciones e ideas en torno al significado de restar un número negativo, que es equivalente a sumar un positivo.

Por último, en esta sesión guíe la discusión para que las preguntas de la actividad 5 sean claras y comprendidas por todos los alumnos. De ser necesario, haga referencia a las secuencias anteriores donde se estudió el valor absoluto y los números opuestos o simétricos.

En la sesión 3, es posible que en los procedimientos para sumar y restar decimales los alumnos conviertan los números a fracciones, puesto que es lo que estudiaron en la sesión anterior; lo cual es conveniente para relacionar ambos saberes.

En el cuadro de la actividad 1 observe si los alumnos combinan la regla para operar con números con signo, con la regla para operar con el punto decimal. Es importante visualizar dónde están sus problemas de aprendizaje para intervenir de manera directa.

En la actividad 2 observe con atención cómo resuelven la tercera línea del cuadro; donde a un negativo se le resta otro negativo:

$$(-1.006) - (-29.1) = 28.094$$

Una conclusión importante es que la variación entre dos temperaturas siempre es un número positivo, puesto que es la distancia entre ellos.

Pautas para la evaluación formativa

Use las siguientes estrategias de evaluación para cumplir con las intenciones didácticas.

- En la sesión 1 observe el procedimiento que usan los alumnos para la resolución de las operaciones del cuadro de la actividad 3. El procedimiento se complementa con los pasos siguientes:

✓ Encontrar el común denominador.
✓ Encontrar fracciones equivalentes.
✓ Decidir el procedimiento para operar con los valores absolutos (sumar o restar los numeradores).
✓ Decidir el signo de la suma, de acuerdo con el algoritmo.

- En la sesión 2 verifique la actividad 3, tendrán que comprobar por medio de sumas y restas sus hipótesis de cómo la caja aumenta o disminuye su valor al agregar o quitar fracciones positivas o negativas. La parte operatoria es importante, sin embargo, la noción que se debe rescatar es la idea central de que restar un negativo, equivale a sumar el simétrico del sustraendo (su opuesto). Una rúbrica de evaluación puede incluir lo siguiente:
  ✓ Planteamiento de la suma o resta.
  ✓ Transformación de la resta en una suma.
  ✓ Operar la suma con los aspectos definidos en la sesión 1.

En la sesión 3 considere observar las operaciones de la actividad 4, donde se combinan sumas y restas usando decimales positivos y negativos. Una vez más observe si los algoritmos se usan adecuadamente, sobre todo la transformación de una resta (intermedia o final) en una suma del opuesto del sustraendo.

Aun cuando los ejercicios y la parte operatoria tienen en sí mismos un valor en la evaluación; complemente su resultado con las explicaciones y justificaciones que realicen los alumnos al resolver los problemas.

¿Cómo apoyar?

Para contribuir en la comprensión de los alumnos, use las siguientes actividades alternativas:

En el problema de la compañía pasteurizadora (sesión 1) se pueden proponer todas las fracciones con igual denominador para que el alumno centre su atención en el manejo de los signos.

Antes de que resuelvan las operaciones de la actividad 3 de la sesión 1, proponga otras con igual denominador.

Realice de manera grupal el ejercicio de la caja, primero usando números enteros positivos y negativos; luego siguiendo las instrucciones del libro de texto.

Proponga ejercicios previos a la realización de las sumas y restas combinadas de la actividad 4 de la sesión 3; primero con enteros, luego con el mismo número de cifras decimales en los números usados; y por último los ejercicios propuestos en el libro.

¿Cómo extender?

En el caso de alumnos que tengan facilidad para operar y resolver los problemas, encuentre variantes a los mismos de acuerdo con lo siguiente:

- Que las adiciones tengan más de 3 sumandos.
- Combinar las operaciones.
- Usar otros denominadores.

También puede proponer algunos problemas donde se combinen el tipo de números (fracciones y decimales), tanto positivos como negativos; aun cuando en una próxima secuencia se analizará este tipo de problemas.

4. Realiza de manera individual las siguientes operaciones en tu cuaderno. Aplica correctamente los algoritmos estudiados.

(–00.45) + (1.1) – (–1.0002) =	(3.01) – (0.04) + (–0.004) =
(5.0001) – (0.3) – (0.43) =	(–0.0004) + (–1.2) + (0.34) =
(–0.003) – (1.99) + (–22) =	(0.0034) – (–22.03) – (4.1) =

Secuencia 16 Jerarquía de operaciones 2 (LT, pp. 116-121)

Tiempo de realización	Cuatro sesiones.
Eje temático	Número, álgebra y variación.
Tema	Multiplicación y división.
Aprendizajes esperados	Determina y usa la jerarquía de operaciones y los paréntesis en operaciones con números naturales, enteros y decimales (para multiplicación y división, sólo números positivos).
Intención didáctica	Que los alumnos reafirmen sus conocimientos sobre jerarquía de operaciones y uso de paréntesis con operaciones con números naturales, enteros y decimales. Asimismo, que apliquen la jerarquía de operaciones y uso de paréntesis con expresiones algebraicas.
Materiales para el alumno	Sesiones 1 y 2. Hojas blancas tamaño carta (una por equipo).
Recursos audiovisuales o informáticos para el alumno	**Audiovisuales** Sesión 3. *¡Jerarquía por aquí y por allá!* Sesión 4. *¿Jerarquía en expresiones algebraicas?* **Informático** Sesión 4. *Jerarquizando ando*
Materiales de apoyo para el maestro	**Audiovisual** *La jerarquía de operaciones en el aula*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Apliquen la jerarquía de operaciones y el uso de paréntesis al realizar cálculos con decimales.
- Sesión 2. Apliquen la jerarquía de operaciones y el uso de paréntesis al realizar cálculos con fracciones.
- Sesión 3. Apliquen la jerarquía y el uso de paréntesis al realizar cálculos con números positivos y negativos.
- Sesión 4. Usen la jerarquía de operaciones y los paréntesis al traducir enunciados en lenguaje verbal a lenguaje algebraico.

Acerca de...

Los alumnos estudiaron la jerarquía de operaciones en la secuencia 4, ahora se trata de reafirmar lo aprendido y de aplicarlo a las operaciones de suma y resta de números positivos y negativos y a expresiones algebraicas.

Manos a la obra

Un juego con decimales

1. Con dobleces divide una hoja tamaño carta en octavos. Anota los siguientes números. Después recórtalos; son las cartas para un juego.

2	1	0.25	1.5
0.5	0.1	10.0	0.2

3. Las siguientes son operaciones que anotaron tres alumnos en una ronda del juego. Completen la tabla.

Alumno	Operaciones	Resultado
Paty	$0.2 \times 2 + 0.25 \times 0.1$	
Lilia	$2 \div 0.1 \div 0.2 \div 0.25$	
José	$2 \times 0.1 \times 0.2 \times 0.25$	

¿Quién ganó? ______________

En las dos primeras sesiones los alumnos jugarán haciendo cadenas de operaciones tratando de obtener el resultado mayor. Al mismo tiempo que reafirman la jerarquía de operaciones, desarrollarán su sentido numérico con los decimales y las fracciones, de esta forma podrán darse cuenta de que al dividir entre un número decimal menor que 1 el resultado será mayor que si multiplicaran ambos; esto, a su vez, contribuye a profundizar la noción que los alumnos tienen sobre este tipo de números y sus operaciones. En el juego de la segunda sesión se excluye la división de fracciones porque esta operación se estudiará en segundo grado.

En matemáticas es importante emplear diferentes representaciones de una misma situación; es por ello que en la tercera sesión tendrán que expresar en lenguaje numérico (usando jerarquía de operaciones y paréntesis) situaciones geométricas o expresadas en lenguaje verbal y en la sesión cuatro harán lo mismo en lenguaje algebraico.

Sobre las ideas de los alumnos

Una idea muy arraigada en los alumnos, es creer que las operaciones se resuelven de izquierda a derecha en el orden en que aparecen. Por ejemplo, en:

$$7 + 5 \times 2 =$$

Creen que primero se suma 7 + 5 y que el 12 se multiplica por 2. No obstante que en la secuencia 4 ya estudiaron la jerarquía de operaciones, es probable que algunos alumnos sigan cometiendo errores de este tipo.

También es probable que haya alumnos que no usen paréntesis cuando deben hacerlo para indicar el orden en que se deben realizar las operaciones. Por ejemplo, quizá al expresar el área de un cuadrado cuyo lado es $m - 3$, anoten erróneamente:

$$m - 3\,(m - 3)$$

En lugar de:

$$(m - 3)\,(m - 3)$$

O bien, que crean que tienen que usar paréntesis donde no es necesario. Por ejemplo, en $4 - 5 \times 6$ anoten:

$$4 - (5 \times 6)$$

Poner paréntesis en esta expresión no es erróneo, pero sí es innecesario.

¿Cómo guío el proceso?

Asegúrese de que los alumnos comprenden las instrucciones de los juegos. Escuche y observe constantemente el trabajo que realizan los equipos para asegurarse de que aplican correctamente la jerarquía de las operaciones (primero hacen multiplicaciones y divisiones, luego sumas y restas) y que usan los paréntesis cuando son necesarios y no los usan cuando no se necesitan.

Si observa que durante el juego en equipo algún alumno resuelve mal la operación propuesta y los demás no se dan cuenta, puede pedirles que verifiquen con su calculadora el resultado. Ahora bien, hay que tener cuidado de que la calculadora respete la jerarquía de operaciones pues algunas no lo hacen; las calculadoras científicas sí respetan la jerarquía, mientras que las aritméticas, en su mayoría no lo hacen. En el caso de las calculadoras que vienen programadas en los teléfonos celulares también se dan estos dos casos. Es importante tener esto en cuenta al trabajar la jerarquía de las operaciones con calculadora.

También podrán usar la calculadora en el juego de la primera sesión cuando propongan alguna división entre un número con punto decimal (caso que estudiará en la secuencia 17).

Se sugiere que cuando esté observando el trabajo de los alumnos anote aquellas operaciones que considere interesantes para la puesta en común que se haga al finalizar el juego, por ejemplo: errores que cometen varias veces, uso innecesario de paréntesis, casos en que lograron obtener un resultado considerablemente bajo o alto, etcétera. No es pertinente que evidencie a los alumnos que cometieron los errores, sólo comente el error sin mencionar quién lo cometió.

Durante las sesiones 3 y 4, si nota que algunos subrayan expresiones equivocadas, no los corrija y mucho menos les diga cuál es la respuesta correcta, si en la puesta en común ya todos tienen las mismas respuestas correctas, la discusión se empobrece. La idea es que permita que subrayen la respuesta que consideran correcta y en la puesta en común se dialogue en torno a las diferencias y cómo llegaron a ellas.

Pautas para la evaluación formativa

Durante el trabajo de las sesiones observe si los alumnos:

Usan correctamente la jerarquía de operaciones: resuelven primero multiplicaciones y divisiones, después sumas y restas; si hay dos operaciones con la misma jerarquía resuelven primero la que está a la izquierda.

Usan correctamente los paréntesis: hacerlo cuando es necesario y no usarlos cuando no se requieren.

Resuelven correctamente las operaciones. Observe si saben sumar, restar y multiplicar fracciones y decimales y las divisiones que han estudiado anteriormente. Es probable que hayan comprendido la jerarquía y el uso de paréntesis, pero que el problema esté en el manejo de las fracciones y los decimales.

¿Cómo apoyar?

No obstante que los números elegidos para los juegos son relativamente fáciles de manejar (decimales y fracciones de uso frecuente: medios, cuartos, octavos), es posible que haya problemas al operar las fracciones y los decimales. En este caso puede repasar con los alumnos las operaciones con estos números, ya que de otra manera no se puede avanzar. Otra estrategia de tipo didáctico es incluir en cada equipo al menos un estudiante que usted observe trabaja bien con decimales y fracciones, este alumno podrá ser monitor en el equipo para validar las respuestas y explicar cuando note que alguno está resolviendo mal una operación.

¿Cómo extender?

La siguiente cadena de operaciones da como resultado uno:

$$4 + \frac{4}{4} - 4 = 1$$

Proponga que con cuatro cuatros y las operaciones básicas formen los números del 2 al 9.

2. ¿Cuál expresión corresponde al área del cuadrado verde?

$m - 3(m - 3)$ $(m - 3)(m - 3)$ $(m - 3)\ m - 3$

Secuencia 17 Multiplicación y división 3 (LT, pp. 122-129)

Tiempo de realización	Cinco sesiones.
Eje temático	Número, álgebra y variación.
Tema	Multiplicación y división.
Aprendizajes esperados	Resuelve problemas de multiplicación con fracciones y decimales y de división con decimales.
Intención didáctica	Que los alumnos resuelvan problemas que implican dividir números decimales donde el dividendo o el divisor tienen punto decimal. Asimismo, que profundicen en sus conocimientos sobre la división de números decimales.
Recursos audiovisuales o informáticos para el alumno	**Audiovisuales** Sesión 1. *Sumar o restar para dividir* Sesión 4. *Divisiones con el mismo resultado* Sesión 5. *El algoritmo de la división para números decimales* **Informáticos** Sesión 4. *Recorrer el punto y dividir* Sesión 5. *¡A seguir dividiendo!*
Materiales de apoyo para el maestro	**Audiovisual** *La enseñanza de la multiplicación y división de números decimales* **Bibliográfico** Ávila, A. y S. García, (2008). *Los decimales, más que una escritura*. México, INEE (Disponible en https://www.inee.edu.mx/wp-content/uploads/2019/01/PID402.pdf).

