# Matemáticas

Segundo grado

TELEsecundaria

# Matemáticas
## Segundo grado

EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

TELEsecundaria

*Matemáticas. Segundo grado. Telesecundaria* fue elaborado y editado por la Dirección General de Materiales Educativos de la Secretaría de Educación Pública.

**Secretaría de Educación Pública**
Esteban Moctezuma Barragán

**Subsecretaría de Educación Básica**
Marcos Augusto Bucio Mújica

**Dirección General de Materiales Educativos**
Aurora Almudena Saavedra Solá

*Coordinación de la serie*
Lino Contreras Becerril

*Coordinación de contenidos*
María del Carmen Larios Lozano

*Coordinación de autores*
Olga Leticia López Escudero

*Autores*
Hugo Hipólito Balbuena Corro, Silvia García Peña,
Olga Leticia López Escudero

*Supervisión de contenidos*
José Alfredo Rutz Machorro, Jessica Evelyn Caballero Valenzuela,
Juanita Espinoza Estrada, Esperanza Issa González,
María Luisa Luna Díaz

*Revisión técnico-pedagógica*
Óscar Alfredo Palmas Velasco, Teresa de Jesús Mezo Peniche

*Coordinación editorial*
Raúl Godínez Cortés

*Supervisión editorial*
Jessica Mariana Ortega Rodríguez

*Cuidado de la edición*
Humberto Xocoyotzin Calles Guerrero

*Lectura*
María Fernanda Heredia Rojas

*Producción editorial*
Martín Aguilar Gallegos

*Actualización de archivos*
Omar Alejandro Morales Rodríguez

*Preprensa*
Citlali María del Socorro Rodríguez Merino

*Iconografía*
Diana Mayén Pérez, Irene León Coxtinica, Emmanuel Adamez Téllez

*Portada*
Diseño: Martín Aguilar Gallegos
Iconografía: Irene León Coxtinica
Imagen: *Los cargadores* (detalle), 1923-1924, Jean Charlot (1898-1979), fresco, 4.69 × 2.30 m, ubicado en el Patio de las Fiestas, planta baja, D. R. © Secretaría de Educación Pública, Dirección General de Proyectos Editoriales y Culturales/fotografía de Gerardo Landa Rojano; reproducción autorizada por el Instituto Nacional de Bellas Artes y Literatura, 2021; D. R. © Sociedad Mexicana de Autores de las Artes Plásticas.

*Servicios editoriales*
Solar, Servicios Editoriales, S. A. de C. V

*Coordinación*
Elizabeth González González

*Formación*
Víctor Daniel Abarca Hernández, Rosa Virginia Cruz Cruz

*Diseño*
Roberto Ángel Flores Angulo

*Ilustración*
Roberto Ángel Flores Angulo, Carolina Tovar González, David Núñez Bahena, Brian González

Primera edición, 2019
Primera reimpresión, 2021 (ciclo escolar 2021-2022)



ISBN: 978-607-551-319-5

Impreso en México
DISTRIBUCIÓN GRATUITA. PROHIBIDA SU VENTA

*Matemáticas. Segundo grado. Telesecundaria*
se imprimió por encargo de la
Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos,
en los talleres de
con domicilio en
en el mes de de 20 .
El tiraje fue de ejemplares.

En los materiales dirigidos a las alumnas y los alumnos de Telesecundaria, la Secretaría de Educación Pública (SEP) emplea los términos: alumno(s), maestro(s) y padres de familia aludiendo a ambos géneros, con la finalidad de facilitar la lectura. Sin embargo, este criterio editorial no demerita los compromisos que la SEP asume en cada una de las acciones encaminadas a consolidar la equidad de género.

# Presentación

Este libro fue elaborado para cumplir con el anhelo compartido de que en el país se ofrezca una educación con equidad y calidad, en la que todos los alumnos aprendan, sin importar su origen, su condición personal, económica o social, y en la que se promueva una formación centrada en la dignidad humana, la solidaridad, el amor a la patria, el respeto y cuidado de la salud, así como la preservación del medio ambiente.

El uso de este libro, articulado con los recursos audiovisuales e informáticos del portal de Telesecundaria, propicia la adquisición autónoma de conocimientos relevantes y el desarrollo de habilidades y actitudes encaminadas hacia el aprendizaje permanente. Su estructura obedece a las necesidades propias de los alumnos de la modalidad de Telesecundaria y a los contextos en que se desenvuelven. Además, moviliza los aprendizajes con el apoyo de materiales didácticos presentados en diversos soportes y con fines didácticos diferenciados; promueve la interdisciplinariedad y establece nuevos modos de interacción.

En su elaboración han participado alumnos, maestras y maestros, autoridades escolares, padres de familia, investigadores y académicos; su participación hizo posible que este libro llegue a las manos de todos los estudiantes de esta modalidad en el país. Con las opiniones y propuestas de mejora que surjan del uso de esta obra en el aula se enriquecerán sus contenidos, por lo mismo los invitamos a compartir sus observaciones y sugerencias a la Dirección General de Materiales Educativos de la Secretaría de Educación Pública y al correo electrónico: librosdetexto@nube.sep.gob.mx.

# Índice

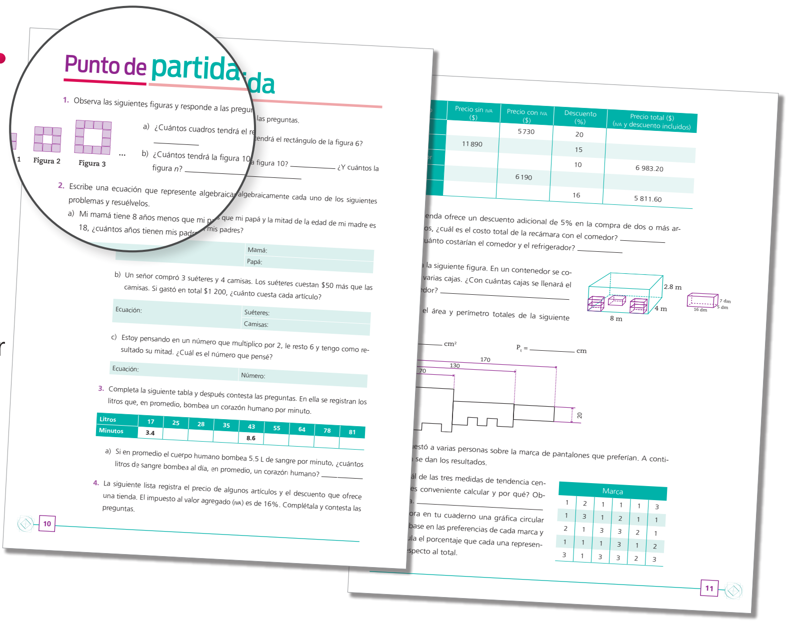
# Conoce tu libro

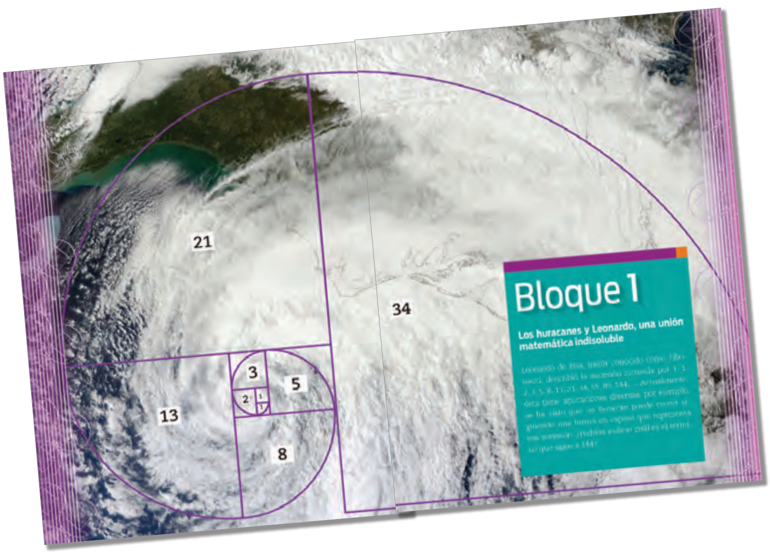
El libro que tienes en tus manos fue elaborado especialmente para ti. Junto con tus compañeros y el apoyo de tu maestro, irás construyendo un saber matemático que se convertirá en una poderosa herramienta para que puedas resolver una diversidad de problemas cotidianos.

Tu libro está organizado de la siguiente manera:

## Punto de partida

Es una oportunidad para que identifiques los conocimientos matemáticos con que cuentas y que te van a ser de utilidad para empezar este ciclo.




## Entrada de bloque

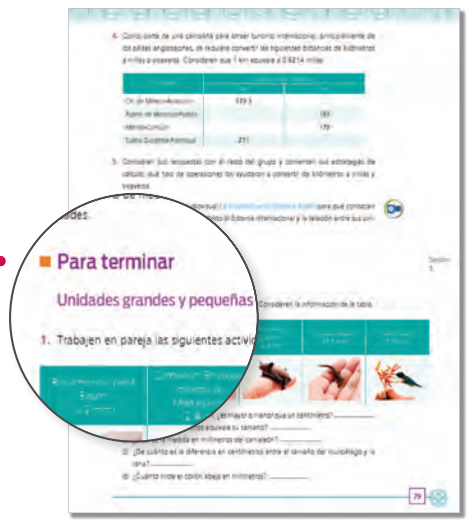
Al inicio de cada bloque se presenta una ilustración acompañada de un texto, que aluden a la importancia de los conocimientos matemáticos que se usan en diversos ámbitos de la vida y que estudiarás en el bloque.


## Para empezar

Te proporciona un acercamiento a los conocimientos que aprenderás, mediante situaciones matemáticas o cotidianas.

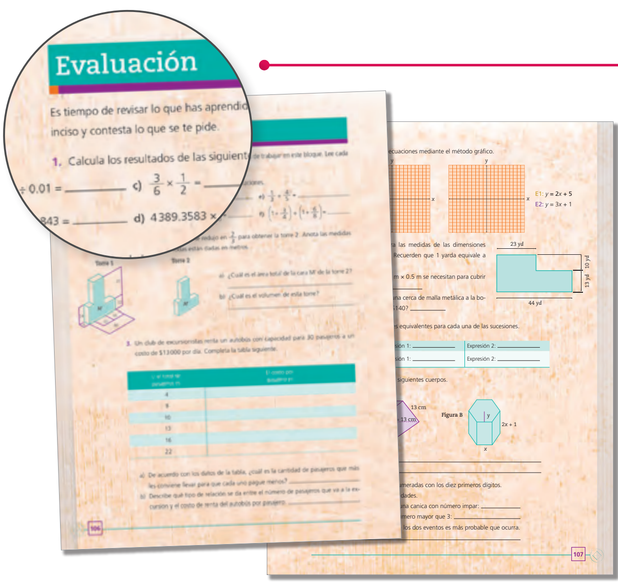

## Manos a la obra

Te ofrece una serie de actividades que te permitirán trabajar y aprender los contenidos.




## Para terminar

Contiene actividades para reflexionar, revisar, recuperar y hacer conclusiones sobre los temas estudiados.

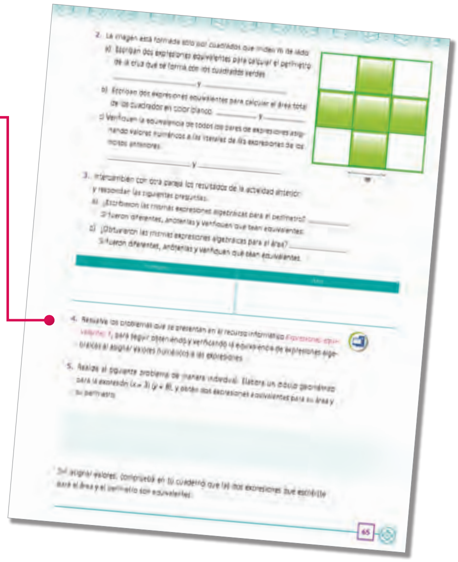


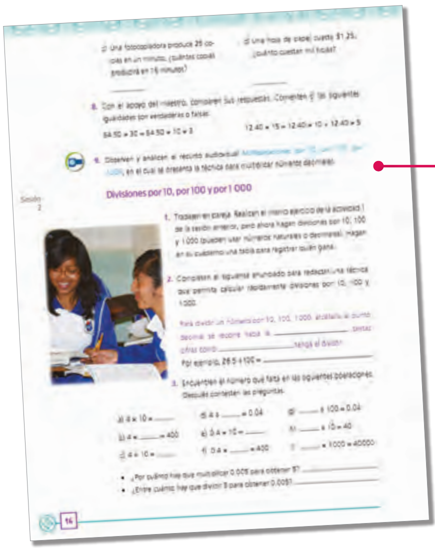

## Evaluación

Al final de cada bloque se presentan actividades de evaluación que te ayudarán a valorar el logro de tus aprendizajes.

## Recursos informáticos

Con esta herramienta tendrás oportunidad de practicar los procedimientos y aplicar los conceptos que aprendiste, a través de un ambiente digital interactivo.



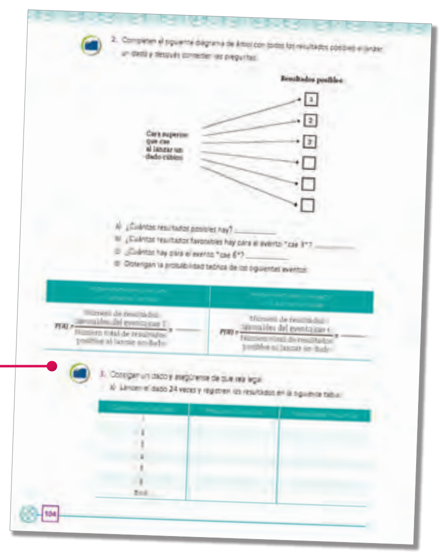


## Recursos audiovisuales

Te permiten profundizar, complementar e integrar lo que estás estudiando. Para verlos sólo tienes que conectarte a tu Portal de Telesecundaria.

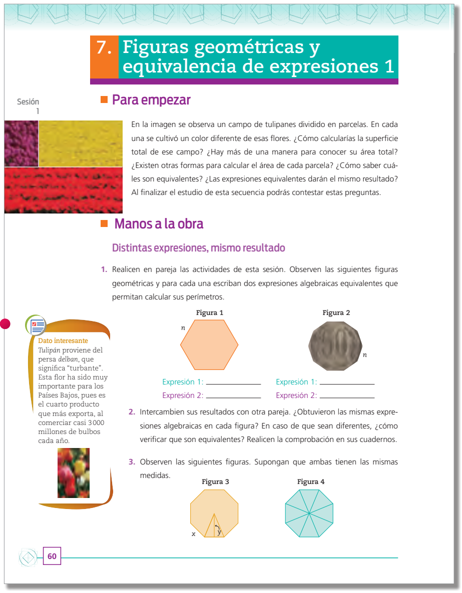
## Carpeta

A lo largo del libro hay determinados ejercicios que se señalan con este ícono, a fin de que tengas un registro de tu avance en el dominio y conocimiento de los temas de la asignatura.



# Secciones de apoyo

Se trata de textos breves que te ofrecen información que enriquece el contenido del libro o que te ayudarán a comprenderlo mejor:



7. Figuras geométricas y equivalencia de expresiones 1

Sesión 1

Para empezar

En la imagen se observa un campo de tulipanes dividido en parcelas. En cada una se cultivó un color diferente de esas flores. ¿Cómo calcularías la superficie total de ese campo? ¿Hay más de una manera para conocer su área total? ¿Existen otras formas para calcular el área de cada parcela? ¿Cómo saber cuáles son equivalentes? ¿Las expresiones equivalentes darán el mismo resultado? Al finalizar el estudio de esta secuencia podrás contestar estas preguntas.

Manos a la obra

Distintas expresiones, mismo resultado

1. Realicen en pareja las actividades de esta sesión. Observen las siguientes figuras geométricas y para cada una escriban dos expresiones algebraicas equivalentes que permitan calcular sus perímetros.

Dato interesante
Tulipán proviene del persa *delban*, que significa "turbante". Esta flor ha sido muy importante para los Países Bajos, pues es el cuarto producto que más exporta, al comercializar casi 3 000 millones de bulbos cada año.

Figura 1 — Expresión 1: ______ Expresión 2: ______

Figura 2 — Expresión 1: ______ Expresión 2: ______

2. Intercambien sus resultados con otra pareja. ¿Obtuvieron las mismas expresiones algebraicas en cada figura? En caso de que sean diferentes, ¿cómo verificar que son equivalentes? Realicen la comprobación en sus cuadernos.

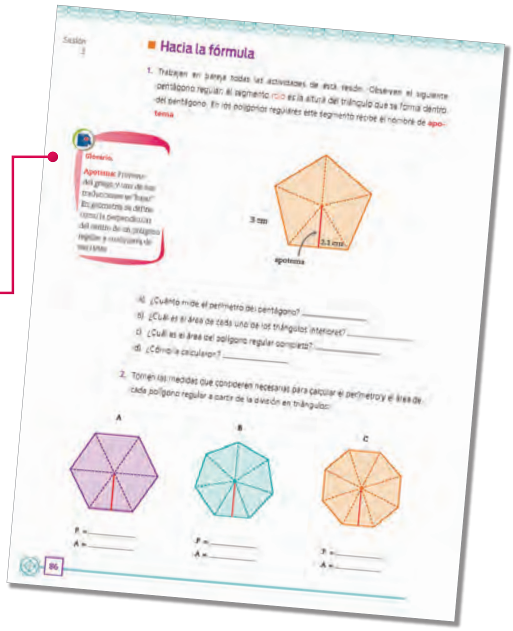
3. Observen las siguientes figuras. Supongan que ambas tienen las mismas medidas.

Figura 3 Figura 4

60

Dato interesante

Glosario



Hacia la fórmula

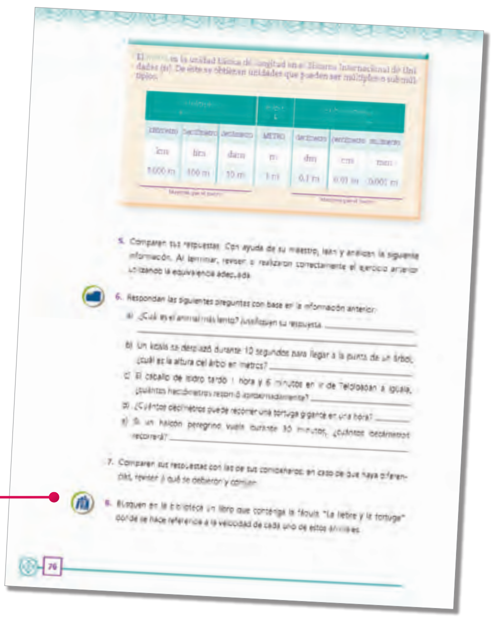
1. Trabajen en pareja todas las actividades de esta sesión. Observen el siguiente pentágono regular. El segmento rojo es la altura del triángulo que se forma dentro del pentágono. En los polígonos regulares este segmento recibe el nombre de apotema.

Glosario
Apotema: ...

a) ¿Cuánto mide el perímetro del pentágono?
b) ¿Cuál es el área de cada uno de los triángulos interiores?
c) ¿Cuál es el área del polígono regular completo?
d) ¿Cómo la calcularon?

2. Tomen las medidas que consideren necesarias para calcular el perímetro y el área de cada polígono regular a partir de la división en triángulos.

86



5. Comparen sus respuestas. Con ayuda de su maestro, lean y analicen la siguiente información. Al terminar, revisen si realizaron correctamente el ejercicio anterior utilizando la equivalencia adecuada.

6. Respondan las siguientes preguntas con base en la información anterior.

7. Comparen sus respuestas con las de sus compañeros; en caso de que haya diferencias, revisen en qué se debieron y corrijan.

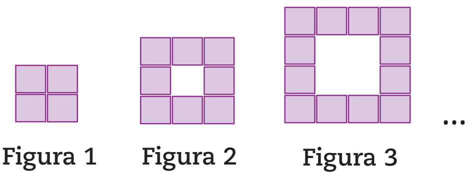
8. Busquen en la biblioteca un libro que contenga la fábula "La liebre y la tortuga" donde se hace referencia a la velocidad de cada uno de estos animales.

76

Visita la biblioteca

# Punto de partida

1. Observa las siguientes figuras y responde a las preguntas.




a) ¿Cuántos cuadros tendrá el rectángulo de la figura 6? ______________

b) ¿Cuántos tendrá la figura 10? _______________ ¿Y cuántos la figura $n$? __________________________

2. Escribe una ecuación que represente algebraicamente cada uno de los siguientes problemas y resuélvelos.

a) Mi mamá tiene 8 años menos que mi papá y la mitad de la edad de mi madre es 18, ¿cuántos años tienen mis padres?

| | |
|---|---|
| Ecuación: | Mamá: |
| | Papá: |

b) Un señor compró 3 suéteres y 4 camisas. Los suéteres cuestan \$50 más que las camisas. Si gastó en total \$1 200, ¿cuánto cuesta cada artículo?

| | |
|---|---|
| Ecuación: | Suéteres: |
| | Camisas: |

c) Estoy pensando en un número que multiplico por 2, le resto 6 y tengo como resultado su mitad. ¿Cuál es el número que pensé?

| | |
|---|---|
| Ecuación: | Número: |

3. Completa la siguiente tabla y después contesta las preguntas. En ella se registran los litros que, en promedio, bombea un corazón humano por minuto.

| Litros | 17 | 25 | 28 | 35 | 43 | 55 | 64 | 78 | 81 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Minutos | 3.4 | | | | 8.6 | | | | |

a) Si en promedio el cuerpo humano bombea 5.5 L de sangre por minuto, ¿cuántos litros de sangre bombea al día, en promedio, un corazón humano? ______________

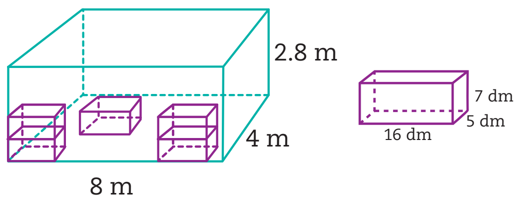
4. La siguiente lista registra el precio de algunos artículos y el descuento que ofrece una tienda. El impuesto al valor agregado (IVA) es de 16%. Complétala y contesta las preguntas.

| Artículo | Precio sin IVA ($) | Precio con IVA ($) | Descuento (%) | Precio total ($) (IVA y descuento incluidos) |
|---|---|---|---|---|
| Lavadora | | 5 730 | 20 | |
| Comedor | 11 890 | | 15 | |
| Refrigerador | | | 10 | 6 983.20 |
| Estufa | | 6 190 | | |
| Recámara | | | 16 | 5 811.60 |

a) La tienda ofrece un descuento adicional de 5% en la compra de dos o más artículos, ¿cuál es el costo total de la recámara con el comedor? ____________

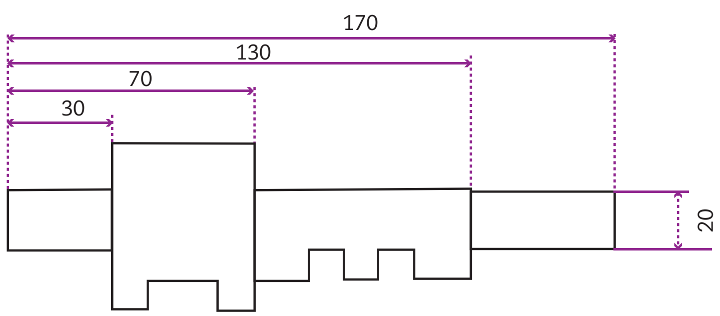
b) ¿Y cuánto costarían el comedor y el refrigerador? ____________

**5.** Observa la siguiente figura. En un contenedor se colocarán varias cajas. ¿Con cuántas cajas se llenará el contenedor? ________________________




**6.** Calcula el área y perímetro totales de la siguiente figura.

$A_t$ = ____________ cm²     $P_t$ = ____________ cm

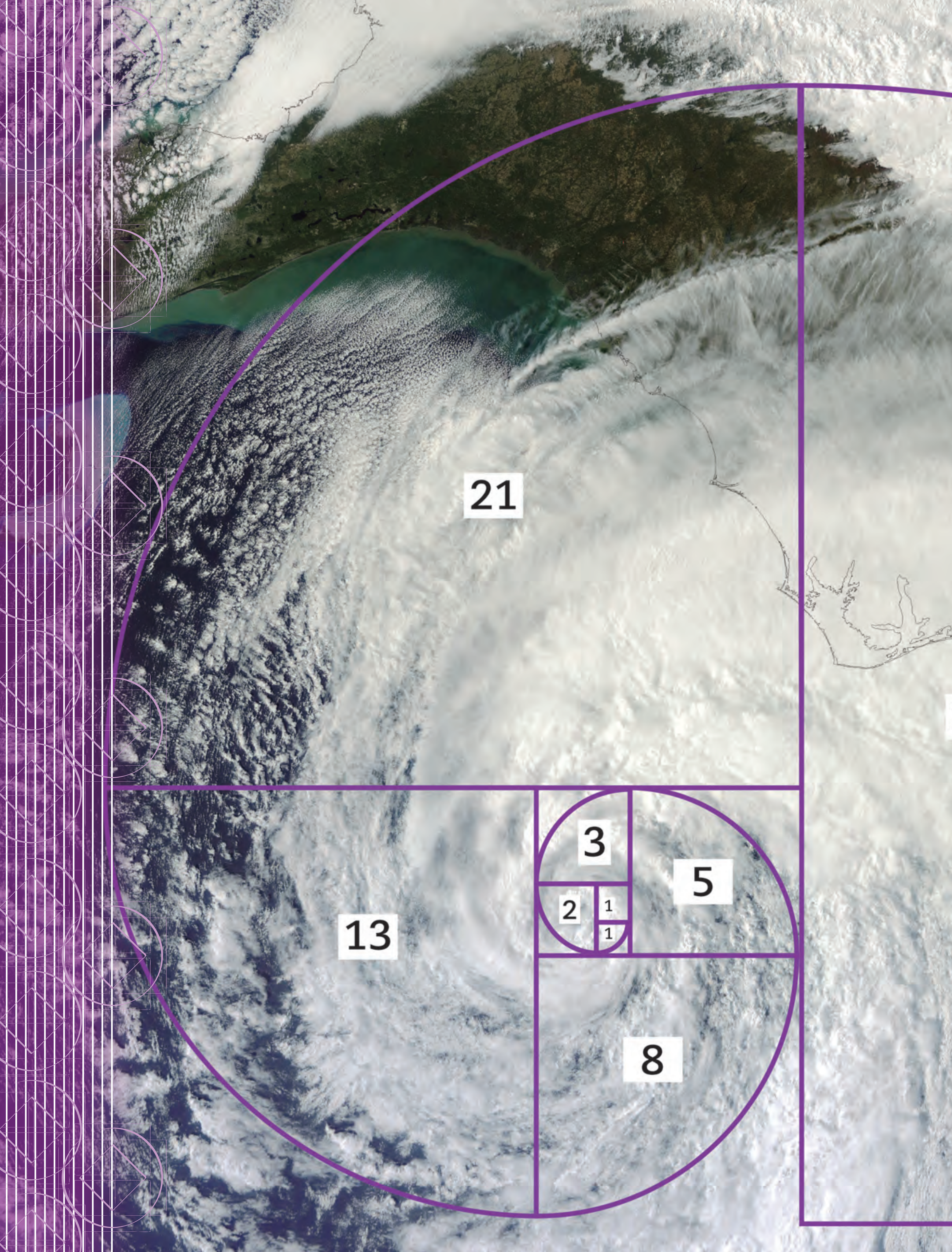


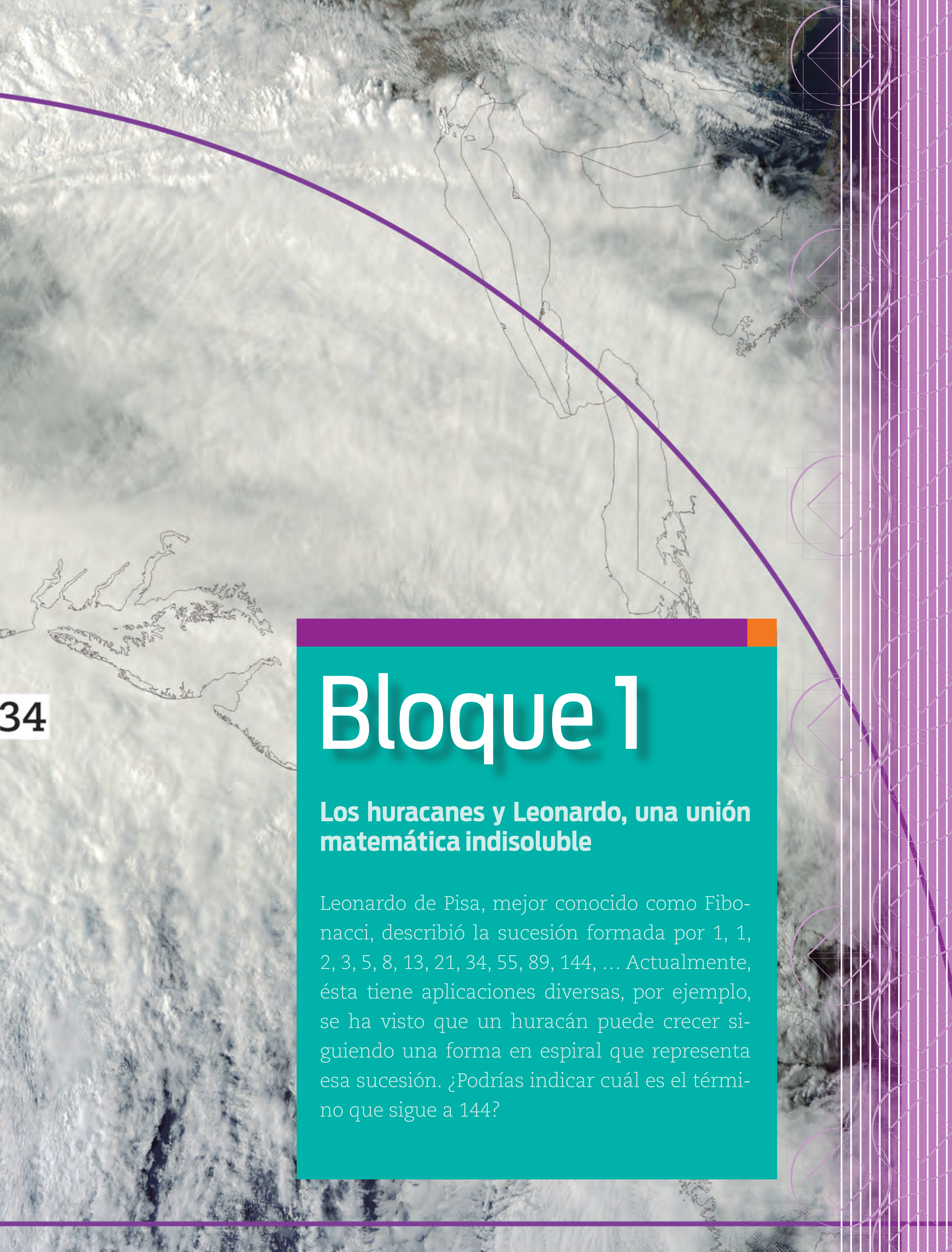

**7.** Se encuestó a varias personas sobre la marca de pantalones que preferían. A continuación se dan los resultados.

a) ¿Cuál de las tres medidas de tendencia central es conveniente calcular y por qué? Obtenla. ________________________

b) Elabora en tu cuaderno una gráfica circular con base en las preferencias de cada marca y calcula el porcentaje que cada una representa respecto al total.

| Marca | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 3 |
| 1 | 3 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 3 | 3 | 2 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 3 | 1 | 2 |
| 3 | 1 | 3 | 3 | 2 | 3 |


21
3
5
2
1
1
13
8





# Bloque 1

## Los huracanes y Leonardo, una unión matemática indisoluble

Leonardo de Pisa, mejor conocido como Fibonacci, describió la sucesión formada por 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ... Actualmente, ésta tiene aplicaciones diversas, por ejemplo, se ha visto que un huracán puede crecer siguiendo una forma en espiral que representa esa sucesión. ¿Podrías indicar cuál es el término que sigue a 144?

# 1. Multiplicación y división de números decimales positivos

Sesión 1

## Para empezar


La multiplicación y la división son dos operaciones inversas una de la otra. Si un número $x$ se multiplica por 5, el resultado es $5x$; si este número se divide entre 5, el resultado es $x$. Multiplicar por 5 y dividir entre 5 equivale a multiplicar por $\frac{5}{5}$, que es igual a 1; por ello, la cantidad original no se altera.

Por otra parte, las multiplicaciones y las divisiones por potencias de 10 (10, 100, 1 000, etcétera), junto con la propiedad descrita en el párrafo anterior, permiten resolver multiplicaciones y divisiones con números decimales que ayudan a solucionar una variedad de problemas. Por ejemplo, al finalizar esta secuencia sabrás cuánto se pagará por distintos productos cuyo precio tiene números decimales, como en la ilustración.

## Manos a la obra

### Multiplicaciones por 10, por 100 y por 1 000

**1.** Trabajen en pareja y realicen el siguiente ejercicio.

a) Un integrante de la pareja deberá proponer una multiplicación de un número natural por 10, 100 o 1 000. Por ejemplo: 25 × 10; 18 × 100; 75 × 1 000, etcétera.

b) Quien proponga la operación la resolverá con una calculadora, mientras que el otro con papel y lápiz.

c) El primero que diga el resultado correcto se anotará un punto.

d) Después de cinco operaciones, intercambiarán la calculadora.