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Resuelvan problemas que implican división de números decimales con procedimientos propios.
- Sesión 2. Resuelvan problemas que impliquen una división cuyo divisor sea un número natural y el cociente tenga punto decimal, usando primero procedimientos propios y después el algoritmo convencional de la división.
- Sesión 3. Construyan técnicas para multiplicar mentalmente por 10, 100, 1 000, etcétera, números con o sin punto decimal. Esto servirá como antecedente para abordar la división cuyo divisor tenga punto decimal.
- Sesión 4. Resuelvan problemas que impliquen divisiones cuyo divisor tenga punto decimal, usando inicialmente procedimientos propios y transformando la división en otra equivalente sin parte decimal en el divisor.

2. Escriban en cada caso para cuántos vasos alcanza la cantidad de agua que hay en la botella.

- Sesión 5. Profundicen en el conocimiento sobre la división con números decimales. Conozcan el algoritmo convencional para resolver divisiones con divisor decimal.

Acerca de...

Esta secuencia está dividida en 5 sesiones. Es una recomendación didáctica que al trabajar con las operaciones básicas. los alumnos se enfrenten a los problemas que implican dichas operaciones, aun cuando no sepan el algoritmo convencional. Es por ello que en la primera sesión los alumnos resolverán problemas en los que el divisor es un número con punto decimal, caso que no han estudiado en la primaria, pero que los saberes previos permiten abordar. En la segunda sesión se trabaja con problemas donde el dividendo es un número decimal, pero el divisor no; si bien este caso sí es considerado en el programa de primaria, se introduce en la lección como un recordatorio de los saberes previos de los alumnos, incluyendo el algoritmo convencional.

Para comprender la división cuando el divisor es con punto decimal, es importante que los alumnos sepan multiplicar rápidamente un número decimal por 10, 100 o 1 000, es por ello que la tercera sesión se dedica a construir la regla para multiplicar por estos números y es lo que sirve como antecedente para comprender el algoritmo de la división cuando el divisor tiene punto decimal.

El estudio de la división de números decimales no quedaría completo si los alumnos no exploran la idea de que dividir entre un número equivale a multiplicar por su recíproco, si bien no se menciona así en el libro del alumno (porque no es necesario) se espera que se den cuenta de que, por ejemplo, dividir entre 0.5 equivale a multiplicar por 2. Este tipo de saberes desarrolla el sentido numérico de los alumnos al ofrecer estrategias de cálculo mental.

Sobre las ideas de los alumnos

Debido a que los alumnos notarán que la secuencia se llama "Multiplicación y división" y dadas las creencias que probablemente tengan, seguramente recurrirán a estas operaciones para resolver los problemas que se plantean. Es importante que promueva en sus alumnos que no necesariamente tienen que resolver los problemas de la secuencia con una multiplicación o una división, invítelos a que prueben otros procedimientos.

Otra creencia común entre los alumnos es pensar que, al hacer una división, el resultado siempre va a ser menor que el dividendo, en esta secuencia se darán cuenta de que no siempre es así, por ejemplo, al dividir 8 entre 0.5 el resultado es 16.

Es probable que algunos alumnos asocien la división con los problemas de reparto, si bien esto es parcialmente verdadero, se darán cuenta de que hay problemas de división en los que el reparto no tiene sentido, por ejemplo, dividir 8 entre 0.5 no puede interpretarse como reparto (¿se podrían repartir 8 manzanas entre 0.5 niños?). Al estudiar esta secuencia podrán dar respuesta a la pregunta, ¿cuántas veces cabe un número en otro? tiene más sentido cuando se abordan problemas de división entre un número con punto decimal, así 8 entre 0.5 puede interpretarse como: ¿cuántas veces cabe 0.5 en el 8?, cabe 16 veces.

¿Cómo guío el proceso?

Una recomendación general para toda la secuencia es que sólo permita el uso de la calculadora para verificar resultados que hayan encontrado por otros procedimientos. La razón es que en esta secuencia se pretende que los alumnos desarrollen su sentido numérico al trabajar con números decimales y profundicen en el conocimiento de este tipo de números.

Verifique que los alumnos resuelvan los problemas de la primera sesión con procedimientos propios, pues no es necesario ni recomendable que usted sugiera que los resuelvan con una división. Los procedimientos que pueden emplear los alumnos son: sumas de sumandos iguales, restas sucesivas y búsqueda del factor faltante en una multiplicación. Por ejemplo, para saber cuántas jarras de 1.75 L se pueden llenar con el agua del garrafón de 5 litros, los alumnos pueden recurrir a:

- *Sumas de sumandos iguales.* Sumar
  $$1.75 + 1.75 = 3.50 \text{ L},$$
  se llenan 2 jarras y sobran 1.50 L
- *Restas sucesivas.* Se llena una jarra y esto numéricamente equivale a restar 5 − 1.75, quedan 3.25 L. Se llena una segunda jarra:
  $$3.25 - 1.75 = 1.50 \text{ L}.$$
  Lo que resta ya no alcanza para más jarras, entonces se llenaron 2 jarras y sobraron 1.5 litros de agua.
- *Búsqueda del factor faltante* en una multiplicación. Como en el bloque 1 estudiaron la multiplicación de decimales, pueden buscar un número que multiplicado por 1.75 dé 5, o lo más cercano a 5.
  $$1.75 \times 2 = 3.50$$
  Se llenan 2 jarras (factor faltante) y 5 − 3.50 es lo que quedó en la jarra (1.50 L).
  Si llegara a surgir el algoritmo convencional 5 entre 1.75 se aceptará como un procedimiento más, que no es el único ni necesariamente es el mejor.

En los problemas de la sesión 2 (reparto de la leche en vasos y cortar listones para hacer moños) se trabaja la división de un número decimal entre uno natural, debido a que este caso ya lo estudiaron en primaria es muy probable que surja el algoritmo convencional, esto es permisible y en la puesta en común puede comentarse. También es probable que surjan fracciones como respuesta en lugar de decimales, por ejemplo, para repartir un litro de leche en cuatro vasos es más común que la respuesta sea $\frac{1}{4}$ de litro que 0.25 litros, durante toda la secuencia aproveche el surgimiento de fracciones y decimales para seguir trabajando la equivalencia entre este tipo de números.

En la sesión 3 se trabaja un aspecto que servirá de apoyo para construir el algoritmo de la división cuando tiene como divisor un número decimal, procure que al finalizar el trabajo de esta sesión los alumnos multipliquen mentalmente por 10, 100 y 1 000.

Si bien se espera que en las sesiones 4 y 5 los alumnos construyan el algoritmo de la división para dividir entre un número decimal, es importante que no todas las divisiones de este tipo se resuelvan con el algoritmo; promueva el cálculo mental en los casos en que sea posible, por ejemplo, para dividir entre 0.5 no es necesario el algoritmo pues, como se mencionó anteriormente, dividir entre 0.5 equivale a multiplicar por 2. Es importante promover este tipo de estrategias en los alumnos.

Pautas para la evaluación formativa

En todos los casos, observe si los alumnos pueden manejar números con punto decimal y qué es lo que realizan al efectuar las operaciones. Por ejemplo, un garrafón de 20 L y jarras de 2 litros, de 3 L, etcétera.

Cuando los alumnos hayan comprendido la relación entre los datos puede introducir números con punto decimal pero que sean sencillos de sumar o multiplicar, por ejemplo 0.5, 1.5, 2.5, etcétera.

¿Cómo apoyar?

Observe si los alumnos tienen dificultades para el manejo de las fracciones o los decimales, es probable que entiendan los problemas, pero no dominen aún las operaciones con estos números y por ello no puedan resolverlos.

Proponga problemas como, por ejemplo, cuántas jarras de 2 L o de 3 L pueden llenarse con un garrafón de 20 L, donde tienen que dividir números naturales, y, cuando los alumnos hayan comprendido la relación entre los datos, puede introducir números con punto decimal pero que sean sencillos de sumar o multiplicar, por ejemplo 0.5, 1.5, 2.5, etcétera.

¿Cómo extender?

Haga preguntas de reflexión a los alumnos, por ejemplo:

- ¿Por qué dividir entre 0.5 equivale a multiplicar por 2?
- ¿Por qué dividir entre 0.1 equivale a multiplicar por 10?
- ¿Cómo puedo resolver la división 2 entre 0.001 sin hacer división?, ¿la puedo resolver con una multiplicación?, ¿por cuánto tengo que multiplicar el 2?

Secuencia 18 Variación proporcional directa 2 (LT, pp. 130-139)

Tiempo de realización	Seis sesiones.
Eje temático	Número, álgebra y variación.
Tema	Proporcionalidad.
Aprendizajes esperados	Calcula valores faltantes en problemas de proporcionalidad directa, con constante natural, fracción o decimal (incluyendo tablas de variación).
Intención didáctica	Que los alumnos resuelvan problemas de proporcionalidad directa con procedimientos propios y con la regla de tres. Asimismo, que distingan tablas de variación proporcional directa de otras que no lo son.
Recursos audiovisuales o informáticos para el alumno	**Audiovisuales** Sesión 1. *Dibujos a escala* Sesión 2. *Constante de proporcionalidad* Sesión 6. *La regla de tres* **Informático** Sesión 3. *Conversión de monedas*
Materiales de apoyo para el maestro	**Audiovisual** *¿Cómo trabajar la regla de tres en clase?* **Bibliográfico** *Block, D., et al.* (2010). *¿Al doble le toca el doble? La enseñanza de la proporcionalidad en la educación básica.* México, Ediciones SM (somos maestros).

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Resuelvan problemas de proporcionalidad directa que involucran cantidades enteras y la constante es una fracción no unitaria (numerador diferente a uno).
- Sesión 2. Resuelvan problemas de proporcionalidad directa que involucran cantidades fraccionarias y la constante es una fracción no unitaria (numerador diferente a uno).
- Sesión 3. Resuelvan problemas de proporcionalidad directa que involucran cantidades decimales y la constante es un número decimal.
- Sesión 4. Identifiquen relaciones de proporcionalidad directa en contextos de perímetros y áreas.
- Sesión 5. Identifiquen la igualdad de productos cruzados en cantidades que presentan variación directamente proporcional.
- Sesión 6. Resuelvan problemas de proporcionalidad directa usando la regla de tres.

Acerca de...

Desde los últimos grados de la escuela primaria y en la secuencia 7, los alumnos se han enfrentado a diversos problemas de proporcionalidad que han resuelto con diversos procedimientos como razones internas, sumas término a término, valor unitario y constante de proporcionalidad, y lo que ha cambiado es el tipo de números que están involucrados en los problemas. En la primaria fueron constantes de proporcionalidad naturales y en la secuencia 7 se inició con constantes fraccionarias que probablemente los alumnos expresaban con decimales. En las primeras 4 sesiones de esta secuencia se continúa el trabajo con problemas de valor faltante, ahora extendidos a otros contextos como las escalas, los cambios de moneda, el perímetro y el área de figuras. Así mismo se amplía el tipo de números al trabajar con fracciones y decimales, no sólo en las constantes sino también en las cantidades involucradas. En la sesión 5 se exploran los productos cruzados en cantidades que varían proporcionalmente como un antecedente para abordar la regla de tres en la sesión 6.

Sobre las ideas de los alumnos

Es común que en los problemas de escalas que se abordarán en la sesión 1, los alumnos empleen un razonamiento aditivo. Por ejemplo, al pedir que los lados que en el original miden 4 unidades en la copia a escala midan 3 unidades, es probable que los alumnos resten 1 a todas las medidas de la figura. La actividad por sí misma retroalimenta a los alumnos porque con esta estrategia no obtienen el dibujo a escala.

¿Cómo guío el proceso?

Permita que resuelvan los problemas con procedimientos que se describieron en la secuencia 7, a continuación se describen brevemente con ejemplos tomados de las sesiones de esta secuencia.

Razones internas. Si un segmento en el original mide 5 y en la copia mide 2, ¿cuánto medirá en la copia un segmento que en el original mide 1? Este problema corresponde a la segunda tabla de la sesión 1.

	Medidas en el original	Medidas en la copia	
	5	1	
$\times \frac{2}{5}$	2	$\frac{2}{5}$	$\times \frac{2}{5}$

Suma término a término. Para preparar una mezcla de leche se deben poner 5 onzas de agua con 4 medidas de leche. Completar la tabla. Este problema corresponde a la actividad 2 de la sesión 2.

	Onzas de agua	Medidas de leche	
	5	4	
	1	$\frac{4}{5}$	
$1 + \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{5} + \frac{2}{5}$
	$1\frac{1}{2}$	$\frac{6}{5}$	

Valor unitario. Si 5 pesos argentinos equivalen a 4.50 pesos mexicanos, ¿a cuánto equivalen 2 pesos argentinos? Este problema corresponde a la primera actividad de la sesión 3.

Se calcula el valor de un peso argentino y luego el de 2.

	Pesos argentinos	Pesos mexicanos	
	5.00	4.50	
÷ 5	1.00	0.90	÷ 5
× 2	2.00	1.80	× 2

Constante de proporcionalidad. Se busca el número por el que se multiplica la primera cantidad para obtener la segunda. La siguiente tabla corresponde a la primera actividad de la sesión 4. Dada la medida del lado de un cuadrado se pide calcular el perímetro y el área y luego determinar si hay relación de proporcionalidad.

Medida del lado	1	2	3	4
Perímetro (cm)	4	8	12	16
Área (cm^2)	1	4	9	16

En la secuencia 7 los alumnos aprendieron a identificar si una tabla relaciona dos cantidades de manera directamente proporcional, una de ellas consiste en que dividan cada cantidad entre su correspondiente en la tabla, si el resultado es constante entonces la tabla es de variación proporcional. En este caso se cumple que el perímetro del cuadrado es proporcional a la medida de su lado, pero el área no es proporcional a la medida del lado. Una pregunta que les puede hacer es: ¿por qué el perímetro sí es proporcional y el área no?

Uno de los procedimientos para resolver problemas de proporcionalidad es la llamada regla de tres. En la sesión 5 se trabaja la igualdad de productos cruzados que es un antecedente para la regla de tres que trabajarán en la sesión 6. Se trata de una regla relativamente fácil de aplicar, pero difícil de entender por qué funciona, es por ello que se debe trabajar después de que los alumnos han resuelto problemas de proporcionalidad con otros procedimientos, como los mencionados anteriormente. Puede observarse en la sesión 6 que se usan las ecuaciones lineales del tipo $ax = b$, es por ello que también esta regla se trabaja después de que los alumnos saben resolver estas ecuaciones. Otra cuestión importante es trabajar con los alumnos cuándo puede usarse y cuándo no, se espera que el trabajo con el razonamiento proporcional que han hecho en esta secuencia y en la 7 sirva de apoyo para lograr este propósito.

En "Para terminar" los alumnos llevarán a cabo una actividad para diferenciar las situaciones en las que puede o no usarse la regla de tres.

Pautas para la evaluación formativa

El aprendizaje esperado indica que los alumnos deben resolver problemas de proporcionalidad directa con números naturales, fraccionarios y decimales. Para lograrlo, es posible que los alumnos enfrenten algunas dificultades; observe si los alumnos pueden:

- Determinar la constante de proporcionalidad o el valor unitario al hacer divisiones como 2 entre 5 (no saben cómo obtener el resultado).
- Una vez que tienen el valor unitario o constante de proporcionalidad y se trata de una fracción o un decimal que tienen que multiplicar por otro número, no saben cómo hacerlo.
- Para emplear el procedimiento de suma término a término, no saben cómo sumar dos fracciones o dos decimales.

En el caso de las sesiones 5 y 6, identifique si los alumnos tienen dificultad para:

- Plantear la ecuación que resulta de los productos cruzados.
- Resolver la ecuación, incluso cuando la plantearon bien.

Con respecto a la resolución de los problemas identifique a los alumnos que aún tienen problemas para encontrar valores faltantes o identificar tablas que son de proporcionalidad.

¿Cómo apoyar?

Si la dificultad está en el manejo de las fracciones o los decimales, permita que quienes tienen este problema usen la calculadora y en la puesta en común, invite a algún alumno que haya trabajado sin calculadora a que muestre a sus compañeros cómo lo hizo y verifiquen que llegan al mismo resultado.

Si son varios los alumnos que tienen problemas con el planteamiento de las ecuaciones o con su resolución, puede hacer un alto grupal en el trabajo y entre todos y con su apoyo repasar el tipo de ecuaciones que resultan de la regla de tres.

Cuando la dificultad esté en la resolución del problema, forme parejas o equipos donde incluya alumnos que han desarrollado bien su razonamiento proporcional para que apoyen a sus compañeros.

Recuerde también que las puestas en común que se sugieren generalmente al final de cada sesión son de gran ayuda para retroalimentar a los estudiantes que tienen dificultades, procure incluir los diferentes procedimientos con que pueden resolverse los problemas de proporcionalidad (razones internas, sumas término a término, valor unitario, constante de proporcionalidad y regla de tres) con el fin de que los alumnos tengan una amplia gama para elegir los que mejor comprenden.

¿Cómo extender?

Puede poner problemas más complejos, por ejemplo:

a) Ramsés cambió 2 000 libras egipcias por rupias indias, ¿cuántas rupias le dieron? _______________

b) Akira cambió 10 000 yenes por pesos argentinos. ¿Cuántos pesos argentinos le dieron? _______________

Secuencia 19 Porcentajes 1 (LT, pp. 140-145)

Tiempo de realización	Cuatro sesiones.
Eje temático	Número, álgebra y variación.
Tema	Proporcionalidad.
Aprendizajes esperados	Resuelve problemas de cálculo de porcentajes, de tanto por ciento y de la cantidad base.
Intención didáctica	Que los alumnos resuelvan problemas que implican el cálculo de porcentajes tomando como base el 50%, 25%, 10% y 1%.
Recursos audiovisuales o informáticos para el alumno	**Audiovisuales** Sesión 2. *Porcentajes* Sesión 4. *Cualquier porcentaje* **Informáticos** Sesión 3. *Cálculo de porcentajes*
Materiales de apoyo para el maestro	**Audiovisual** *Los porcentajes*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Resuelvan problemas que implican el uso de la expresión "por ciento" y lo simbolicen con %.
- Sesión 2. Resuelvan problemas que implican el cálculo del 50% y 25% como la mitad y la cuarta parte respectivamente de la cantidad.
- Sesión 3. Resuelvan problemas que implican el cálculo del 10% y el 1 % como la décima y la centésima parte respectivamente de la cantidad.
- Sesión 4. Resuelvan problemas que implican el cálculo de porcentajes con base en porcentajes conocidos (50%, 25%, 10% y 1%).

Acerca de...

La resolución de problemas que necesitan el cálculo de porcentajes integra varios contenidos antes vistos: proporcionalidad, el uso de fracciones y decimales y las operaciones básicas con este tipo de números. Es por ello que para algunos alumnos suele ser compleja.

En el cálculo de porcentajes se involucran tres cantidades, por ejemplo, en la expresión:

El 10% de 360 es 36

Se tiene el tanto por ciento (10%), la cantidad base (360) y el porcentaje (36). Los problemas que se plantean pueden implicar el cálculo de

Comisiones por ventas

1. Trabaja de manera individual todas las actividades de esta sesión.

Juan trabaja como vendedor. Le dan de comisión \$10 por cada \$100 que vende; en caso de que no complete los \$100, recibe solamente la parte proporcional.

Anota cuánto le dieron de comisión cada día.

cualquiera de estos tres datos cuando se conocen los otros dos.

En esta secuencia, formada por 4 sesiones, se trabaja sólo el cálculo de porcentajes cuando se conoce la cantidad base y el tanto por ciento. Los otros casos se trabajarán en la secuencia 28.

En la sesión 1 se hace un repaso de lo que probablemente los alumnos trabajaron en sexto grado, se introduce la expresión "tantos de cada 100" y su símbolo "%". En la sesión 2 los alumnos calcularán el 50% de una cantidad como la mitad de la misma y el 25% como la cuarta parte. En la sesión 3 se hará lo mismo con el 10% (décima parte) y 1% (centésima parte). La secuencia termina en la sesión 4 donde los alumnos calcularán cualquier tanto por ciento tomando como base los porcentajes que ya saben calcular.

No es propósito de esta secuencia el cálculo de porcentajes multiplicando por el decimal que representa el tanto por ciento, este algoritmo se trabajará en la sesión 28. Por el momento lo más importante es que los alumnos conceptualicen la noción de porcentaje y empleen otros recursos para calcularlo.

Sobre las ideas de los alumnos

Entre los saberes previos que es importante que los alumnos recuperen está el uso de fracciones y el razonamiento proporcional. Los alumnos tendrán que expresar "n de cada 100" como la fracción $\frac{n}{100}$

¿Cómo guío el proceso?

En la sesión 1 introduce el tanto por ciento como una razón del tipo "35 de cada 100", su expresión "35 por ciento" y su símbolo 35%.

En la sesión 2 es importante que los alumnos conceptualicen la cantidad total como 100% y con base en ello calculen 50% y 25% como la mitad y la cuarta parte de la cantidad, respectivamente. No se trata de aplicar el algoritmo para calcular el porcentaje (por ejemplo multiplicar por 0.50 o 0.25). En aquellos casos en que sea posible promueva que calculen los porcentajes mentalmente, por ejemplo el 50% de 280 es la mitad de 280, es decir, 140.

Con la misma idea, en la sesión 3 los alumnos calcularán el 10% y el 1% de diversas cantidades. Es importante reiterar que no se trata de aplicar el algoritmo de multiplicar por el decimal 0.1 o 0.01, sino de promover una forma rápida de encontrar estos porcentajes dividiendo entre 10 (para el 10%) o entre 100 (para el 1%). Nuevamente, promueva el cálculo mental para encontrar estos porcentajes.

Cuando los alumnos inicien la sesión 4 se espera que puedan calcular el 50%, el 25%, el 10% y el 1% y que con base en ellos puedan calcular cualquier otro porcentaje. En seguida se muestra un ejemplo; se presenta en tablas para mayor claridad, pero no necesariamente deben hacerse así, los cálculos pueden ser mentales o escribiendo algunos resultados parciales. Para calcular el 26% de 240 los alumnos pueden:

- Calcular 25% de 240, luego 1% de 240 y sumar ambos resultados.

25% de 240 Es la cuarta parte de 240	60
1% de 240 Es la centésima parte de 240	2.4
Se suman ambos resultados (60 + 2.4)	62.4

- Calcular 10% y 1% de 240. Después, multiplicar el primero por 2, el segundo por 6 y sumar ambos resultados.

10% de 240 Es la décima parte de 240	24
Multiplicar por 2 Para tener 20%	48
1% de 240 Es la centésima parte de 240	2.4
Multiplicar por 6 Para tener 6%	14.4
Sumar los dos productos 48 + 14.4	62.4

- Calcular el 1% y multiplicar el resultado por 26.

1% de 240 Es la centésima parte de 240	2.4
Multiplicarlo por 26 Para tener 26%	62.4

Procure incluir en la puesta en común a alumnos que hayan seguido diferentes procedimientos para el cálculo de porcentajes, para que todos se den cuenta que hay diferentes maneras de hacerlo. Si llegara a surgir el algoritmo de multiplicar por un número decimal porque quizás lo aprendieron en primaria, acéptelo como un procedimiento más y comente que en la secuencia 28 se profundizará su conocimiento.

Pautas para la evaluación formativa

En cuanto a la noción de porcentaje, observe si los alumnos:

- Calculan bien las comisiones pedidas y las expresan correctamente usando el símbolo %, sobre todo en aquellas en que la razón está dada como 60 por cada 200 (corresponde a 30%).
- Pueden pasar de la expresión "tantos de cada 100" al uso del símbolo %.
- Interpretan 50% como la mitad, 25% como la cuarta parte, 10% como la décima y 1% como la centésima.
- Calculan correctamente las fracciones pedidas de las cantidades (mitades, cuartos, décimos y centésimos).
- Resuelven correctamente las operaciones necesarias.
- Utilizan diversos procedimientos para el cálculo de porcentajes.

¿Cómo apoyar?

Si la dificultad está en la noción de porcentaje, proponga más situaciones contextualizadas con expresiones como "34 de cada 100 participaron", "por cada 100 personas, 34 participaron", "el 34% participó", "participaron $\frac{34}{100}$".

Si la dificultad está en operar con las fracciones o decimales puede permitir que usen calculadora para hacer las operaciones, aunque promueva que traten de hacer sin calculadora las que son sencillas.

¿Cómo extender?

Proponga cálculos más complejos, por ejemplo: ¿cómo calcularías el 0.1% de 3 400?, ¿qué significa 0.1%?, ¿qué significa la décima parte de la centésima parte?

1. Forma un equipo para trabajar esta actividad y las tres siguientes.
Una marca que vende chocolate en polvo está dando el 10% del contenido del bote de regalo. Completen los datos que se piden.

Contenido original: 500 gramos

Gramos de regalo: ______________

Contenido total: ______________

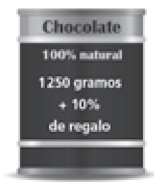
Contenido original: ______________

Gramos de regalo: ______________

Contenido total: ______________

Contenido original: ______________

Gramos de regalo: ______________



Contenido original: ______________

Gramos de regalo: ______________

Secuencia 20 Variación lineal 1 (LT, pp. 146-151)

Tiempo de realización	Tres sesiones.
Eje temático	Número, álgebra y variación.
Tema	Funciones.
Aprendizaje esperado	Analiza y compara situaciones de variación lineal a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica. Interpreta y resuelve problemas que se modelan con estos tipos de variación.
Intención didáctica	Que los alumnos comparen situaciones de variación lineal y no lineal, analizando sus representaciones tabular, gráfica y algebraica.
Recursos audiovisuales o informáticos para el alumno	**Audiovisuales** Sesión 1. *¿Qué son las gráficas?* Sesión 2. *Gráficas de los movimientos* **Informático** Sesión 1. *¿Dónde va el punto?*
Materiales de apoyo para el maestro	**Audiovisual** *Funcional lineal y proporcionalidad directa*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Analicen la gráfica asociada a una situación de variación que relaciona dos conjuntos de cantidades, y determinen otros puntos.
- Sesión 2. Identifiquen que la gráfica de una relación de variación lineal es una línea recta.
- Sesión 3. Diferencien situaciones que son de variación lineal de otras que no lo son.

Acerca de...

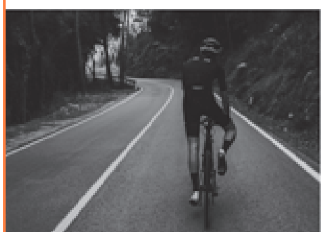
En esta secuencia los estudiantes resolverán problemas que, en diversos contextos, requieran comparar situaciones de variación lineal y no lineal.