**2.** Después de cuatro rondas de cinco multiplicaciones cada una, expliquen cómo se obtiene el resultado de multiplicar un número natural por 10, 100 o 1 000 completando el siguiente enunciado.

Para multiplicar un número natural por 10, 100 o 1 000, ______________________________

________________________________________________________________

**3.** Realicen el mismo ejercicio de la actividad 1, pero ahora multipliquen un número decimal por 10, 100 o 1 000.

a) Utilicen la siguiente tabla para marcar con una palomita (✓) al que gane en cada operación. Debajo de la letra "J" (jugador) escriban la letra inicial de su nombre.

| J | Primera ronda | | | | | Segunda ronda | | | | | Tercera ronda | | | | | Cuarta ronda | | | | | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

b) Al terminar la cuarta ronda, formulen una técnica que permita multiplicar rápidamente un número decimal por 10, 100 o 1 000:

Para multiplicar un número decimal por 10, 100 o 1 000, ____________________

______________________________________________________________

**4.** Con el apoyo de su maestro, elijan alguno de los enunciados anteriores y, con base en lo que dice, resuelvan algunas multiplicaciones por potencias de 10. Verifiquen los resultados con una calculadora.

**5.** Empleen las técnicas que formularon y resuelvan los siguientes problemas.

a) Un kilogramo de harina de maíz cuesta $15.00, cien kilogramos cuestan: __________

b) Un litro de aceite comestible cuesta $25.50, diez litros cuestan: __________

c) Una lata de atún cuesta $16.30, cien latas cuestan: __________

d) Un kilogramo de azúcar cuesta $17.90, cien kilogramos cuestan: __________

e) Un bolillo cuesta $1.70, mil bolillos cuestan: __________

f) Un kilogramo de huevo cuesta $25.80, diez kilogramos cuestan: __________

**6.** Comenten en grupo cómo resolvieron los problemas en los que tuvieron que multiplicar un decimal por 10, 100 o 1 000. Redacten en su cuaderno una nota que les permita recordarlo.

**7.** Usen las multiplicaciones por potencias de 10 para resolver los siguientes problemas.

a) Una lata de leche en polvo cuesta $64.50, ¿cuánto cuestan 30 latas? __________

b) Un kilogramo de tortillas de maíz cuesta $12.40, ¿cuánto cuestan 15 kg? __________

c) Una fotocopiadora produce 25 copias en un minuto, ¿cuántas copias producirá en 15 minutos?

___________

d) Una hoja de papel cuesta $1.25, ¿cuánto cuestan mil hojas?

___________

**8.** Con el apoyo del maestro, comparen sus respuestas. Comenten si las siguientes igualdades son verdaderas o falsas:

$64.50 \times 30 = 64.50 \times 10 \times 3$

$12.40 \times 15 = 12.40 \times 10 + 12.40 \times 5$

**9.** Observen y analicen el recurso audiovisual *Multiplicaciones por 10, por 100, por 1 000*, en el cual se presenta la técnica para multiplicar números decimales.

Sesión 2

## Divisiones por 10, por 100 y por 1 000

**1.** Trabajen en pareja. Realicen el mismo ejercicio de la actividad 1 de la sesión anterior, pero ahora hagan divisiones por 10, 100 y 1 000 (pueden usar números naturales o decimales). Hagan en su cuaderno una tabla para registrar quién gana.

**2.** Completen el siguiente enunciado para redactar una técnica que permita calcular rápidamente divisiones por 10, 100 y 1 000.

Para dividir un número por 10, 100, 1 000, etcétera, el punto decimal se recorre hacia la ______________ tantas cifras como ______________ tenga el divisor.

Por ejemplo, 28.5 ÷100 = ______________

**3.** Encuentren el número que falta en las siguientes operaciones. Después contesten las preguntas.

a) $4 \times 10 =$ ______

b) $4 \times$ ______ $= 400$

c) $4 \div 10 =$ ______

d) $4 \div$ ______ $= 0.04$

e) $0.4 \times 10 =$ ______

f) $0.4 \times$ ______ $= 400$

g) ______ $\div 100 = 0.04$

h) ______ $\div 10 = 40$

i) ______ $\times 1\,000 = 40\,000$

- ¿Por cuánto hay que multiplicar 0.005 para obtener 5? ______________
- ¿Entre cuánto hay que dividir 5 para obtener 0.005? ______________

**4.** Resuelvan las siguientes multiplicaciones con ayuda de la calculadora y averigüen cuál es el efecto de multiplicar por 0.1

a) $6 \times 0.1 =$ ________ b) $60 \times 0.1 =$ ________ c) $0.6 \times 0.1 =$ ________ d) $0.06 \times 0.1 =$ ________

Subrayen la frase que completa correctamente el siguiente enunciado.

Multiplicar por 0.1, que equivale a $\frac{1}{10}$, tiene el mismo efecto que:

- multiplicar por 10
- multiplicar por 100
- dividir entre 10
- dividir entre 100

**5.** Resuelvan las siguientes multiplicaciones con ayuda de la calculadora y averigüen cuál es el efecto de multiplicar por 0.01

a) $25 \times 0.01 =$ ________ b) $250 \times 0.01 =$ ________ c) $2.5 \times 0.01 =$ ________ d) $0.25 \times 0.01 =$ ________

Subrayen la frase que completa correctamente el siguiente enunciado.

Multiplicar por 0.01, que equivale a $\frac{1}{10}$, tiene el mismo efecto que:

- multiplicar por 10
- multiplicar por 100
- dividir entre 10
- dividir entre 100

**6.** Resuelvan las siguientes divisiones con ayuda de la calculadora y averigüen cuál es el efecto de dividir entre 0.1

a) $15 \div 0.1 =$ ________ b) $150 \div 0.1 =$ ________ c) $1.5 \div 0.1 =$ ________ d) $0.15 \div 0.1 =$ ________

Subrayen la frase que completa correctamente el siguiente enunciado.

Dividir entre 0.1, que equivale a $\frac{1}{10}$, tiene el mismo efecto que:

- multiplicar por 10
- multiplicar por 100
- dividir entre 10
- dividir entre 100

**7.** Resuelvan las siguientes divisiones con ayuda de la calculadora y averigüen cuál es el efecto de dividir entre 0.01

a) $15 \div 0.01 =$ ________ b) $150 \div 0.01 =$ ________ c) $1.5 \div 0.01 =$ ________ d) $0.15 \div 0.01 =$ ________

Subrayen la frase que completa correctamente el siguiente enunciado.

Dividir entre 0.01, que equivale a $\frac{1}{100}$, tiene el mismo efecto que:

- multiplicar por 10
- multiplicar por 100
- dividir entre 10
- dividir entre 100

8. Resuelvan las siguientes operaciones.

a) $0.5 \times 0.1 =$ __________

b) $0.8 \times$ __________ $= 0.08$

c) $0.9 \div 0.1 =$ __________

d) $0.3 \div$ __________ $= 3$

e) $0.7 \times 0.01 =$ __________

f) $26 \div 0.01 =$ __________

9. Comparen sus resultados con ayuda del maestro. Si no coinciden, identifiquen los errores y corrijan.

- Para multiplicar un número por 10, se conserva el mismo número y se agrega un cero o se corre el punto decimal un lugar a la derecha. Por 100, se aumentan dos ceros o se recorre el punto dos lugares hacia la derecha, y así sucesivamente. Cuando no se tienen cifras suficientes, se agregan ceros a la derecha.
- Para dividir un número entre 10, al mismo número se le quita un cero o se corre el punto un lugar a la izquierda. Entre 100, se quitan dos ceros o se corre el punto dos lugares a la izquierda, y así sucesivamente. Cuando no se tienen cifras suficientes, se agregan ceros a la izquierda.

Multiplicar por 0.1 tiene el mismo efecto que dividir entre 10.
Dividir entre 0.1 tiene el mismo efecto que multiplicar por 10.

10. Observen el recurso audiovisual *División por 10, por 100, por 1 000*, en el cual se presenta la técnica para realizar este tipo de divisiones.

Sesión 3

## ¿Qué significa multiplicar 0.3 × 0.4?

1. La figura 1 representa una unidad cuadrada ($u^2$). Esto significa que cada uno de sus lados mide una unidad ($u$). Con base en esta información, respondan las siguientes preguntas en equipo y hagan lo que se indica.

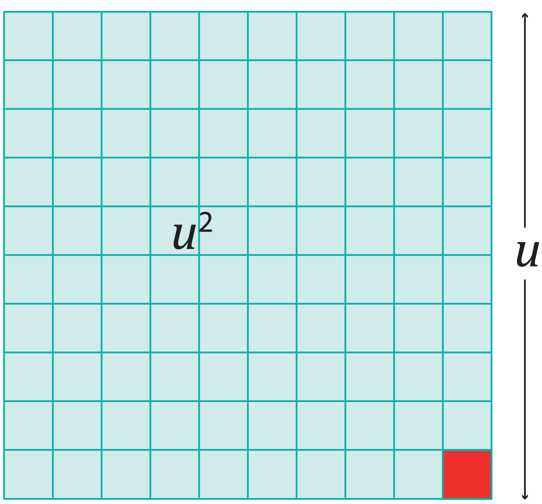



Figura 1

a) ¿Cuánto mide un lado del cuadrado rojo?

______________________________

b) ¿Cuál es el área del cuadrado rojo?

______________________________

c) Coloreen $\frac{1}{10} = 0.1$ de $u^2$.

d) ¿Cuántos centésimos de $u^2$ forman un décimo de $u^2$?

______________________________

e) Tracen, dentro de la figura 1, un rectángulo cuyos lados midan 0.3 $u$ y 0.4 $u$, respectivamente. ¿Cuál es el área del rectángulo? ____________________

f) ¿Cuál es el área de un rectángulo cuyos lados miden 0.8 $u$ y 0.5 $u$? ____________________

2. En la figura 2 se han trazado cuatro rectángulos diferentes. Anoten en cada inciso una multiplicación que corresponda al área de un rectángulo y resuélvanla.

a) ______________________________

b) ______________________________

c) ______________________________

d) ______________________________

Tracen, dentro de la figura 2, un rectángulo cuya área esté representada por la multiplicación: 0.2 × 0.7

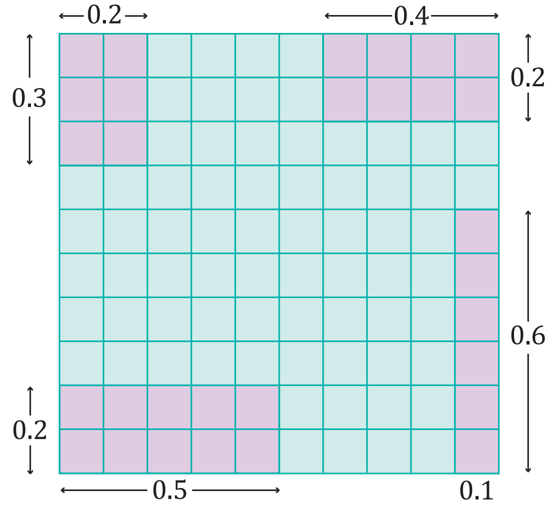



Figura 2

3. Con el apoyo de su maestro, comparen sus respuestas. Expliquen el procedimiento que utilizaron para multiplicar dos números decimales y úsenlo para encontrar el resultado de 0.5 × 0.6

4. En la figura 3 se trazaron cuatro rectángulos de los que se conoce su área y la medida de un lado. Anoten en cada inciso una división que permita calcular la medida del otro lado.

a) ______________________________

b) ______________________________

c) ______________________________

d) ______________________________

Tracen, dentro de la figura 3, un rectángulo que represente la división 0.14 ÷ 0.2

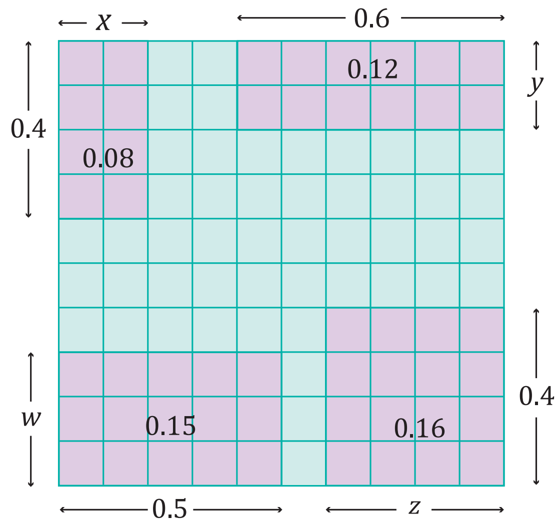



Figura 3

5. Con el apoyo de su maestro, comparen sus respuestas. Discutan sobre los efectos de multiplicar o dividir con números menores que 1, de acuerdo con lo siguiente.
   a) Entre todos, busquen y anoten en su cuaderno ejemplos de los siguientes casos:
      - Multiplicación en la que el producto es menor que, al menos, uno de los factores.
      - División en la que el cociente es mayor que el dividendo.
   b) Al multiplicar décimos por décimos se obtienen centésimos. Por ejemplo,
      $0.3 \times 0.2 = \frac{3}{10} \times \frac{2}{10} = 0.06 = \frac{6}{100}$
      - Respondan en su cuaderno: ¿qué se obtiene cuando se multiplican décimos por centésimos? Escriban ejemplos.

c) Al dividir centésimos entre décimos se obtienen décimos. Por ejemplo, $0.16 \div 0.2 = 0.8$

- Respondan en su cuaderno. ¿Qué se obtiene cuando se dividen milésimos entre décimos? Escriban ejemplos.

**6.** Resuelvan las siguientes operaciones y al finalizar utilicen la calculadora para verificar los resultados.

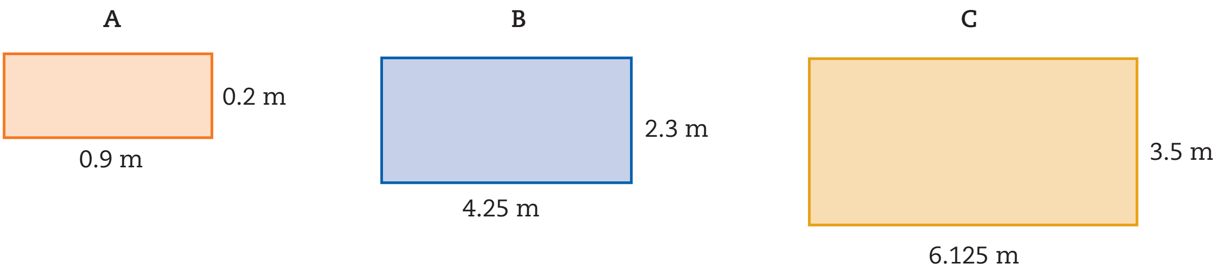
| | | |
|---|---|---|
| a) $0.02 \times 0.8 =$ ______ | d) $0.125 \div 0.5 =$ ______ | g) $9 \times 0.01 =$ ______ |
| b) $0.8 \times 0.5 =$ ______ | e) $47 \times 0.1 =$ ______ | h) $16 \div 0.1 =$ ______ |
| c) $0.24 \div 0.8 =$ ______ | f) $8 \div 0.1 =$ ______ | i) $3.74 \times 0.25 =$ ______ |

Sesión 4

## Para terminar

### Técnicas para multiplicar o dividir por decimales

**1.** Trabajen en pareja. Calculen el área de cada rectángulo.




Área = ______ $m^2$ Área = ______ $m^2$ Área = ______ $m^2$

**2.** Efectúen las siguientes operaciones y verifiquen que de éstas se obtengan las áreas de los rectángulos A, B y C.

a) A: $9 \times 2 \div 100 =$ ______

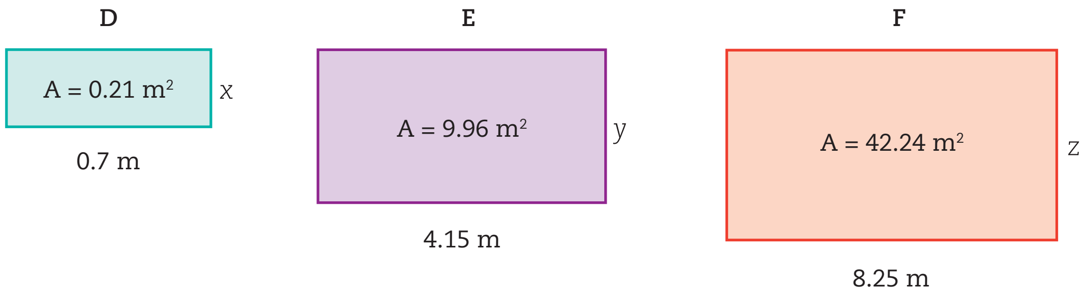
b) B: $425 \times 23 \div 1\,000 =$ ______

c) C: $6125 \times 35 \div 10\,000 =$ ______

**3.** Con el apoyo de su maestro, comparen sus resultados. Expliquen por qué el resultado de $0.9 \times 0.2$ se puede obtener al multiplicar $9 \times 2$ y dividiendo el resultado entre 100.

El producto $0.9 \times 0.2$ se transformó en $9 \times 2$ al multiplicar por 10 cada uno de los factores. Para volver al producto original ($0.9 \times 0.2$), es necesario dividir el producto (18) entre 100. Esta misma propiedad se aplica en los rectángulos B y C.

4. Calculen la medida que falta en los rectángulos.




$x$ = ________ m    $y$ = ________ m    $z$ = ________ m

5. Completen las siguientes operaciones y verifiquen que de éstas se obtenga la medida que se desconoce de los rectángulos D, E y F.

a) D: $0.21 \div 0.7 = (0.21 \times 10) \div (0.7 \times 10) = 2.1 \div 7 =$ ____________

b) E: $9.96 \div 4.15 = (9.96 \times 100) \div (4.15 \times 100)$

$=$ ______________ $\div$ ______________ $=$ ________________

c) F: $42.24 \div 8.25 =$ ( _____ × _____ ) ÷ ( _____ × _____ )

$=$ ______________ $\div$ ______________ $=$ ________________

En una división, si el dividendo y el divisor se multiplican por el mismo número, el cociente no se altera. Por ejemplo:

$$15 \div 3 = 5;\ (15 \times 4) \div (3 \times 4) = 60 \div 12 = 5;\ (15 \times 10) \div (3 \times 10) = 150 \div 30 = 5.$$

En general, $a \div b = (a \times n) \div (b \times n)$.

Cuando el divisor de una división es un número decimal, es necesario multiplicarlo por 10, 100, 1 000, etcétera, para convertirlo en entero; sin embargo, hay que multiplicar el dividendo por el mismo número para que el cociente no se altere.

6. Resuelvan las siguientes operaciones.

a) $15 \times 0.01 =$ ______

b) $0.5 \times 0.1 =$ ______

c) $5.2 \times 0.5 =$ ______

d) $0.2 \times$ ______ $= 0.08$

e) $5.2 \div 0.13 =$ _____

f) ______ × ______ $= 0.08$

g) ______ × ______ $= 0.4$

h) $0.18 \div 0.9 =$ ________

i) $9.6 \div 0.12 =$ ________

j) $3.8 \div 0.19 =$ ________

7. Comparen sus respuestas. Con apoyo de su maestro, identifiquen los posibles errores y corrijan.

# 2. Multiplicación y división de fracciones positivas

Sesión 1

Original.

A escala.

## Para empezar

La multiplicación y la división con números fraccionarios son operaciones inversas que permiten resolver una gran variedad de problemas; por ejemplo: calcular una fracción de una cantidad entera (como $\frac{3}{4}$ de 24), obtener una fracción de una cantidad fraccionaria (como $\frac{1}{2}$ de $\frac{4}{5}$), hasta averiguar cuántas veces cabe una fracción en otra o cuál es el factor de escala que permite volver una imagen a su tamaño original. En esta secuencia aprenderás a resolver estos problemas y podrás apreciar cómo se relacionan con el cálculo de porcentajes.

## Manos a la obra

### La pista de carreras

1. Trabajen en equipo. Una vuelta completa en una pista de carreras tiene una longitud de 400 metros. Durante la clase de educación física varios alumnos corrieron sobre ella. Anoten los valores que faltan en la tabla y después contesten las preguntas.

| Nombre | Cantidad de vueltas | Distancia recorrida (metros) |
|---|---|---|
| Jorge | $10\frac{1}{2}$ | |
| Hilda | $5\frac{1}{4}$ | |
| Cristian | $6\frac{1}{5}$ | |
| Elena | $\frac{5}{8}$ | |
| Martha | | 1 900 |
| René | | 1 280 |
| Vidal | $8\frac{3}{5}$ | |
| Érika | | 2 440 |

a) ¿Quién corrió la mayor distancia? ____________________

b) ¿Quién corrió la menor distancia? ____________________

c) ¿Cómo se calculan $\frac{3}{4}$ de 400? ____________________

d) Si dividen 400 entre 10 y el resultado lo multiplican por 7, ¿qué fracción de 400 obtienen? __________

**2.** Realicen los siguientes cálculos.

a) $\frac{1}{5}$ de 40 = __________

b) $\frac{2}{3}$ de 150 = __________

c) $\frac{3}{8}$ de 160 = __________

d) 0.5 de 50 = __________

e) 0.75 de 56 = __________

f) 1.25 de 40 = __________

**3.** Resuelvan los siguientes problemas.

a) En una muestra de 24 alumnos, $\frac{1}{3}$ prefiere futbol, $\frac{1}{4}$ basquetbol y $\frac{3}{8}$ atletismo. El resto prefiere natación. ¿Cuántos prefieren natación? __________

b) En una bolsa con 20 canicas de colores, $\frac{2}{5}$ son rojas, $\frac{1}{4}$ son azules, $\frac{1}{10}$ son amarillas, 3 son verdes y el resto, negras. ¿Qué fracción representan las canicas negras? __________

**4.** Con tus compañeros y con apoyo de su maestro comparen sus resultados. Comenten cómo calcularon 1.25 de 40. En caso de haber resultados diferentes, averigüen quién tiene razón y corrijan.

En general, para obtener una fracción $\frac{a}{b}$ de un número entero $n$, se divide $n$ entre $b$ y se multiplica por $a$. O bien, se multiplica $n$ por $a$ y se divide entre $b$. Las expresiones $\frac{1}{4}$ de 12, $\frac{1}{4} \times 12$, $12 \times \frac{1}{4}$, y $12 \div 4$, son equivalentes.

**5.** Observen el recurso audiovisual *Una vuelta y media*, y comenten acerca de las diferentes situaciones que corresponden a la obtención de una fracción de un número entero.

Sesión 2

## ¿Cuántas veces cabe?

1. Trabajen en pareja y resuelvan el siguiente problema. Para la fiesta de cumpleaños de su hija, Aidé ha preparado 24 litros de agua de jamaica. Usará vasos de $\frac{1}{4}$ de litro. ¿Cuántos vasos podrá llenar? ________

2. Con el apoyo del maestro comparen sus resultados y comenten sobre los procedimientos que utilizaron. Después respondan las preguntas.
   a) ¿Cuál de las siguientes operaciones sirve para resolver el problema de la actividad 1? Enciérrenla en un círculo.

   $24 \times \frac{1}{4} =$ ________ $24 + \frac{1}{4} =$ ________ $24 \div \frac{1}{4} =$ ________

   b) ¿Consideran que el resultado del problema de la actividad 1 debe ser mayor que 24, o menor que 24? Justifiquen su respuesta. ____________________

   ____________________

   c) Una manera de resolver el problema de la actividad 1 consiste en hacer una tabla como la que se muestra. Complétenla en su cuaderno para encontrar el resultado.

| Litros | 1 | 2 | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Vasos | 4 | 8 | | | | | | | | | | | | | | |

   d) Comenten si el resultado obtenido con la tabla coincide con el que obtuvieron en la actividad 1. Si no coincide, averigüen por qué.
   e) Verifiquen que el resultado conseguido con la tabla también se obtiene con la operación que subrayaron. Si no corresponde, expliquen por qué y corrijan.

3. Resuelvan el siguiente problema. Brenda compró 12 metros de listón para hacer moños. Para cada moño utiliza un $\frac{1}{3}$ de metro. ¿Cuántos moños podrá hacer si usa todo el listón? ____________________

**4.** Anoten los datos que faltan en la tabla con base en el problema de los moños.

| Total de metros de listón | Metros por moño | Cantidad de moños | Operación |
|---|---|---|---|
| 12 | $\frac{1}{3}$ | | $12 \div \frac{1}{3}$ $\quad 12 \times 3$ |
| 24 | $\frac{1}{3}$ | | |
| 6 | $\frac{1}{3}$ | | |
| 12 | $\frac{2}{3}$ | | |
| 12 | $\frac{1}{6}$ | | |
| 24 | $\frac{2}{3}$ | | |

**5.** Resuelvan las siguientes operaciones.

a) $15 \div \frac{1}{6} =$ ____________

b) $15 \times 6 =$ ____________

c) $30 \div \frac{1}{3} =$ ____________

d) $30 \times 3 =$ ____________

e) $45 \div \frac{1}{2} =$ ____________

f) $45 \times 2 =$ ____________

g) $60 \div \frac{2}{3} =$ ____________

h) $60 \times \frac{3}{2} =$ ____________

i) $12 \div \frac{5}{6} =$ ____________

j) $12 \times \frac{6}{5} =$ ____________

**Dato interesante**

Los egipcios utilizaban mucho la fracción $\frac{2}{3}$. Le asignaban un papel tan especial que, cuando querían calcular la tercera parte de un número, primero hallaban $\frac{2}{3}$ del número y luego calculaban la mitad del resultado, esto es $\frac{1}{3} = \frac{2}{3} \div 2$.

**6.** Lleven a cabo lo que se indica.

a) Redacten una técnica que les permita multiplicar un número natural por una fracción: ____________________________________________

____________________________________________

b) Redacten una técnica que les permita dividir un número natural entre una fracción: ____________________________________________

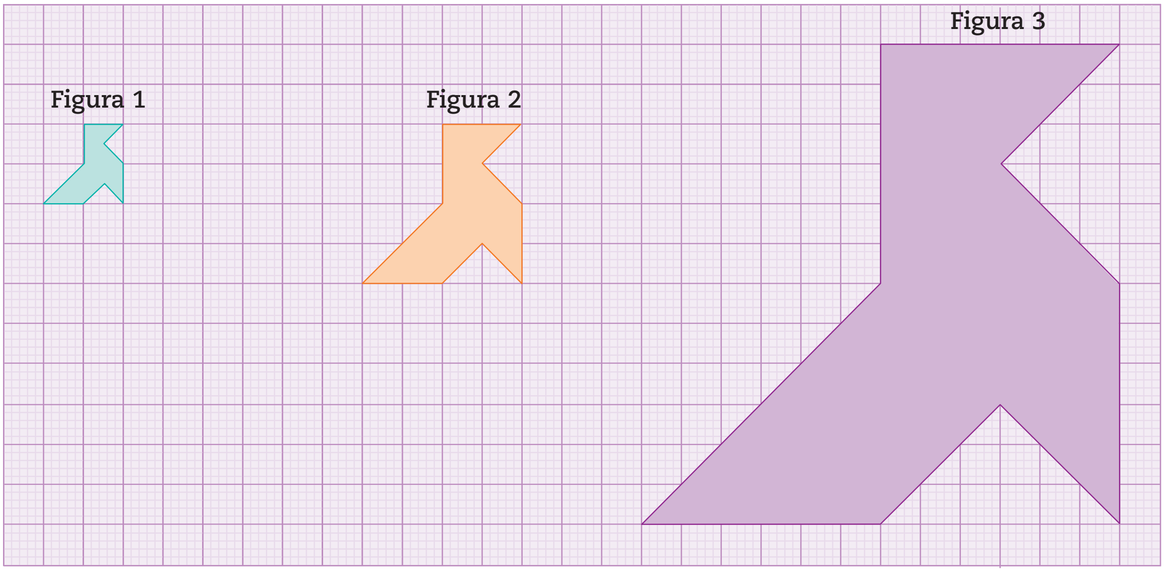
____________________________________________

**7.** Con ayuda del maestro comparen las técnicas que redactaron. Comprueben si dicen lo mismo, aunque con distintas palabras.

Sesión 3

## Figuras a escala

**1.** Trabajen en equipo. Las figuras 1, 2 y 3 están a escala porque tienen distintos tamaños, pero mantienen la misma forma. Contesten las preguntas.




a) ¿Qué factor de escala se aplicó a la figura 1 para obtener la figura 2? ________

b) ¿Qué factor de escala se aplicó a la figura 2 para obtener la figura 3? ________

c) ¿Qué factor de escala hace pasar de la figura 1 a la figura 3? ____________

d) ¿Qué factor de escala hace pasar de la figura 2 a la figura 1? ____________

e) ¿Qué factor de escala hace pasar de la figura 3 a la figura 2? ____________

f) ¿Qué factor de escala hace pasar de la figura 3 a la figura 1? ____________

**2.** Comparen sus respuestas con las de otros equipos. Si no coinciden, busquen argumentos y traten de ponerse de acuerdo.

- El factor de escala aplicado a la figura 1 para obtener la figura 2 es 2; es decir, todos los lados de la figura 2 miden el doble que los de la figura 1.
- El factor de escala aplicado a la figura 2 para obtener la figura 3 es 3; es decir, todos los lados de la figura 3 miden el triple que los de la figura 2.
- Para pasar de la figura 1 a la 3 se aplicó el factor 6. Este factor es el resultado de aplicar los factores 2 y 3 a la figura 1.
- El factor que hace pasar de la figura 2 a la figura 1 es $\frac{1}{2}$. Este factor es el *recíproco* de 2. Dos factores son recíprocos, uno de otro, cuando su producto es 1; por ejemplo, $2 \times \frac{1}{2} = 1$. De manera similar, el factor que hace pasar de la figura 3 a la figura 2 es $\frac{1}{3}$, que es el recíproco de 3. En este caso, $3 \times \frac{1}{3} = 1$.

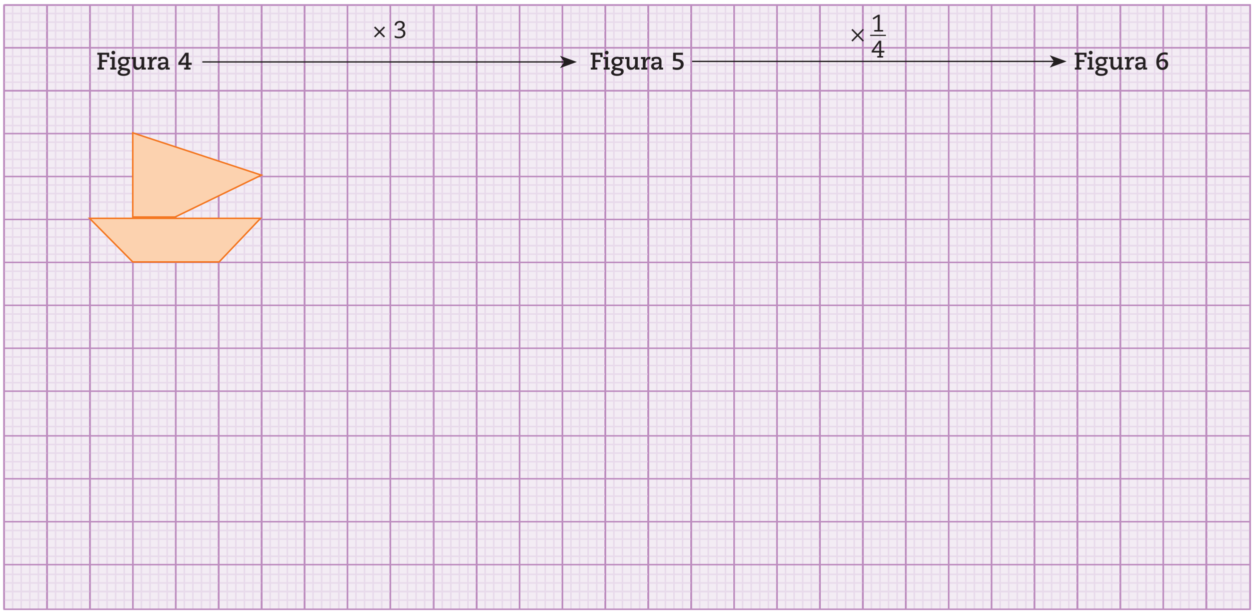
3. Apliquen a la figura 4 el factor 3 para obtener la figura 5. Luego apliquen a la figura 5 el factor $\frac{1}{4}$ para obtener la figura 6. Antes de trazar las figuras, respondan a las siguientes preguntas.

a) ¿Cuál será más grande, la figura 5 o la figura 4? ____________________

¿Por qué? ____________________

b) ¿Cuál será más grande, la figura 6 o la figura 5? ____________________

¿Por qué? ____________________




c) ¿Cuál es el factor de escala que hace pasar de la figura 4 a la figura 6? __________

d) ¿Por qué la figura 6 es más pequeña que la figura 4? ____________________

e) ¿Cuál es el factor que hace pasar de la figura 6 a la figura 4? ____________________

f) Si a la figura 4 le aplican el factor $\frac{3}{4}$ y a la figura resultante le aplican el factor $\frac{4}{3}$, ¿cómo varían las dimensiones de la tercera figura con respecto a la figura 4? ____________________

4. Con el apoyo de su maestro, comparen sus respuestas, identifiquen los errores y corrijan.

El recíproco del factor $\frac{3}{4}$ es $\frac{4}{3}$, porque $\frac{3}{4} \times \frac{4}{3} = 1$. En general, el recíproco de $a$ es $\frac{1}{a}$; ya que $a \times \frac{1}{a} = \frac{a}{a} = 1$; mientras que el recíproco de $\frac{a}{b}$ es $\frac{b}{a}$, pues $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1$. Recuerden que dividir entre $a$ equivale a multiplicar por $\frac{1}{a}$

## El factor recíproco

Sesión 4

**1.** Trabajen en pareja. Consideren las medidas de la figura 7, en donde la longitud *f* es igual a 1. Anoten las medidas que faltan en la tabla y después contesten las preguntas.

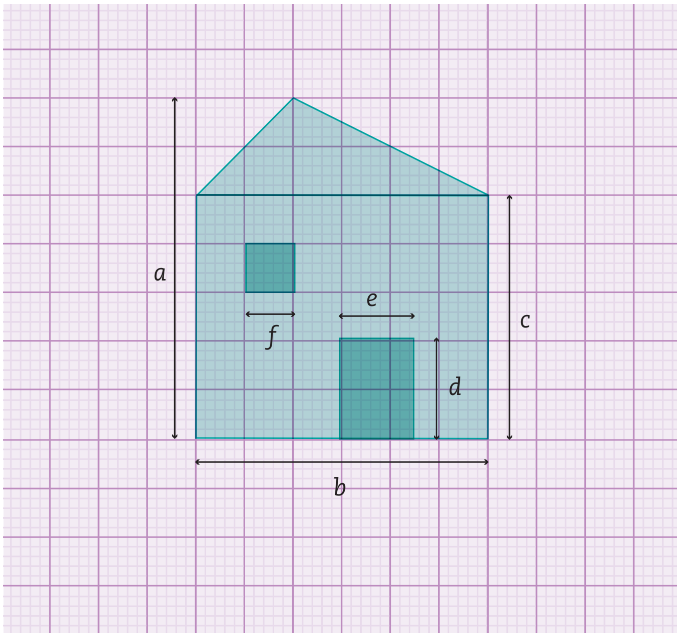



**Figura 7**

| Factor de escala | *a* | *b* | *c* | *d* | *e* | *f* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | |
| 5 | | | | | | |
| $\frac{1}{4}$ | | | | | | |
| $\frac{2}{5}$ | $\frac{14}{5}$ | | | | | |
| $\frac{3}{2}$ | | | | | | |
| $\frac{1}{5}$ | | | | | | |

a) ¿Con cuáles factores de escala se obtienen medidas mayores que las de la figura 7? ______________

b) ¿Cuáles factores de la tabla son recíprocos? ______________

**2.** Consideren dos figuras A y B. Las medidas de la figura B se obtuvieron al aplicar el factor de escala $\frac{3}{5}$ a la figura A. Encuentren las medidas de la figura A y anótenlas en la tabla. Después contesten y hagan lo que se indica.

| Lados | Figura A | Figura B |
|---|---|---|
| *a* | | $\frac{6}{5}$ |
| *b* | | $\frac{9}{10}$ |
| *c* | | $\frac{12}{5}$ |
| *d* | | $\frac{3}{5}$ |
| *e* | | $\frac{3}{10}$ |
| *f* | | |

a) Verifiquen que al aplicar el factor de escala $\frac{3}{5}$ a las medidas de la figura A, obtienen las medidas de la figura B.

b) Expliquen cómo obtuvieron las medidas de la figura A. ______________________

______________________________________________

c) Piensen en una medida cualquiera y anótenla en el renglón *f* de la figura A. Multiplíquenla por $\frac{3}{5}$ y anoten el resultado en la columna de la figura B. Multipliquen este resultado por $\frac{5}{3}$, que es el recíproco de $\frac{3}{5}$. ¿Qué obtienen? ______________

- Multiplicar por el recíproco de un número $a$, que es $\left(\frac{1}{a}\right)$, equivale a dividir entre $a$.
- Multiplicar por el recíproco de un número $\frac{a}{b}$, que es $\left(\frac{b}{a}\right)$, equivale a dividir entre $\frac{a}{b}$

**3.** Resuelvan las siguientes operaciones.

a) $18 \times \frac{2}{9} =$ ______________

b) $5 \div \frac{1}{6} =$ ______________

c) $\frac{2}{7} \times \frac{7}{2} =$ ______________

d) $\frac{2}{3} \div \frac{4}{7} =$ ______________

e) $\frac{3}{6} \times \frac{1}{2} =$ ______________

f) $\frac{1}{3} \div \frac{4}{5} =$ ______________

g) $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} =$ ______________

h) $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} =$ ______________

**4.** Observen el recurso audiovisual *Multiplicar, a veces, también es dividir*, para apreciar cuándo es equivalente multiplicar por un número y dividir entre el recíproco de ese número.

Sesión 5

# Para terminar

## Rompecabezas

**1.** Formen equipos de seis compañeros y hagan lo siguiente.

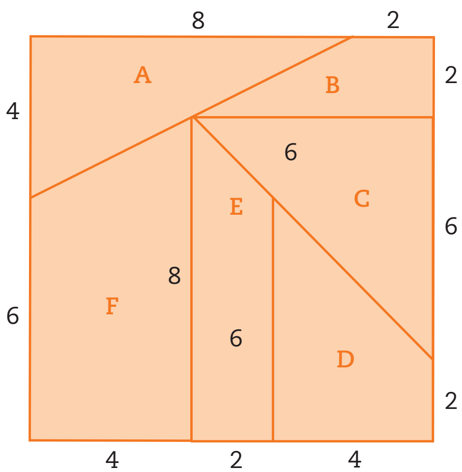
a) Cada uno elija una pieza del rompecabezas.

b) Entre todos elaboren un rompecabezas de la misma forma, pero más grande. La parte que en este rompecabezas mide 4, debe medir 5 en el que ustedes construyan.

c) Cada uno construya su pieza. Cuando terminen, ármenlo y verifiquen que tiene la misma forma que el que se muestra.

d) Si tiene la misma forma, anoten las medidas del nuevo rompecabezas en la tabla.

e) Si no tiene la misma forma, analicen entre todos qué sucedió y rectifiquen sus construcciones.




| Medidas del rompecabezas original | Medidas del nuevo rompecabezas |
|---|---|
| 2 | |
| 4 | 5 |
| 6 | |
| 8 | |

f) ¿Cuál es el factor de escala que se utiliza para construir el nuevo rompecabezas?

_______________

**2.** Resuelvan los siguientes problemas.

a) Una fotografía mide $6\frac{1}{4}$ pulgadas de altura por $8\frac{5}{8}$ pulgadas de ancho. ¿Cuál es su área? _______________

b) El circuito para correr o caminar en el parque de los Viveros de Coyoacán, en la Ciudad de México, mide $2\frac{1}{4}$ kilómetros de largo. ¿Cuántos kilómetros recorrió una persona que dio $3\frac{3}{4}$ vueltas? _______________

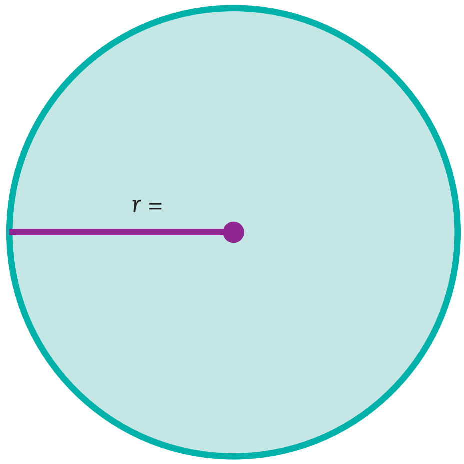
c) Con un litro de petróleo se produce aproximadamente $\frac{2}{5}$ de litro de gasolina. ¿Qué cantidad de gasolina se obtendrá con $8\frac{3}{5}$ litros de petróleo? _______________

- Para resolver una multiplicación como $3\frac{1}{4} \times 4\frac{2}{3}$, se pueden convertir los números mixtos en fracciones y luego multiplicar las fracciones que resulten. En este caso, $3\frac{1}{4} = \frac{13}{4}$ y $4\frac{2}{3} = \frac{14}{3}$; entonces, $\frac{13}{4} \times \frac{14}{3} = \frac{182}{12} = 15\frac{1}{6}$
- Otra opción es considerar $3\frac{1}{4}$ como $3 + \frac{1}{4}$ y $4\frac{2}{3}$ como $4 + \frac{2}{3}$. Se plantearía entonces la siguiente multiplicación:

$$\left(3 + \frac{1}{4}\right)\left(4 + \frac{2}{3}\right) = 3 \times 4 + 3 \times \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \times 4 + \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = 12 + \frac{6}{3} + \frac{4}{4} + \frac{2}{12} = 12 + 2 + 1 + \frac{1}{6} = 15\frac{1}{6}$$

d) El perímetro de un círculo es 154 cm. Considerando el valor de $\pi$ como $\frac{22}{7}$, encuentren el radio del círculo. Completen el procedimiento para resolver el problema.

- La fórmula para calcular el perímetro del círculo es: $P =$ ____________
- Al sustituir en la fórmula los valores conocidos, se tiene: $154 = \frac{22}{7}(\quad)$
- Multiplicando la ecuación por 7, se tiene: $1\,078 = 22d$
- Despejando $d$, se tiene: $d = \frac{1\,078}{22} = 49$
- ¿Cuál es el radio del círculo? ____________



P = 154 cm

e) Efectúen el siguiente cálculo.

$$\left(1 - \frac{1}{3}\right) \div \left(1 - \frac{5}{8}\right) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

f) Consideren lo siguiente y respondan a las preguntas.

$$\frac{3}{5} = \frac{60}{100};\ \frac{60}{100} = 60\%$$

- ¿Cuánto es $\frac{3}{5}$ de 1 200? ______________
- ¿Cuánto es el 60% de 1 200? ____________

g) ¿Cuánto es $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{3}$? ____________________

¿Cuánto es el doble de $\frac{1}{5}$? ________________

**4.** Con apoyo del maestro comparen sus respuestas con las de sus compañeros, identifiquen los errores y corrijan.

**5.** Practiquen la resolución de problemas que implican una multiplicación y división de fracciones con el recurso informático *Multiplicar por el recíproco*.

# 3. Multiplicación de números enteros

Sesión 1

## Para empezar

Simon Stevin
(1548-1620)

El concepto de los números opuestos o contrarios siempre ha existido; sin embargo, su representación matemática es muy reciente. Simon Stevin, además de proponer una escritura para las fracciones decimales, simbolizó los números enteros, como también lo hizo el matemático francés René Descartes. Ambos tomaron como base la resolución de ecuaciones. En primer grado aprendiste a sumar y restar con números positivos y negativos; además, conociste la regla para determinar el signo de los resultados. Ahora estudiarás la multiplicación de números enteros y la regla de los signos que se aplica para determinar su producto.

## Manos a la obra

### Sumas repetidas de números positivos y negativos

1. Resuelvan en pareja el siguiente ejercicio. Emma y Joel juegan con una ruleta dividida en 20 partes iguales. La mitad de las partes son negras y tienen números del +1 al +10. La otra mitad de las partes son rojas y tienen números del –1 al –10. Por turnos, Emma y Joel giran la ruleta y anotan el número donde se detiene. Después de tres rondas, éstos son los puntos que ha obtenido cada uno:

| Jugador | Ronda 1 | Ronda 2 | Ronda 3 |
|---|---|---|---|
| Emma | +5 | +5 | +5 |
| Joel | –4 | –4 | –4 |

a) Determinen cuántos puntos lleva cada jugador al terminar las tres rondas.

| Emma | Joel |
|---|---|
| | |

b) ¿Cómo calcularon los puntajes? ______________________________________

______________________________________________________________

c) Observen lo que cada jugador hizo para obtener sus puntajes de las tres rondas.

| Emma | Joel |
|---|---|
| $(+5) + (+5) + (+5) = 15$ | $\underbrace{(-4) + (-4) + (-4)}_{\text{3 veces}} = 3 \times (-4) = -12$ |

d) Describan el procedimiento que Joel siguió. ____________________

____________________

**2.** Apliquen el procedimiento de Joel para determinar los puntos que hicieron en las siguientes tres rondas.

| Jugador | Ronda 1 | Ronda 2 | Ronda 3 |
|---|---|---|---|
| Emma | +2 | +2 | +2 |
| Joel | –2 | –2 | –2 |

| Emma | Joel |
|---|---|
| | |

**Tabla 1**

| |
|---|
| $4 \times 4 = 16$ |
| $4 \times 3 = 12$ |
| $4 \times 2 = 8$ |
| $4 \times 1 = 4$ |
| $4 \times 0 = 0$ |
| $4 \times ? = -4$ |
| $4 \times ? = -8$ |
| $4 \times ? = -12$ |
| $4 \times ? = -16$ |

**3.** Analicen las operaciones de la tabla 1 para responder las preguntas.

a) Describan la manera en que cambia sucesivamente el producto (resultado) de las multiplicaciones. ____________________

____________________

b) Describan de qué manera cambia el segundo factor (el segundo número de los que se multiplican) de las multiplicaciones. ____________________

____________________

c) Si se amplía la tabla para obtener los productos –20, –24, –32 y –40, y se sigue la secuencia de los segundos factores, ¿cuáles son éstos?

____________________

**Tabla 2**

| |
|---|
| $4 \times 4 = 16$ |
| $3 \times 4 = 12$ |
| $2 \times 4 = 8$ |
| $1 \times 4 = 4$ |
| $0 \times 4 = 0$ |
| $? \times 4 = -4$ |
| $? \times 4 = -8$ |
| $? \times 4 = -12$ |
| $? \times 4 = -16$ |

**4.** Comparen sus respuestas y discutan en el grupo qué signo tiene el producto de un número positivo por uno negativo. Comenten por qué.

## Más sobre la multiplicación

Sesión 2

**1.** Trabajen en pareja todas las actividades de esta secuencia. Analicen las operaciones de la tabla 2. ¿Qué ocurre en el caso de la tabla 3?

**2.** Intercambien sus resultados con otro equipo. En caso de que difieran, analicen por qué son diferentes y determinen cuál es el resultado correcto.

**3.** Analicen la regularidad implicada en el producto y en el segundo factor de las multiplicaciones de la tabla 3. Después respondan las preguntas.

a) ¿Cómo cambia sucesivamente el resultado de las 10 multiplicaciones?

____________________

b) ¿De qué manera cambia el segundo factor de las multiplicaciones?

____________________

| |
|---|
| $(-5) \times 4 = -20$ |
| $(-5) \times 3 = -15$ |
| $(-5) \times 2 = -10$ |
| $(-5) \times 1 = -5$ |
| $(-5) \times 0 = 0$ |
| $(-5) \times ? = +5$ |
| $(-5) \times ? = +10$ |
| $(-5) \times ? = +15$ |
| $(-5) \times ? = +20$ |
| $(-5) \times ? = +25$ |

**Tabla 3**

4. Completen la tabla 4 con las operaciones que se requieran.

a) ¿Cuáles son los valores de los factores para que la regularidad que se aprecia en las primeras multiplicaciones se conserve en las filas incompletas? ______________

**Tabla 4**

| |
|---|
| $3 \times (-5) = -15$ |
| $2 \times (-5) = -10$ |
| $1 \times (-5) = -5$ |
| $0 \times (-5) = 0$ |
| |
| $? \times (-5) = +10$ |
| $? \times (-5) = +15$ |
| |
| |

5. Comenten sus respuestas y lean la siguiente información.

Una forma de justificar que el producto de un número positivo multiplicado por uno negativo resulta negativo, parte de que la suma de dos números opuestos es cero. Por ejemplo: $5 + (-5) = 5 - 5 = 0$.

- Todo número multiplicado por 0 da 0: $4 \times (5 - 5) = 4 \times 0 = 0$.
  Por la propiedad distributiva: $4 \times (5 - 5) = 4(5) + 4(-5) = 20 + 4(-5) = 0$.
  Pero, para que $20 + 4(-5)$ sea igual a 0, $4(-5)$ debe ser igual a $-20$.

En general, cuando se tiene una multiplicación como $m(n - n)$, esta operación se puede desarrollar como $mn + m(-n)$, y para que esto sea igual a 0 es necesario que $m(-n)$ sea el opuesto de $mn$; de aquí se puede concluir que el producto de un número positivo por uno negativo es negativo.

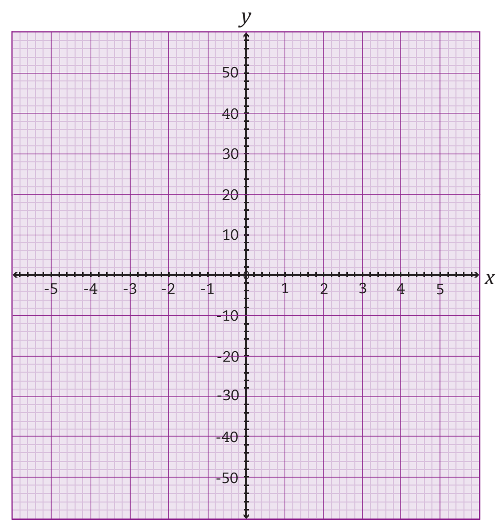
6. Utiliza las escenas de "Multiplicar 1, 2 y 3", del recurso informático *Multiplicación y división de números con signo*, para analizar la regularidad de los resultados en las sucesiones de multiplicaciones de números enteros que se presentan. En: https://www.proyectodescartes.org/Telesecundaria/materiales_didacticos/2m_b01_t01_s01_descartes-JS/index.html

Sesión 3

## Las reglas de los signos de la multiplicación

1. Reúnete con un compañero y completen la siguiente tabla.

| $x$ | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | –1 | –2 | –3 | –4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y = -6x$ | | | | | | | | | |




a) ¿Cuál es la operación que se realiza entre –6 y $x$?

______________________________

b) Si el valor de $x = 3$, y se sustituye en la expresión $y = -6x$, ¿qué valor tiene $y$? ______________

c) Dibujen en el plano cartesiano los puntos de coordenadas $(x, y)$ correspondientes a esta tabla.

d) Si $x = 5$, ¿cuánto vale $y$? ______________

¿Cómo pueden comprobar que el resultado es correcto? ______________________________

______________________________

e) Utilicen una regla y tracen una recta que una los puntos que ubicaron. Prolonguen la recta y establezcan si el punto (5, –30) pertenece a la recta.

f) ¿Por qué el resultado de multiplicar –6(5) no puede ser 30? ______________

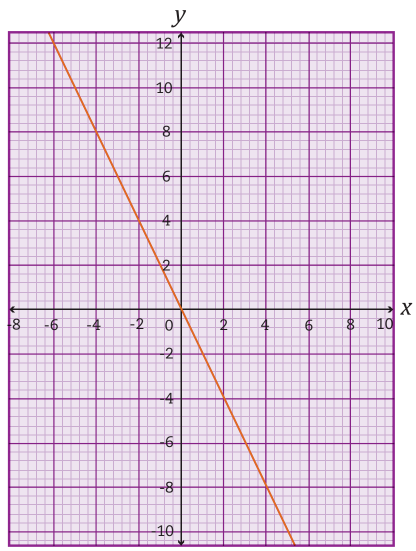
______________________________________________________________

**2.** Comparen sus respuestas con sus compañeros y discutan cómo podrían verificar las leyes de los signos en el plano cartesiano.

**Dato interesante**

Para indicar una multiplicación, puedes usar el signo ×, un punto o un paréntesis:
$2 \times (-7) = 2 \cdot (-7) = 2(-7)$

**3.** Observen la siguiente gráfica y completen la tabla.




| *x* | *y* = ______ |
|---|---|
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |

**4.** Escriban en su cuaderno cinco ejemplos de multiplicaciones de un número positivo por uno negativo cuyo producto sea –12 en los cinco casos.

**5.** Subraya las opciones falsas.

El producto de dos factores es negativo cuando:

- los dos factores son positivos.
- el segundo factor es negativo.
- los dos factores son negativos.
- uno de los factores es negativo.

**6.** Con ayuda de su maestro, comparen sus resultados y comenten de qué manera se determina el signo del resultado de los productos.

**7.** Observen el recurso audiovisual *La regla de los signos de la multiplicación de números enteros y el plano cartesiano* para analizar los valores de la relación funcional $y = mx$ mediante su gráfica.

Sesión 4

## Para terminar

### Aplica la regla

1. Trabajen en equipo para resolver los siguientes problemas. Anoten el resultado en cada una de las siguientes expresiones.

$(+9)\ (-3) =$ $\qquad$ $9 \times (-3) =$ $\qquad$ $9 \cdot (-3) =$ $\qquad$ $9(-3) =$

a) Expliquen por qué en las cuatro expresiones se obtiene el mismo resultado.

_______________________________________________

b) Si (–3) significa una deuda de $3.00, ¿qué situación podrían representar las cuatro operaciones anteriores? ______________________________

c) ¿Qué situación se podría representar con la operación $5 \times (-8) = -40$?

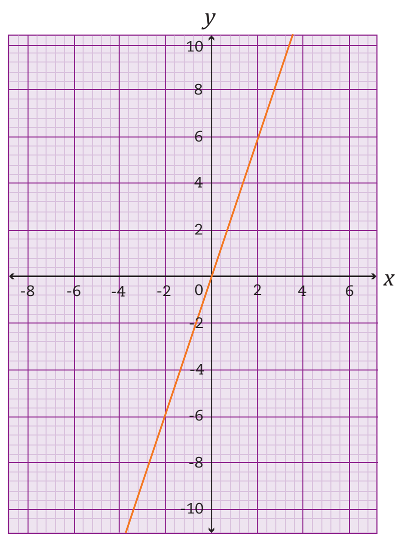
_______________________________________________

2. Cada semana Ana retira $200.00 del banco durante 4 semanas. Representa numéricamente esta situación y responde: ¿cuánto dinero se retira en total? __________
¿Cómo se expresaría ese retiro empleando números enteros? ______________

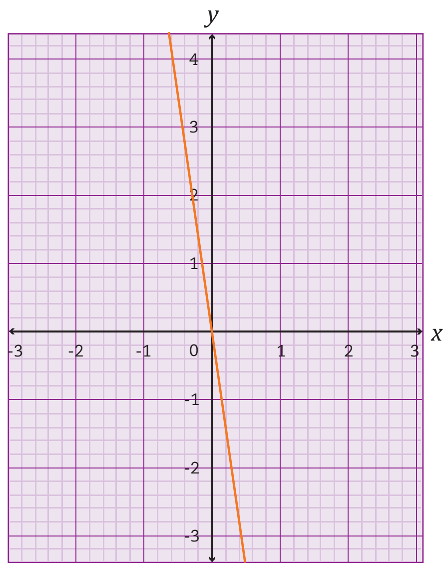
3. En cierta región se triplicó la temperatura registrada en un día frío y el resultado fue 6 grados menos que la temperatura original. ¿Cuál era la temperatura original?

______________

4. Observen las siguientes gráficas y completen las tablas.




| $x$ | $y =$ ________ |
|---|---|
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |




| $x$ | $y =$ ______ |
|---|---|
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |

**5.** Escribe los resultados que faltan.

| | | |
|---|---|---|
| 4 (–6) = | 4 (–10) = | (–16) (–4) = |
| 3 (–6) = | 3 (–10) = | (–16) (–3) = |
| 2 (–6) = | 2 (–10) = | (–16) (–2) = |
| 1 (–6) = | 1 (–10) = | (–16) (–1) = |
| 0 (–6) = | 0 (–10) = | (–16) 0 = |
| (–1) (–6) = | (–1) (–10) = | (–16) 1 = |
| (–2) (–6) = | (–2) (–10) = | (–16) 2 = |
| (–3) (–6) = | (–3) (–10) = | (–16) 3 = |
| (–4) (–6) = | (–4) (–10) = | (–16) 4 = |

**6.** ¿Qué tipo de número se obtiene al multiplicar dos números negativos? Explíquenlo con un ejemplo. ______________________________________________

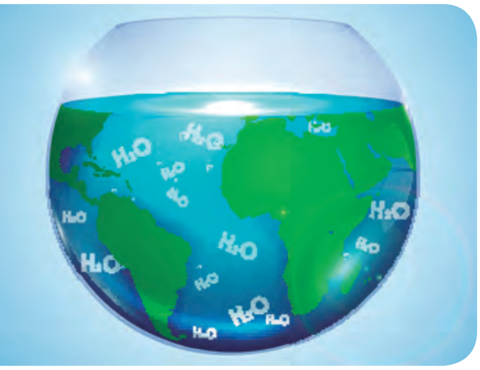
______________________________________________

**7.** Observen el recurso audiovisual *La regla de los signos de la multiplicación de números enteros* para analizar con detalle los diferentes productos que se pueden obtener al multiplicar números enteros.

# 4. Proporcionalidad directa e inversa

Sesión 1

## Para empezar



De los 112 336 538 habitantes en nuestro país, el 10% carece de agua potable y 43% no tiene instalaciones sanitarias mínimas. El agua es un recurso insustituible y necesario para la vida, por eso tenemos que cuidarla, y hay muchas maneras de hacerlo. Por ejemplo, al cerrar la llave del agua mientras se cepillan los dientes, una familia de 5 personas ahorra hasta 40 litros al día. Tomando esta medida como base, ¿cuánta agua ahorrarán en una semana si gastan la misma cantidad diariamente?, ¿cuánta agua ahorrará una familia de 3 personas en un día? Considerando que en una casa el agua de un tinaco de 1 000 litros de capacidad les basta para 5 días, ¿cuánto les durará si el número de habitantes se duplica? En esta secuencia resolverás problemas de este tipo al trabajar la proporcionalidad directa e inversa.

## Manos a la obra

### ¿Cuánta agua se gasta en la ducha?


Fuente: Fundación Aquae, *Cuánta agua se consume en la ducha por minuto* (fragmento).

1. Trabajen en pareja y consideren la información de la infografía.

   a) Completen la tabla 1.

**Tabla 1**

| Duración de la ducha (minutos) | Cantidad de agua gastada (litros) |
|---|---|
| 5 | |
| 6 | |
| 7 | |
| 8 | |
| 9 | |
| 10 | |
| 12 | |
| 14 | |

b) En casa de Juan tienen un tinaco con una capacidad de 600 litros. Con base en la información de la infografía de la página anterior completen la tabla 2.

**Tabla 2**

| Duración de la ducha (minutos) | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 12 | 14 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ¿Para cuántas duchas alcanza? | | | | | | | | |

- Completen la tabla 3.

**Tabla 3**

| Cantidad de agua que se ha gastado (litros) | 50 | 100 | 150 | 200 | 250 | 300 | 350 | 400 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Cantidad de agua que queda en el tinaco de la casa de Juan (litros) | | | | | | | | |

**Dato interesante**
Del 100% de agua que hay en nuestro planeta, 97.5% es salada, 2.5% es dulce, y de ésta sólo 0.3% es consumible.

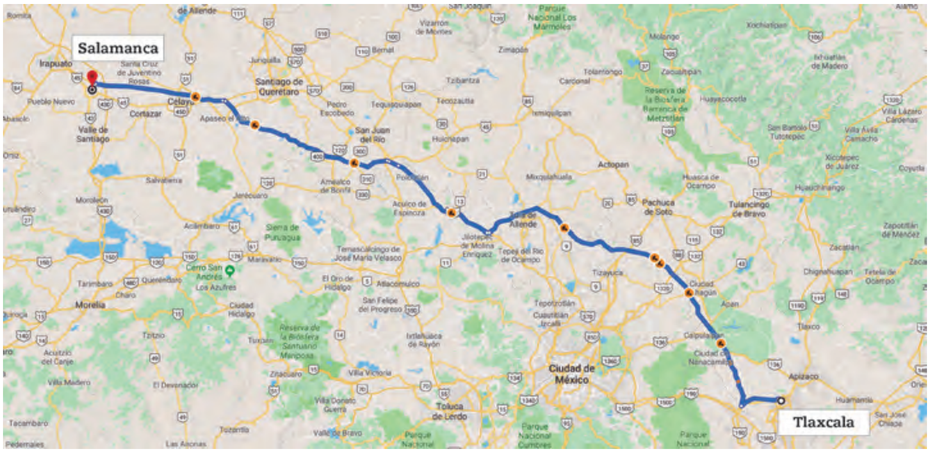
**2.** Anoten una palomita (✓) a las tablas que cumplen con lo que se lista.

| Condición | Tabla 1 | Tabla 2 | Tabla 3 |
|---|---|---|---|
| 1. Si las cantidades del primer renglón aumentan, las del segundo renglón también aumentan. | | | |
| 2. Si las cantidades del primer renglón aumentan, las del segundo renglón disminuyen. | | | |
| 3. Si una cantidad del primer renglón aumenta al doble, su correspondiente en el segundo renglón también aumenta al doble. | | | |
| 4. Si una cantidad del primer renglón aumenta al doble, su correspondiente en el segundo renglón disminuye a la mitad. | | | |
| 5. Si se divide cada cantidad del segundo renglón entre su correspondiente en el primero, el resultado siempre es el mismo. | | | |
| 6. Si se multiplica cada cantidad del primer renglón por su correspondiente en el segundo, el resultado siempre es el mismo. | | | |

**3.** Comparen sus resultados con los de sus compañeros. Después lean la siguiente información.

La tabla que cumple con las condiciones 1, 3 y 5 establece una relación de proporcionalidad directa. La que cumple con las condiciones 2, 4 y 6 establece una relación de proporcionalidad inversa. La tabla que no cumple con alguna de esas condiciones no establece una relación de proporcionalidad.

## De viaje




**1.** Trabajen en pareja para resolver los siguientes ejercicios. El señor Raúl viajará de Tlaxcala a Salamanca. La distancia que va a manejar es de aproximadamente 400 km. Completen las siguientes tablas.

a) La ruta por la que pasará para llegar a su destino incluye los siguientes lugares.

**Tabla 4**

| Lugar al que llegará | Distancia recorrida (km) | Distancia que falta por recorrer (km) |
|---|---|---|
| Tepotzotlán | 174 | |
| Tepeji del Río | 211 | |
| San Juan del Río | 261 | |
| Querétaro | 310 | |
| Celaya | 355 | |
| Salamanca | 400 | |

b) Raúl quiere hacer una tabla como la siguiente para comparar el tiempo que tardará en recorrer los 400 km según la velocidad a la que vaya. Anoten los valores de la segunda columna.

**Tabla 5**

| Velocidad promedio (km/h) | Tiempo que tardará en llegar (h) |
|---|---|
| 50 | |
| 60 | |
| 70 | |
| 80 | |
| 100 | |

c) Raúl decidió ir a una velocidad promedio de 80 km/h. La tabla 6 es para conocer la distancia que recorrerá cada hora. Complétenla.

**Tabla 6**

| Hora | Distancia recorrida (km) |
|---|---|
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |

**2.** Marquen con una palomita (✓) la tabla que cumple con alguna de las siguientes características. En el caso de la tabla 4 sólo consideren los valores de la segunda y la tercera columnas.

| Característica | Tabla 4 | Tabla 5 | Tabla 6 |
|---|---|---|---|
| 1. Al dividir cada número de la segunda columna entre su correspondiente en la primera columna, siempre se obtiene el mismo número, es decir, los **cocientes son constantes**. | | | |
| 2. Al multiplicar cada número de la primera columna por su correspondiente en la segunda columna, siempre se obtiene el mismo número, es decir, los **productos son constantes**. | | | |

**3.** Comparen sus respuestas con las de sus compañeros y corrijan lo necesario. Después lean la siguiente información.

Si una tabla cumple con la característica 1, se trata de una tabla de proporcionalidad directa; si cumple con la característica 2, se trata de una tabla de proporcionalidad inversa. Si no cumple con ninguna, se trata de una tabla que no es de proporcionalidad.

**4.** Completen cada tabla de manera que la primera sea de proporcionalidad directa y la segunda de proporcionalidad inversa.

| Proporcionalidad directa | |
|---|---|
| 3 | |
| 6 | |
| 9 | |
| 12 | |
| 15 | |

| Proporcionalidad inversa | |
|---|---|
| 3 | |
| 6 | |
| 9 | |
| 12 | |
| 15 | |

5. Observen el recurso audiovisual *Tablas de proporcionalidad*, donde profundizarán sus conocimientos sobre proporcionalidad directa e inversa a partir de su representación tabular.

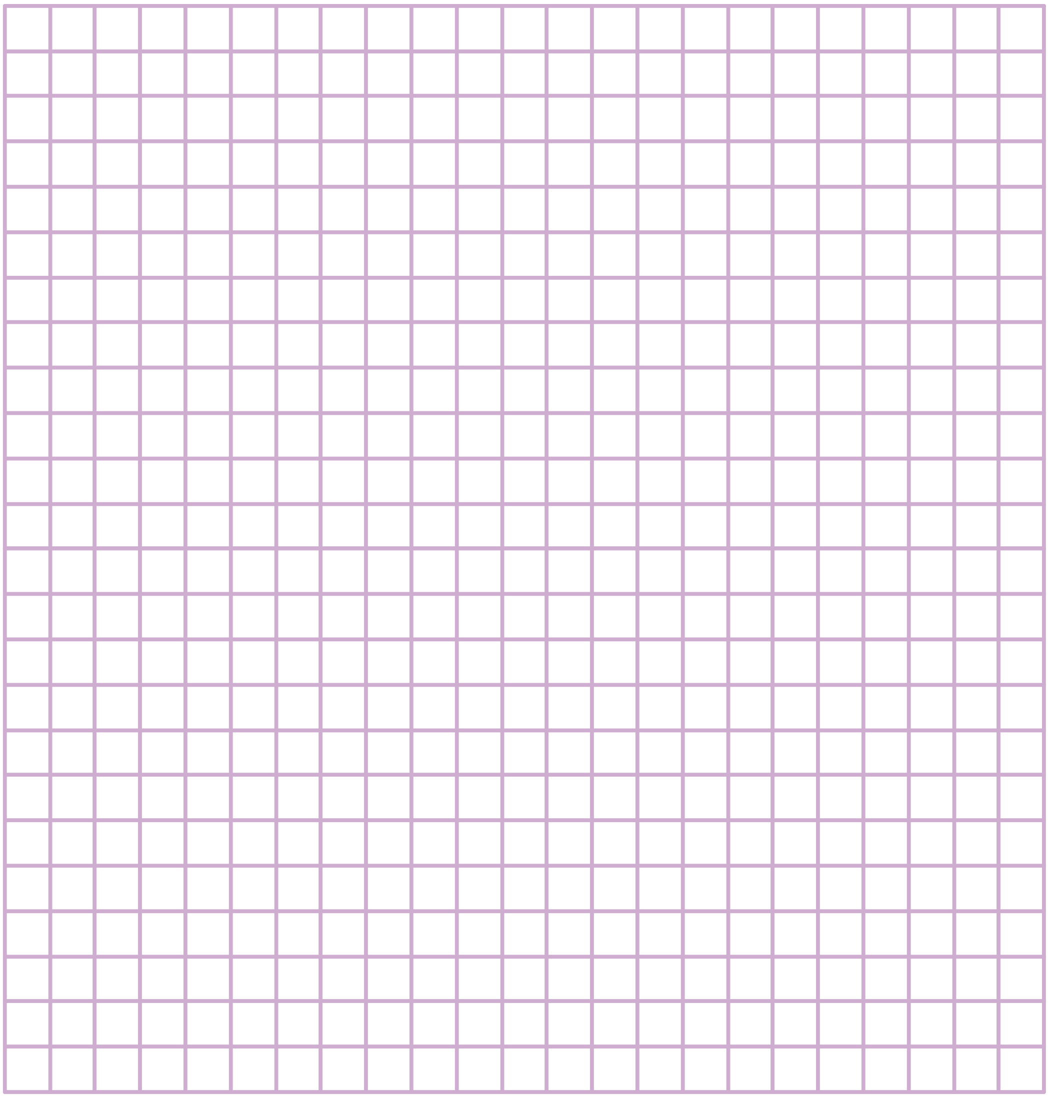
6. Utilicen el recurso informático *Para completar tablas*, donde practicarán la manera de calcular valores faltantes en tablas de proporcionalidad directa e inversa.