Se inicia con el análisis de la información contenida en una gráfica, para estudiar la relación que existe entre las variables representadas y relacionar los puntos graficados con las tablas de datos correspondientes. Como parte de este análisis, se definen los conceptos de plano cartesiano, abscisa, ordenada y origen de las coordenadas.

Un tema central es el uso de las representaciones gráfica, tabular y algebraica para modelar situaciones de variación provenientes de distintos contextos. Tales representaciones permiten comparar y distinguir situaciones de variación lineal de aquellas que no lo son.

Sesión 1

Para empezar



Algunas situaciones de la vida relacionan dos cantidades; por ejemplo: el *número de paletas* con su *precio*, la *distancia* que recorre un ciclista con el *tiempo* que tarda en recorrerla, las *ventas* que logra un vendedor con la *comisión* que le dan. Estas relaciones pueden ser de muchos tipos, pero algunas son de un tipo especial que se llama *variación lineal*. En estas sesiones estudiarás este tipo de variación.

Otras actividades se centran en la identificación de situaciones de variación lineal a partir de analizar la forma de la gráfica. Así, se define la gráfica de una relación de variación lineal como los puntos que están sobre una misma recta.

De igual forma se identifican las situaciones de variación lineal al representarlas mediante expresiones de la forma $y = ax$ y $y = ax + b$. En secuencias anteriores, se estudiaron las expresiones algebraicas asociadas a situaciones de proporcionalidad directa, lo cual servirá de referente previo para definir las características de la expresión de una relación funcional de variación lineal.

Se concluye con actividades que requieren analizar la información contenida en tablas de datos y gráficas de diversos tipos, e identificar las que corresponden a situaciones de variación lineal.

Sobre las ideas de los alumnos

- Al resolver las actividades es importante que los alumnos sepan que las coordenadas de los puntos graficados en el plano cartesiano se definen como un par ordenado de la forma (x, y), donde x es el valor de la abscisa y y es el valor de la ordenada.

Es importante que identifiquen que en las situaciones planteadas existe una relación de variación entre dos conjuntos de cantidades, donde el valor de una variable depende del valor que tenga la otra.

Algunos de los obstáculos que pueden enfrentar los alumnos son:

- Dificultades para interpretar el enunciado del problema y traducirlo a las representaciones gráfica y algebraica.
- Dificultad para distinguir una relación de variación lineal de una de proporcionalidad directa. Se debe aclarar que una relación de proporcionalidad directa es un caso particular de variación lineal.
- Dificultades para encontrar la relación entre las diferentes representaciones asociadas a una situación problemática. Esto significa que pueden cometer errores al transitar de una representación a otra, sobre todo de la gráfica a la expresión algebraica. Al respecto, la representación tabular puede servir como apoyo para vincular los otros dos tipos de representación.
- Errores en el cálculo aritmético al efectuar las operaciones básicas de forma manual. Se recomienda el uso de la calculadora como recurso para el cálculo aritmético y para la comprobación de resultados.

¿Cómo guío el proceso?

En las sesiones 1 y 2 de esta secuencia, los estudiantes resolverán problemas de movimiento con velocidad constante, uno de los contextos de uso más extendido para el estudio de la variación lineal en este nivel, debido a que es un fenómeno relativamente fácil de entender y describir por su carácter intuitivo.

El problema 2 de la sesión 1 consiste en interpretar la información contenida en una gráfica que muestra la relación de las distancias recorridas por un ciclista en cierto tiempo. La gráfica corresponde a una situación de proporcionalidad directa; por tanto, los estudiantes pueden hallar el valor faltante con regla de tres, como procedimiento de resolución.

Destaque con el grupo que el problema que resolvieron tiene características que definen una relación de variación lineal: 1) la razón de la distancia al tiempo, en cada punto, es constante; y 2) los puntos trazados en la gráfica están sobre una misma recta.

Para completar el punto 3 de esta sesión, pida a los alumnos que elaboren una tabla de datos antes de construir la gráfica, de esta manera pueden obtener los puntos con mayor precisión.

En la sesión 2, los estudiantes compararán las gráficas que relacionan la distancia y el tiempo de tres autobuses, e identificarán cuál representa una situación de variación lineal. Para identificar cuál mantuvo una velocidad constante, sugiera que obtengan el valor de la razón en cada punto, dividiendo la distancia entre el tiempo. Una vez obtenida la razón constante, podrán determinar cuál es la expresión algebraica correspondiente.

La actividad de la sesión 3 consiste en comparar dos tablas de datos que muestran la relación entre el precio y la cantidad de lápices comprados al mayoreo o al menudeo. Como parte de la actividad, los estudiantes deben identificar la situación que corresponde a una variación lineal.

Con lo visto en la secuencia, al resolver el punto 3 de esta sesión resultará relativamente sencillo a los alumnos identificar las gráficas que representan una variación lineal entre dos conjuntos de cantidades; no obstante, puede ser que no reconozcan que una recta con pendiente negativa también es de variación lineal.

Como cierre de la secuencia, en plenaria respondan preguntas como las siguientes: ¿cómo es la expresión algebraica de una relación de variación lineal?, ¿cómo es su gráfica, qué forma tiene?, ¿representa variación lineal una recta que no pasa por el origen de coordenadas?, ¿qué forma tiene la gráfica de una expresión de variación lineal con una razón constante negativa?

Pautas para la evaluación formativa

La intención de esta secuencia es identificar situaciones de variación lineal a partir de comparar situaciones de variación en diversos contextos y analizando las representaciones gráficas, tabular y algebraica. Por tanto, la evaluación del desempeño de los alumnos debe observar lo siguiente:

- Verificar que comprenden el concepto y las características de una relación de variación lineal, en sus distintas representaciones.
- Comprobar que en la representación gráfica reconocen que en un punto de coordenadas (x, y) de una recta, a cada valor de la abscisa x le corresponde un único valor de la ordenada y.
- Comprobar que en la representación tabular reconocen que a cada valor de una variable le corresponde un único valor de la otra.
- Comprobar que en la representación algebraica identifican la regla o fórmula que define la relación de variación lineal entre las cantidades involucradas.

¿Cómo apoyar?

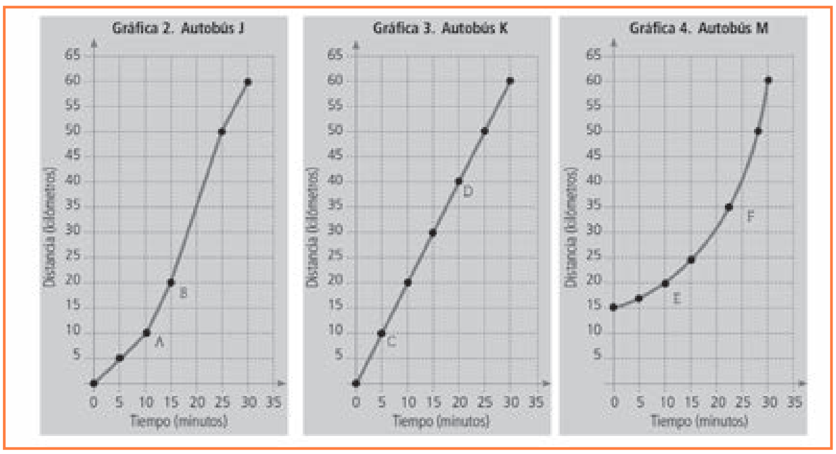
En todo momento, promueva la comunicación y el diálogo mediante el trabajo en equipo y la puesta en común grupal para consolidar la comprensión de procedimientos y conceptos, así como para superar dudas y errores.

Si hay alumnos con dificultades para identificar una relación de variación lineal en su representación gráfica, tabular o algebraica, oriéntelos para que precisen las características principales de este tipo de relaciones:

- La razón entre las variables es constante.
- La gráfica es una recta.
- La expresión es de la forma $y = ax + b$, donde a es la razón constante.

¿Cómo extender?

A los estudiantes que lograron comprender los temas centrales de la secuencia, propóngales que construyan la tabla de datos y la gráfica de una expresión algebraica que represente una relación de variación lineal, con razón negativa; por ejemplo, $y = -2x$; o bien, $y = -x + 3$.



Secuencia 21 Ecuaciones 2 (LT, pp. 152-155)

Tiempo de realización	Dos sesiones.
Eje temático	Número, algebra y variación.
Tema	Ecuaciones.
Aprendizajes esperados	Resuelve problemas mediante la formulación y solución algebraica de ecuaciones lineales.
Intención didáctica	Que el alumno resuelva problemas con ecuaciones lineales de la forma $ax = b$, $x + a = b$ y $ax + b = c$.
Recursos audiovisuales o informáticos para el alumno	**Audiovisuales** Sesión 1. *¿Qué son las ecuaciones?* Sesión 2. *¡Un paso más y listo!* **Informático** Sesión 2. *Ecuaciones I*. Disponible en https://proyectodescartes.org/Telesecundaria/materiales_didacticos/1m_b03_t02_s01-JS/index.html
Materiales de apoyo para el maestro	**Audiovisual** *Ecuaciones... ¿Y cómo las resuelvo?* **Bibliográficos** *Orientaciones didácticas*, SEP, pp. 189-190. Khan Academy (2019). *Ecuaciones de suma y resta de un paso*. Disponible en https://es.khanacademy.org/math/algebra-basics/alg-basics-linear-equationsand-inequalities/modal/a/solving-one-step-addition-and-subtraction-equations Khan Academy (2019). *Ecuaciones de multiplicación y división de un paso*. Disponible en https://es.khanacademy.org/math/algebra-basics/alg-basics-linear-equations-and-inequalities/alg-basics-one-step-add-sub-equations/a/solving-one-step-multiplication-and-division-equations?modal=1&url=https%3A%2F%2Fes.khanacademy.org%2Fmath%2Falgebra-basics%2Falg-basics-linear-equations-and-inequalities%23alg-basics-one-step-inequalities

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Planteen y resuelvan ecuaciones de primer grado de la forma $x + a = b$.
- Sesión 2. Planteen y resuelvan ecuaciones de primer grado de la forma $ax = b$ y $ax + b = c$, mediante la técnica de las operaciones inversas o "el camino de regreso".

Acerca de...

Esta secuencia es la segunda de tres en las que los alumnos deberán plantear y resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita. Se espera que los alumnos puedan resolver las situaciones como las que se plantean en esta secuencia de manera intuitiva, debido que es posible que en su vida cotidiana se les hayan presentado situaciones semejantes, sin embargo, se pretende que transiten del procedimiento intuitivo al uso de una técnica como la de las operaciones inversas o "el camino de regreso" para ecuaciones de la forma $ax = b$ y $ax + b = c$.

Resolver problemas mediante la formulación y solución algebraica de ecuaciones lineales implica conocer las técnicas de manipulación de la literal para encontrar su solución; además de ello requiere avanzar a la concepción de igualdad como equivalencia entre dos expresiones.

Sobre las ideas de los alumnos

En cuanto a la resolución de ecuaciones los alumnos pueden presentar dificultades con el manejo de los signos y sus operaciones.

En esta secuencia se aplican los conocimientos adquiridos tanto con las operaciones de suma, resta, multiplicación y división de números enteros, fracciones y decimales como con la jerarquía de operaciones; si tuvieran problemas con esos temas, en la resolución de las ecuaciones por operaciones contrarias se harán evidentes las dificultades que los alumnos aún puedan presentar.

¿Cómo guío el proceso?

En la actividad 5 de la sesión 1 es importante que sean los alumnos quienes planteen las ecuaciones y, si hay varias expresiones equivalentes, es conveniente exponerlas en plenaria y destacar por qué lo son, al resolverlas y comprobarlas deberán tener las mismas soluciones.

Este tipo de actividades dará seguridad a los estudiantes en el manejo de expresiones algebraicas.

En la actividad 6, es conveniente plantear una o dos ecuaciones diferentes y resolverlas con los estudiantes de manera grupal en el pizarrón, para que puedan observar los procedimientos que utilizaron.

En la actividad 3 de la sesión 2, es conveniente que los estudiantes utilicen la técnica de operaciones inversas, si no lo hicieron ellos, durante la plenaria puede apoyarlos mostrándoles de manera general cómo hacerlo, una vez que se ha revisado el recuadro en el que aparece la técnica.

Pautas para la evaluación formativa

- Aprecie cómo plantearon las ecuaciones de la actividad 3 de la sesión 1 y la manera en que las resolvieron; de ser necesario, comente con los estudiantes los aspectos relevantes que deben considerarse para hacer el planteamiento y cómo llegar a la solución.
- Pida a los estudiantes que realicen la actividad 5, de la sesión 2, en una hoja blanca y antes de incorporarla al portafolio de evidencias, realice una coevaluación e integre los resultados en su evaluación con la finalidad de obtener información clara y precisa de los conocimientos adquiridos por cada uno de los estudiantes. A partir de ello, si considera necesario, proporcione actividades adicionales a los alumnos con bajos resultados.

¿Cómo apoyar?

Cuando los alumnos muestran dificultades para plantear ecuaciones es importante ayudarles a establecer cuáles son las cantidades conocidas y desconocidas y la relación que hay entre ellas; en la mayoría de las ocasiones, el problema es que no logran establecer la relación entre las cantidades.

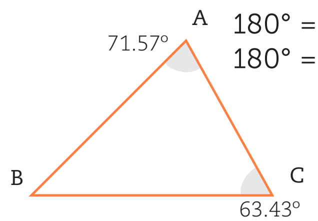
En la sesión 1, actividades 1 y 2 si lo considera necesario, puede hacer notar a los estudiantes que ya han resuelto actividades similares en la secuencia 8 por lo cual puede pedirles que regresen a esa secuencia para recordar los procedimientos aplicados.