Sesión 3

## Jardines

1. Trabajen en pareja el siguiente problema. Se tienen diferentes jardines rectangulares, según lo especificado en cada inciso.

   a) El primer jardín tiene 60 $m^2$ de área. En la siguiente cuadrícula tracen los jardines rectangulares que consideren necesarios, con el área indicada para cada uno de ellos. Cada cuadrito representa 1 $m^2$.



b) Completen la siguiente tabla considerando medidas posibles para el largo y el ancho de ese jardín.

**Tabla 7**

| Largo (m) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 10 | 12 | 15 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ancho (m) | | | | | | | | | | |

c) El segundo jardín mide 6 m de ancho por 15 m de largo. Se va a poner una cerca alrededor de todo ese jardín. Completen la tabla 8.

**Tabla 8**

| Distancia que ya se ha cercado (m) | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 |
|---|---|---|---|---|---|
| Distancia que falta cercar (m) | | | | | |

d) El tercer jardín tendrá un ancho de 10 m. Completen la tabla 9 para calcular el área de este jardín considerando diferentes medidas para el largo.

**Tabla 9**

| Largo (m) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 10 | 12 | 15 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Área ($m^2$) | | | | | | | | | | |

**2.** Anoten a continuación el número de tabla, según el tipo de variación que representen.

| Tipo de variación | Tabla número | Argumenten su respuesta |
|---|---|---|
| No es de proporcionalidad | | |
| Proporcionalidad directa | | |
| Proporcionalidad inversa | | |

**3.** Comparen sus resultados con los de sus compañeros y corrijan si es necesario. En particular, comenten cómo identificaron las tablas de proporcionalidad directa e inversa.

4. Completen la siguiente tabla de tal manera que sea una tabla de proporcionalidad inversa cuyo producto constante sea $\frac{1}{2}$

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 10 | 12 | 15 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | |

Sesión 4

# Para terminar

## Problemas diversos

1. Con dos compañeros forma un equipo para resolver los siguientes problemas. Un automóvil va a la velocidad que se indica en la imagen. Si mantiene esa velocidad promedio:


a) ¿En cuánto tiempo recorrerá 500 km? ____________

b) ¿Qué distancia habrá recorrido en 3 horas y cuarto?

____________

c) Si su velocidad promedio aumenta 10 km/h, ¿en cuánto tiempo recorrerá los mismos 500 km? ____________

2. Un ciclista recorrió un circuito de 28 $\frac{1}{2}$ kilómetros.

a) Completen la siguiente tabla.

**Tabla 10**

| Número de vueltas al circuito | $1\frac{1}{4}$ | $1\frac{1}{2}$ | $1\frac{3}{4}$ | 2 | $2\frac{1}{4}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Distancia recorrida (km) | | | | | |

b) Si ya ha dado 2 $\frac{1}{2}$ vueltas al circuito, ¿qué distancia ha recorrido? ____________

c) Si tardó 3 horas en dar esas dos vueltas y media, ¿a qué velocidad promedio iba?

____________

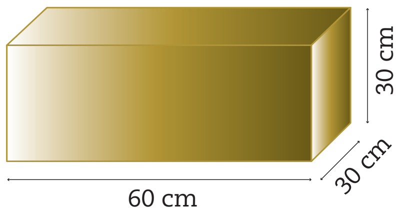
d) ¿A qué velocidad tiene que ir para recorrer esa distancia en 2 horas? ____________

**3.** Al iniciar un campamento con 3 amigos, había víveres para 20 días. Conforme pasaron los días fueron llegando más amigos, pero la cantidad de víveres no cambió. Completen la siguiente tabla para saber cuántos días les durarán los víveres de acuerdo con la cantidad de amigos que se reúnan. Consideren que a todos se les otorga la misma cantidad de víveres.

**Tabla 11**

| Número de amigos | 3 | 5 | 6 | 10 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|
| Días para los que alcanzan los víveres | 20 | | | | |

**4.** Consideren una caja con las siguientes dimensiones.




a) A lo largo de esta caja se alinearán cubos cuyos lados tienen diferente medida. Completen la tabla 12 para saber cuántos cubos caben en la caja.

**Tabla 12**

| Medida del lado del cubo (cm) | 1 | 2 | 3 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| Número de cubos que caben en la caja | 54 000 | | | | |

**5.** ¿Cuáles de las tablas de esta sesión presentan una variación proporcional directa?

______________________________________________

¿Cuáles presentan variación proporcional inversa? ____________________

¿Cuáles no son de proporcionalidad? ____________________

**6.** Observen el recurso audiovisual *La proporcionalidad en la vida cotidiana*, donde encontrarán ejemplos del uso cotidiano de la proporcionalidad directa o inversa. Propongan con sus compañeros dos ejemplos más de proporcionalidad inversa.

**7.** Utilicen el recurso informático *Problemas de proporcionalidad directa e inversa*, donde practicarán la resolución de problemas de estos tipos de variación.

# 5. Sistemas de ecuaciones 2 × 2. Método gráfico

Sesión 1

## Para empezar

Diofanto, matemático griego que utilizó símbolos para expresar igualdades y valores numéricos.

En primer grado aprendiste a resolver problemas en los que la situación planteada se representaba con una *ecuación*, es decir, una expresión algebraica donde la incógnita del problema se simboliza con una literal. Resolviste ecuaciones de primer grado con una incógnita, del tipo $ax + b = c$ y $ax + b = cx + d$. En esta secuencia estudiarás que hay otros problemas que pueden generar dos ecuaciones con dos incógnitas y una forma que te permitirá resolverlos.

### ¿Cuánto les falta?

**1.** Plantea la ecuación que representa la siguiente situación y marca con una palomita (✓) la respuesta correcta de cada inciso. Ernesto está ahorrando dinero para comprar una bicicleta que cuesta $3 600. Al día de hoy, todavía le faltan $980 para completar la cantidad. ¿Cuánto tiene ahorrado?

a) Si $x$ representa la incógnita del problema, ¿cuál de las siguientes ecuaciones representa la situación de Ernesto?

☐ $x = 980 + 3\,600$ ☐ $x - 3\,600 = 980$ ☐ $x + 980 = 3\,600$

b) Con un compañero discutan por qué es correcta o no cada opción, luego resuelvan la ecuación correcta. ¿Cuánto vale $x$? ____________

c) ¿Qué representa $x$ en este problema?

☐ El dinero que le falta ahorrar ☐ El dinero que ya tiene ahorrado

☐ El dinero que ahorró el día de hoy

Al resolver una ecuación debes verificar que el valor obtenido de la incógnita cumple con la igualdad planteada al sustituirlo y solucionar las operaciones.

2. Verifica que en la ecuación planteada para Ernesto el valor de la incógnita cumpla con la ecuación. Si al sustituir el valor obtenido la igualdad no se cumple, revisa tanto la ecuación como el procedimiento que utilizaste para resolverla.

3. Compara con tus compañeros si la ecuación planteada y el valor obtenido son los mismos. Discutan sobre la forma en que resolvieron la ecuación.

| Verificación |
| --- |
| |

Una ecuación es una expresión algebraica que representa una igualdad donde hay uno o varios valores que se desconocen, a los que se les denomina incógnitas. Éstas se pueden representar con cualquier letra (literal).

Por ejemplo, la incógnita de la ecuación $2m + 3 = 15$, es la $m$.

Una ecuación lineal, o ecuación de primer grado, es aquella en la que el mayor grado de la incógnita (exponente de la literal) es 1. Por ejemplo:

Exponente de la literal: 1

$3d - 50 = 10$

4. Señala con una palomita (✓) las ecuaciones que son lineales y justifica tus respuestas. También indica por qué las otras no lo son.

☐ $2x^2 + 5x = 20$

Porque:

☐ $3x - 8 = 22$

Porque:

☐ $4x^3 = y$

Porque:

☐ $5x + 4 = 2x - 5$

Porque:

5. En grupo y con ayuda del maestro, comparen sus respuestas y sus justificaciones. Resuelvan las que son ecuaciones lineales.

## Manos a la obra

Sesión 2

### ¿Cuántos niños y cuántos adultos?

También hay otras situaciones o problemas que pueden tener más de una incógnita y, para resolverlos, es necesario plantear más de una ecuación. En las siguientes sesiones trabajarás con algunas de estas situaciones y aprenderás una forma de solucionarlas.

1. En parejas resuelvan el siguiente problema. En una exposición para apoyar a los artesanos de Michoacán se vendieron 500 boletos, incluidos niños y adultos. Para entrar, los niños pagaron \$10 y los adultos \$20. Se obtuvo una venta por los boletos de \$8 000. ¿Cuántos niños y cuántos adultos asistieron a la exposición? Para resolver este problema contesten en su cuaderno la siguiente pregunta.


   a) ¿Cuántas y cuáles son las cantidades que se desconocen en el problema, es decir, las incógnitas del problema?
   b) Representen con las literales $x$ y $y$ esas incógnitas, y mencionen qué representa cada una.

| Incógnita | ¿Qué representa? |
|---|---|
| $x$ | |
| $y$ | |

   c) Discutan y escriban en su cuaderno por qué las incógnitas del problema no pueden ser representadas con la misma literal.

2. Analicemos el problema por partes.

*En una exposición para apoyar a los artesanos de Michoacán se vendieron 500 boletos, incluidos niños y adultos.*


   a) A partir de las incógnitas $x$ y $y$, planteen una ecuación que represente esta parte del problema; la llamaremos Ecuación 1: ____________________

*Para entrar, los niños pagaron \$10 y los adultos \$20. Se obtuvo por la venta de los boletos \$8 000.*

   b) A partir de las literales $x$ y $y$, planteen una ecuación que represente esta parte del problema; la llamaremos Ecuación 2: ____________________

3. Comparen con otra pareja cómo escribieron sus ecuaciones y analicen si representan lo mismo.

4. Como pueden observar, este problema tiene dos incógnitas ($x$ y $y$), a partir de las cuales se han planteado dos ecuaciones lineales (el grado de ambas literales es 1). Esto se conoce como sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Lean y comenten la siguiente información.

Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, también denominado sistema de ecuaciones 2 × 2, está formado por dos ecuaciones lineales que relacionan dos incógnitas; cada ecuación representa una condición o restricción del problema.

5. Si en el caso del problema consideran que la incógnita $x$ representa la cantidad de niños que asistieron a la exposición, y la incógnita $y$ representa la cantidad de adultos, el sistema de ecuaciones del problema es el siguiente:

Ecuación 1: $x + y = 500$
Ecuación 2: $10x + 20y = 8000$

a) Justifiquen en su cuaderno por qué éste es el sistema correcto.

6. Observen el recurso audiovisual *¿Qué es un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas?* para que conozcan otros ejemplos de situaciones que se representan mediante ese tipo de sistema.

## Para resolver el sistema

Sesión 3

1. Trabajen en pareja para encontrar la solución del sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas de la actividad 5 de la sesión 2.

Ecuación 1: $x + y = 500$
Ecuación 2: $10x + 20y = 8000$

Donde las incógnitas son ________ y ________, y representan: ____________________

a) Hagan una estimación de la solución del problema, ¿cuántos niños y cuántos adultos consideran que fueron a la exposición? __________________________________

b) ¿En qué se basa su estimación? ______________________________________________

c) ¿Piensan que el valor de $x$ y $y$ puede ser un número decimal? Discutan en grupo y con el maestro sus ideas.

2. Existen varios métodos para resolver un sistema de ecuaciones. Para comprender el método que aprenderán en esta sesión es importante que recuerden algunos conceptos que estudiaron en primer grado. Lean con atención la siguiente información y, si lo consideran necesario, consulten su libro de primero.

Una expresión algebraica de la forma $y = ax$ representa una variación lineal proporcional.

Una expresión algebraica de la forma $y = ax + b$ representa una variación lineal no proporcional.

En los dos casos anteriores, decimos que y está en función de x y que hay una relación funcional entre ambas cantidades. Además, ambas funciones se representan gráficamente con líneas rectas.

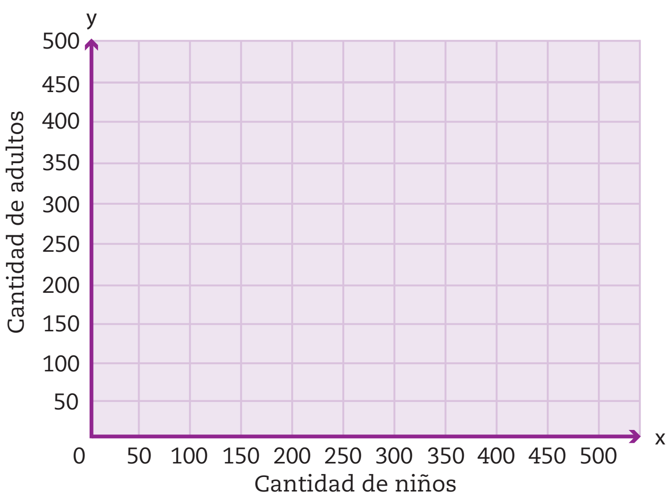
3. Escriban ahora las ecuaciones del problema de tal manera que, en cada una de ellas, la $y$ esté despejada.

Ecuación 1: $y = 500 - x$ Ecuación 2: $y =$ ________________

4. Completen las siguientes tablas de valores para cada ecuación. Pueden utilizar una calculadora.

| Ecuación 1<br>$y = 500 - x$ | |
|---|---|
| $x$<br>(Cantidad de niños) | $y$<br>(Cantidad de adultos) |
| 50 | 450 |
| 100 | |
| 150 | |
| 200 | |
| 250 | |
| 300 | |
| 350 | |
| 400 | |
| 450 | |
| 500 | |

| Ecuación 2<br>$y =$ ________ | |
|---|---|
| $x$<br>(Cantidad de niños) | $y$<br>(Cantidad de adultos) |
| 50 | 375 |
| 100 | 350 |
| 150 | |
| 200 | |
| 250 | |
| 300 | |
| 350 | |
| 400 | |
| 450 | |
| 500 | |




5. Ubiquen en el siguiente plano cartesiano los puntos que corresponden a los valores de $x$ y $y$ obtenidos para ambas ecuaciones.

a) Observen la sucesión de puntos que corresponden a cada ecuación. ¿Hay alguno en común? Si la respuesta es afirmativa, ¿cuáles son las coordenadas de ese punto?

Ecuación 1. Valor de $x$: ________ Valor de $y$: ________

Ecuación 2. Valor de $x$: ________ Valor de $y$: ________

b) Discutan qué significa ese punto en común.

- Sustituyan esos valores de $x$ y de $y$ en la Ecuación 1. ¿Qué observan?
- Sustituyan esos valores de $x$ y de $y$ en la Ecuación 2. ¿Qué observan?

c) De acuerdo con lo anterior, ¿cuántos niños y cuántos adultos asistieron a la exposición? ______

Cuando las ecuaciones lineales de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas se grafican en un mismo plano cartesiano, las gráficas se intersecan en un punto $(x, y)$ que representa la solución del sistema, es decir, los valores de ese punto corresponden al valor de las incógnitas que resuelven el problema.

Por lo tanto, resolver un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas significa encontrar los valores de las incógnitas que permiten que se cumpla la igualdad de cada ecuación del sistema.

Para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas existen diferentes métodos, uno de ellos se denomina método gráfico, que consiste en encontrar los valores de las incógnitas a través de una gráfica.

**6.** Resuelvan en equipo los siguientes sistemas de ecuaciones. Utilicen hojas cuadriculadas.

| | I | | II | | III |
|---|---|---|---|---|---|
| *Ec. 1* | $2x + y = 4$ | *Ec. 1* | $2x + y = 4$ | *Ec. 1* | $2x + y = 4$ |
| *Ec. 2* | $x + 2y = 5$ | *Ec. 2* | $2x + y = 1$ | *Ec. 2* | $4x + 2y = 8$ |

a) Elaboren las tablas necesarias considerando para $x$ valores que vayan de –5 a 5. Si requieren ayuda para elaborar la tabla de valores, pidan apoyo a su maestro.

b) Una vez hechas las tablas de valores y las gráficas de cada sistema, contesten lo siguiente:

- ¿Pudieron resolver los tres sistemas? ______
- ¿Qué soluciones encontraron en cada uno? Expliquen sus resultados señalando los valores para las incógnitas que resuelven el sistema o si no fue posible resolverlo. ______
- Analicen los sistemas observando en el tercer sistema, por ejemplo, cómo es la Ecuación 2 respecto a la Ecuación 1.
- Anoten en el cuaderno sus conclusiones y discútanlas con el grupo.

Existen sistemas de ecuaciones que tienen una solución, la cual corresponde al punto donde se intersecan sus gráficas.

Hay sistemas de ecuaciones que no tienen solución y sus gráficas resultan ser líneas paralelas.

Cuando las ecuaciones tienen un número infinito de soluciones, las gráficas de ambas se superponen.

# Para terminar

## Resolvamos otro problema

| Ecuación 1 $y =$ ______ | |
|---|---|
| $x$ | $y$ |
| 0 | |
| 2 | |
| 4 | |
| 6 | |
| 8 | |
| 10 | |
| 12 | |

| Ecuación 2 $y =$ ______ | |
|---|---|
| $x$ | $y$ |
| 0 | |
| 2 | |
| 4 | |
| 6 | |
| 8 | |
| 10 | |
| 12 | |

**1.** Soluciona el siguiente problema planteando el sistema de ecuaciones correspondiente, construyendo las tablas de datos y la gráfica para encontrar la respuesta. Esperanza tiene una mercería y su proveedor de listones le ha llevado listones nuevos: unos brillantes y otros opacos. Entre los dos tipos de listones, Esperanza compró 14 metros y pagó $180 en total. Si el metro de listón brillante cuesta $15 y el metro de listón opaco $10, ¿cuántos metros de cada uno compró Esperanza?

a) Establece en la siguiente tabla las incógnitas del problema.

| Incógnita | ¿Qué representa? |
|---|---|
| $x$ | |
| $y$ | |

b) Establece el sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas del problema.

Ecuación 1: ______ Ecuación 2: ______

c) Escribe nuevamente las ecuaciones de tal manera que la $y$ esté despejada.

Ecuación 1: $y =$ ______ Ecuación 2: $y =$ ______

d) Completa las tablas de datos de la izquierda para las ecuaciones 1 y 2.

e) Elabora en tu cuaderno la gráfica de cada ecuación en el mismo plano.

f) ¿Cuál es la solución del problema? ______

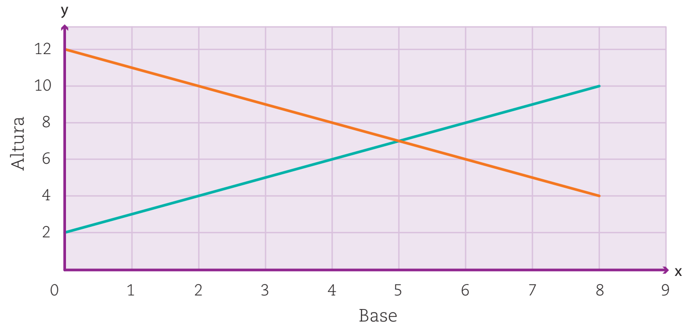
**2.** Comprueba en tu cuaderno que los valores obtenidos para $x$ y $y$ son válidos para ambas ecuaciones.

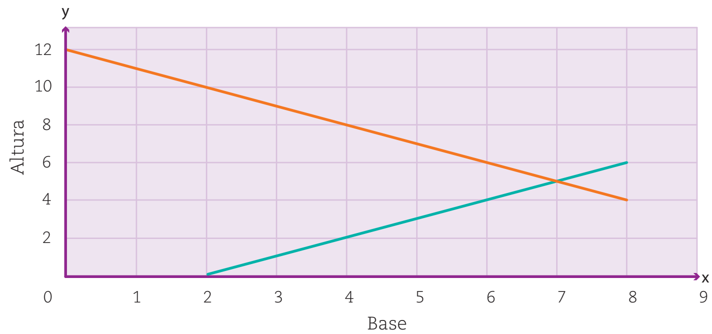
**3.** En equipo resuelvan el siguiente problema. Se tiene un rectángulo cuya altura mide 2 cm más que su base y el perímetro es igual a 24 cm. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

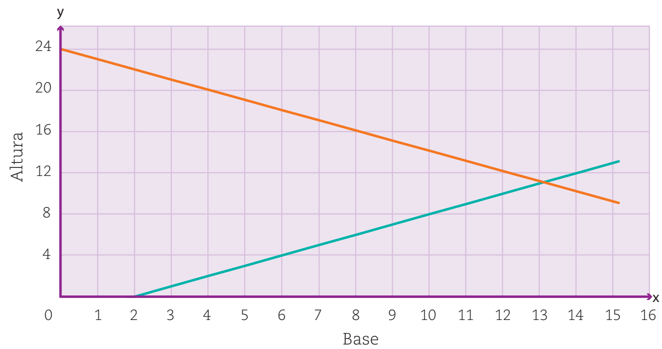
a) Si $x$ es la medida de la base del rectángulo y $y$ es la medida de la altura, indica cuál de los siguientes es el sistema de ecuaciones que representa el problema. ______

| I | II | III |
|---|---|---|
| *Ec. 1* $x - y = 2$ | *Ec. 1* $x - y = -2$ | *Ec. 1* $x - y = 2$ |
| *Ec. 2* $x + y = 24$ | *Ec. 2* $x + y = 12$ | *Ec. 2* $x + y = 12$ |

b) Encierren con un óvalo la gráfica que corresponde al sistema de ecuaciones correcto.




4. Comparen sus respuestas con otro equipo y argumenten por qué cada sistema y cada gráfica son correctos o incorrectos.

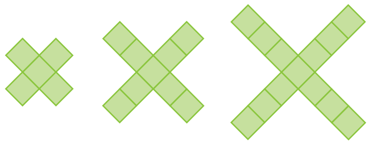
5. Observen el recurso audiovisual *Método gráfico*, con el que continuarán el estudio y la aplicación de este método para resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

6. Utilicen el recurso informático *Solución de un sistema de ecuaciones como intersección de rectas* para continuar con el planteamiento y resolución de este tipo de sistemas. Encuéntrenlo en: https://www.proyectodescartes.org/Telesecundaria/materiales_didacticos/2m_b05_t03_s01_descartes-JS/index.html

# 6. Sucesiones y expresiones equivalentes 1

Sesión 1

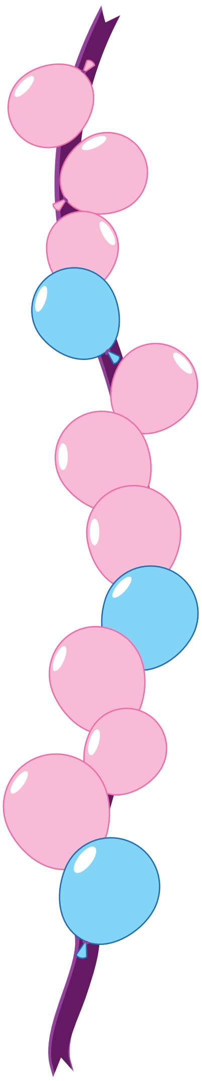
## Para empezar



En primer grado trabajaste con sucesiones numéricas o de figuras geométricas y determinaste algunos otros términos de esas sucesiones mediante la regla o patrón que siguen. Esa regla o patrón la describiste en lenguaje común y a través de una expresión algebraica. En esta secuencia ampliarás tu conocimiento de las sucesiones numéricas, particularmente que la regla que las genera puede expresarse de distintos modos.

## Manos a la obra

### ¿De qué color?



**1.** Resuelve de manera individual el siguiente problema. Adriana va a decorar su salón de clases para un festejo y ha decidido hacer tiras de globos rosas y azules conforme el modelo que se observa a la izquierda.

a) Describe el arreglo que tiene la tira de globos de arriba hacia abajo. ______________

______________________________________________

b) Adriana le pide ayuda a Paola para elaborar las tiras de globos y le señala en qué lugares debe colocar los globos azules. ¿Cómo le indicarías a Paola la manera de colocarlos? ______________________________

c) Si se continúa con la tira de globos, ¿de qué color será el globo que ocupe el lugar 42? ______________ ¿Y el lugar 60? ______________

d) Si la tira tendrá 100 globos, ¿cuántos globos azules necesitarán? ______________

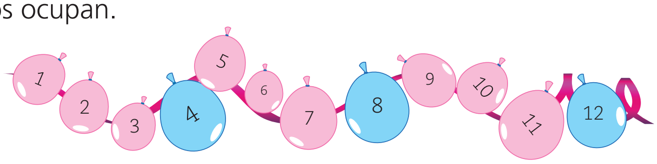
e) Compara tus respuestas con las de tus compañeros; en particular, comenten la manera en que describieron el arreglo de globos y acuerden un procedimiento o regla para saber de qué color es el globo en las posiciones que se indicaron.

f) Escriban a continuación el procedimiento o regla que acordaron. ______________

______________________________________________

Seguiremos trabajando con sucesiones numéricas. Ahora obtendrás y escribirás la regla que las determina, mediante dos o más expresiones algebraicas equivalentes.

**2.** Reúnete con un compañero para realizar las siguientes actividades de esta secuencia. En lugar de globos azules, Adriana y Paola utilizan números para designar el lugar que aquéllos ocupan.




a) ¿Cuál es la sucesión que se obtiene con los números de los globos azules? ________

________________________________________

b) Escriban en su cuaderno una expresión algebraica que represente la sucesión.

**3.** Comparen con otra pareja la regla que escribieron (expresión algebraica).

a) ¿Son iguales? ____________ ¿Ambas representan lo mismo? ____________

b) Reflexionen cómo pueden saberlo y determinen si ambas expresiones correspon-den a la situación.

**4.** Si conocemos la regla, podemos saber en qué posición de la tira el globo será de color azul. Analicen la siguiente tabla y complétenla utilizando la regla algebraica para responder las preguntas.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Número que tienen los globos azules en la tira | 4 | 8 | 12 | 16 | | | | | | |
| Posición de los globos azules en la tira | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | $n$ |

a) ¿En el lugar 27 de la tira Paola colocará un globo azul? ____________

¿Por qué? ________________________________

b) El décimo globo azul que Paola use, ¿en qué lugar de la tira estará? ________

**5.** En la siguiente tabla hay reglas algebraicas. Calculen los seis primeros términos de la sucesión que representa cada una. Identifiquen con cuál o cuáles también se genera la sucesión 4, 8, 12, 16, …

| Regla (expresión algebraica) | Valores de $n$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| $5n - n$ | | | | | | |
| $3n + 1$ | | | | | | |
| $2(2n)$ | | | | | | |
| $3n + n$ | | | | | | |
| $n + 4$ | | | | | | |

6. Compartan y revisen sus respuestas. Marquen las reglas que generan la misma sucesión de números y verifíquenlos.

a) ¿Qué pueden decir de las expresiones que generan la misma sucesión? ____________

______________________________________________________________

b) ¿Cómo se llaman esas expresiones? ______________________________

7. Junto con su maestro lean la siguiente información y coméntenla.

Una sucesión es un arreglo de números o elementos que siguen una regla o patrón. Los elementos que forman una sucesión se llaman *términos*. Los términos de una sucesión pueden calcularse mediante una regla o patrón que puede describirse con una expresión algebraica.

Si la regla o el patrón de una sucesión de números es $3n - 2$, la literal $n$ simboliza cualquier posición de un término en la sucesión. Además, **puede haber más de una manera de expresar la regla que genere o permita analizar una sucesión**.

Sesión 2

## La tarea de matemáticas

1. En pareja resuelvan el siguiente problema. Ana, Bertha, Carlos y Diego hacen su tarea de matemáticas. El maestro les ha pedido encontrar las expresiones algebraicas que generan algunas sucesiones de números. La primera es 6, 9, 12, 15, …

Cada uno propone una expresión algebraica para luego comparar sus resultados y discutir cuál es la respuesta correcta. Las expresiones que propusieron son las siguientes:

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Ana:** | $3(n + 1)$ | **Carlos:** | $(n)(n) + 5$ |
| **Bertha:** | $5n + 1$ | **Diego:** | $3n + 3$ |

a) ¿Cuáles de las expresiones algebraicas anteriores son correctas? Para cada una, expliquen por qué es o no es correcta.

La expresión algebraica de Ana es ____________
correcta/incorrecta

porque ______________________________

La expresión algebraica de Carlos es ____________
correcta/incorrecta

porque ______________________________

La expresión algebraica de Bertha es ____________
correcta/incorrecta

porque ______________________________

La expresión algebraica de Diego es ____________
correcta/incorrecta

porque ______________________________

b) Si encontraron más de una expresión correcta, ¿cómo saben si es correcta o no?

______________________________________________

c) Expliquen por qué esto es posible: ______________________

**2.** Daniel y sus compañeros tienen que resolver la siguiente sucesión 10, 12, 14, 16, … Ana propone $2n + 8$ como una expresión algebraica de la regla de la sucesión. Al verla, Daniel comenta: "Entonces otra expresión para esa sucesión puede ser: $n + 4$".

a) ¿La expresión que propuso Ana es correcta? ______________________

¿Por qué? ______________________

b) ¿La expresión que propone Daniel como otra forma de enunciar la misma regla es correcta? ____________ ¿Por qué? ______________________

c) Discutan en pareja y argumenten sus respuestas. Al final escriban dos expresiones que representen la misma regla y que sean correctas para la sucesión de números.

______________________ es igual a ______________________

Expresión algebraica 1 Expresión algebraica 2

**3.** Trabajen en pareja las actividades de esta sesión. Encuentren la regla de la siguiente sucesión de números.

| Términos de la sucesión | –10 | –8 | –6 | –4 | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Posición que ocupa el término en la sucesión | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | $n$ |

**4.** De las siguientes expresiones algebraicas comprueben cuáles también representan la regla de la sucesión y por lo tanto son equivalentes:

| Expresiones algebraicas | ¿Es una expresión algebraica de la regla de la sucesión? |
|---|---|
| $n - 11$ | |
| $-2n - 8$ | |
| $2(n - 6)$ | |
| $-4n - 2$ | |
| $2n - 12$ | |

a) Si el término 15° de la sucesión es 18, comprueben que las reglas que obtuvieron son correctas.

5. Comparen y revisen sus respuestas con las de sus compañeros. Lean y comenten la siguiente información.

Al analizar una sucesión numérica para encontrar la expresión algebraica de la regla es posible encontrar más de una expresión algebraica equivalente.

Dos expresiones algebraicas son equivalentes cuando se cumple la igualdad entre ambas expresiones y se puede comprobar numéricamente cuando se le asigna cualquier valor a las literales que intervienen. Por ejemplo: $3n + 6$ es equivalente a $3(n + 2)$, porque al asignar un valor a $n$, por ejemplo 5, las dos expresiones nos dan el mismo resultado:

$$\mathbf{3}n\mathbf{ + 6 =} 3(5) + 6 = 15 + 6 = \mathbf{21}$$

$$\mathbf{3(}n\mathbf{ + 2) =} 3(5 + 2) = 3(7) = \mathbf{21}$$

6. Observen el recurso audiovisual *Expresiones algebraicas equivalentes* para conocer otras sucesiones numéricas que tienen dos o más expresiones algebraicas equivalentes y la manera de comprobarlo.

Sesión 3

## Para terminar

### Más sucesiones

1. Observen el recurso audiovisual *Operaciones algebraicas* para que recuerden algunas reglas de escritura y de cómo operar con las literales y las expresiones algebraicas.

2. Lean la siguiente información y analícenla con ayuda de su maestro.

En la transformación de expresiones equivalentes es importante que:

a) Al sumar consideres:

$$\begin{aligned} 3a + b &= b + 3a \\ (3a + b) + c &= 3a + (b + c) = 3a + b + c \\ 3a + 0 &= 3a \\ 3a - b &= 3a + (-b) \end{aligned}$$

b) Al multiplicar consideres:

$$\begin{aligned} 3ab &= 3ba \\ (3ab)c &= 3a(bc) \\ 3a(b + c) &= (3ab) + (3ac) \\ 1 \times 3a &= 3a \end{aligned}$$

**3.** Revisen los procedimientos que han realizado para encontrar las expresiones algebraicas equivalentes que corresponden a las reglas que generan las sucesiones. De igual forma, identifiquen cómo utilizaron esta información.