Resuelvan paso a paso distintos ejemplos de ecuaciones tanto de la forma $ax = b$ como $x + a = b$ utilizando la técnica de operaciones inversas para que los alumnos puedan asimilarlos paulatinamente y determinen cuál de ellas les resulta más conveniente de aplicar para dar solución a determinadas situaciones problemáticas.

¿Cómo extender?

Puede mostrar la utilidad de este aprendizaje aplicándolo en distintos temas como la obtención de áreas y perímetros de figuras geométricas distintas a las ya vistas en la secuencia anterior, ángulos desconocidos etcétera. Como ejemplos:

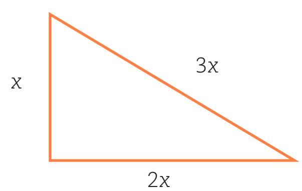
Considera la siguiente imagen y encuentra el valor del ángulo B.



$180° = A + B + C$
$180° = 71.57° + B + 63.43°$

$180° = 135° + B$
$180° - 135° = B$
$45° = B$

Sabiendo que el perímetro de la siguiente figura es igual a 60, calcula la medida de su base.



$60 = 3x + 2x + x$
$60 = 5x$
$\frac{60}{5} = x$
$12 = x$

Secuencia 22 Sucesiones 1 (LT, pp. 156-159)

Tiempo de realización	Dos sesiones.
Eje temático	Número, álgebra y variación.
Tema	Patrones, figuras geométricas y expresiones equivalentes.
Aprendizaje esperado	Formula expresiones algebraicas de primer grado a partir de sucesiones y las utiliza para analizar propiedades de la sucesión que representan.
Intención didáctica	Formular en lenguaje común expresiones generales que definen las reglas de sucesiones de figuras y números con progresión aritmética.
Recursos audiovisuales o informáticos para el alumno	**Audiovisuales** Sesión 1. *¿Qué es una sucesión?* Sesión 2. *¿Cómo se generan las sucesiones con progresión aritmética?* **Informático** Sesión 2. *¿Qué número va?*
Materiales de apoyo para el maestro	**Audiovisual** *Sucesiones de figuras y de números con progresión aritmética*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

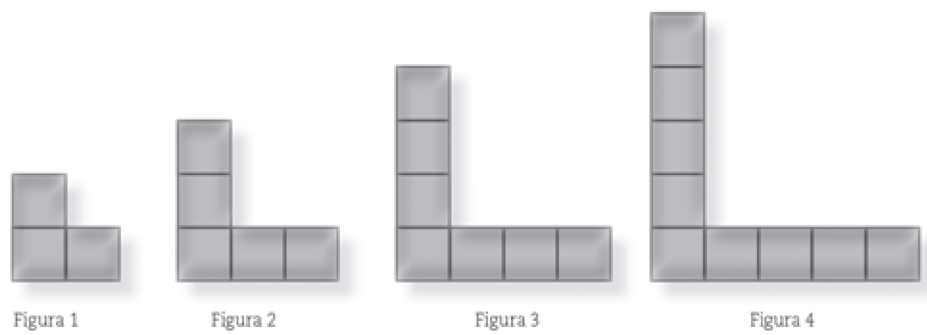
- Sesión 1. Determinen el término que ocupa un lugar cualquiera en una sucesión de figuras con progresión aritmética y expresen la regla general de la sucesión.
- Sesión 2. Construyan sucesiones de números que corresponden a una progresión aritmética a partir de una regla dada en lenguaje común.

Acerca de...

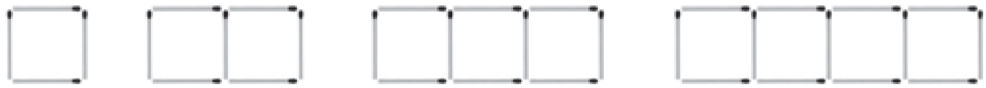
Esta secuencia es el vínculo entre los conocimientos trabajados en primaria y el paso a la simbolización algebraica de una sucesión con progresión aritmética, por lo que en el par de sesiones que la conforman se inicia el tema abordando casos de sucesiones de figuras y números sencillas, en las que se analizará cómo están conformadas.

¿Cuál es la siguiente figura?

1. Reúnete con un compañero para resolver este y el siguiente problema.
Consideren la siguiente sucesión de figuras.



4. Considera la sucesión de cuadrados formados con cerillos.



En la primera sesión los alumnos trabajarán con sucesiones de figuras que corresponden a una progresión aritmética, es decir, sucesiones con una constante aditiva entre sus términos; primero identifican y describen cómo pasan de una figura a otra para determinar el posible patrón y hallen figuras que corresponden a una posición inmediata; luego, deberán encontrar o describir cómo se conforma una figura de una posición más alejada con la intención de probar que el patrón se mantiene y corresponde. Se busca que paulatinamente se identifiquen los elementos que permiten generar cualquier figura de la sucesión.

En la sesión 2 se parte de la regla dada en lenguaje común para generar los términos de una sucesión numérica. Se espera que se identifiquen regularidades y diferencias a fin de que los alumnos estén preparados para la segunda secuencia, en la cual puedan expresar y representar de diferentes maneras las reglas generales y llegar a la representación algebraica.

Sobre las ideas de los alumnos

En primaria, los alumnos describieron con palabras las características y el comportamiento de sucesiones con progresión aritmética y geométrica. Ellos se centraron en la exploración de las regularidades para poder completar, por ejemplo, los primeros cinco términos de una sucesión. Como resultado, formularon descripciones utilizando sus palabras o incluso recurrieron a dibujos o a símbolos inventados por ellos. Las descripciones que hicieron son de tipo recursivo, es decir, describen la variación de la sucesión de una figura a la siguiente.

En esta secuencia es importante que los estudiantes recuerden y reconozcan que una de las regularidades se relaciona con la cantidad de cuadros, puntos, palillos, lados o cualquier tipo de pieza que forma cada figura de la sucesión.

Algunas posibles dificultades y errores que los alumnos pueden tener son:

Dificultades para identificar cuál es la regularidad o constante entre una figura y otra.

Problemas para comprender la regla verbal y generar los términos de una secuencia.

Errores al efectuar operaciones básicas con lápiz y papel, por tanto, considere la posibilidad de usar una calculadora como herramienta de cálculo para generar y verificar resultados.

¿Cómo guío el proceso?

En la sesión 1 los alumnos describen las relaciones que hay entre las figuras que forman una sucesión para que por medio de ese análisis hallen la figura que se les pide y logren describir cómo se forma, cuántas piezas tiene, es decir identifican el patrón o regla que sigue la sucesión. La generalización consiste en que los alumnos encuentren y enuncien la regla verbal con la cual pueden obtener cualquier término de una sucesión aritmética, a partir de los primeros cuatro términos de ella.

Es conveniente que las descripciones encontradas sean discutidas en grupo. Además, es necesario que se discuta su validez mediante su puesta a prueba.

Además del trabajo propuesto en la sesión 2, que principalmente se trata de generar los términos de las sucesiones a partir de las reglas verbales, se propone analizarlos para identificar regularidades y diferencias entre una sucesión y otra. Por ejemplo, en la actividad 2 se pregunta por el término de la posición 20 en cada una de las cuatro sucesiones generadas a partir de las reglas que se dan, entonces podría proponer que generen los primeros cinco términos de cada sucesión para que observen que el primer término es tres, sin embargo, la diferencia que hay entre un término y otro en cada sucesión es diferente y está determinado en la regla verbal a partir de la cantidad que se debe sumar: 2, 3, 5 y 10, respectivamente.

Pautas para la evaluación formativa

Para evaluar este aprendizaje considere el trabajo que los alumnos desarrollen en:

- La actividad 4 de la sesión 1.
- La actividad 3 de la sesión 2.

¿Cómo apoyar?

En el caso de tener dificultades para hallar el número de piezas que forman una figura de una posición que está más adelante, pida a los alumnos que elaboren una tabla que les sirva de ayuda para relacionar el número de la figura con el de piezas.

Para determinar el número que ocupa la posición 20 en la actividad 2 de la sesión 2, es posible que algunos escriban la lista: 3, 5, 7, 9... y así hasta llegar a la posición 20, y que le digan la respuesta. Estos alumnos sólo han comprendido el problema, pero no han logrado encontrar un procedimiento que les permita hallar el término que ocupa un lugar cualquiera de la lista. Si éste es el caso de muchos alumnos, para ayudarles a hacer la generalización podría plantear el problema de esta manera: "¿Qué lugar ocupa en la lista el número que se calcula de la siguiente manera: 1 + 2?, ¿y cuál es el lugar del que se calcula 1 + 2 + 2? ¿Y el que se calcula: 1 + 2 + 2 + 2? ¿Con qué otra operación se puede expresar la suma 2 + 2 + 2? ¿Y la suma 2 + 2 + 2 + 2? ¿Cuántas veces tendría que sumarse el 2 para calcular el número que ocupa el lugar 20?" La respuesta lleva implícita la generalización: 1 + 20 × 2 = 41. Además, tiene la ventaja que lo puede vincular con la sucesión de figuras de la actividad 1 de la sesión 1, pues la figura de la posición inicial está formada por el cuadrito que está en la esquina y se agregan dos cuadritos, uno a la derecha y el otro arriba, a partir de ahí todas las figuras se forman de la misma manera.

Un recurso que los alumnos pueden aplicar para sucesiones como el triple de la posición que ocupa –inciso d), sesión 2– es lo que saben respecto de proporcionalidad.

¿Cómo extender?

Si lo considera conveniente, en la actividad 3 de la sesión 2 podría proponer que generen una nueva sucesión considerando la regla del inciso d) cambien "al resultado le resto 1" por "al resultado le sumo 1" con el propósito de comparar y analizar los términos de esa nueva sucesión y los de las sucesiones del inciso b) y c). De esta manera pueden observar las regularidades y diferencias entre las sucesiones:

Sucesión de c: 200, 195, 190, 185

Sucesión de d: 3, 6, 9, 12, 15

Sucesión nueva: 4, 7, 10, 13, 16

También podría proponer construir una sucesión cuyo tercer término sea 10 y preguntar: ¿cuántas sucesiones diferentes pudieron construir?

Para terminar

Considera la siguiente sucesión de palillos.

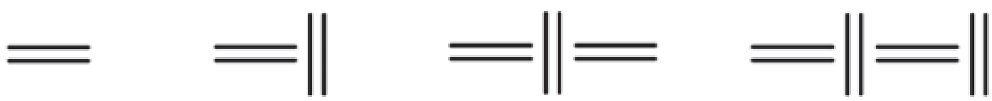


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

a) ¿Cuántos palillos tendrán las figuras 5, 10 y 20?

b) ¿Cuántos tendrá la figura n?

c) Escribe en tu cuaderno la manera en que encontraste las respuestas.

Secuencia 23 Existencia y unicidad 2 (LT, pp. 160-163)

Tiempo de realización	Tres sesiones.
Eje temático	Forma, espacio y medida.
Tema	Figuras y cuerpos geométricos.
Aprendizajes esperados	Analiza la existencia y unicidad en la construcción de triángulos y cuadriláteros, y determina y usa criterios de congruencia de triángulos.
Intención didáctica	Que los alumnos exploren y deduzcan que la suma de los ángulos interiores de un triángulo siempre es 180° y que en un triángulo la suma de dos de sus lados debe ser mayor que el tercer lado.
Materiales para el alumno	Juego de geometría.
Recursos audiovisuales o informáticos para el alumno	**Audiovisuales** Sesión 1. *Los ángulos interiores de un triángulo* Sesión 3. *Existencia de triángulos* **Informático** Sesión 1. *Ángulos interiores de un triángulo*
Materiales de apoyo para el maestro	**Audiovisual** *La importancia de las construcciones en la enseñanza de la geometría*

¿Qué busco?

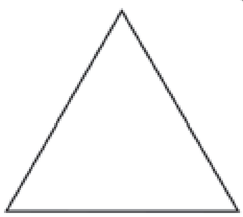
Que los alumnos:

- Sesión 1. Exploren y muestren que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°.
- Sesión 2. Exploren que en todo triángulo la suma de dos lados siempre es mayor que el tercer lado.
- Sesión 3. Analicen la existencia de triángulos dadas las medidas de los ángulos o las de los lados.

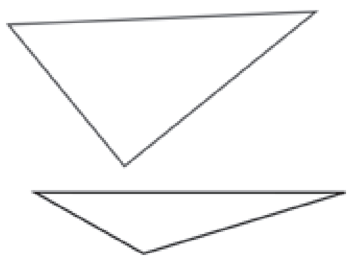
Acerca de...

En esta secuencia se continúa el trabajo iniciado en la secuencia 9 (Existencia y unicidad 1). Al igual que en aquella, en las actividades se promueve que los alumnos primero hagan hipótesis y luego las verifiquen, ya sea empíricamente (midiendo los ángulos interiores de un triángulo y luego sumando, cortando los triángulos y poniéndolos uno al lado de otro, cortando tiras para ver

¿Cuánto suman?



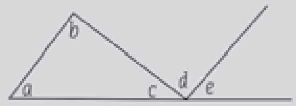
1. Reúnete con un compañero para hacer esta y las tres actividades posteriores. Hagan una hipótesis: si miden los tres ángulos interiores de cada uno de estos triángulos y suman las tres medidas, ¿siempre obtendrán el mismo resultado o serán resultados diferentes? ____________________



2. Para tratar de probar su hipótesis, midan los ángulos de cada triángulo, sumen las tres medidas y anoten el resultado. ¿A cuál número se aproximan las sumas? ____

4. El siguiente es un razonamiento para probar que los ángulos interiores de un triángulo suman 180° en la figura; $a + b + c = 180°$.

Consideren que el segmento rojo es paralelo a un lado del triángulo.
Si se juntan los ángulos e, d y c, para formar un solo ángulo, como se muestra en la figura, ¿qué ángulo se obtiene? ____________
El ángulo a es igual al ángulo e porque son correspondientes.
El ángulo b es igual al ángulo d porque son ________________________
Entonces en la suma ponemos a en lugar de e y b en lugar de d.



si tomando tres siempre es posible construir un triángulo) y en algunos casos verifiquen sus hipótesis usando argumentos basados en propiedades geométricas.

En el primer par de sesiones se trabaja con dos propiedades importantes de los triángulos:

1) La suma de los ángulos interiores de un triángulo siempre es 180°.
2) La suma de dos lados de un triángulo siempre es mayor que el tercer lado.

Las actividades propuestas llevan al alumno a explorar y deducir estas propiedades.

Las construcciones geométricas promueven en los alumnos la exploración de las propiedades de las figuras, por eso en la segunda sesión se introducen los pasos para construir un triángulo cuando se conocen las medidas de sus lados; a partir de esta construcción se puede comprobar la hipótesis de que, dadas tres medidas, no siempre es posible construir un triángulo cuyos lados tengan esas mismas medidas. El trazo les permite observar que para que exista el triángulo los dos arcos que se trazan deben cruzarse para determinar el tercer vértice.

En la tercera sesión los alumnos seguirán desarrollando su razonamiento deductivo al plantear primero una hipótesis (existe o no existe un triángulo con las medidas señaladas) y argumentarla. En los casos en que exista el triángulo tendrán que trazarlo.

Como puede observarse en esta secuencia se trabajan paralelamente tanto el aspecto informativo como el aspecto formativo de la enseñanza de la Geometría.

Sobre las ideas de los alumnos

Es muy probable que en un principio los alumnos piensen que, dadas tres medidas de ángulos o de lados, existe un triángulo que las tiene. A lo largo del trabajo en esta secuencia se darán cuenta de que no es así.

En el caso de la suma de los ángulos interiores de un triángulo, probablemente los alumnos se convenzan de que es 180° al medir y sumar o al recortarlos y ponerlos uno al lado del otro, ellos suelen generalizar a partir de uno o dos casos, es importante promover la duda y la necesidad de una prueba que garantice que esta propiedad no sólo se cumple para los triángulos que midieron o recortaron sino para todos.

Algunos de los argumentos que podrían dar los alumnos es que un triángulo no existe "porque no me salió", es decir porque no lo pudieron trazar, para este tipo de respuestas también es importante motivarlos para que den argumentos basados en las propiedades de los triángulos.

¿Cómo guío el proceso?

Para el trabajo con Geometría es importante promover en los alumnos el planteamiento de hipótesis: ¿piensas que la suma siempre es la misma?, ¿consideras que dadas tres medidas para los lados siempre es posible construir un triángulo cuyos lados tengan esas tres medidas? Y después, promover que los alumnos exploren y traten de probar sus hipótesis. Recuerde que no se trata de hacer demostraciones rigurosas desde el punto de vista matemático, sino de introducir a los alumnos en el razonamiento deductivo, por lo que no se espera que hagan demostraciones rigurosas usando notación geométrica impecable. Los razonamientos de los alumnos pueden ser con lenguaje natural, ya sea oral o escrito. Es muy probable que sea necesario que nombren los ángulos o los lados con letra para identificarlos, comente con ellos las convenciones: suele nombrarse con letras mayúsculas los vértices del triángulo y con letras minúsculas los lados o ángulos.

Observe si los alumnos tienen problemas con el uso de sus instrumentos geométricos o si no recuerdan cómo trazar un triángulo a partir de las medidas de sus ángulos o de sus lados.

En la sesión 3, identifique a los alumnos a quienes les cuesta trabajo sustentar con argumentos sus hipótesis. Indague si se trata de una dificultad inherente al trabajo con matemáticas (aún no comprenden las dos propiedades de los triángulos que se están trabajando) o si el problema está en que no saben cómo expresarlos.

Pautas para la evaluación formativa

Observe si los alumnos logran:

- Reconocer que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°.
- Describir que en todo triángulo la suma de dos lados siempre es mayor que el tercer lado
- Usar las propiedades geométricas para argumentar sus razonamientos

¿Cómo apoyar?

Si la dificultad está en el uso del juego de geometría, se recomienda hacer un alto en el trabajo y recordar junto con ellos en el pizarrón la manera de trazar triángulos dadas las medidas de los ángulos o de los lados, poniendo uno o dos ejemplos.

Si en la sesión 3 la dificultad está en que aún no usan las propiedades geométricas para argumentar sus razonamientos, apóyelos recordando con ellos estas propiedades, pida que revisen las dos lecciones anteriores y que lean los recuadros de información. Promueva la autoconfianza de los alumnos, motívelos a expresarse con sus propias palabras y si emplean un vocabulario no geométrico no los corrija haciéndolos sentir mal, simplemente repita de manera natural lo que ellos dijeron empleando el vocabulario geométrico adecuado.

También puede realizar otras actividades para explorar las dos propiedades que se estudian en esta secuencia. Por ejemplo, para la propiedad de la desigualdad del triángulo puede hacer que en el trazo, en lugar de marcar sólo los arcos marquen las circunferencias completas, es probable que esto ayude a que vean por qué se requiere que la suma de dos lados sea mayor que el tercer lado.

¿Cómo extender?

Plantee problemas donde relacione con álgebra las propiedades vistas, por ejemplo:

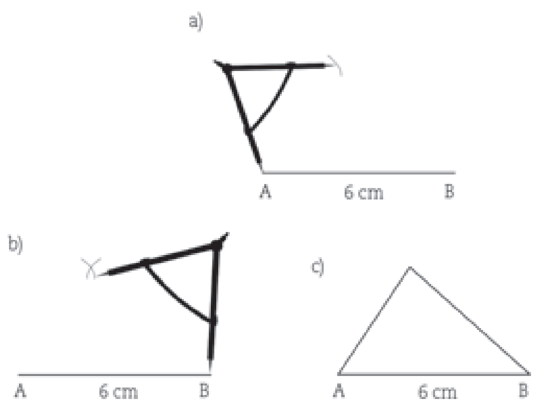
- Un lado de un triángulo mide 3, otro x y el tercero, 5. ¿Existe el triángulo si x vale 1?, ¿si x vale 6? ¿Qué valores puede tomar x para que el triángulo exista?
- Un ángulo mide 30°, otro 50° y el otro $x + 10°$, ¿cuánto vale x?

3. Sigan estos pasos en su cuaderno para trazar un triángulo cuyos lados midan 4 cm, 6 cm y 5 cm.

a) Tracen un segmento de 6 cm. Pongan A y B a sus extremos. Abran su compás a 4 cm. Coloquen la punta del compás en A y tracen un arco.

b) Abran su compás a 5 cm, coloquen la punta del compás en B y tracen otro arco.

c) Unan A y B con el punto donde se cortan los arcos.



Secuencia 24 Perímetros y áreas 2 (LT, pp. 164-169)

Tiempo de realización	Tres sesiones.
Eje temático	Forma, espacio y medida.
Tema	Figuras y cuerpos geométricos.
Aprendizajes esperados	Calcula el perímetro de polígonos y del círculo, y áreas de triángulos y cuadriláteros desarrollando y aplicando fórmulas.
Intención didáctica	Que los alumnos deduzcan y expresen las fórmulas para obtener el área de figuras geométricas.
Materiales para el alumno	Juego de geometría, hojas, *software* geométrico.
Recursos audiovisuales o informáticos para el alumno	**Audiovisuales** Sesión 1. *El área en la antigüedad* Sesión 2. *¿Cómo trazo y obtengo el área de figuras geométricas con Geogebra?* Sesión 3. *Aplicaciones del área en la vida cotidiana*
Materiales de apoyo para el maestro	**Audiovisual** *El área*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Reconozcan la conservación del área en figuras geométricas y calculen el área a partir de una unidad de medida arbitraria. Calculen el área de una figura geométrica a partir de recubrirla con unidades de área determinadas de manera arbitraria.
- Sesión 2. Construyan fórmulas para calcular el área del romboide y rombo a partir de la fórmula del área del rectángulo.
- Sesión 3. Construyan fórmulas para calcular el área del trapecio a partir de la fórmula del área del rectángulo o del romboide.

Acerca de...

Con la finalidad de que los alumnos deduzcan y expresen las fórmulas para obtener de forma geométrica y analítica el área de figuras geométricas se plantea lo siguiente:

Se inicia con el concepto de la medición de superficie. Se analiza su conservación en las figuras geométricas cuando cambian de forma, pero la superficie se mantiene. Para ello se trabajan diversas situaciones como:

a) La figura cambia su posición sin modificar su forma.
b) Se fracciona la figura y se reacomodan sus piezas.

2. Si consideras que el área de la pieza C vale 1, ¿cuántas veces cabe el área de C en cada una de las piezas del tangram que construiste que se representan abajo?

Se plantean situaciones donde se asocia una unidad de medida y se cuantifica la superficie.

Se realizan transformaciones geométricas para deducir las fórmulas del área. Por ejemplo, el romboide y el rombo se transforman en rectángulos. Finalmente, también se hacen transformaciones geométricas y analíticas del trapecio en rectángulos para deducir la fórmula de su área. Se relacionan las fórmulas del área con la respectiva figura, interpretando los elementos geométricos de cada una.

Sobre las ideas de los alumnos

Algunas ideas que pueden obstaculizar el estudio de este contenido son:

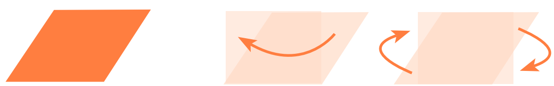
- Confundir las características de las figuras geométricas.
- Señalar erróneamente las alturas en los triángulos, trapecios y romboides.
- Confundir el área con el perímetro de las figuras geométricas.
- Emplear una fórmula que no corresponde con la figura geométrica. Ejemplo: considerar la fórmula del rombo para el romboide.
- No concebir la unidad de medida como una pieza de la figura, ya que piensan en unidades cuadradas o metros o centímetros cuadrados medidas usuales para la medición de áreas.
- Inventar fórmulas. Por ejemplo: al no recordar cómo es la fórmula del triángulo, el alumno multiplica la medida de los tres lados.

¿Cómo guío el proceso?

La intención de la sesión 1 es que el alumno compare superficies para que establezca relaciones de igualdad o inclusión entre las figuras del tangram. En la actividad 1 se establece una unidad de medida arbitraria para el área. En la actividad 2 se toma como unidad de medida la pieza D y se establecen relaciones del tipo: el área de la figura D es el doble del área de la figura C. Observe que se puede elegir cualquier pieza como unidad de medida arbitraria para medir la superficie.

Propicie que el estudiante observe que las figuras pueden tener diferente forma, pero conservan la misma área. Sugiera al alumno que sobreponga la pieza que se define como unidad de medida y verifique que recubra toda la superficie de la otra figura. En algunos casos, será necesario partir la unidad de medida para realizar dicho recubrimiento y se puede aplicar algún movimiento de traslación, rotación o reflexión para hacer el recubrimiento total de la figura geométrica. En las actividades 4 y 5, se analiza cómo dos figuras tienen la misma área, pero diferente forma.

En la sesión 2 se construyen las fórmulas para el área del romboide y del rombo a partir de la fórmula del área del rectángulo. En la actividad 2 pida a los alumnos que hagan los cortes necesarios en el romboide y realicen un acomodo de las piezas de tal manera que se transforme en un rectángulo. Por ejemplo:



Si el alumno no observa la conservación del área, propicie la reflexión en torno a esta característica, para ello se pueden hacer las siguientes preguntas: ¿hicieron los mismos cortes? ¿Cómo es el área de las dos figuras? Cuando los cortes son distintos, ¿cómo son las áreas? Además, los alumnos deberán identificar que la base y altura del romboide corresponden con la base y altura del rectángulo; independientemente del tipo de partición que haya realizado en la figura.

En la actividad 5 se establece la relación entre el área del rectángulo y del rombo. Al sobreponer el rombo dentro del rectángulo se observa que el área del rombo es la mitad del área del rectángulo. Además, la diagonal mayor del rombo corresponde con la base del rectángulo y la diagonal menor con la altura. Por lo que ésta es una excelente forma de que visualicen la relación entre las dos fórmulas.

Otro procedimiento que se muestra es la transformación del rombo en un rectángulo que tiene como base la diagonal mayor del rombo y la diagonal menor es igual a la mitad de la altura del rectángulo. ¿Cómo son las fórmulas que se obtuvieron en ambos casos? ¿Se conservan las áreas?

En el interactivo podrán observar diferentes transformaciones en los paralelogramos.

En la sesión 3 se pretende que los alumnos construyan la fórmula del área de trapecio a partir de la fórmula del área rectángulo o del romboide. Para ello, se utiliza el procedimiento de transformarlo en otra figura cuya fórmula ya se conoce. Se les pide que piensen cómo calcular el área de un trapecio y se aborda mediante tres procedimientos:

- La transformación del trapecio en un rectángulo cuya base es la base mayor más la base menor del trapecio y la altura es la misma. Se aplica la fórmula de área de un rectángulo y se divide entre dos porque se unieron dos trapecios.
- La transformación del trapecio en un rectángulo cuya base es la base mayor más la base menor del trapecio y la altura es la mitad de la altura del trapecio. También se aplica la fórmula de área de un rectángulo.
- La transformación del trapecio en un romboide cuya base es la base mayor más la base menor del trapecio y la altura es la misma. Se aplica la fórmula de área de un romboide y se divide entre dos porque se unen dos trapecios.