**4.** Resuelvan en pareja esta actividad. A partir de la siguiente expresión algebraica, que representa la regla de una sucesión de números, encuentren por lo menos seis expresiones equivalentes: $5n + 3$

a) $n + n + n + n + n + 3$
b) $2n + n + n + n + 3$
c) ____________________
d) ____________________
e) ____________________
f) ____________________

- ¿Cuál es la sucesión que se genera con estas expresiones? ________________
- Verifiquen que con todas se obtenga la misma sucesión de números.

**5.** De las siguientes expresiones algebraicas obtengan por lo menos dos expresiones equivalentes y la sucesión de números que generan.

| Expresiones algebraicas equivalentes | | | Sucesión numérica |
|---|---|---|---|
| $2(n - 2)$ | | | |
| $3(n + 1) + n$ | | | |
| $4n - 2(n + 3)$ | | | |
| $-5n - 10$ | | | |

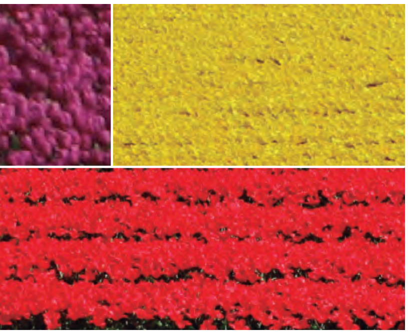
**6.** Encuentren dos expresiones algebraicas equivalentes para las siguientes sucesiones de números o expresiones algebraicas.

| Sucesión | Expresiones algebraicas equivalentes | |
|---|---|---|
| | 1 | 2 |
| 10, 18, 26, 34, … | | |
| 70, 64, 58, 52, … | | |
| –4, 0, 4, 8, … | | |
| –24, –27, –30, –33, … | | |
| $(9n - 5) + (3n + 1)$ | | |
| $(3n - 4) - (n - 2)$ | | |

# 7. Figuras geométricas y equivalencia de expresiones 1

Sesión 1

## Para empezar



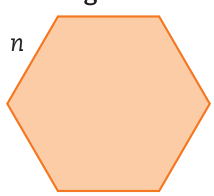
En la imagen se observa un campo de tulipanes dividido en parcelas. En cada una se cultivó un color diferente de esas flores. ¿Cómo calcularías la superficie total de ese campo? ¿Hay más de una manera para conocer su área total? ¿Existen otras formas para calcular el área de cada parcela? ¿Cómo saber cuáles son equivalentes? ¿Las expresiones equivalentes darán el mismo resultado? Al finalizar el estudio de esta secuencia podrás contestar estas preguntas.

## Manos a la obra

### Distintas expresiones, mismo resultado

1. Realicen en pareja las actividades de esta sesión. Observen las siguientes figuras geométricas y para cada una escriban dos expresiones algebraicas equivalentes que permitan calcular sus perímetros.

**Figura 1**




Expresión 1: ____________________

Expresión 2: ____________________

**Figura 2**


Expresión 1: ____________________

Expresión 2: ____________________

**Dato interesante**

*Tulipán* proviene del persa *delban*, que significa "turbante". Esta flor ha sido muy importante para los Países Bajos, pues es el cuarto producto que más exporta, al comerciar casi 3 000 millones de bulbos cada año.

2. Intercambien sus resultados con otra pareja. ¿Obtuvieron las mismas expresiones algebraicas en cada figura? En caso de que sean diferentes, ¿cómo verificar que son equivalentes? Realicen la comprobación en sus cuadernos.

3. Observen las siguientes figuras. Supongan que ambas tienen las mismas medidas.

**Figura 3**

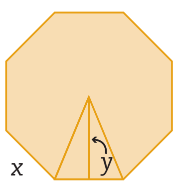
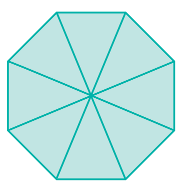



**Figura 4**



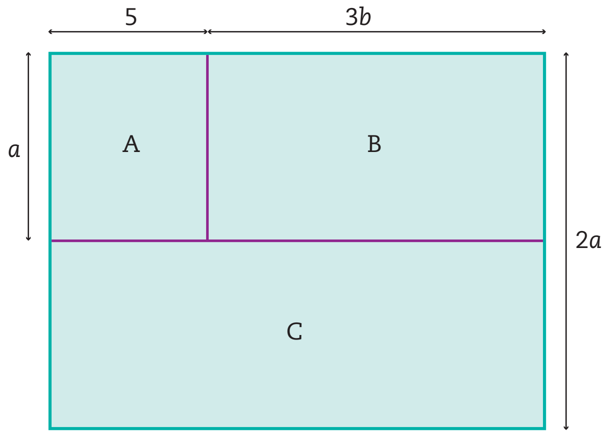
a) Encuentren una expresión algebraica para el área de cada una. Consideren que la figura 4 está compuesta por triángulos del mismo tamaño.

Figura 3: ______________________ Figura 4: ______________________

b) ¿Obtendrán la misma área para las dos figuras con las dos expresiones distintas?

c) ¿Cómo verificar que se obtiene la misma área? Justifiquen sus respuestas en su cuaderno.

**4.** Observen la siguiente figura. Es una representación del campo de tulipanes, en la cual se identifican con letras las diferentes parcelas y se señalan algunas de sus dimensiones.




a) ¿Cómo expresarían el área de la parcela A?

______________________________________

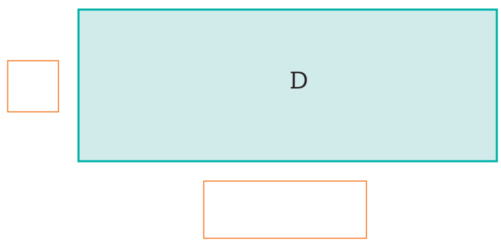
b) ¿Cuál sería la expresión para el área de las otras dos parcelas?

B: ______________ C: ______________

**5.** Imaginen que el área de las parcelas A y B se juntan. Nombren a esta nueva parcela como D y luego anoten sus dimensiones en los recuadros de la figura de abajo.

a) Escriban la expresión algebraica que representaría el área de la parcela D.

______________________________________




b) ¿Cómo expresarían la suma de las áreas de las parcelas A y B?

______________________________________

c) ¿Son equivalentes las expresiones algebraicas de los dos incisos anteriores? ______________________

¿Por qué? ______________________________

**6.** Consideren los siguientes valores y completen la tabla calculando lo que se pide: $a = 2$; $b = 3$.

| Parcela | Área | |
|---|---|---|
| | Expresión algebraica | Valor |
| A | | |
| B | | |
| A + B | | |
| D | | |

a) Establezcan la igualdad de las expresiones con las que obtuvieron la misma área y escríbanla en su cuaderno.

b) Asignen otros dos valores a cada literal de las expresiones que acaban de escribir. Verifiquen si, con cada uno de esos valores, se sigue cumpliendo la igualdad.

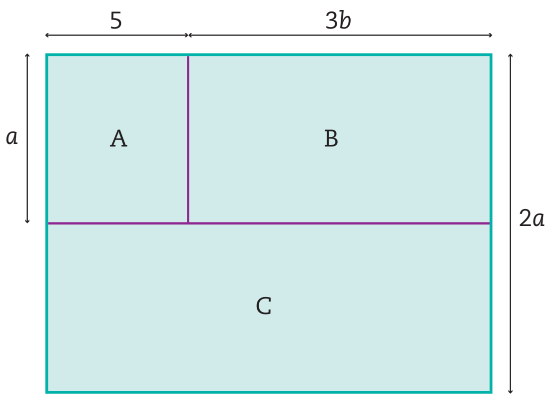
c) ¿A qué creen que se deba? Justifiquen su respuesta en su cuaderno.

**7.** Comparen sus resultados con los de otra pareja. Si obtuvieron expresiones distintas, verifiquen que con éstas también se obtengan los mismos resultados.

Sesión 2

## Expresiones equivalentes para perímetros y áreas

**1.** Formen un equipo para realizar las siguientes actividades. Regresemos al problema del campo de tulipanes. Ya se calculó una parte de su área, ahora obtengan el área total tomando como base el procedimiento que utilizaron anteriormente.




a) Obtengan la expresión algebraica con la que se determina el área de *todo* el campo de tulipanes, utilizando sólo las medidas de cada uno de sus lados. ________________

b) Encuentren otra expresión algebraica distinta con la que se pueda calcular la misma área. ________________

c) Verifiquen las equivalencias de ambas expresiones asignando una serie de valores numéricos. Pueden auxiliarse de una tabla como la siguiente:

| Valores | | Áreas | |
|---|---|---|---|
| | | Primera expresión: | Segunda expresión: |
| $a$ | $b$ | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

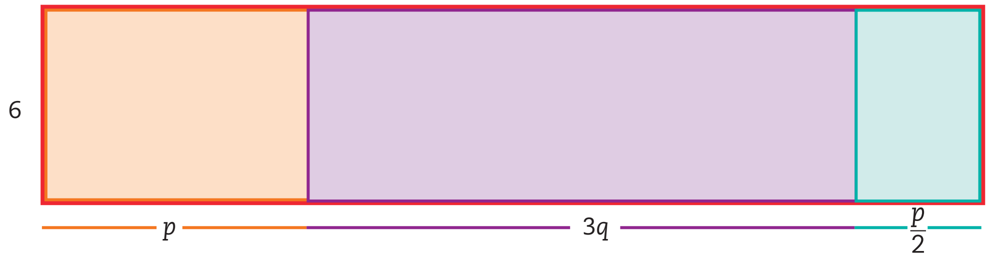
**2.** Intercambien sus respuestas con las de otro equipo. ¿Obtuvieron las mismas expresiones algebraicas? En caso de que sean distintas, comprueben que se llegue al mismo resultado con cualquiera de las expresiones que obtuvo el otro equipo.

Dos expresiones algebraicas son equivalentes si para cualquier valor que se les asigne a sus literales se obtiene el mismo resultado. Por ejemplo, en estas dos expresiones:

$2(a + b) + 3(a + 5) = 2b + 5(a + 3)$, al asignarle a la literal $a$ el valor de 1 y a $b$ el de 3, se obtendrá una identidad.

$$2(1 + 3) + 3(1 + 5) = 6 + 5(1 + 3)$$
$$8 + 18 = 6 + 20$$
$$26 = 26$$

3. Observen el siguiente dibujo.




a) Escriban dos expresiones algebraicas equivalentes para obtener el perímetro del rectángulo exterior, señalado en rojo.

| Expresión algebraica 1 | = | Expresión algebraica 2 |
|---|---|---|
| | | |

b) Dividan el equipo en dos y trabajen en su cuaderno. La mitad del equipo verificará que las expresiones algebraicas sean equivalentes transformando la primera expresión en la segunda; mientras la otra parte del equipo transformará la segunda expresión algebraica en la primera. Anoten los pasos debajo de la expresión que le corresponde.

c) Supongan que, en determinado momento, ustedes obtuvieron las siguientes expresiones:

| $12 + 2\left(p + 3q + \frac{p}{2}\right) = 3(2q + p + 4)$ | $6\left(p + 3q + \frac{p}{2}\right) = 18p + 36q$ |
|---|---|
| | |

d) ¿Ambas expresiones son equivalentes? Para contestar la pregunta, escriban el posible desarrollo de cada expresión.

e) Si algunas de las expresiones no son equivalentes, identifiquen por qué no lo son y justifíquenlo en su cuaderno.

4. De manera grupal y con ayuda de su maestro, escriban en el pizarrón y en su cuaderno la igualdad que relaciona las expresiones algebraicas obtenidas en este ejercicio. Verifiquen en su cuaderno que con ambas expresiones se obtiene el mismo resultado.

5. Lean y comenten la siguiente información.

Una forma de saber si dos expresiones son equivalentes sin tener que asignar valores a sus literales consiste en utilizar las propiedades de reducción de términos semejantes y de agrupación. Veamos este ejemplo:

$$4xy + 2xz - 3xy + 5xz - yz = y(x - z) + 7xz$$

Si partimos de la expresión algebraica de la izquierda, mediante la reducción de términos semejantes y las propiedades de agrupación obtendremos la expresión de la derecha.

- Se reducen términos semejantes: $xy + 7xz - yz$
- Y luego por las propiedades de agrupación se tiene: $y(x - z) + 7xz$

6. Observen el recurso audiovisual *Figuras geométricas y expresiones equivalentes*, con el cual ampliarán su conocimiento sobre este tema.

Sesión 3

## Para terminar

### Problemas diversos

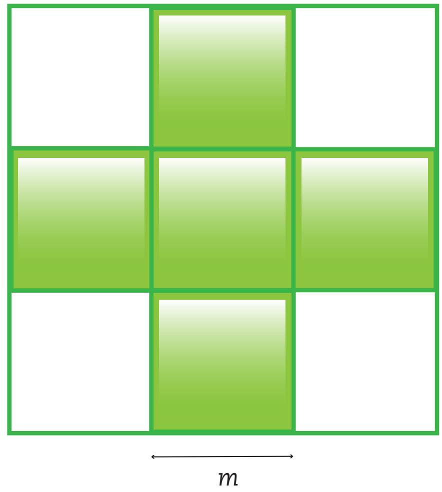
1. Resuelvan en parejas los siguientes problemas. Con base en la definición de expresiones equivalentes, se puede deducir que dos expresiones *no son equivalentes* si existe un valor con el que se obtengan distintos resultados para cada una de las dos expresiones.

   a) Determinen si las expresiones de cada fila son equivalentes o no, y por qué.

| Expresión 1 | Expresión 2 | ¿Son expresiones equivalentes? ¿Por qué? |
|---|---|---|
| $(x + 2) + (x + 3) + (x + 4)$ | $3x + 12$ | |
| $3a(x - 6 + b)$ | $3ax - 9a + 3b$ | |
| $ah + ah + 2a$ | $2a(h + 1)$ | |

   b) Para aquellas expresiones que sean equivalentes, hagan en su cuaderno un diagrama geométrico que represente la misma área o el mismo perímetro.

**2.** La imagen está formada sólo por cuadrados que miden *m* de lado.




a) Escriban dos expresiones equivalentes para calcular el perímetro de la cruz que se forma con los cuadrados verdes.

_______________ y _______________

b) Escriban dos expresiones equivalentes para calcular el área total de los cuadrados en color blanco. __________ y __________

c) Verifiquen la equivalencia de todos los pares de expresiones asignando valores numéricos a las literales de las expresiones de los incisos anteriores.

_______________ y _______________

**3.** Intercambien con otra pareja los resultados de la actividad anterior y respondan las siguientes preguntas.

a) ¿Escribieron las mismas expresiones algebraicas para el perímetro? __________ Si fueron diferentes, anótenlas y verifiquen que sean equivalentes.

b) ¿Obtuvieron las mismas expresiones algebraicas para el área? __________ Si fueron diferentes, anótenlas y verifiquen que sean equivalentes.

| Perímetro | Área |
| --- | --- |
| | |

**4.** Resuelve los problemas que se presentan en el recurso informático *Expresiones equivalentes 1*, para seguir obteniendo y verificando la equivalencia de expresiones algebraicas al asignar valores numéricos a las expresiones.

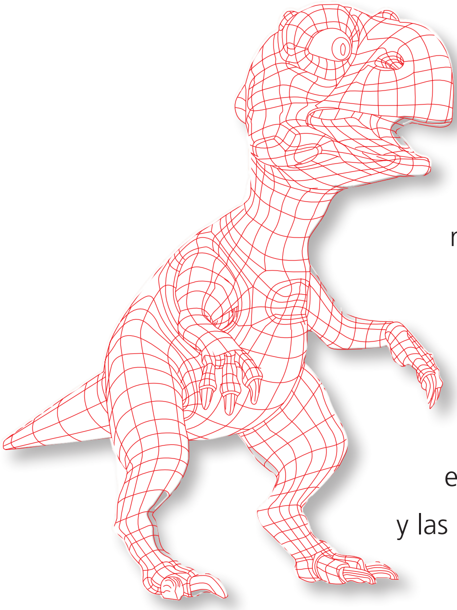
**5.** Realiza el siguiente problema de manera individual. Elabora en tu cuaderno un dibujo geométrico para la expresión $(x + 3)(y + 8)$, y obtén dos expresiones equivalentes para su área y su perímetro.

Sin asignar valores, comprueba en tu cuaderno que las dos expresiones que escribiste para el área y el perímetro son equivalentes.

# 8. Polígonos 1

Sesión 1

## Para empezar



En el diseño de animaciones en 3D se usan mallas (o redes) de polígonos para darles forma a las superficies de los objetos. En la figura se aprecia la manera en que las mallas determinan la superficie de cualquier objeto. Mientras más fina, mejor será la definición en pantalla.

El uso de polígonos y sus propiedades permiten la manipulación de estos modelos (redes), y reducen considerablemente la cantidad de datos y operaciones de procesamiento para generar imágenes reales o de realidad aumentada. En esta secuencia estudiarás algunas características y propiedades de los ángulos y las diagonales en polígonos.

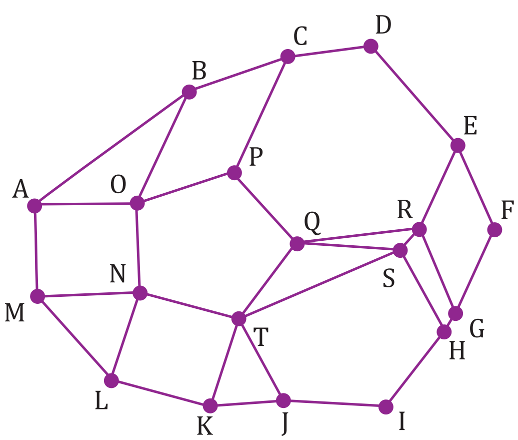
## Manos a la obra

### La red de polígonos

1. Trabajen en pareja. Observen la imagen y realicen lo que se indica.

a) Mencionen al menos tres polígonos que reconozcan.

_______________ _______________ _______________




Red de polígonos.

b) ¿Qué tipo de triángulo es *QST*? ____________

________________________________

c) ¿Y el *MNL*? ____________________________

d) Hay polígonos de 10 o más lados. Remarquen con distintos colores al menos dos.

e) ¿Cuál es el polígono con más lados que pueden identificar? Anoten los vértices que lo determinan. ______________

2. Consideren la misma red de polígonos para completar la siguiente tabla. Deben identificar y anotar los vértices de los polígonos que la forman de acuerdo con las características que se enuncian en la tabla, o describir las características que le corresponde al polígono indicado.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Característica | Polígonos con todos sus lados iguales entre sí, pero no todos sus ángulos son iguales. | | Polígonos que tienen todos sus ángulos iguales entre sí, pero no todos sus lados son iguales. | |
| Polígono | | *QRS*, *SHIJT*, *AOB* | | *MNL*, *TKLN* |

3. Los **polígonos** se clasifican, según la medida de sus lados y ángulos, en **regulares** o **irregulares**. En la red de polígonos anterior, identifiquen los polígonos que a continuación se nombran y dibujen cada uno de ellos en la columna correspondiente.

a) *BCPO*
b) *HIJTQS*
c) *EFGR*
d) *MNL*
e) *OPQTN*
f) *AONM*

**Glosario**
**Polígono regular:** tiene todos sus lados y sus ángulos iguales entre sí. Cuando un polígono no cumple con ambas características, se le llama **polígono irregular.**

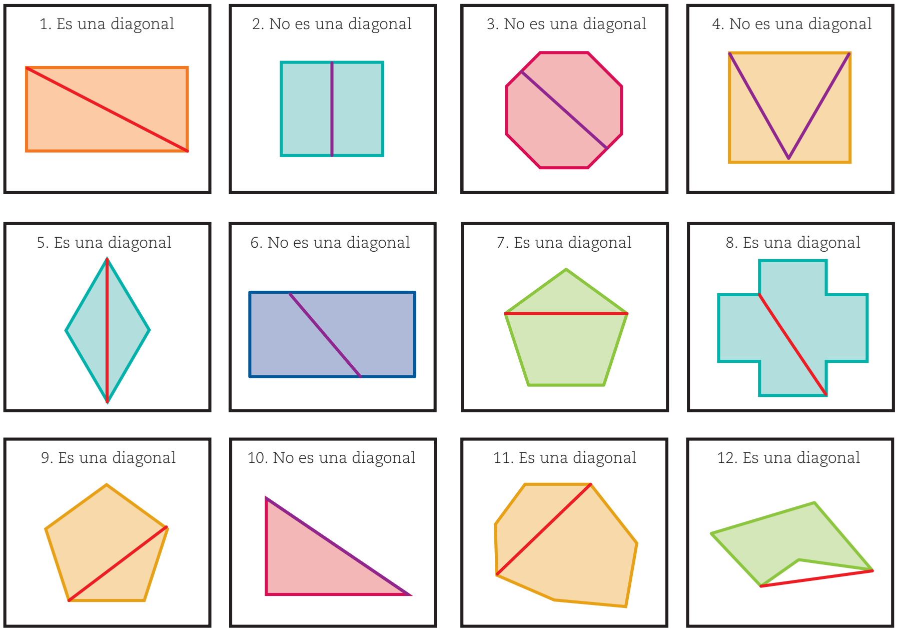
| ¿Cuáles son polígonos regulares? | ¿Cuáles son polígonos irregulares? |
|---|---|
| | |

4. Comenten y comparen con otro equipo lo siguiente:
   a) La manera en que identificaron y clasificaron cada polígono de la actividad 1.
   b) Los resultados de la clasificación de polígonos regulares e irregulares de la actividad 2. En caso necesario, analicen en qué características de los polígonos se equivocaron y corrijan sus respuestas.

5. Observen y analicen el recurso audiovisual *Polígonos* para recordar cuándo un polígono es regular o irregular, así como algunas de sus características y propiedades.

## ¿Qué línea sí es diagonal?

1. En equipo, observen las siguientes imágenes, unas muestran un polígono con alguna de sus diagonales y otras muestran ejemplos de lo que no es una diagonal.




**Glosario**
**Contraejemplo:** es un caso específico que demuestra que un enunciado es falso. Por ejemplo, el número 5 es un contraejemplo para “Todos los números son pares”.

2. En la tabla hay algunas afirmaciones que indican cuándo la línea es una diagonal. Consideren lo anterior para determinar si son verdaderos o falsos. Justifiquen sus respuestas y den un ejemplo o un **contraejemplo** para cada caso.

| **Afirmación**<br>Una diagonal es… | **Verdadero o falso** | **¿Por qué?** | **Ejemplo o contraejemplo**<br>(Anota el número de la imagen) |
|---|---|---|---|
| toda línea inclinada dentro de un polígono. | | | |
| un segmento que pasa por el centro de un polígono. | | | |
| una línea recta que une dos vértices no consecutivos. | | | |
| un segmento que siempre divide en dos partes iguales a un polígono. | | | |

**3.** Consideren la siguiente red de polígonos para completar las frases con sí o no, según corresponda.

El segmento *CKE* ________ es diagonal del polígono
sí/no

*ABCDE* porque ______________________________

El segmento *DC* ________ es diagonal del polígono
sí/no

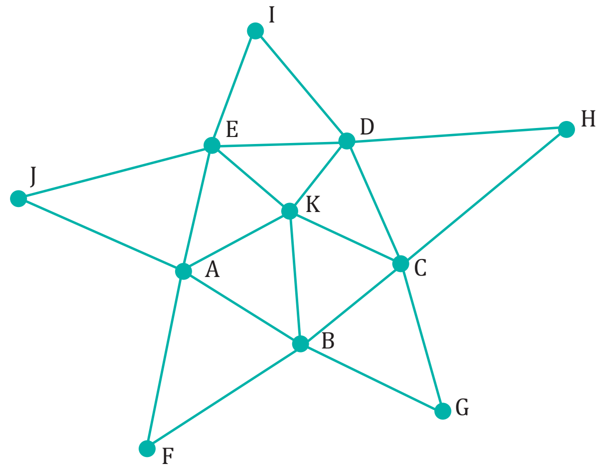
*ABCDE* porque ______________________________

El segmento *ED* ________ es diagonal del polígono
sí/no

*IDHCGBFAJE* porque ______________________________

El segmento *DE* ________ es diagonal del polígono
sí/no

*ABCDKE* porque ______________________________




**4.** Escriban una definición de *diagonal* de un polígono. Luego, intercámbienla con otro equipo para que la revisen y validen. Si es correcta, tracen un ejemplo; en caso contrario, den un contraejemplo.

**5.** En grupo, revisen sus respuestas a las actividades anteriores. Después lean y comenten lo siguiente.

Una diagonal de un polígono es un segmento de línea que une dos vértices no consecutivos.

**6.** Observen el recurso audiovisual *¿Qué es una diagonal?* para conocer más sobre este concepto.

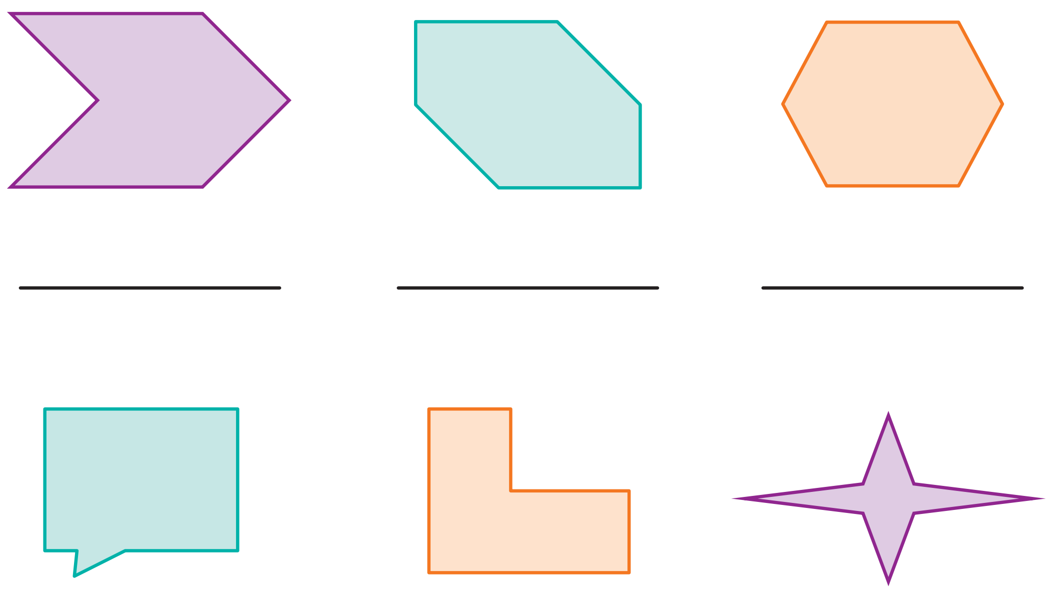
Sesión 3

## ¡Cuántos triángulos!

**1.** Reúnete con un compañero para trabajar las actividades de esta sesión. Lean y comenten la siguiente información.

Un polígono es convexo cuando al trazar todas sus diagonales, éstas quedan **dentro de él**. Cuando al menos una diagonal no queda completamente dentro del polígono, se dice que el polígono es no convexo.

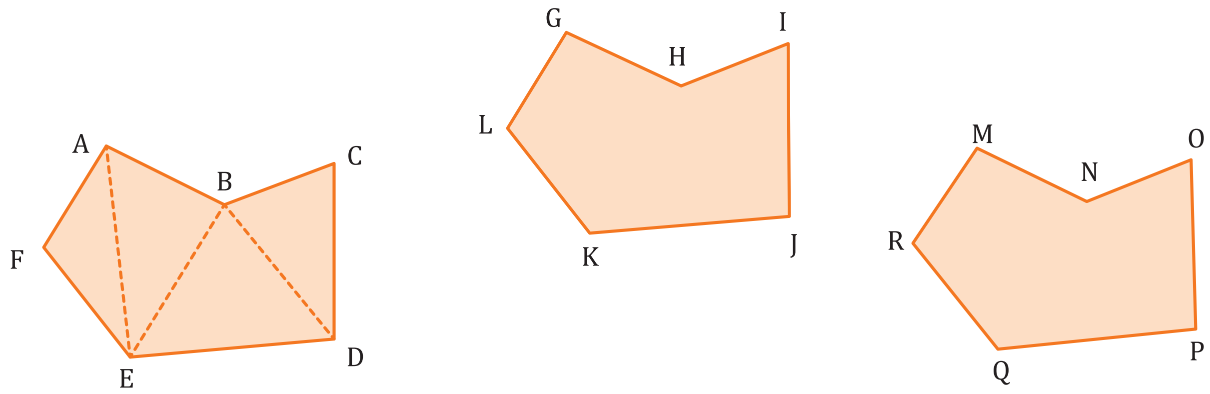
**2.** Tracen las diagonales de los siguientes polígonos y, con base en la definición anterior, determinen si los siguientes polígonos son convexos o no convexos. Anótenlo en la línea que está debajo de cada uno.



**3.** Comparen sus respuestas con las de otra pareja. De haber diferencias, argumenten quién tiene la razón.

**4.** Consideren los siguientes tres polígonos iguales. El primero está dividido en 4 triángulos después de haber trazado las diagonales *AE*, *BE* y *BD*. A esta construcción se le llama **triangulación de un polígono**.

a) Encuentren y dibujen otras triangulaciones para los polígonos *GHIJKL* y *MNOPQR*.




b) ¿Cuántas diagonales trazaron en la triangulación de cada polígono? ____________

c) ¿En cuántos triángulos quedó dividido cada polígono? ____________

d) ¿Es posible dividir en sólo tres triángulos cada polígono? Justifiquen su respuesta.

____________

e) ¿Existirá un polígono de 6 lados que se pueda triangular en sólo 3 triángulos? Justifiquen su respuesta. ____________

____________

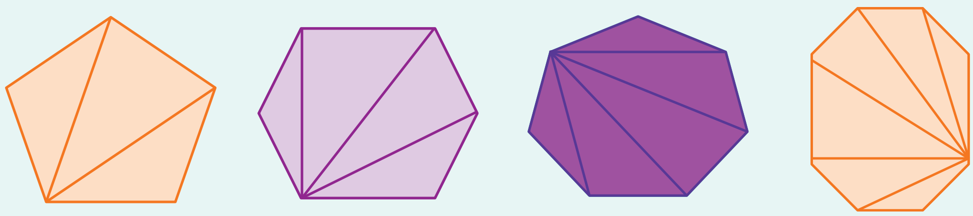
**5.** Utilicen un geoplano o una hoja cuadriculada para construir varios polígonos y completen la tabla. Consideren sus diagonales a partir de un solo vértice.

| Número de lados | Nombre del polígono | Número de diagonales que forman cada triangulación | Número de triángulos que se forman |
|---|---|---|---|
| 4 | Cuadrilátero | | |
| 5 | | | |
| 6 | Hexágono | 3 | 4 |
| 7 | | | |
| 8 | | | |
| | | 6 | |
| 20 | | | |
| | | | 30 |
| *n* | | | |

# Para terminar

## Triangulación de polígonos convexos

**1.** Reúnete con un compañero para analizar qué pasa con la triangulación en el caso de los polígonos convexos. Observen la siguiente secuencia de polígonos y sus triangulaciones para completar la tabla; después, contesten las preguntas.



| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Polígono | | | | |
| Número de vértices | | | | |
| Número de diagonales | | | | |
| Número de triángulos | | | | |

a) Describan qué tienen en común esas triangulaciones. ______________________________

______________________________________________

b) Entre un polígono y otro, ¿cuántos vértices más hay? ______________________

c) ¿Cuántas diagonales más? ______________________

d) ¿Y cuántos triángulos más se trazan? ____________

e) De continuar con la secuencia de este tipo de polígonos, ¿será posible continuar triangulándolos? ____________ ¿Por qué? ______________________________

f) ¿Cuántas diagonales desde un mismo vértice se necesitan para triangular un polígono convexo? ____________

Prueben con polígonos convexos de 9, 10, 12 y más lados. Pueden usar hojas cuadriculadas o el geoplano para trazarlos.

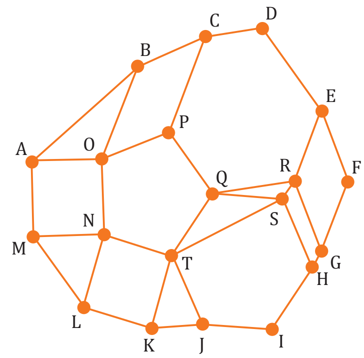
**2.** Busquen y anoten en su cuaderno una fórmula para contar el número total de diagonales que se pueden dibujar en un polígono convexo. Empiecen con casos pequeños y hagan una tabla para organizar sus descubrimientos.

3. Anoten una palomita (✓) en verdadero o falso según consideren las siguientes afirmaciones.

| Afirmación | V | F |
|---|---|---|
| a) Si una diagonal une dos vértices no consecutivos de un polígono, entonces para calcular cuántas diagonales se pueden trazar desde un vértice, hay que restar 3 al número de vértices. | | |
| b) Se restan 2 porque uno es el vértice desde donde se trazan las diagonales y el otro es el consecutivo. | | |
| c) Se restan 3 porque uno es el vértice desde donde se trazan las diagonales y los otros dos son vértices consecutivos. | | |
| d) Si por cada vértice se puede trazar una diagonal, entonces hay igual número de diagonales que vértices del polígono. | | |

4. Intercambien sus respuestas con las de otra pareja. Si hay diferencias, analicen por qué y corrijan lo que sea necesario.

5. Consideren la red de polígonos para completar la tabla de clasificación subrayando la opción que corresponda.




| Clasificación \ Polígono | *QRGHS* | *CDERQP* | *OPQTN* | *REFG* | *QSHIJT* |
|---|---|---|---|---|---|
| Por la medida de los lados o ángulos | regular/ irregular | regular/ irregular | regular/ irregular | regular/ irregular | regular/ irregular |
| Por sus diagonales (la unión de sus vértices no consecutivos) | convexo/ no convexo | convexo/ no convexo | convexo/ no convexo | convexo/ no convexo | convexo/ no convexo |

6. Decidan si es posible construir un polígono que corresponda a cada descripción. En caso afirmativo, dibújenlo en su cuaderno.

a) Un pentágono con ángulos diferentes.

b) Un cuadrilátero no convexo.

c) Un polígono no convexo de cinco lados.

d) Un pentágono no regular con lados iguales.

7. En grupo, lean y comenten la siguiente información.

Una manera de triangular polígonos convexos es trazando todas sus diagonales desde un mismo vértice. Asimismo, todo polígono convexo de $n$ lados se puede triangular en $n - 4$ triángulos con $n - 3$ diagonales.

8. Utilicen el recurso informático *Diagonales y triangulación* para poner en práctica estos conocimientos.

# 9. Conversión de medidas 1

Sesión 1

## Para empezar

¿Te has fijado que cuando llueve algunas veces se producen relámpagos? ¿Y te has preguntado por qué vemos primero la luz del rayo y después escuchamos su sonido (trueno)? Esto se debe a la distinta velocidad en que viajan la luz y el sonido. Mientras que la luz tiene una velocidad, en números redondos, de 300 000 km/s, el sonido recorre aproximadamente 340 m/s. ¿Cuál es la diferencia entre ambas velocidades? ¿Cuántos metros recorre la luz en un segundo? ¿Cuántos kilómetros recorre el sonido en un segundo? Para contestar las preguntas anteriores, es necesario hacer conversiones entre múltiplos de la unidad básica de longitud del Sistema Internacional de Unidades (SI), el metro. En esta secuencia estudiarás cómo hacer conversiones entre múltiplos y submúltiplos del metro, así como conversiones entre unidades de longitud del SI y del Sistema Inglés.

## Manos a la obra

### Rápidos y lentos

**1.** Trabaja individualmente. Marca con una palomita (✓) la unidad que consideres más conveniente para medir las siguientes distancias y longitudes. Justifica cada elección.

a) El recorrido que hace un autobús para ir de una ciudad a otra:

☐ milímetros ☐ centímetros ☐ decímetros ☐ kilómetros

_______________________________________________

b) La distancia que existe entre dos casas de una misma calle:

☐ centímetros ☐ hectómetros ☐ metros ☐ kilómetros

_______________________________________________

c) La longitud de una lombriz:

☐ milímetros ☐ centímetros ☐ decímetros ☐ kilómetros

_______________________________________________

d) La distancia de nuestro planeta al Sol:

☐ metros ☐ centímetros ☐ hectómetros ☐ kilómetros

_______________________________________________

e) La longitud de una cuerda para lazar ganado:

☐ milímetros ☐ hectómetros ☐ metros ☐ kilómetros

_______________________________________________

**Dato interesante**

La palabra *metro* viene del griego *métron*, que significa "medida". En el SI el símbolo del metro es **m**. Actualmente, su definición se basa en la velocidad de la luz: es la distancia recorrida por la luz en el vacío, en un tiempo de $\frac{1}{299\,792\,458}$ segundos. El segundo es la unidad básica de tiempo del SI y equivale a la sesentava parte de un minuto.

**2.** Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Si hay diferencias, analícenlas y establezcan acuerdos.

**3.** Trabajen en pareja. A continuación se presenta una tabla con la distancia que algunos seres vivos podrían recorrer en una hora. Anoten los datos que faltan.

| Ser vivo | |  Guepardo |  Halcón peregrino |  Avestruz |  Pez espada |
|---|---|---|---|---|---|
| Distancia recorrida en una hora | km | | 300 | | |
| | m | 120 000 | | 65 000 | 100 000 |
| Ser vivo | |  Liebre |  Tintorera |  Caballo |  Ser humano (Usain Bolt) |
| Distancia recorrida en una hora | km | 75 | | 50 | 37.58 |
| | m | | 7 000 | | |

a) ¿Cuál es el ser vivo más veloz? Justifiquen su respuesta. ____________________

____________________

**4.** Completen la siguiente tabla.

| Ser vivo | |  Caracol |  Perezoso |  Koala |  Manatí |
|---|---|---|---|---|---|
| Distancia recorrida en un segundo | cm | 1.3 | | 447 | 150 |
| | m | | 0.03 | | |
| Ser vivo | |  Monstruo de Gila |  Estrella de mar |  Loris lento pigmeo |  Tortuga gigante |
| Distancia recorrida en un segundo | cm | 667 | 2.7 | | |
| | m | | | 0.555 | 0.76 |

a) ¿Cuál de estos animales es el más lento? Justifiquen su respuesta. ____________________

____________________

El metro es la unidad básica de longitud en el Sistema Internacional de Unidades (SI). De éste se obtienen unidades que pueden ser múltiplos o submúltiplos.

| Múltiplos ← | | | BASE ↓ | Submúltiplos → | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| kilómetro | hectómetro | decámetro | METRO | decímetro | centímetro | milímetro |
| km | hm | dam | m | dm | cm | mm |
| 1 000 m | 100 m | 10 m | 1 m | 0.1 m | 0.01 m | 0.001 m |
| Mayores que el metro | | | | Menores que el metro | | |

5. Comparen sus respuestas. Con ayuda de su maestro, lean y analicen la siguiente información. Al terminar, revisen si realizaron correctamente el ejercicio anterior utilizando la equivalencia adecuada.

6. Respondan las siguientes preguntas con base en la información anterior.

   a) ¿Cuál es el animal más lento? Justifiquen su respuesta. ____________________

   ______________________________________________

   b) Un koala se desplazó durante 10 segundos para llegar a la punta de un árbol, ¿cuál es la altura del árbol en metros? ____________________

   c) El caballo de Isidro tardó 1 hora y 6 minutos en ir de Teloloapan a Iguala, ¿cuántos hectómetros recorrió aproximadamente? ____________________

   d) ¿Cuántos decímetros puede recorrer una tortuga gigante en una hora? __________

   e) Si un halcón peregrino vuela durante 30 minutos, ¿cuántos decámetros recorrerá? ____________________

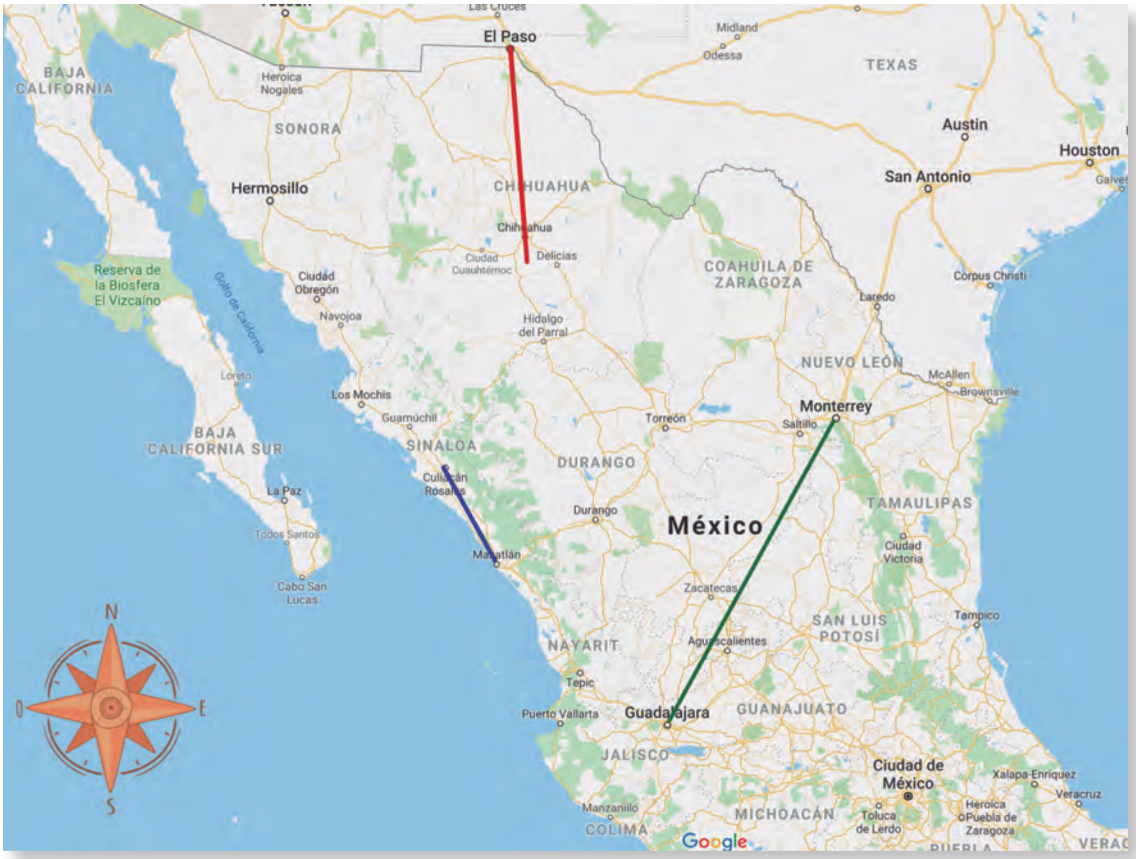
7. Comparen sus respuestas con las de sus compañeros; en caso de que haya diferencias, revisen a qué se debieron y corrijan.

8. Busquen en la biblioteca un libro que contenga la fábula “La liebre y la tortuga” donde se hace referencia a la velocidad de cada uno de estos animales.

## Cimas y simas de México



1. Resuelvan en pareja las siguientes actividades. Consideren que, en el siguiente mapa, un centímetro de los segmentos de recta equivale a 125 000 metros en la realidad.




a) El segmento rojo señala la distancia, en línea recta, que recorre un avión para ir de la ciudad de Chihuahua a El Paso.

¿Qué distancia recorre el avión en metros? ____________

¿A cuántos kilómetros equivale? ____________

b) El segmento morado indica la distancia, en línea recta, que hay entre Mazatlán y Culiacán.

¿Cuál es la distancia real, en línea recta, entre estas dos ciudades? ____________

Expresen esta distancia en hectómetros: ____________________________________

c) El segmento verde marca la distancia que hay entre Guadalajara y Monterrey.

¿Cuál es la distancia real entre las dos ciudades? ____________________________

Expresen la distancia en decámetros: ______________________________________

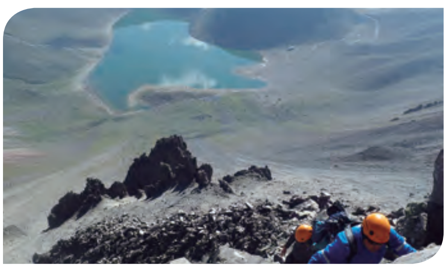
2. Resuelvan los siguientes problemas.

a) El Pico de Orizaba es la montaña más alta de México. Se ubica en el estado de Veracruz y mide 5 610 metros sobre el nivel del mar (msnm). ¿A cuántos kilómetros equivale? ________________

b) La Sima de las Cotorras, en Chiapas, tiene una profundidad de 1 400 dm. Argelia quiso descender para observar las pinturas rupestres que hay en el interior; sólo ha bajado 100 m. ¿Cuántos decámetros le faltan para llegar al fondo? ________________

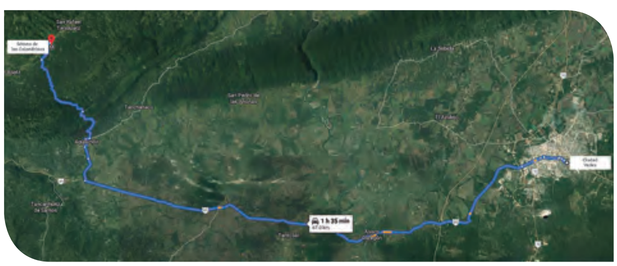
c) En el Sótano de las Golondrinas, en San Luis Potosí, Carolina descendió 135 m, pero se puede bajar hasta 5 120 dm. ¿Cuántos metros le faltan por descender? ________________

d) El Sótano del Barro, en Querétaro, es la segunda sima más grande del mundo y tiene una profundidad de 450 m. ¿Cuál es su equivalente en kilómetros? ________________



e) Rodrigo y sus amigos fueron a escalar el Nevado de Toluca. De las dos millas que les faltan para llegar a la cima, avanzaron 453 m e hicieron un descanso; después subieron 560 m más y tuvieron que hacer otra parada. ¿Cuántas yardas les faltan por subir para llegar a la cima? ________________

f) De Ciudad Valles, San Luis Potosí, al Sótano de las Golondrinas son aproximadamente 66.9 km. Mario lleva 3 380 m recorridos. ¿Cuántas millas le faltan para llegar? ________________



3. Comparen sus respuestas y comenten la manera en que las obtuvieron.

4. Como parte de una campaña para atraer turismo internacional, principalmente de los países anglosajones, se requiere convertir las siguientes distancias de kilómetros a millas o viceversa. Consideren que 1 km equivale a 0.6214 millas.

| Ciudades | Distancia en carretera | |
|---|---|---|
| | km | mi |
| Cd. de México-Acapulco | 379.3 | |
| Puerto de Veracruz-Puebla | | 183 |
| Mérida-Cancún | | 179 |
| Tuxtla Gutiérrez-Palenque | 271 | |

5. Comparen sus respuestas con el resto del grupo y comenten sus estrategias de cálculo, qué tipo de operaciones los ayudaron a convertir de kilómetros a millas y viceversa.

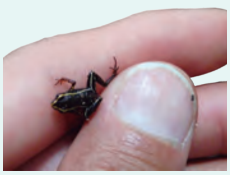
6. Observen el recurso audiovisual *La longitud en el Sistema Inglés* para que conozcan otro sistema de medición distinto al Sistema Internacional y la relación entre sus unidades.

## Para terminar

Sesión 3

### Unidades grandes y pequeñas

1. Trabajen en pareja las siguientes actividades. Consideren la información de la tabla.

| Rana monte Iberia Eleuth (9.2 mm) | Camaleón Brookesia mínima de Madagascar (2.4 cm) | Murciélago abejorro (2.9 cm) | Jaragua sphaero (16.5 mm) | Colibrí abeja (5.08 cm) |
|---|---|---|---|---|
|  |  |  |  |  |

a) La rana monte Iberia Eleuth, ¿es mayor o menor que un centímetro? ____________
¿A cuántos centímetros equivale su tamaño? ____________

b) ¿Cuál es la medida en milímetros del camaleón? ____________

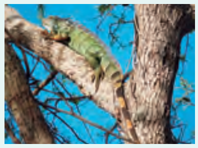
c) ¿De cuánto es la diferencia en centímetros entre el tamaño del murciélago y la rana? ____________

d) ¿Cuánto mide el colibrí abeja en milímetros? ____________

e) ¿Qué diferencia hay entre la medida del murciélago y la de la jaragua? Den su respuesta en decímetros. ____________

f) ¿Cuál es la diferencia entre el tamaño de la jaragua y el camaleón? Den su respuesta en centímetros. ____________

**2.** En el herpetario de un zoológico necesitan anotar las medidas de las siguientes especies en metros y centímetros, así como su equivalente en pies, pulgadas y yardas, pues se llevará a cabo una exposición internacional. Completen la tabla y al final coloquen en los paréntesis los números del 1 al 5, ordenando los animales de menor a mayor tamaño.

| Animal | | Boa constrictor ( )  | Caimán ( )  | Iguana ( )  | Serpiente de cascabel ( )  | Mamba negra ( )  |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Longitud | cm | 240 | | 60 | | |
| | m | | 4.87 | | 2.35 | |
| | ft | | | 1.97 | | 9.8 |
| | in | | 191.73 | | | |
| | yd | 2.62 | | | 2.57 | |

**3.** En grupo, y con ayuda de su maestro, lean y analicen la siguiente información. Después regresen al cuadro anterior y revisen si la relación entre los datos de las diferentes actividades cumple con la relación que observan en esta tabla.

**Dato interesante**
*Herpetario* proviene de la palabra griega *herpetón*, que significa “reptil”. Es un lugar destinado a la cría y exhibición de cualquier tipo de reptil (incluidos iguanas y caimanes). Cuando sólo hay víboras o serpientes, el lugar se llama *serpentario*.

Hay cuatro unidades para las medidas de longitud en el Sistema Inglés: pulgada, pie, yarda, milla. La tabla muestra la equivalencia entre éstas y también respecto al Sistema Internacional.

| Sistema Inglés | | Sistema Internacional |
|---|---|---|
| Pulgada (in) | 0.0833 ft | 2.54 cm |
| Pie (ft) | 12 in | 30.48 cm |
| Yarda (yd) | 3 ft | 91.44 cm |
| Milla (mi) | 1760 yd | 1.61 km |

4. Respondan las siguientes preguntas. En todos los casos, den sus respuestas en millas y kilómetros.

   a) Si la luz del Sol tarda 499 segundos en llegar a la Tierra y se sabe que la luz viaja a una velocidad aproximada de 300 000 km por segundo, ¿cuál es la distancia de la Tierra al Sol? ____________________

   b) La luz del Sol tarda 360 segundos en llegar a Venus. ¿A qué distancia está este planeta del Sol? ____________________

   c) La luz solar tarda 193 segundos en llegar a Mercurio. ¿Cuál es la distancia entre Mercurio y el Sol? ____________________

   d) ¿Cuál de los tres planetas anteriores está más lejos del Sol? ____________________

   ____________________________________________

   ¿Cuál está más cerca? ____________________

   ¿De cuánto es la diferencia entre ambas distancias? ____________________

5. Una revista de divulgación científica elaborará una tabla para comparar el diámetro de algunos planetas. Anoten los datos que faltan.

| Planeta | |  Venus |  Tierra |  Marte |  Saturno |  Júpiter |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Diámetro | mi | | 7 926.21 | 4 216.63 | 74 897.6 | |
| | km | 12 100 | | | | 139 800 |

6. Comparen sus respuestas con las del resto de sus compañeros. Si es necesario, regresen a las tablas de equivalencias para verificar los resultados.

7. Vuelvan a la sesión 1 y respondan las preguntas que se formularon al inicio de ella. Comenten en el grupo sus procedimientos y resultados.

8. Resuelvan problemas que impliquen convertir medidas de longitud mediante el recurso informático *Conversión de medidas de longitud*.

# 10. Perímetro y área de polígonos regulares

Sesión 1

## Para empezar

La base y el techo de algunos quioscos tienen forma de polígonos regulares.

México es un país con muchos quioscos, pues en cada plaza de cada poblado de importancia hay uno. Ahora bien, ¿qué se necesita saber para construir un quiosco? Podemos imaginar que conocer la cantidad de azulejo que se debe comprar para cubrir el piso.

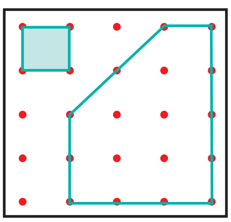
Supongamos que en tu población se construirá un quiosco en forma de hexágono regular y uno de sus lados medirá 5 metros. Si un albañil cobra $150 por cada metro cuadrado que coloca de azulejo, ¿cuánto se le pagará de mano de obra? En esta secuencia, al trabajar las áreas y los perímetros de diversos polígonos, entre ellos los que son regulares, podrás responder la pregunta anterior.

## Manos a la obra

### Puntos y figuras

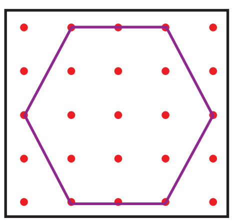
1. Trabajen en parejas las siguientes actividades. Calculen y escriban el área de los siguientes polígonos de acuerdo con la unidad indicada en el polígono 1.

**Polígono 1**



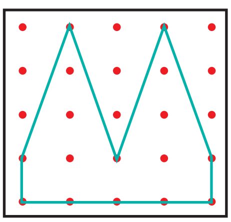
A = ____________

**Polígono 2**



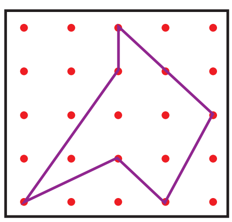
A = ____________

**Polígono 3**



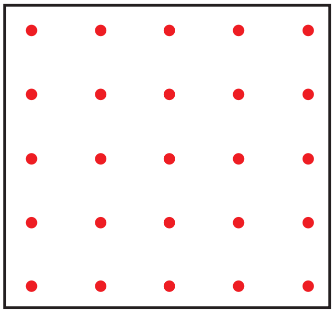
A = ____________

**Polígono 4**



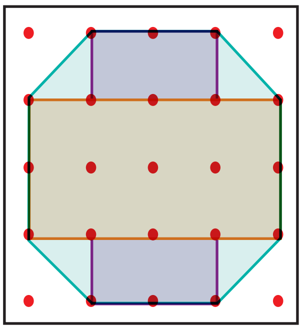
A = ____________

2. Tracen un polígono de 5 lados cuya área sea de 5 unidades cuadradas.



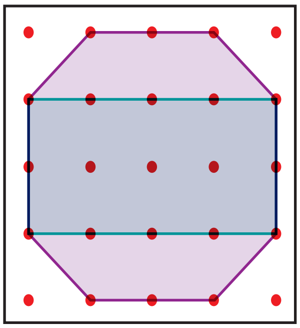
3. Calculen el área de cada una de las partes sombreadas de los siguientes octágonos; anoten el resultado dentro de cada una. Después sumen el área de todas las partes sombreadas de cada octágono y registren el resultado como su área total.

**Octágono 1**



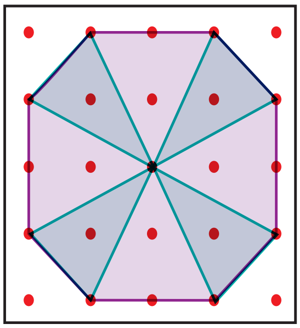
A = ______________

**Octágono 2**



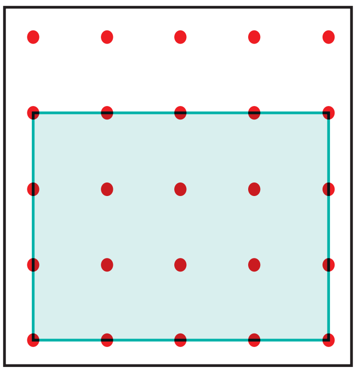
A = ______________

**Octágono 3**

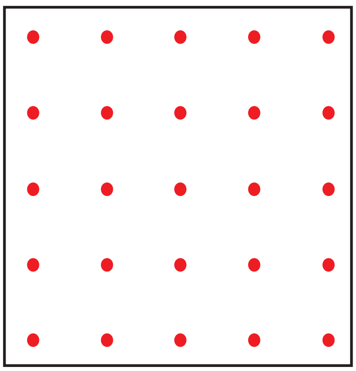


A = ______________

4. Tracen en la figura de la derecha un polígono que tenga *mayor* perímetro, pero *menor* área que el polígono de la izquierda.



A = ______________



A = ______________

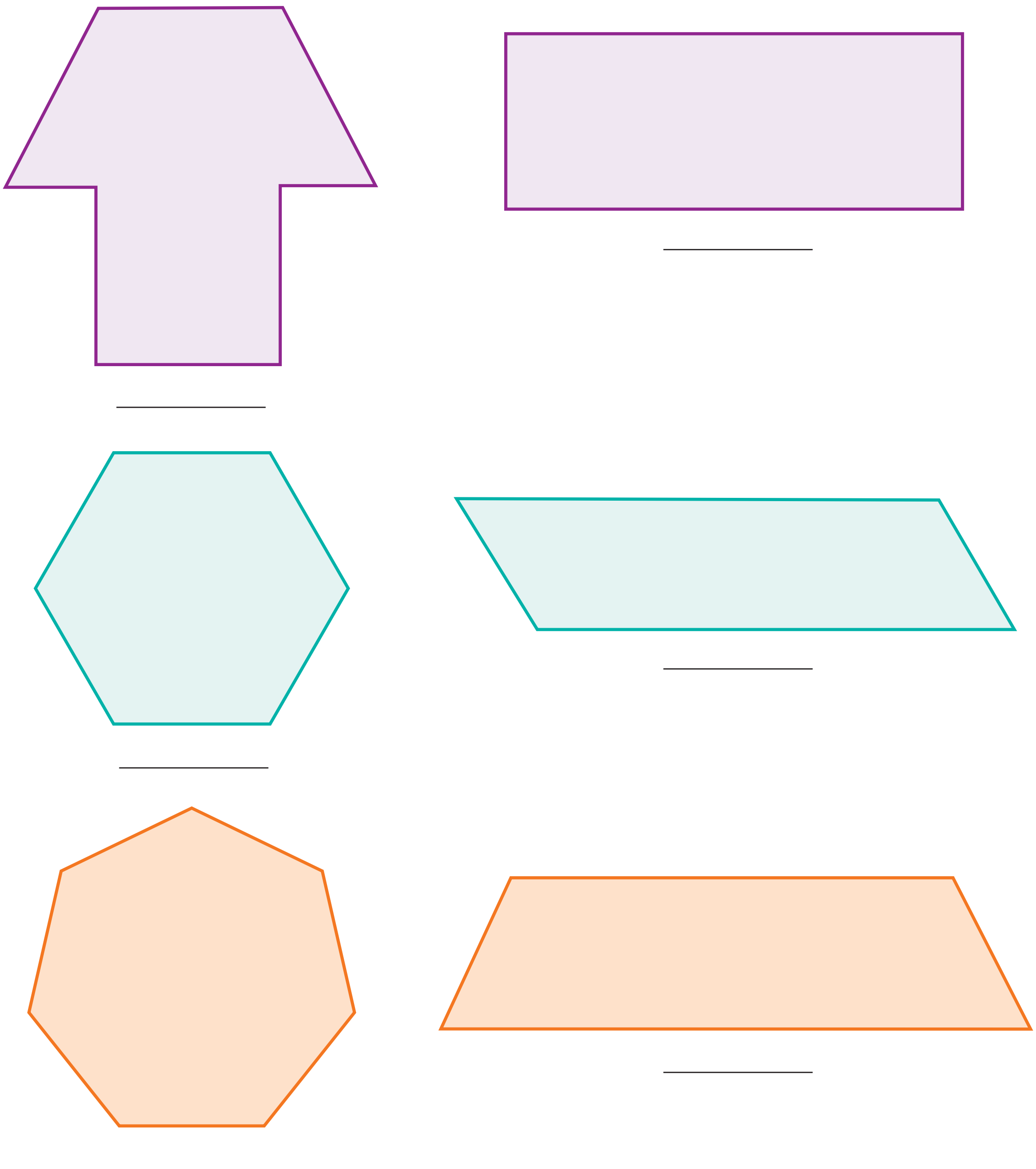
5. Comparen sus respuestas y procedimientos con los de sus compañeros de grupo. Si hay diferencias, analicen por qué y, si es necesario, corrijan.

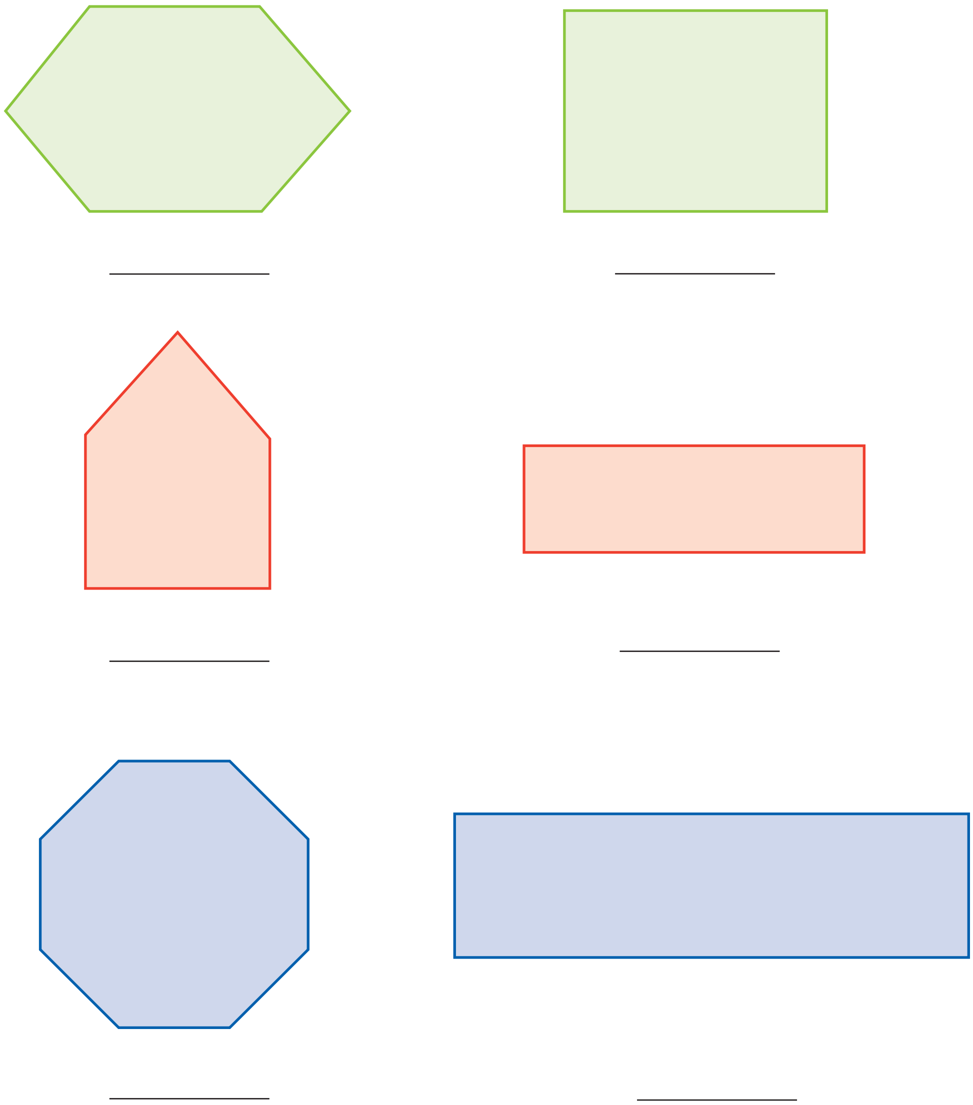
## Transformación de figuras

**1.** Formen un equipo y resuelvan el siguiente problema.

a) Estimen el área de los polígonos de la izquierda y numérenlos del 1 al 6, asignando el 1 al que tenga menor área y el 6 al de mayor área.

b) Calquen y recorten cada uno de los seis polígonos. Hagan los cortes que consideren pertinentes y reacomoden las piezas obtenidas de tal manera que obtengan el cuadrilátero de la derecha que tiene el mismo color. Calculen y anoten el área de ese cuadrilátero.





c) ¿De qué color es el cuadrilátero con mayor área? ____________

d) ¿Cuál tiene menor área? ____________

**2.** Comparen sus respuestas con las de otro equipo; en caso necesario, corrijan. Comenten si el polígono y el cuadrilátero del mismo color tienen la misma área y argumenten su respuesta.

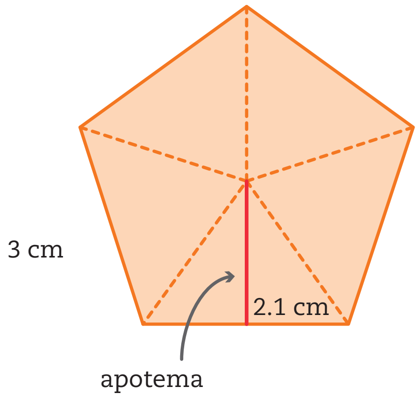
**3.** Muestren la manera en que recortaron los polígonos para formar el cuadrilátero correspondiente.

**4.** Observen el recurso audiovisual *El área de polígonos*, donde encontrarán diversas maneras de calcular el área de un polígono, ya sea irregular o regular.

## Hacia la fórmula

**1.** Trabajen en pareja todas las actividades de esta sesión. Observen el siguiente pentágono regular; el segmento rojo es la altura del triángulo que se forma dentro del pentágono. En los polígonos regulares este segmento recibe el nombre de **apotema**.

**Glosario**
**Apotema**: Proviene del griego y una de sus traducciones es "bajar". En geometría se define como la perpendicular del centro de un polígono regular a cualquiera de sus lados.




a) ¿Cuánto mide el perímetro del pentágono? ________________

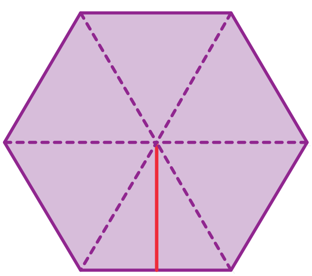
b) ¿Cuál es el área de cada uno de los triángulos interiores? ________________

c) ¿Cuál es el área del polígono regular completo? ________________

d) ¿Cómo la calcularon? ________________

**2.** Tomen las medidas que consideren necesarias para calcular el perímetro y el área de cada polígono regular a partir de la división en triángulos:

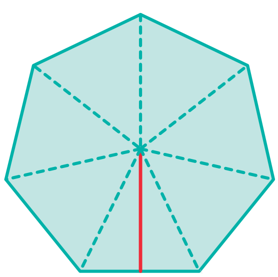
A



$P$ = ____________

$A$ = ____________

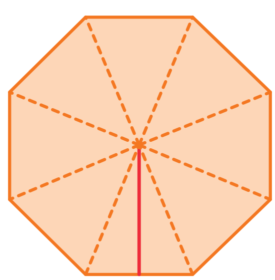
B



$P$ = ____________

$A$ = ____________

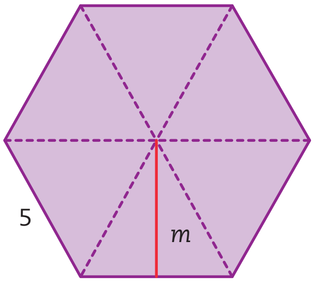
C



$P$ = ____________

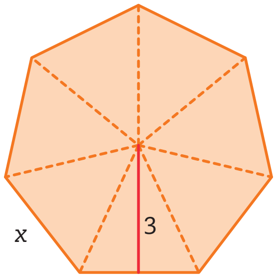
$A$ = ____________

3. Calculen el perímetro y el área de cada polígono regular. Los datos numéricos se refieren a una unidad de longitud. Recuerden que las medidas de las áreas son en unidades cuadradas.