Pautas para la evaluación formativa

Para evaluar este aprendizaje considere que el alumno:

- Comprende las propiedades y características de la conservación del área y de la unidad de medida.
- Identifica que las figuras geométricas pueden ser fraccionadas y elige una unidad de medida arbitraria adecuada.
- Realiza transformaciones analíticas y geométricas válidas.
- Argumenta y describe las transformaciones que realiza.

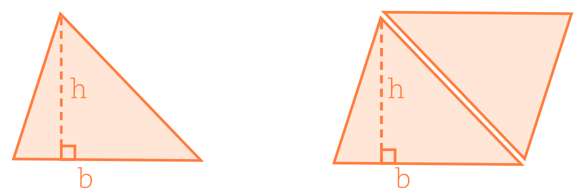
¿Cómo apoyar?

Si observa que los alumnos no saben qué hacer, sugiérales posibles particiones y acomodo de las figuras para obtener la transformación que se requiere. En algunos casos será necesario que la figura que se use como unidad de medida sea fraccionada para que se pueda recubrir toda la figura, si no logran hacerlo, sugiérales una forma. A partir de ello, se espera que los alumnos deduzcan las fórmulas mediante las transformaciones geométricas y analíticas.

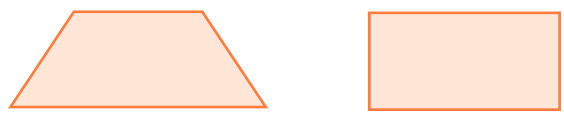
¿Cómo extender?

Propicie que los alumnos realicen otras transformaciones de las figuras geométricas para deducir las fórmulas. Por ejemplo:

- Deduce la fórmula del área del romboide a partir de la fórmula del área del triángulo. ¿Cuál es la fórmula del área del triángulo?
- ¿Qué transformación se llevó a cabo en la figura?



- Observa las figuras.



- Deduce la fórmula del área del trapecio a partir de la del rectángulo.

4. Arma las figuras con tu tangram. Calcula el área de cada una si consideras a la pieza E como la unidad.

Secuencia 25 Volumen de prismas 2 (LT, pp. 170-175)

Tiempo de realización	Tres sesiones.
Eje temático	Forma, espacio y medida.
Tema	Magnitudes y medidas.
Aprendizajes esperados	Calcula el volumen de prismas rectos cuya base sea un triángulo o un cuadrilátero, desarrollando y aplicando fórmulas.
Intención didáctica	Que los alumnos exploren y deduzcan que el volumen de un prisma que tiene como base un triángulo o un cuadrilátero se calcula multiplicando el área de la base por la altura.
Materiales para el alumno	Sesión 1. Plastilina, regla, hilo que se pueda tensar sin romperse. Sesión 2. Cartulina, juego de geometría, tijeras y pegamento.
Recursos audiovisuales o informáticos para el alumno	**Audiovisuales** Sesión 1. *Volumen de prismas triangulares* Sesión 2. *Volumen de prismas cuadrangulares* Sesión 3. *Problemas sobre volumen* **Informático** Sesión 2. *Volumen de prismas*
Materiales de apoyo para el maestro	**Audiovisual** *La enseñanza de la fórmula para calcular el volumen de prismas*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Desarrollen y usen la fórmula para calcular el volumen de prismas rectos triangulares.
- Sesión 2. Desarrollen y usen la fórmula para calcular el volumen de prismas cuya base es un trapecio, un rombo o un romboide.
- Sesión 3. Resuelvan problemas que impliquen la noción de volumen de prismas rectos cuya base es un triángulo o un cuadrilátero.

Acerca de...

En la secuencia 11 los alumnos concluyeron que para calcular el volumen de un prisma recto rectangular se utiliza la fórmula: *Volumen es igual a área de la base por altura.*

Prismas triangulares

1. Formen un equipo para trabajar esta actividad.
Construyan con plastilina los prismas rectangulares, luego corten con un hilo resistente y tensado por la línea punteada para obtener los prismas triangulares.
Anoten el volumen de cada uno.

Ahora explorarán si esa misma fórmula se puede usar para calcular el volumen de prismas cuyas bases sean triángulos (sesión 1) o cuadriláteros (sesión 2). También resolverán problemas que impliquen estos conocimientos (sesión 3).

El estudio del volumen no puede realizarse sólo con figuras dibujadas, es por ello que los alumnos tendrán que construir prismas, en algunos casos con plastilina y en otros, a partir de su desarrollo plano, con cartulina y empleando el juego de geometría.

Sobre las ideas de los alumnos

La noción de altura suele ser difícil para los alumnos y, en el caso del cálculo de volúmenes de prismas, a esta dificultad se añade que en los prismas están las alturas como elemento de la base (altura del triángulo, altura del trapecio) y también está la altura del prisma. Considere esto al realizar las actividades de la secuencia.

¿Cómo guío el proceso?

En la sesión 1, verifique que los alumnos construyan los prismas rectangulares con plastilina y que hagan el corte necesario para obtener los prismas triangulares cuyo volumen sea la mitad del prisma original. Esta experiencia les es útil también para comprender las imágenes del libro, si bien algunos alumnos pueden interpretar la representación plana de los prismas, es probable que otros no puedan hacerlo, la visualización de objetos de tres dimensiones dibujados en dos dimensiones es una habilidad que se tiene que desarrollar.

Compruebe que calculan el volumen de los prismas triangulares obteniendo la mitad del volumen de los prismas rectangulares y después lo hagan aplicando la fórmula. La idea es que ellos mismos se den cuenta de que en ambos procedimientos obtienen el mismo resultado y deduzcan, entonces, que la fórmula *Volumen es igual a área de la base por altura* se puede aplicar también a prismas triangulares.

Para la sesión 2 es muy importante que los alumnos construyan los prismas y después, a manera de rompecabezas armen los otros prismas. Verifique que primero calculen el volumen de los prismas rectangular y triangular y una vez que armen los otros prismas calculen su volumen sumando el volumen del prisma rectangular y triangular. Al igual que en la sesión 1, después tendrán que calcular el volumen de los prismas con base un cuadrilátero usando la fórmula *Volumen es igual a área de la base por altura*, nuevamente la idea es que comprueben que con los dos procedimientos (sumando el volumen de prismas y aplicando la fórmula) obtienen el mismo resultado y concluyan que la fórmula también se puede aplicar a prismas cuya base sea un rombo, un romboide o un trapecio.

En ninguna de las dos sesiones anteriores se espera que usted sea quien haga las conclusiones sobre el uso de la fórmula, permita que sean los mismos alumnos quienes exploren y concluyan que la fórmula es la misma para los diferentes tipos de prismas.

En la sesión 3 los alumnos se enfrentarán a diferentes problemas sobre volumen. Una característica de los problemas planteados es que no necesariamente tienen que aplicar de manera directa y mecánica la fórmula que han estudiado en las dos sesiones anteriores, los alumnos tendrán que poner en juego la noción de volumen, la aplicación directa de la fórmula, el cálculo de alguna dimensión dadas otras dimensiones y el volumen, proponer dimensiones para ciertos volúmenes o bien el volumen es un dato que necesitan calcular y operar con otro para dar respuesta al problema. Permita que traten de resolver los problemas en pareja, dé apoyo sin llegar a decir respuestas, por ejemplo, si para el problema del lingote de oro los alumnos no recuerdan la fórmula para calcular el área del trapecio puede remitirlos a la sesión donde se estudió, puede permitir que saquen un formulario, o puede recordarles la fórmula y luego dejar que ellos determinen cómo usarla para resolver el problema.

Pautas para la evaluación formativa

Observe si los alumnos logran:

- Interpretar la representación plana de los prismas.

- Utilizar la fórmula para calcular el volumen de un prisma rectangular.
- Comunicar los procedimientos que utilizaron para obtener el mismo resultado y deducir que la fórmula del volumen es igual a área de la base por altura.
- Calcular el área del rombo, romboide y trapecio.
- Reconocen que la fórmula es la misma para los diferentes tipos de prismas.
- Resolver problemas que impliquen el cálculo del volumen de prismas rectos cuya base es un triángulo o un cuadrilátero.

¿Cómo apoyar?

Si no recuerdan cómo calcular el volumen de un prisma rectangular remítalos a la secuencia 11 o haga un alto grupal para que los alumnos que sí lo recuerdan apoyen a sus compañeros.

Si confunden las alturas (de las bases o del prisma) use los prismas que construyeron para mostrarles cuáles son los distintos elementos de las figuras geométricas que tendrán que identificar (diagonales, base menor, base mayor, altura del romboide, altura del trapecio, altura del prisma).

De no recordar las fórmulas de las áreas, el uso de un formulario es importante pues no se trata de que memoricen tantas fórmulas sino de que las sepan usar.

Si no comprenden el problema a resolver, pida que digan con sus propias palabras de qué trata el problema, apóyese en alumnos que ya hayan entendido para que expliquen al grupo lo que se pide.

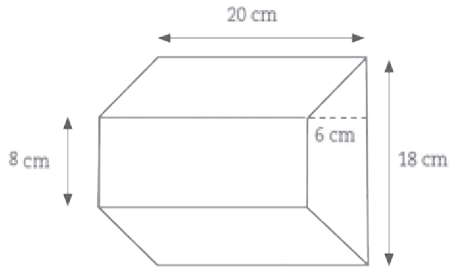
¿Cómo extender?

Plantee problemas como el siguiente:

Se tienen dos prismas, cada uno con un volumen de 48 cm^3. Uno tiene por base un rombo y el otro un trapecio. Completa la tabla:

Base del prisma	Medidas de la base	Altura del prisma
Rombo	Diagonal mayor: ____________ Diagonal menor: ____________	
Trapecio	Base mayor: __________ Base menor: __________ Altura del trapecio ____________	

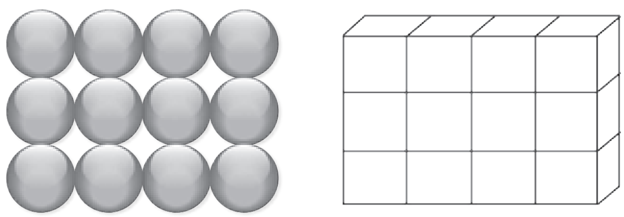
5. Un centímetro cúbico de oro pesa, aproximadamente, 19 gramos. ¿Cuál es el peso del siguiente lingote de oro en forma de prisma trapezoidal?________________



6. El primer cuerpo está formado por canicas de 1cm de diámetro y el segundo, por cubos de 1 cm de arista. ¿Cuál tiene mayor volumen? Argumenten su respuesta.

____

____



Secuencia 26 Medidas de tendencia central 1 (LT, pp. 176-183)

Tiempo de realización	Tres sesiones.
Eje temático	Análisis de datos.
Tema	Estadística.
Aprendizaje esperado	Usa e interpreta las medidas de tendencia central (moda, media aritmética y mediana) y el rango de un conjunto de datos y decide cuál de ellas conviene más en el análisis de los datos en cuestión.
Intención didáctica	Que los estudiantes interpreten la media aritmética, la mediana y la moda como reparto equitativo, mejor estimación de la medida real de un objeto que ha sido medido varias veces, número alrededor del cual se acumulan los datos y representante de un conjunto de datos.
Recursos audiovisuales o informáticos para el alumno	Audiovisuales Sesión 1. *La estadística.* Sesión 2. *Datos estadísticos.* Sesión 3. *Una misma medida, diferentes significados.*
Materiales de apoyo para el maestro	Audiovisual *Los promedios.*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

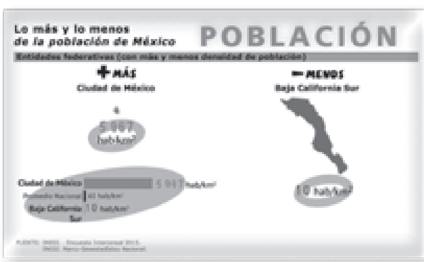
- Sesión 1. Interpreten la media aritmética como el mejor representante de un conjunto de datos y calculen las medidas de tendencia central media aritmética y moda.
- Sesión 2. Interpreten la media aritmética como reparto equitativo en un conjunto de datos.
- Sesión 3. Interpreten la media aritmética como la mejor estimación de la medida real de un objeto que ha sido medido varias veces.

Acerca de...

En la primaria los alumnos aprendieron a calcular la media aritmética, la mediana, y el rango de un conjunto de datos, así como a identificar la moda.

Sesión 1

Para empezar



En la mayoría de estos ejemplos, tomados del sitio web del Inegi, observamos que se utilizan porcentajes, gráficas y valores que corresponden, entre otros, a las medidas de tendencia central. Estas medidas se emplean como punto de referencia para observar el comportamiento de los datos. En las tres sesiones siguientes se presentarán diferentes situaciones en las que se utiliza la media aritmética para analizar información.

En esta secuencia se busca que los estudiantes interpreten a la media aritmética como un representante de un conjunto de datos, como reparto equitativo y como la mejor medida real de un objeto. Para lograrlo se realizan las siguientes actividades:

Se inicia con el análisis de varios conjuntos de datos. Se comparan sus valores centrales en virtud de que tienen condiciones similares. Esta situación propicia la interpretación de la media aritmética como un valor representativo del conjunto de datos.