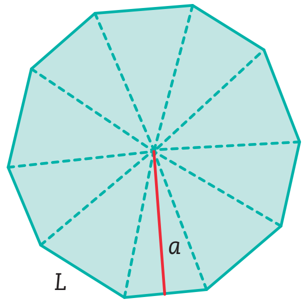

$P$ = ____________

$A$ = ____________




$P$ = ____________

$A$ = ____________




$P$ = ____________

$A$ = ____________

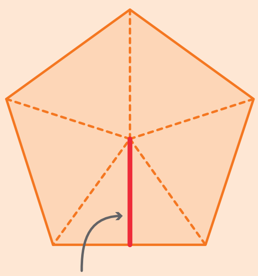
4. Se tiene un polígono regular de $n$ lados, la medida de su lado es $L$ y la medida de la apotema es $a$.
   a) Escriban una fórmula para calcular el perímetro. $P$ = ________________
   b) Escriban una fórmula para calcular el área. $A$ = ________________

5. Comparen sus resultados con los de sus compañeros; si tienen errores, corrijan. Después, lean y comenten la siguiente información.

El área de un polígono regular puede calcularse multiplicando el perímetro por la apotema y dividiendo el resultado entre dos.

$$A = \frac{\text{Perímetro} \times \text{apotema}}{2}$$

$$A = \frac{Pa}{2}$$




**Dato interesante**

En las fórmulas para calcular perímetros, áreas y volúmenes, por lo general se utiliza la letra minúscula *a* para representar la apotema de un polígono regular, así como la letra *h* para representar su altura.

6. Trabajen el recurso informático *Área de polígonos regulares*, donde encontrarán la aplicación de la fórmula en casos en los que conocen algunos datos y tienen que calcular otros.

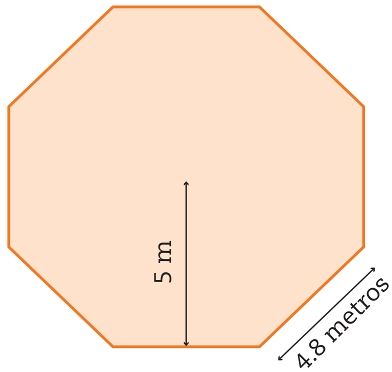
Sesión 4

## Para terminar

### Problemas con polígonos regulares

1. Trabajen en equipo para resolver los siguientes problemas. En un parque hay un quiosco que tiene forma de octágono regular, cuyas medidas se dan a continuación:

Quiosco de Chignahuapan, Puebla.

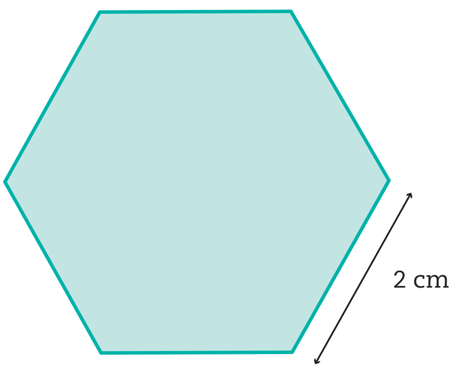



a) Alrededor del quiosco se colocará un barandal metálico. El herrero cobrará $300 por metro de reja, ¿cuánto se le pagará al herrero por la reja? ________________

b) Se desea cubrir el piso con un mosaico que cuesta $200 el metro cuadrado, ¿qué cantidad mínima de mosaico se debe comprar? ________________

c) ¿Cuánto se pagará por el mosaico? ________________

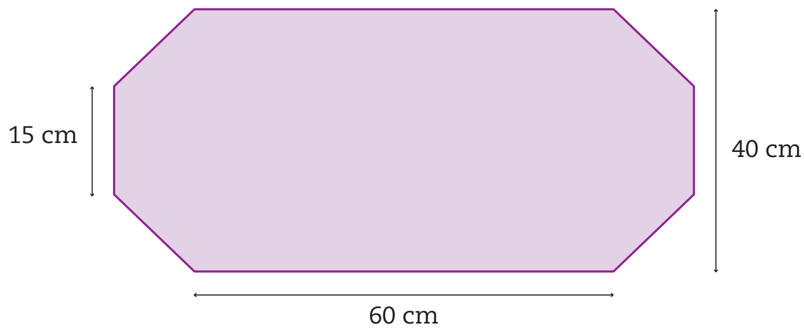
2. En el parque hay 12 secciones de jardín en forma de hexágono. La siguiente figura es una de ellas hecha a escala, por lo que cada centímetro representa un metro. Se cubrirán de pasto en rollo, el cual se vende por metro cuadrado.




a) ¿Qué cantidad de pasto se debe comprar? ________________

3. ¿Cuánto mide la apotema de un decágono regular si cada lado mide 2 cm y su área es de 30.77 $cm^2$? ________________

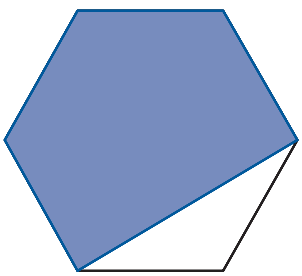
4. Se harán carpetas de la siguiente forma:



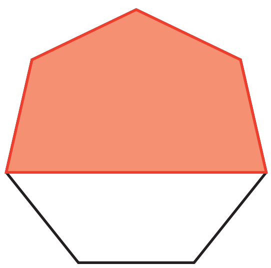

a) ¿Qué cantidad de tela se ocupará en cada una? ________________

b) Se pondrá encaje alrededor sin plisar. ¿Qué cantidad de encaje se requerirá para seis carpetas? ________________

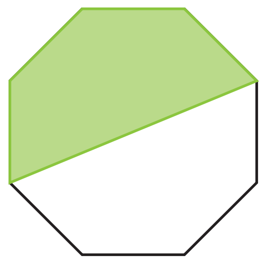
5. En cada caso tomen las medidas que consideren necesarias y calculen el área sombreada de los siguientes polígonos.



A = __________



A = __________



A = __________

6. Comparen sus resultados con los de sus compañeros. En aquellos casos en que tomaron medidas es probable que los resultados sean aproximados, comenten a qué se debe.

7. Subrayen las fórmulas con las que se puede calcular el área de un polígono regular. Recuerden que *A* es área, *P* es perímetro, *n* es número de lados, *L* es medida del lado, y *a* es apotema.

$$A = P \times \frac{a}{2} \qquad A = \frac{P \times 2}{a} \qquad A = \frac{nLa}{2} \qquad A = \frac{1}{2} \times Pa \qquad A = 2Pa$$

8. Comparen sus respuestas con las de otros compañeros y argumenten por qué las expresiones que subrayaron son equivalentes.

# 11. Volumen de prismas

Sesión 1

## Para empezar

La imagen muestra dos edificios de oficinas en la Ciudad de México. En ambos, las torres que forman los edificios son prismas.

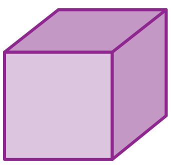
Muchos objetos de la vida cotidiana tienen forma de prismas: edificios, casas, cajas, tinacos, albercas, peceras, etcétera. Para construirlos, se requieren conocimientos geométricos, como trazar el desarrollo plano de un prisma, representarlo en un plano, proyectar la cantidad necesaria de material para levantar una construcción, medir o calcular el volumen que ocupa o, en caso de que sea un recipiente con forma de prisma, determinar cuál es su capacidad. En esta secuencia recordarás cómo calcular el volumen de los prismas, que ya estudiaste en primer grado, y aprenderás a calcular el volumen de prismas que tienen como base un polígono regular.

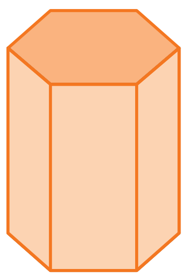
## Manos a la obra

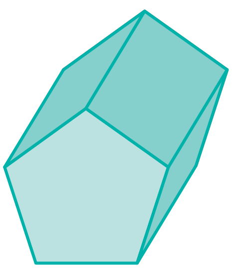
### Cajas de cartón

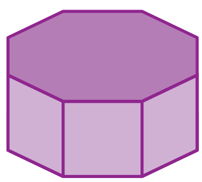
1. Trabajen en pareja. Juan arma cajas de cartón con forma de cuerpos geométricos.

a) En la línea grande, anoten el nombre de cada cuerpo geométrico:

 ______________________ __________

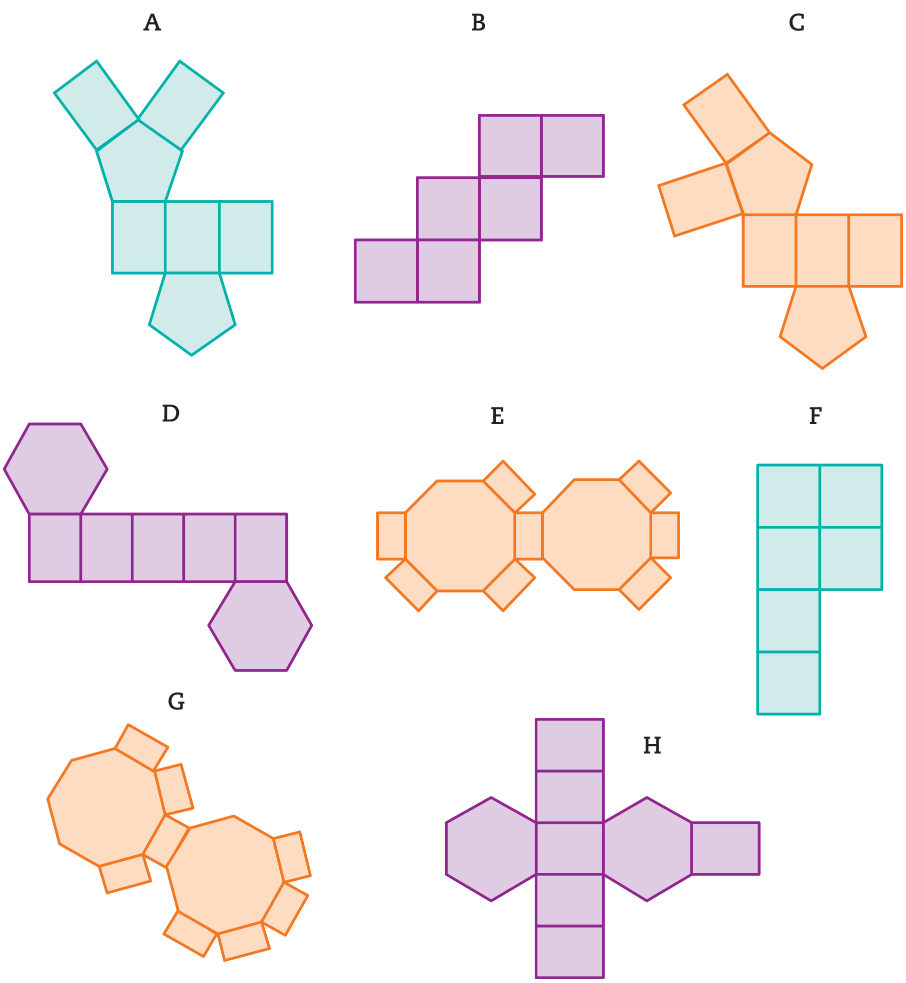
 ______________________ __________

 ______________________ __________

 ______________________ __________

b) En la línea pequeña al lado de cada caja, anoten la letra del desarrollo plano con el que puede construirse dicho cuerpo geométrico. Consideren los siguientes moldes.

2. Calquen los moldes que eligieron y únicamente tracen las pestañas necesarias para pegarlos.

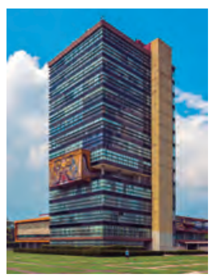



3. Comprueben su respuesta armando las cajas.

4. Comparen sus resultados con los de sus compañeros. Pongan atención en el lugar donde colocaron las pestañas, ¿es necesario que coincida esa ubicación con la que decidieron sus compañeros?, ¿por qué?

______________________________________________________________

**Dato interesante**
Mario Pani Darqui (1911-1993) fue un arquitecto y urbanista mexicano. Formó parte del equipo que desarrolló el plan maestro para la construcción de Ciudad Universitaria; fue uno de los tres arquitectos que construyó la Torre de Rectoría de la UNAM. Como puedes apreciar, este edificio es un prisma rectangular.

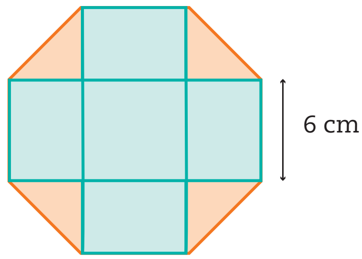


5. Observen el recurso audiovisual *Moldes para cajas*, en el que conocerán más acerca de los desarrollos planos para construir cuerpos geométricos.

Sesión 2

## Cajas y chocolates

1. Trabajen en pareja. Para sus cajas en forma de prisma regular, Juan diseña diferentes figuras geométricas que usa como base. Por ejemplo, la siguiente:

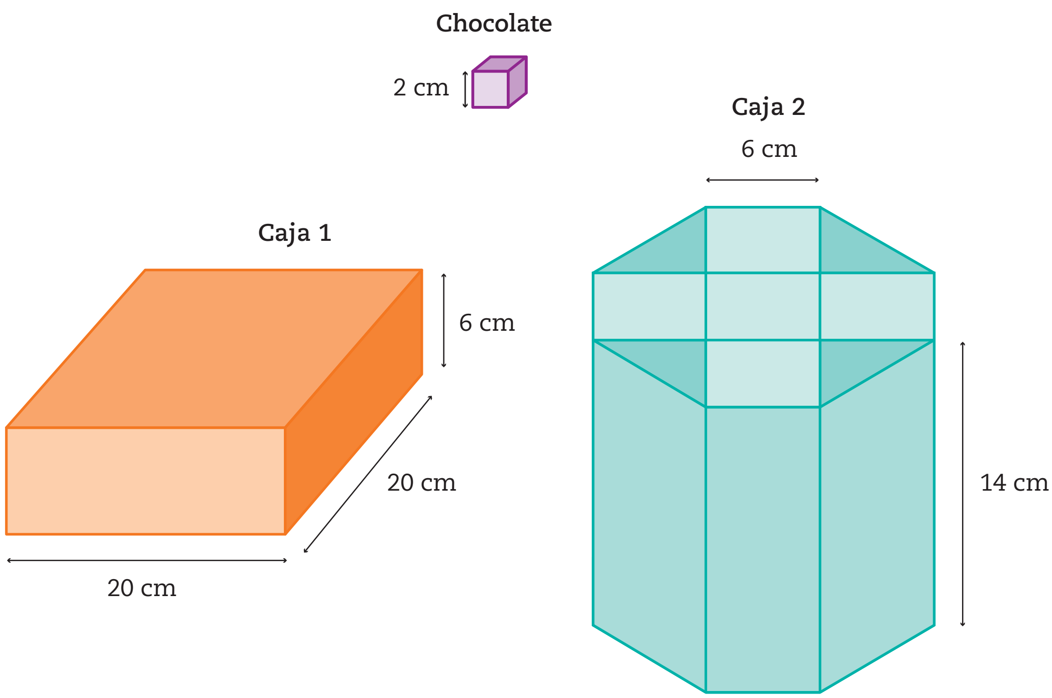



a) ¿De qué figura se trata? ______________

b) Justifiquen su respuesta. ____________________________________________

______________________________________________________________

2. Consideren chocolates en forma de cubo. Las siguientes cajas se van a llenar con esos chocolates sin partirlos. Las bases de la caja octagonal son como las de la figura de la actividad 1.

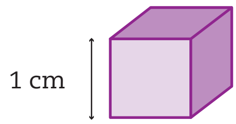
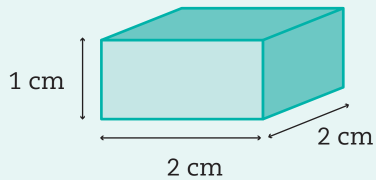
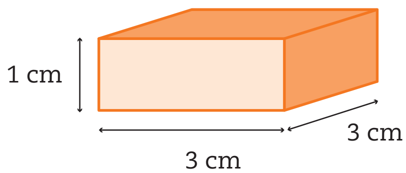
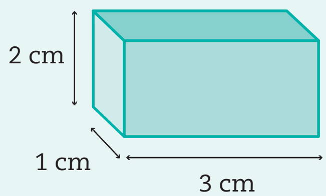
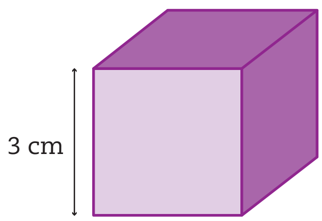



a) ¿A cuál caja le caben más chocolates? ______________

b) ¿Cuántos más le caben? ______________

c) Si se parten algunos chocolates a la mitad, por la diagonal, ¿cuántos chocolates más le caben a la caja en forma de prisma octagonal? ______________

3. Completen la siguiente tabla. Calculen, en dos casos, el número máximo de chocolates que le caben a la caja con forma de prisma octagonal: primero sin hacer cortes, y luego haciendo los cortes necesarios para llenar completamente la caja (los cortes pueden ser de cualquier tipo).

| Barra de chocolate | ¿Cuántos chocolates le caben sin partir la barra de chocolate? | ¿Cuántas barras le caben haciendo cortes? |
| --- | --- | --- |
|  | | |
|  | | |
|  | | |
|  | | |
|  | | |

4. Compartan con sus compañeros los resultados y el procedimiento para llegar a ellos.

Sesión
3

## ¿Será la misma fórmula?

**1.** Trabajen en equipo todas las actividades de esta sesión.

a) En primer grado aprendieron la fórmula para calcular el volumen de un prisma cuya base era un triángulo o un cuadrilátero. Anótenla. ____________

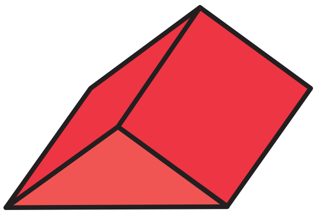
b) Para calcular el volumen de un prisma cuya base sea cualquier polígono, ¿se usará la misma fórmula? ____________

**2.** Realicen las siguientes actividades para comprobar su respuesta. Utilicen los recortables 1 y 2 que se encuentran al final de su libro.

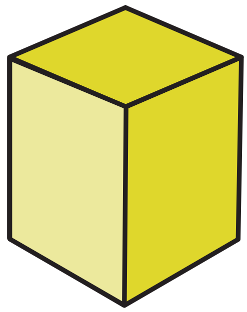
a) Tracen en cada desarrollo plano (molde) las pestañas convenientes para pegarlos.

b) Recorten y armen los prismas.

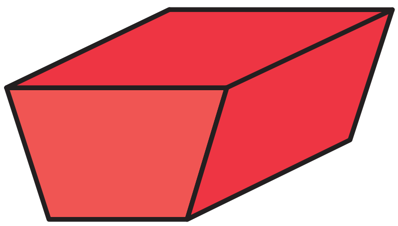
c) Tomen las medidas necesarias y calculen el volumen de cada uno.



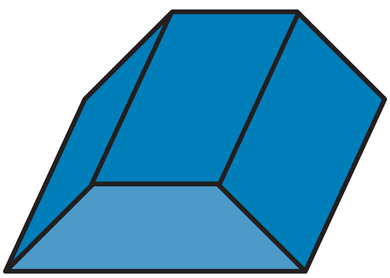
V = __________



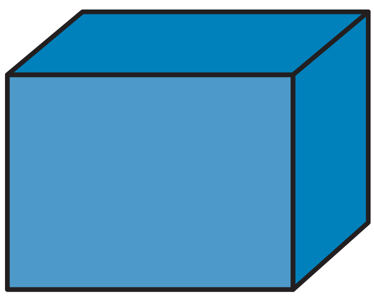
V = __________



V = __________

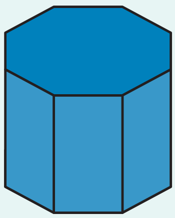
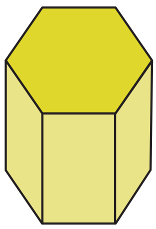
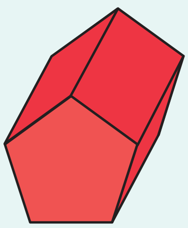


V = __________



V = __________

3. Armen los siguientes prismas a partir de los que construyeron con su material recortable. Después calculen el volumen de acuerdo con las dos formas que se indican:

| Prisma | Volumen | |
|---|---|---|
| | Procedimiento 1. Sumen el volumen de los prismas que lo forman. | Procedimiento 2. Tomen las medidas necesarias y apliquen la fórmula al prisma cuya base es un polígono regular. |
|  | | |
|  | | |
|  | | |

4. Comparen sus resultados con los de sus compañeros. ¿Llegaron al mismo resultado con ambos procedimientos? Es posible que haya diferencias pequeñas. Si no son iguales, analicen por qué y platiquen acerca de la imprecisión al medir. Después, lean y comenten la siguiente información:

El volumen de cualquier prisma se calcula con la siguiente fórmula:

Volumen de un prisma = Área de la base por altura

Si consideramos $A$ para el área de la base y $h$ para altura, la fórmula es:

$$V = A \times h$$

5. Observen el recurso audiovisual *Volumen de prismas*, en el que se muestra que el volumen de cualquier prisma se calcula con la fórmula $V = A \times h$

# Para terminar

## Resolvamos problemas

1. Trabajen en pareja. En todos los casos las bases son polígonos regulares. Calculen el volumen de las siguientes cajas:

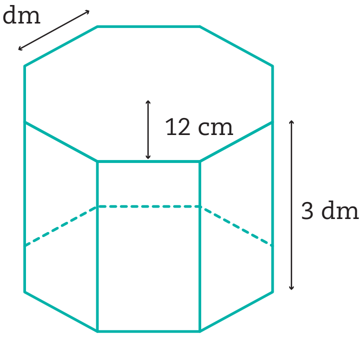
Lado = 3 cm
Apotema = 2.59 cm
Altura = 8 cm

Volumen = ________

Lado = 8 cm
Apotema = 5.5 cm
Altura = 13 cm

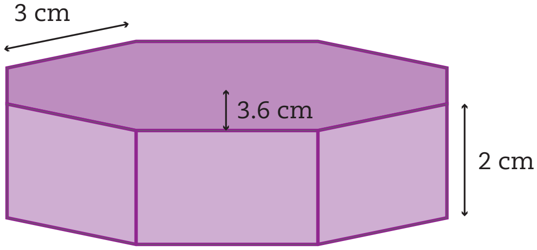
Volumen = ________

2. Se recomienda que por cada pez en una pecera debe haber 4 litros de agua. ¿Cuántos peces como máximo puede tener esta pecera? Recuerden que en un decímetro cúbico cabe un litro de agua; observen que las medidas están en diferentes unidades.

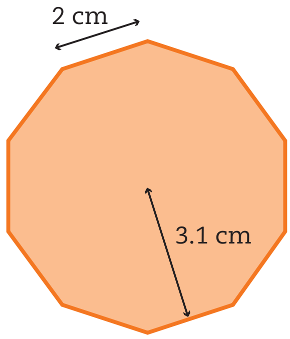



______________________________

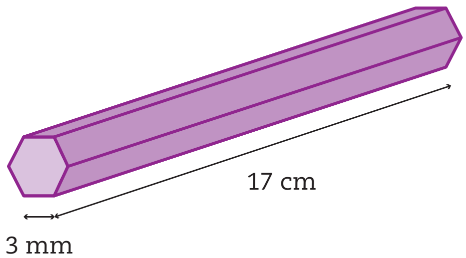
3. Una báscula indica 2 gramos cuando se coloca un centímetro cúbico de cierto tipo de chocolate. ¿Cuánto indicará la báscula cuando se coloque en ella la siguiente barra del mismo tipo de chocolate? ____________



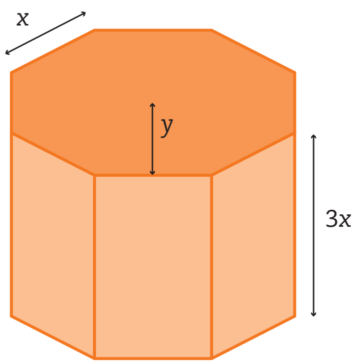
4. Se va a construir un envase en forma de prisma cuya base es un decágono regular. Si las medidas de la base son las que se muestran, ¿cuánto debe medir de altura para que tenga capacidad de un litro? ______________



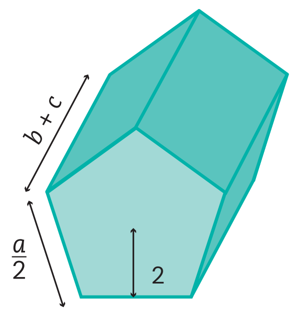

5. ¿Cuánto mide la apotema de este lápiz si antes de sacarle punta medía 17 cm de largo, el lado de su base es de 3 mm y su volumen es de 70.6 $cm^3$? ______________




6. Escriban la expresión con la que se obtiene el volumen de los siguientes prismas.




V = ______________




V = ______________

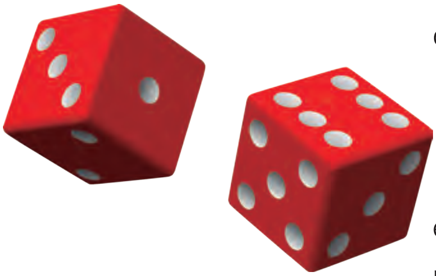
7. Comparen sus respuestas y procedimientos con los de sus compañeros. Si hay errores, corríjanlos.

8. Practiquen la resolución de problemas que implican el cálculo de volúmenes de prismas en el recurso informático *Prismas y volúmenes* en https://proyectodescartes.org/EDAD/materiales_didacticos/EDAD_2eso_volumen_cuerpos_geometricos-JS-LOMCE/index.htm

# 12. Probabilidad clásica 1

Sesión 1

## Para empezar



Cuando lanzamos simultáneamente dos dados es posible que ocurra, entre otros, uno de los dos resultados siguientes:

Resultado 1: Se obtiene un 3 y un 6.

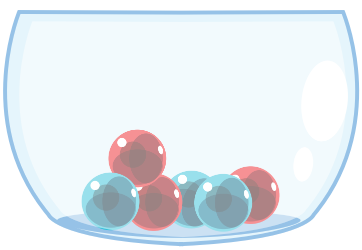
Resultado 2: Se obtiene dos veces el 3.

¿Estos resultados tienen la misma probabilidad de que ocurran, es decir, son equiprobables? ¿De qué manera lo podrías saber? En esta secuencia recordarás cómo calcular la probabilidad frecuencial de un evento, y aprenderás qué es y cómo se calcula la probabilidad clásica de un evento.

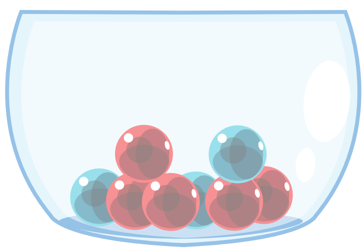
## Manos a la obra

### Urnas

1. Trabaja individualmente. Para ganar un premio debes sacar, con los ojos cerrados, una canica azul de una urna. ¿De cuál urna prefieres extraer la canica?



Urna A



Urna B

a) En la urna A, ¿cuántas canicas azules hay? ____________
   - ¿Cuántas canicas hay en total? ____________
   - ¿Cuál es la proporción del número de canicas azules respecto al total de canicas en la urna? ____________

b) En la urna B, ¿cuántas canicas azules hay? ____________
   - ¿Cuántas canicas hay en total? ____________
   - ¿Cuál es la proporción del número de canicas azules respecto al total de canicas en esa urna? ____________

c) Completa la siguiente tabla.

| Sacar una canica azul de la urna A | Sacar una canica azul de la urna B |
|---|---|
| $\frac{\text{Número de canicas azules en la urna A}}{\text{Número total de canicas en la urna A}}$ = ________ | $\frac{\text{Número de canicas azules en la urna B}}{\text{Número total de canicas en la urna B}}$ = ________ |

d) De acuerdo con los resultados obtenidos, ¿cuál es la urna que te conviene utilizar para ganar el juego? ____________

**2.** Reúnete con un compañero y comprueben sus respuestas mediante la extracción de las canicas en ambas urnas. Cada uno escogerá una urna y extraerá, sin ver, una canica. Registrarán su color y la regresarán a la urna. Realizarán 20 extracciones.

a) Antes de iniciar, escriban cuántas veces creen que sacarán una canica azul al hacer 20 extracciones: ____________

b) Anoten en la siguiente tabla la letra A si sale una canica de color azul, o R si es de color rojo.

| Urna | Color de la canica que se saca | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

**3.** Completen la siguiente tabla a partir de los resultados que cada uno obtuvo al realizar las 20 extracciones.

| Número de extracción | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Resultados de la urna A | Número de veces que sacas una canica azul (frecuencia absoluta) | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | $\frac{\text{Número de veces que sacas una canica azul}}{\text{Número total de veces que se saca una canica de la urna}}$ (frecuencia relativa) | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Resultados de la urna B | Número de veces que sacas una canica azul (frecuencia absoluta) | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | $\frac{\text{Número de veces que sacas una canica azul}}{\text{Número total de veces que se saca una canica de la urna}}$ (frecuencia relativa) | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

4. Contesten las siguientes preguntas.
   a) ¿Cuál fue el valor mínimo de la frecuencia relativa? ____________
   ¿Y el máximo? ____________
   b) De acuerdo con los resultados obtenidos al realizar el experimento, ¿cuál es la urna que conviene utilizar para ganar el juego? ____________

5. Comparen sus resultados con los de otros equipos. Comenten la manera en que determinaron la proporción de canicas azules en cada urna y cuáles son sus valores, así como la manera de calcular la frecuencia relativa de sacar una canica azul en cada urna. ¿Coinciden en la urna que deben elegir? Expliquen por qué. ____________
____________________________________________

Cuando se realiza un experimento aleatorio, el conjunto de todos los resultados sencillos posibles es el espacio muestral o conjunto de resultados. Por otra parte, la frecuencia relativa con que sucede un evento aleatorio es su probabilidad frecuencial y se expresa como fracción, decimal o porcentaje:

$$P'(A) = \frac{\text{Número de veces que ocurre favorablemente el evento A}}{\text{Número total de veces que se realiza el experimento}}$$

El valor de la probabilidad de un evento siempre es igual a un valor numérico entre 0 y 1; la suma de las probabilidades frecuenciales de los eventos de un experimento es igual que 1.

6. Observen el recurso audiovisual *Los valores de la probabilidad* para reafirmar qué es la probabilidad frecuencial y cuáles son los valores que puede tener.

Sesión 2

## ¿Cuál conviene elegir?

1. Trabajen en pareja las actividades de esta sesión. Reúnan los valores de la frecuencia relativa de sacar una canica azul de la urna A, obtenidos por cada equipo al realizar 20 extracciones. Anótenlos en la tabla y completen la última columna.

| Equipo | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Número de veces que sacaron una canica azul en la urna A en 20 extracciones | | | | | | | | | | | | |
| Probabilidad frecuencial | En fracción | | | | | | | | | | | |
| | En decimal | | | | | | | | | | | |

2. Contesten las siguientes preguntas.

a) En total, ¿cuántas veces sacaron una canica azul de la urna A? ____________

b) ¿Cuántas veces sacaron una canica de la urna A? ____________

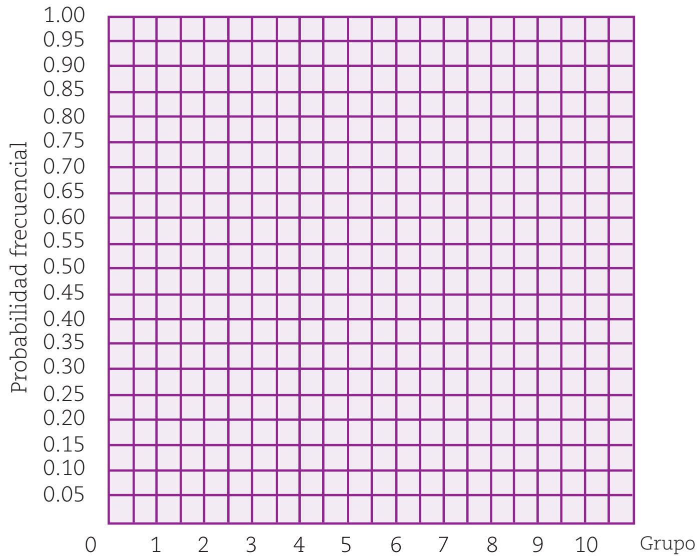
c) A partir de la siguiente fórmula, ¿cuál es la probabilidad frecuencial de sacar una canica azul de la urna A en el grupo? ____________

**Probabilidad frecuencial de sacar una canica azul de la urna A**

$$P'(\text{saca una canica azul en la urna A}) = \frac{\text{Número de veces que saca una canica azul en la urna A}}{\text{Número total de extracciones en la urna A}} = \_\_\_\_\_\_$$

3. Ubiquen en la siguiente gráfica los valores de la probabilidad frecuencial obtenida por cada equipo y la del total de las extracciones en el grupo.