Después, se analiza una situación que implica un reparto equitativo. Se refiere a la manera de obtener el valor central: "juntar" (sumar) los valores de la variable como si fueran unidades, y repartir equitativamente (dividir) entre todas ellas.

Por último, se plantea una situación en la que se hace una estimación de la medida de un objeto (lápiz). Con ello se hace el análisis de la interpretación de la media aritmética como el mejor estimador de la medida real del objeto (lápiz).

La palabra *promedio* hace referencia a un valor típico o representativo que identifica a todos los datos provenientes de una muestra o una población. La mayoría de las veces se usa la palabra *promedio* como sinónimo de media aritmética, cuando se puede emplear para cualquiera de las tres medidas estadísticas de centro. Por ello, la media aritmética, la mediana y la moda son promedios, porque son valores que se encuentran al centro de una distribución de datos que, por eso mismo es el dato que mejor representará al conjunto. Se usan tres métodos diferentes para encontrar el valor del centro. A veces las tres medidas –mediana, media y moda– pueden ser el mismo valor, pero a menudo son valores distintos. Cuando son desiguales, pueden servir para establecer diferentes interpretaciones de los datos que se quieren resumir.

Sobre las ideas de los alumnos

Pueden albergar ideas erróneas respecto a la interpretación de la media aritmética:

- Confunden los procedimientos de obtención de media, mediana, moda y rango.
- Determinan la mediana seleccionando el dato que está en la posición central sin ordenar los datos.
- Reducen la comprensión del concepto de media aritmética a saberse la definición y sus propiedades. Si los alumnos tienen dificultades para argumentar y describir sus procedimientos, tienden a recitar el algoritmo como una receta, sin sentido ni significado.
- No dan la interpretación adecuada al valor obtenido en el contexto del problema.

a) Consideren el peso de las personas al *inicio* del programa para completar la siguiente tabla.

Valores del primer grupo antes de participar en el programa "Come sano"			
Peso máximo (kg)	Peso mínimo (kg)	Peso más frecuente (kg)	Media aritmética (kg)

b) Ahora completen la tabla con los resultados al *terminar* el programa.

Valores del primer grupo después de participar en el programa "Come sano"			
Peso máximo (kg)	Peso mínimo (kg)	Peso más frecuente (kg)	Media aritmética (kg)

¿Cómo guío el proceso?

En la actividad 2 de la sesión 1, los alumnos deben asociar que el peso más frecuente es la moda del conjunto de datos. Para determinar la media sumarán todos los datos y los dividirán entre el total de datos. Para comunicar los logros sobre la efectividad del programa de nutrición es necesario tener un valor que represente a cada uno de los conjuntos de datos y con base en ello compararlos. La media, por sus propiedades de localización central, puede usarse como ese valor representativo.

En los problemas que se abordan, en la sesión 2 analice con los alumnos la variación del valor de la media en función de la cantidad de objetos y los sujetos que participan en cada repartición, propicie la reflexión en torno a cómo se hace la repartición en cada situación y cómo el valor de la media puede compensarse considerando que los alumnos pueden o no aportar objetos, pero la repartición debe ser equitativa entre los sujetos. La interpretación de la media a través del reparto equitativo tiene ciertas limitaciones, en particular cuando los elementos a repartir no son particionables. Como muestra, la media del número de lápices es de 1.3, pero estos no pueden repartirse entre los alumnos, porque no se pueden partir los lápices. La media puede tomar valores que no corresponden a valores válidos de la variable, lo cual genera problemas en una representación a través del concepto de reparto equitativo, como es el caso del número de hijos, coches, hermanos, etcétera. En situaciones como ésta, no es recomendable usar esta interpretación.

En la sesión 3 el alumno debe hacer estimaciones sobre la medida de un lápiz y debe considerar que al medir se cometen errores de medición, por lo que para lograr compensarlos se deben analizar los valores obtenidos y determinar que la media representa mejor la medida real del objeto.

Pautas para la evaluación formativa

Para evaluar este aprendizaje los alumnos deben interpretar las medidas de tendencia central:

- En situaciones de medición, la media aritmética debe ser interpretada como representante del conjunto de datos con ese valor se puede operar.
- El reparto equitativo implica una repartición equilibrada de los objetos entre los sujetos participantes.
- El mejor estimador de la medida real de un objeto suele ser la media aritmética, el valor que mejor representa a las mediciones realizadas al objeto.

¿Cómo apoyar?

Si observa que algunos alumnos no saben qué hacer, sugiérales que recuerden cómo obtenían la media aritmética, mediana, moda y rango de un conjunto de datos. Haga énfasis en que sólo si los datos son numéricos se puede obtener todas las medidas. Propicie que los alumnos analicen las características de los datos como el dato mayor y el menor, el rango de la variable, el dato más frecuente, y el tipo de variable, entre otros.

Pueden usar la calculadora o la hoja electrónica de cálculo para realizar cálculos numéricos, e incluso emplear las funciones que tienen programadas para determinar las medidas de tendencia central.

¿Cómo extender?

Plantee situaciones con datos agrupados en tablas y gráficas, con variables ordinales o nominales como:

a) El grupo sanguíneo de 10 alumnos es:
A, O+, A, AB, B, B, A, O+, O+, O+
¿Cuál es la medida que representa al conjunto de datos?

b) Se le preguntó a un grupo de personas acerca de la cantidad de libros que leyó durante el año 2018, y las respuestas fueron:

Cantidad de libros	Cantidad de personas
0	18
1	20
2	14
3	7
4	12
9	5
20	3

¿Cuál medida representa al conjunto de datos?

Evaluación (LT, pp. 184-185)

Con el fin de valorar algunos de los aprendizajes logrados en este bloque y complementarlos con los resultados obtenidos por medio de otros instrumentos empleados sistemáticamente durante el desarrollo de las secuencias, se proponen 14 situaciones o problemas que se corresponden con los diez aprendizajes esperados que se estudiaron en este bloque.

Reactivos 1 y 2. Fracciones y decimales
Estos reactivos permiten evaluar los conocimientos y habilidades de los estudiantes respecto de las fracciones. El reactivo 1 consiste en obtener la fracción equivalente a una fracción dada. Una estrategia de resolución es escribir numerador y denominador como factores de números primos, y luego simplificar la fracción. De igual manera, se pueden simplificar las fracciones e identificar cuál de las opciones es equivalente a la fracción dada.
El problema 2 consiste en ordenar números decimales y fracciones de menor a mayor. Una estrategia es ordenar por separado los decimales y las fracciones. Los decimales se pueden ordenar en forma de lista y alinearlos, con respecto al punto decimal, para luego comparar los valores que ocupa cada posición después del punto.
Para las fracciones, se pueden convertir a decimal y comparar las cifras mediante el procedimiento anterior.

Reactivo 3. Multiplicación y división
El reactivo implica el uso de estrategias eficientes de cálculo por parte de los estudiantes, en este caso para multiplicar un decimal por un múltiplo de 10. La estrategia de cálculo que pueden aplicar consiste en recorrer el punto decimal hacia la derecha, tantas cifras como ceros tenga el factor que es múltiplo de 10.

Reactivo 4. Jerarquía de operaciones
Éste permite evaluar los conocimientos y habilidades que los estudiantes lograron respecto al cálculo de operaciones básicas. El reactivo implica efectuar cálculos con operaciones básicas de números decimales.

Reactivo 5. Perímetros y áreas
Este reactivo está pensado para evaluar dos aspectos. El primero y más obvio es el dominio de fórmulas y conceptos para obtener el perímetro de cualquier figura geométrica. El segundo es el de la manipulación de términos algebraicos, que es una competencia que a esta altura del curso los alumnos ya deben dominar.

Reactivo 6 y 7. Proporcionalidad directa
Con estos problemas se podrán valorar los avances de los estudiantes en torno a los procedimientos para obtener el valor faltante, en situaciones de proporcionalidad directa.
La estructura de ambos reactivos presenta dos cantidades que se relacionan y el valor de una de ellas varía; luego se debe obtener el nuevo valor de la segunda cantidad al variarla en la misma proporción. La solución se obtiene mediante la aplicación de estrategias multiplicativas; por ejemplo, la regla de tres simple o la obtención del valor unitario. Identifique si hay estudiantes que emplean estrategias aditivas (sumar la diferencia de las dos cantidades, a una de éstas para obtener el valor faltante); si es así, oriéntelos para que verifiquen sus respuestas con otros casos similares y desechen este tipo de procedimiento.

Reactivo 8. Ecuaciones de primer grado
Este reactivo permitirá valorar los procedimientos que siguen los estudiantes para resolver ecuaciones de la forma

$$x + a = b$$

Como estrategia se puede resolver la ecuación aplicando la transposición de términos, respetando la jerarquía de las operaciones. Otra opción es sustituir los valores señalados en las opciones de respuesta y valorar cada uno como solución de la ecuación. Este procedimiento impulsa la ejecución de la fase de comprobación, como parte de la estrategia de resolución de una ecuación.

Reactivos 9 y 13. Variación lineal
Estos reactivos sirven para valorar el desempeño

en el manejo de la representación algebraica en una situación de variación lineal.

En el reactivo 9 se trata de obtener la expresión algebraica que modele una situación de variación lineal, la que consiste en relacionar el costo del servicio de teléfono en función del tiempo de llamada.

El reactivo 13 pide identificar, en diferentes expresiones algebraicas, aquellas que tienen valores comunes de la pendiente y de la ordenada al origen, respectivamente. La estrategia consistirá en comparar cada expresión dada, con la expresión general de una función lineal $y = mx + b$.

Reactivo 10. Sucesiones.

En esta situación se podrá evaluar la estrategia que siguen los estudiantes para obtener el número de elementos que contiene una figura en una sucesión.

La estrategia consiste en dibujar la figura faltante de la sucesión y contar uno a uno los elementos que la conforman. Otra forma de encontrar el resultado es por medio de la fórmula $a_n = a_1 + (n-1)d$; donde a_n representa el número de elementos que tendrá la figura n de la sucesión, a_1 es el primer término de la sucesión, n es el término de la sucesión en cuestión y d es la diferencia de elementos de las primeras dos figuras. Puede solicitar que escriban la manera de obtener el número de elementos de la figura indicada, con la intención de conocer el nivel de comprensión y la capacidad de uso de reglas verbales y algebraicas que tienen. Considere que los alumnos están en proceso de construcción de este aprendizaje y la recomendación es para que tenga elementos para conocer cabalmente el avance que ellos van obteniendo, se espera que, cada vez más, los alumnos de su grupo hagan un uso de expresiones algebraicas.

Reactivo 11. Construcción de triángulos

La situación planteada permite valorar los conocimientos y habilidades de identificación de los criterios de unicidad y existencia para la construcción de triángulos. Como parte de la estrategia de solución, los estudiantes utilizarán los criterios que deben cumplir los triángulos para determinar su existencia, en cuanto a las medidas de sus ángulos y de sus lados.

La construcción de los triángulos en función de las medidas indicadas en las opciones de respuesta puede ser un abordaje poco eficiente; no obstante, se puede emplear como una práctica para que los estudiantes verifiquen sus resultados y consoliden este aprendizaje.

Reactivo 12. Medidas de tendencia central.

Este reactivo sirve para valorar la pertinencia de obtener el valor promedio de un conjunto de datos mediante la media aritmética. Al respecto, los estudiantes pueden revisar la secuencia 24 y sus notas.

Reactivo 14. Volumen de prismas rectos.

Consiste en calcular el volumen de una caja grande y de varias cajas o paquetes chicos, para luego identificar el número de cajas chicas que pueden acomodarse en la grande. Este problema permite valorar el manejo de fórmulas geométricas para obtener medidas. También permite conocer la estrategia que el alumno sigue para identificar el número máximo de cajas pequeñas que caben en la grande, debido a que sobra espacio en la caja grande.

14. En una caja de plástico se van a acomodar paquetes de ate para su venta.

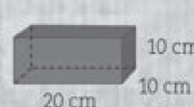
a) ¿Qué volumen ocupa la caja? ________

b) ¿Qué volumen ocupa un paquete de ate? ____________________

c) ¿Cuántos paquetes de ate se transportan en la caja como máximo? ________

Caja

Paquete



Anexo 1. Recortables

Esta sección contiene material recortable para apoyarle en el desarrollo de las secuencias que abordan aspectos relacionados con el volumen de prismas rectos.

Es importante que cuente con los desarrollos planos de los cuerpos geométricos que se trabajan frecuentemente durante las secuencias para que pueda modelarlos, con el fin de que los alumnos tengan una percepción concreta de tales cuerpos.

Puede recortarlos y pegarlos sobre una hoja de cartón para que tengan una mayor durabilidad.

Si usted lo considera pertinente, proporcione a los alumnos los desarrollos planos para que los reproduzcan y los armen, así podrán apreciar las características de sus caras y encontrar las relaciones entre las dimensiones de sus lados y el volumen de los cuerpos. Además, puede variar las medidas de alguno de los lados y mantener fijos los demás para que aprecien la manera en que tales cambios afectan el volumen de los cuerpos.

Los cinco recortables que aparecen al final le serán de mucha utilidad para trabajar en particular la sesión 2 de la secuencia 25, donde los alumnos podrán observar lo que sucede con el volumen de un nuevo cuerpo que se genera cuando se unen varios prismas.

Estamos convencidos de que los alumnos y usted mismo se sorprenderán ante las maravillas que se pueden apreciar mediante el manejo de material concreto en la construcción de los conceptos geométricos.