Probabilidad frecuencial de sacar una canica azul
de la urna A en 20 extracciones




Equipo y grupo

4. Elaboren en sus cuadernos la tabla con el concentrado de los resultados en el caso de la urna B.

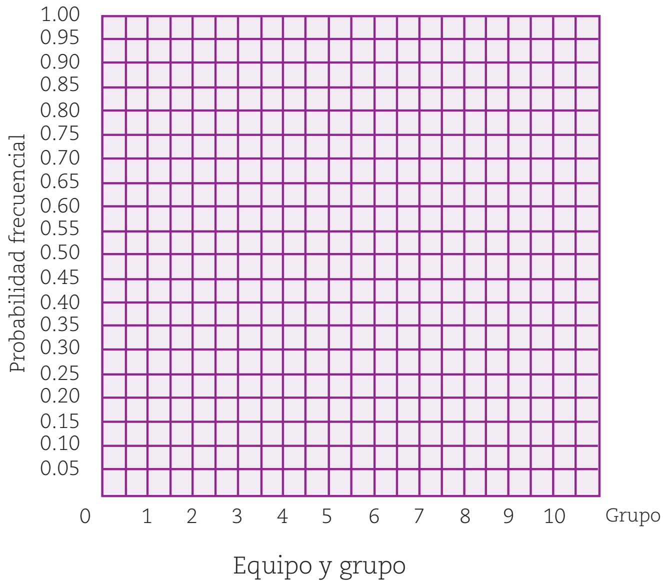
a) Obtengan la probabilidad frecuencial de sacar una canica azul de la urna B en el grupo.

**Probabilidad frecuencial de sacar una canica azul de la urna B**

$$P'(\text{saca una canica azul en la urna B}) = \frac{\text{Número de veces que saca una canica azul en la urna B}}{\text{Número total de extracciones en la urna B}} = \_\_\_\_\_\_$$

b) Completen la gráfica siguiente.

Probabilidad frecuencial de sacar una canica azul
de la urna B en 20 extracciones




**5.** Consideren el resultado obtenido en el inciso c) de la actividad 1 de la primera sesión, relativo a la proporción de canicas azules que se pueden sacar de la urna A. Ubíquenlo en el eje vertical de la escala de valores de la probabilidad frecuencial (gráfica de actividad 3).

a) A partir de ese punto, tracen una línea de color azul paralela al eje horizontal.

b) Determinen qué valores de la probabilidad frecuencial quedan por encima de la línea y cuáles están por debajo de ella. Particularmente, describan en su cuaderno lo que ocurre con el valor de la probabilidad frecuencial del grupo.

c) De manera similar, procedan con el valor de la proporción de sacar una canica azul de la urna B y describan en su cuaderno lo que ocurre en ese caso.

d) De continuar realizando extracciones en cada urna, ¿qué esperan que ocurra? ____________________

____________________

e) ¿A qué valor se aproximará en cada caso? ____________________

f) Con base en los resultados del grupo, ¿cuál urna conviene elegir para ganar el premio? ____________________

**Dato interesante**

En su obra *Théorie Analytique des probabilités* (1812), Pierre-Simon Laplace (1749-1827) dio la definición de lo que hoy se conoce como probabilidad clásica.

6. Intercambien sus resultados con los de otra pareja; si son distintos, averigüen por qué. Después, lean y comenten la siguiente información.

Cuando se considera que en un experimento aleatorio todos sus resultados posibles tienen la misma posibilidad de ocurrir, el número de resultados favorables de un suceso entre el número total de resultados posibles es su probabilidad teórica o clásica. Ésta se expresa como:

$$P(A) = \frac{\text{Número de resultados favorables de un suceso}}{\text{Número total de resultados posibles}}$$

7. Expresen la probabilidad teórica de los eventos.

| Probabilidad teórica de sacar una canica azul en la urna A | Probabilidad teórica de sacar una canica azul en la urna B |
|---|---|
| $P(A) = \frac{\text{Número de resultados favorables del suceso}}{\text{Número total de resultados posibles}} = \_\_\_\_$ | $P(B) = \frac{\text{Número de resultados favorables de un suceso}}{\text{Número total de resultados posibles}} = \_\_\_\_$ |

8. Observen el recurso audiovisual *¿Qué es la probabilidad teórica?* para saber más sobre este tema.

## Para terminar

Sesión 3

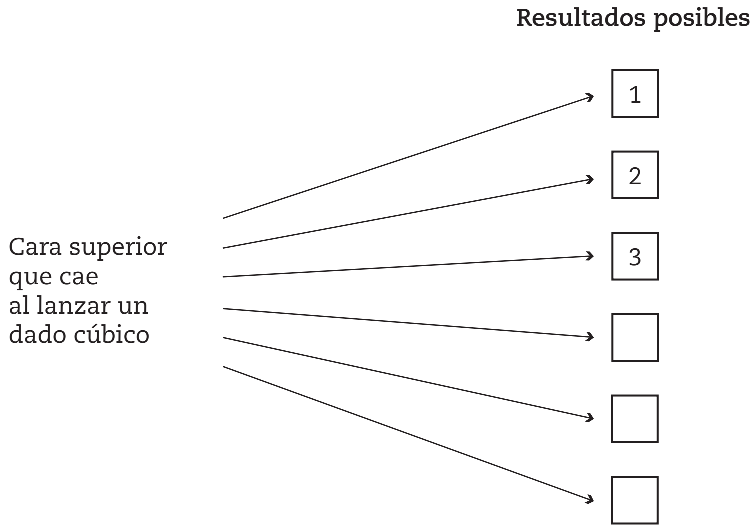
### Dado legal, dado cargado

1. Trabajen en equipo las actividades de esta sesión. Emma y Mateo van a jugar serpientes y escaleras. Para iniciar el juego y mover las fichas deberán lanzar un dado cúbico no cargado y obtener un 3, pero Emma prefiere que salga un 6; cree que con ese número ella tiene ventaja.
   a) ¿Consideran que Emma tiene razón? Justifiquen su respuesta. ________________

   ________________________________________
   b) ¿Creen que es lo mismo si comienzan a mover la ficha cuando a alguno le salga un 6, que cuando a cada uno le salga un 3? Justifiquen su respuesta. ________________

   ________________________________________

2. Completen el siguiente diagrama de árbol con todos los resultados posibles al lanzar un dado y después contesten las preguntas.




a) ¿Cuántos resultados posibles hay? ____________

b) ¿Cuántos resultados favorables hay para el evento "cae 3"? ____________

c) ¿Cuántos hay para el evento "cae 6"? ____________

d) Obtengan la probabilidad teórica de los siguientes eventos:

| Probabilidad teórica de sacar un 3 al lanzar un dado | Probabilidad teórica de sacar un 6 al lanzar un dado |
|---|---|
| $P(A) = \dfrac{\text{Número de resultados favorables del evento cae 3}}{\text{Número total de resultados posibles al lanzar un dado}} =$ ______ | $P(B) = \dfrac{\text{Número de resultados favorables del evento cae 6}}{\text{Número total de resultados posibles al lanzar un dado}} =$ ______ |

3. Consigan un dado y asegúrense de que sea legal.

a) Lancen el dado 24 veces y registren los resultados en la siguiente tabla.

| Cara que cae del dado | Frecuencia absoluta | Probabilidad frecuencial |
|---|---|---|
| 1 | | |
| 2 | | |
| 3 | | |
| 4 | | |
| 5 | | |
| 6 | | |
| Total | | |

b) Calculen en su cuaderno las siguientes probabilidades frecuenciales.

$$P'(A\text{: } cae\ 3) = \frac{\text{Número de veces que cae 3}}{\text{Número total de veces que se lanza el dado}}$$

$$P'(B\text{: } cae\ 6) = \frac{\text{Número de veces que cae 6}}{\text{Número total de veces que se lanza el dado}}$$

c) ¿Cuál probabilidad es mayor? ___________

d) Comparen las probabilidades frecuenciales y teóricas, y describan en su cuaderno lo que ocurre.

**Dato interesante**
Una forma de saber si un dado es legal (que no está cargado) es haciéndolo girar sobre sí mismo. Si el dado es ilegal, se balanceará por su lado más pesado. Otra forma es dejarlo caer varias veces en un vaso de agua y tomar nota del número que aparece hacia arriba. Si el número se repite varias veces, el dado está cargado.

**4.** Peguen un pequeño peso en la cara del 3, por ejemplo, un botón o una moneda. Con ello, el dado estará cargado. Utilícenlo para repetir el experimento anterior.

| Cara que cae del dado | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Frecuencia absoluta | | | | | | | 24 |
| Probabilidad frecuencial | | | | | | | 1 |

a) Calculen en su cuaderno las siguientes probabilidades frecuenciales.

$$P'(A\text{: } cae\ 3) = \frac{\text{Número de veces que cae 3}}{\text{Número total de veces que se lanza el dado}}$$

$$P'(B\text{: } cae\ 6) = \frac{\text{Número de veces que cae 6}}{\text{Número total de veces que se lanza el dado}}$$

b) Comparen las probabilidades frecuenciales y la probabilidad teórica cuando un dado está cargado. Describan en su cuaderno lo que ocurre.

**5.** Utilicen el recurso informático *Probabilidad teórica* para determinar la probabilidad clásica de eventos de otros experimentos aleatorios.

# Evaluación

Es tiempo de revisar lo que has aprendido después de trabajar en este bloque. Lee cada inciso y contesta lo que se te pide.

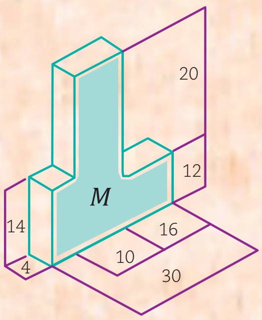
**1.** Calcula los resultados de las siguientes operaciones.

a) $45.002 \div 0.01 =$ ____________ c) $\frac{3}{6} \times \frac{1}{2} =$ ____________ e) $\frac{1}{3} \div \frac{4}{5} =$ ____________

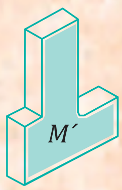
b) $0.0001 \times 5.843 =$ ____________ d) $4\,389.3583 \times \frac{1}{100} =$ ____________ f) $\left(1 + \frac{3}{4}\right) \div \left(1 - \frac{6}{8}\right) =$ ____________

**2.** El tamaño de la torre 1 se redujo en $\frac{2}{3}$ para obtener la torre 2. Anota las medidas de esta última. Todas están dadas en metros.

**Torre 1**




**Torre 2**




a) ¿Cuál es el área total de la cara M′ de la torre 2?

______________________________

b) ¿Cuál es el volumen de esta torre?

______________________________

**3.** Un club de excursionistas renta un autobús con capacidad para 30 pasajeros a un costo de \$13 000 por día. Completa la tabla siguiente.

| Si el total de pasajeros es | El costo por pasajero es |
|---|---|
| 4 | |
| 8 | |
| 10 | |
| 13 | |
| 16 | |
| 22 | |

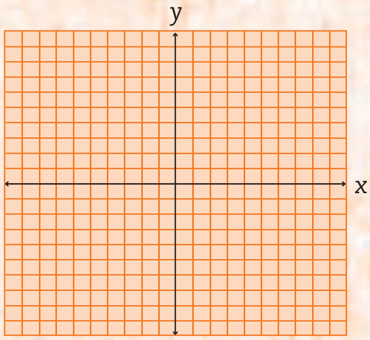
a) De acuerdo con los datos de la tabla, ¿cuál es la cantidad de pasajeros que más les conviene llevar para que cada uno pague menos? ____________

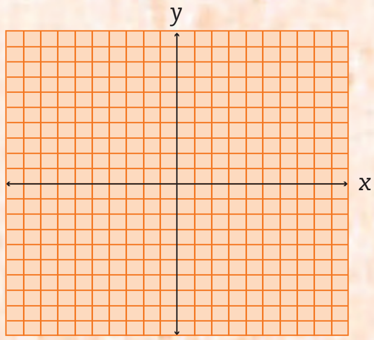
b) Describe qué tipo de relación se da entre el número de pasajeros que va a la excursión y el costo de renta del autobús por pasajero. ____________

**4.** Resuelve los dos pares de ecuaciones mediante el método gráfico.

E1: $3x + 2y = 8$

E2: $4x + y = 4$

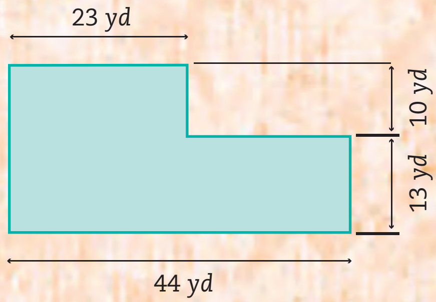



E1: $y = 2x + 5$

E2: $y = 3x + 1$

**5.** La siguiente figura muestra las medidas de las dimensiones de una bodega en yardas. Recuerden que 1 yarda equivale a 0.9144 m.




a) ¿Cuántas losetas de 1.2 m × 0.5 m se necesitan para cubrir el piso de la bodega? ______________

b) ¿Cuánto costará poner una cerca de malla metálica a la bodega si el metro cuesta $140? ______________

**6.** Escribe un par de expresiones equivalentes para cada una de las sucesiones.

| | | |
|---|---|---|
| a) 7, 13, 19, 25, 31, … | Expresión 1: ________________ | Expresión 2: ________________ |
| b) $2, 1, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{1}{3}, \ldots$ | Expresión 1: ________________ | Expresión 2: ________________ |

**7.** Determina el volumen de los siguientes cuerpos.

**Figura A**

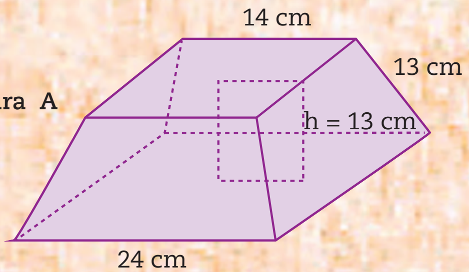
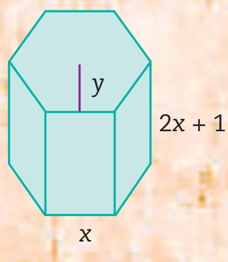



**Figura B**




A: ________________________________________________

B: ________________________________________________

**8.** En una urna hay 10 canicas numeradas con los diez primeros dígitos. Calcula las siguientes probabilidades.

a) Sacar en el primer intento una canica con número impar: ______________

b) Sacar una canica con un número mayor que 3: ______________

c) Determina y escribe cuál de los dos eventos es más probable que ocurra.

________________________________________________

# Bloque 2

## La potencia de la matemática y el ajedrez

Cuenta la leyenda que el ajedrez se inventó en la India y que el rey quedó tan maravillado que ofreció pagar lo que fuera para tenerlo. El creador pidió entonces un grano de trigo por el primer recuadro del juego, dos por el segundo, cuatro por el tercero, y que se fuese duplicando la cantidad de trigo hasta haber cubierto el tablero. Ni con toda la cosecha de la India pudieron pagarle. ¿Podrías calcular cuántos granos de trigo pedía por el invento?

# 13. Multiplicación y división de números enteros

Sesión 1

## Para empezar

Fabiola y Alonso juegan a lanzar dos dados. Si el que lanza los dados obtiene una suma diferente de 7, gana esos puntos. Si obtiene una suma de 7, pierde 7 puntos y los representa como negativos. Al finalizar el juego, la puntuación fue la siguiente:

| | |
|---|---|
| Fabiola | 124 y –63 |
| Alonso | 96 y –56 |

¿Cuántas veces perdió puntos Fabiola? ¿Cuántas veces perdió puntos Alonso?

En esta secuencia realizarás operaciones que permitan responder estas preguntas y verás qué sucede con el signo del resultado.

### Puntos a favor o en contra

**1.** Trabajen en pareja. Completen los datos de la tabla y anoten en la última columna quién ganó, considerando que en los renglones se encuentran los resultados de cada pareja.

| Jugador | Puntos a favor | Puntos en contra | Puntuación | Jugador | Puntos a favor | Puntos en contra | Puntuación | ¿Quién ganó? |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 75 | 8 (–7) = | | B | 83 | 9 (–7) = | | |
| C | 68 | 10 (–7) = | | D | 40 | 6 (–7) = | | |
| E | 59 | 8 (–7) = | | F | 75 | 11 (–7) = | | |
| G | 93 | 5 (–7) = | | H | 92 | 5 (–7) = | | |
| I | 48 | 12 (–7) = | | J | 117 | 10 (–7) = | | |

**2.** Con apoyo de su maestro, comparen sus resultados. Comenten el signo que tiene el producto que se obtiene al multiplicar un número positivo por otro negativo.

## Manos a la obra

**3.** Trabajen en pareja. Anoten los datos que faltan en la tabla.

| Número | –24 | 18 | | | | | | –7 | *n* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Doble | | | –10 | | | | –2 | | |
| Triple | | | | –36 | | 51 | | | |
| Mitad | | | | | –8 | | | | |

4. Escriban en cada fila dos factores cuyo producto (resultado) sea el que se muestra en la primera columna. Puede haber más de una respuesta correcta.

| Producto | Multiplicaciones de dos factores |
|---|---|
| a) –8 = | |
| b) 45 = | |
| c) 0 = | |
| d) –42 = | |
| e) –13 = | |
| f) 72 = | |
| g) 81 = | |
| h) –25 = | |

5. Escriban en cada fila tres divisiones que den el cociente (resultado) que se indica en la primera columna.

| Cociente | Divisiones |
|---|---|
| a) –7 = | |
| b) –9 = | |
| c) 15 = | |
| d) –11 = | |
| e) –18 = | |
| f) 32 = | |
| g) –1 = | |
| h) –27 = | |

6. En cada fila, subrayen la operación que tiene un resultado diferente a todas las demás.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| a) (–6) (8) | (4) (–12) | (–3) (–16) | (–2) (24) | (48) (–1) |
| b) (–10) ÷ (–2) | 20 ÷ 4 | (–5) ÷ (–1) | (–1) (–5) | (–15) ÷ (3) |
| c) (–12) ÷ (–2) | (3) (–2) | 6 ÷ (–1) | (–6) ÷ 1 | 72 ÷ (–12) |
| d) (–2) (–2) | (–2) + (–2) | (–8) ÷ (2) | (–2) – (2) | 8 ÷ (–2) |

7. Con apoyo de su maestro, comparen sus resultados con otra pareja. Cuando no sean iguales, revisen sus procedimientos y corrijan lo necesario.

Sesión 2

## Más de dos factores

**1.** Trabajen en pareja. Realicen las siguientes multiplicaciones.

a) $(-3)(-5) =$ ____________

b) $(-6)(8) =$ ____________

c) $(-3)(-5)(1) =$ ____________

d) $(-6)(-8)(-1) =$ ____________

e) $(-2)(-3)(-4)(-5) =$ ____________

f) $(-1)(-2)(-3)(4) =$ ____________

g) $(-1)(-2)(-3)(-4)(-5) =$ ____________

h) $(-1)(-2)(-3)(-4)(5) =$ ____________

**2.** Anoten cuatro multiplicaciones de cuatro factores, dos con resultado positivo y otras dos con resultado negativo.

| | |
|---|---|
| a) | c) |
| b) | d) |

**3.** Anoten otras cuatro multiplicaciones con más de dos factores; pueden ser tres, cuatro, cinco o más. Dos de las multiplicaciones deben tener resultado positivo y las otras dos, negativo.

| | |
|---|---|
| a) | c) |
| b) | d) |

**4.** Anoten una conclusión que exprese cuándo una multiplicación de más de dos factores tiene resultado positivo y cuándo tiene resultado negativo.

______________________________________________

______________________________________________

______________________________________________

5. En grupo y con apoyo del maestro, comparen sus resultados y revisen sus conclusiones. Comprueben si éstas expresan lo mismo, aunque con diferentes palabras. Después analicen la siguiente operación y digan, sin resolverla, si el producto será positivo o negativo: $(-1)\,(-2)\,(-3)\,(4)\,(-5)\,(-6)\,(-7)\,(-8)\,(-9)$

6. Registra individualmente el resultado que se obtiene al sustituir las siguientes literales por los valores correspondientes.

| $a$ | $b$ | $c$ | $abc$ | $a(b + c)$ | $ac(-1)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| –2 | –5 | –3 | | | |
| 3 | 4 | –2 | | | |
| 4 | –3 | –2 | | | |
| –6 | 2 | –1 | | | |
| 3 | –7 | 4 | | | |

7. En grupo y con apoyo del maestro, comparen sus respuestas, analicen los errores y corrijan lo necesario.

8. Obtengan el resultado de las operaciones.

a) $(-5)\,(4)\,(-1) =$ ______________

b) $(-75) \div 15 =$ ______________

c) $-7\,(3 + 5) =$ ______________

d) $-8\,(6 - 7) =$ ______________

e) $40 \div (13 - 10) =$ ______________

f) $(-6)\,(-5)\,(-4)\,(-3)\,(-2) =$ ______________

9. Marquen con una palomita (✓) si el enunciado es verdadero (V) o falso (F) a partir de los resultados anteriores.

| Enunciado | V | F |
|---|---|---|
| a) Si en una multiplicación hay un número par de factores negativos, el resultado es negativo. | | |
| b) Si en una multiplicación hay un número impar de factores negativos, el resultado es positivo. | | |
| c) Si en una multiplicación sólo hay factores negativos, el resultado puede ser positivo o negativo. | | |

# Para terminar

## Por cada multiplicación, dos divisiones

**1.** Trabajen en pareja. Anoten el factor que falta en las siguientes multiplicaciones.

a) 7(    ) = 56
b) (    )25 = –100
c) 8(    ) = –280
d) (    )14 = –644
e) –20(    ) = 300
f) (    )(–75) = 1 875

**2.** Utilizando los números de cada multiplicación de la actividad anterior, escriban dos divisiones. Utilicen como guía el primer renglón.

| Multiplicación | Primera división | Segunda división |
|---|---|---|
| 7(8) = 56 | 56 ÷ 7 = 8 | 56 ÷ 8 = 7 |
| (    )25 = –100 | | |
| 8(    ) = –280 | | |
| (    )14 = –644 | | |
| –20(    ) = 300 | | |
| (    )(–75) = 1 875 | | |

**3.** Usen los números –12, –7 y 84 para formular una multiplicación y dos divisiones. Anótenlas en los espacios que corresponden.

| Multiplicación | Primera división | Segunda división |
|---|---|---|
| | | |

**4.** Marquen con una palomita (✓) si el enunciado es verdadero (V) o falso (F).

| Enunciado | V | F |
|---|---|---|
| a) El cociente de dos números negativos es negativo. | | |
| b) El cociente de dos números, uno positivo y otro negativo, es negativo. | | |

5. Escriban los números que faltan en la tabla.

| × | | 4 | –6 | –2 | –1 | 5 | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | –24 | | | | | | |
| | | | –84 | | | | |
| | | | | | | –75 | |
| $-m$ | | | | | | | |

6. Con apoyo del maestro, comparen sus resultados, analicen si tuvieron errores y corrijan. Después lean la siguiente información.

La regla de los signos de la multiplicación de números enteros se enuncia de la siguiente manera:

- El producto de dos números enteros, uno positivo y otro negativo, es un número entero negativo.
- El producto de dos números enteros negativos o dos números enteros positivos es un número entero positivo.
- El producto de un número entero, positivo o negativo, por –1, es el opuesto del número.

Esta misma regla es válida para la división de dos números enteros.

7. De manera individual, resuelve los siguientes problemas.
   a) Pensé un número, lo multipliqué por 7 y al resultado le sumé –4. Obtuve –25. ¿Qué número pensé? ______
   b) Pensé un número, lo dividí entre –3 y al resultado le resté –8. Obtuve 7. ¿Qué número pensé? ______

8. Encuentra dos números que sumados den –12 y multiplicados den 35. Los números buscados son: ______ y ______
   Encuentra dos números que sumados den –6 y multiplicados den –27. Los números buscados son: ______ y ______

9. Con apoyo del maestro, comparen sus respuestas; en caso de que no coincidan, averigüen a qué se debe y corrijan.

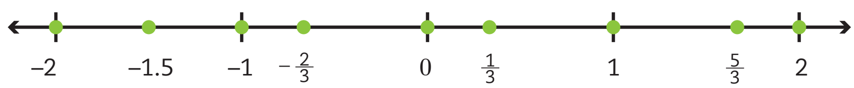
10. Observen el recurso audiovisual *Multiplicación de más de dos números enteros* y analicen los ejemplos que se les presentan.

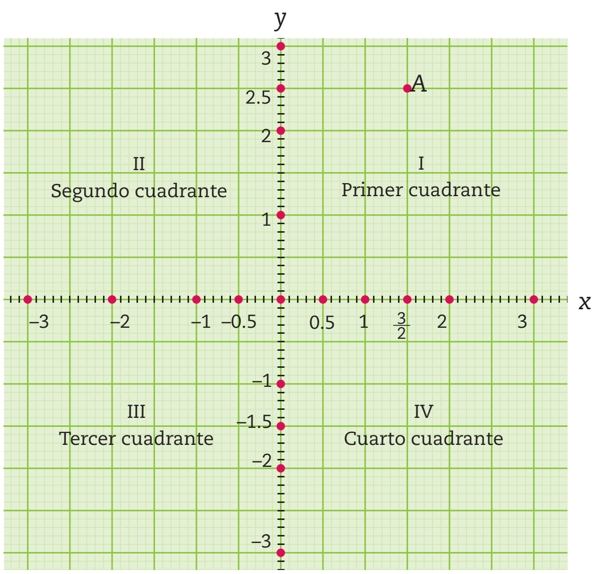
# 14. Multiplicación y división de números con signo

Sesión 1

## Para empezar

Cuando se habla de números con signo, se hace referencia a los números fraccionarios y decimales, positivos o negativos, así como a los números enteros. Dichos números se pueden ubicar como puntos en una recta numérica como la siguiente:




O también pueden indicar las coordenadas de los puntos que se ubican en un plano cartesiano:

- ¿Cuáles son las coordenadas del punto *A*? ______________________

- Ubica en el plano cartesiano el punto cuyas coordenadas son (–1.5, –2).

En esta secuencia profundizarás en el significado de la multiplicación y la división de números con signo.

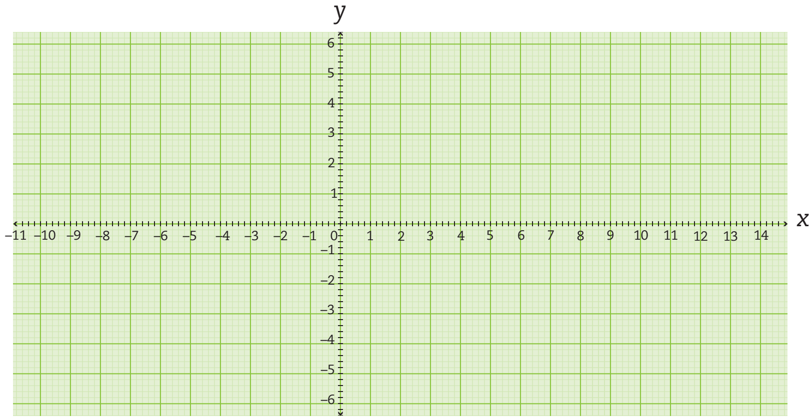
## Manos a la obra

### ¿Qué figura resulta?

1. Trabajen en pareja. Hagan en el siguiente plano cartesiano lo que se indica.
   a) Ubiquen los puntos *A* (2, 1), *B* (4, 1), *C* (3, 5).
   b) Unan los puntos *A*, *B* y *C*. ¿Qué figura se forma? ______________________
   c) Multipliquen por –1 la primera coordenada de cada punto. Luego ubiquen los nuevos puntos, llámenlos *D*, *E*, *F* y únanlos. Expliquen qué resultó: ______________________

d) ¿Qué resultará si multiplican por –1 la segunda coordenada de cada vértice del triángulo *ABC* y la primera permanece igual?

______________________________



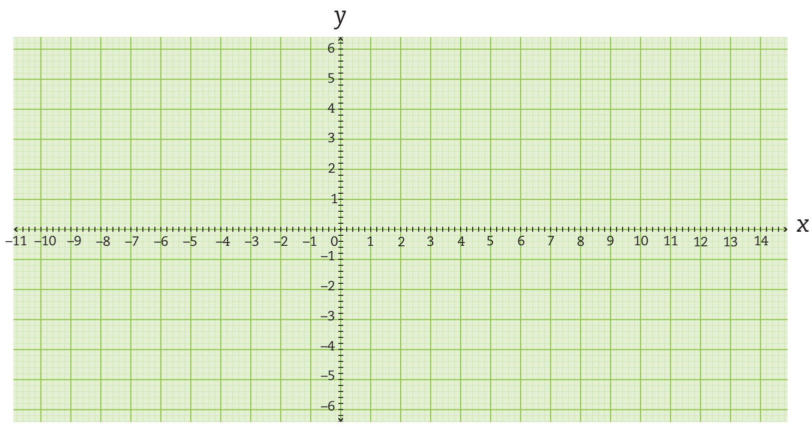

e) Usen el mismo plano cartesiano para verificar lo que pensaron que ocurriría en el inciso anterior.

f) ¿Qué consideran que resultará si multiplican por –1 las dos coordenadas de los vértices del triángulo *ABC*? ______________________________

g) Verifiquen en el plano cartesiano lo que pensaron que ocurriría en el inciso anterior.

**2.** Hagan en el siguiente plano cartesiano lo que se indica.

a) Ubiquen los puntos *A* (–5, –3), *B* (5, –3), *C* (5, 3), *D* (–5, 3) y únanlos con líneas rectas.




b) Multipliquen las coordenadas de cada punto por –0.5 y anoten las coordenadas que resultan: *A'* (      ), *B'* (      ), *C'* (      ), *D'* (      ).

Luego unan los puntos y expliquen qué resultó:

______________________________

c) Multipliquen las coordenadas que obtuvieron en el inciso b) por –1.5 y anoten las coordenadas que resultan: *A''* (      ), *B''* (      ), *C''* (      ), *D''* (      ).

También unan los puntos y expliquen qué resultó: ______________________________

______________________________

**3.** En grupo y con ayuda de su maestro, comparen sus resultados. Cuando no sean iguales, averigüen por qué y corrijan. Establezcan la relación que encuentran entre los valores de las coordenadas y los cuadrantes del plano cartesiano, y escríbanla en sus cuadernos a manera de conclusión.

Sesión 2

# Dobles, triples y mitades

**1.** Trabajen en pareja. Anoten los datos que faltan en la tabla.

| Número | $-\frac{4}{5}$ | $-2.4$ | | | | | | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{n}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Doble | | | $-\frac{4}{3}$ | | | | $-\frac{4}{7}$ | | |
| Triple | | | | $-3.6$ | | $\frac{3}{8}$ | | | |
| Mitad | | | | | $-5.1$ | | | | |

**2.** Anoten los resultados de cada operación.

a) $4\left(-\frac{1}{5}\right) =$ ________

b) $3\left(-\frac{1}{5}\right) =$ ________

c) $2\left(-\frac{1}{5}\right) =$ ________

d) $1\left(-\frac{1}{5}\right) =$ ________

e) $0\left(-\frac{1}{5}\right) =$ ________

f) $(-1)\left(-\frac{1}{5}\right) =$ ________

g) $(-2)\left(-\frac{1}{5}\right) =$ ________

h) $(-3)\left(-\frac{1}{5}\right) =$ ________

i) $(-4)\left(-\frac{1}{5}\right) =$ ________

j) $4(-2.5) =$ ________

k) $3(-2.5) =$ ________

l) $2(-2.5) =$ ________

m) $1(-2.5) =$ ________

n) $0(-2.5) =$ ________

ñ) $(-1)(-2.5) =$ ________

o) $(-2)(-2.5) =$ ________

p) $(-3)(-2.5) =$ ________

q) $(-4)(-2.5) =$ ________

r) $\left(-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{4}{3}\right) =$ ________

s) $\left(-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{3}\right) =$ ________

t) $\left(-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{2}{3}\right) =$ ________

u) $\left(-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{3}\right) =$ ________

v) $\left(-\frac{3}{4}\right)0 =$ ________

w) $\left(-\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{1}{3}\right) =$ ________

x) $\left(-\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{2}{3}\right) =$ ________

y) $\left(-\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{3}{3}\right) =$ ________

z) $\left(-\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{4}{3}\right) =$ ________

**3.** ¿Qué signo tiene el producto de multiplicar un número decimal o fraccionario negativo por otro número negativo? Den un ejemplo. ________________

________________________________________

**4.** Escriban en cada línea la multiplicación de dos factores que dé como resultado el producto de la primera columna. Puede haber más de una respuesta correcta.

| Producto | Multiplicaciones de dos factores |
|---|---|
| a) $-\frac{2}{3} =$ | |
| b) $-4.5 =$ | |
| c) $0 =$ | |
| d) $\frac{3}{4} =$ | |
| e) $-6.9 =$ | |

| Producto | Multiplicaciones de dos factores |
|---|---|
| f) $-\frac{6}{5}=$ | |
| g) $4.8 =$ | |
| h) $-\frac{5}{6}=$ | |

**5.** En grupo y con apoyo de su maestro, comparen sus resultados. Cuando las expresiones anotadas no sean equivalentes, analicen sus procedimientos para establecer dónde erraron e indiquen los resultados correctos.

**6.** Realicen las siguientes multiplicaciones.

a) $(-1)\left(-\frac{1}{2}\right)=$

c) $(-1)\,(-2)\,(-3)\left(-\frac{1}{2}\right)=$

b) $(-1)\,(-2)\left(-\frac{1}{2}\right)=$

d) $(-1)\,(-2)\,(-3)\,(-4)\left(-\frac{1}{2}\right)=$

**7.** Marquen con una palomita (✓) si el enunciado es falso o verdadero.

| Enunciado | Verdadero | Falso |
|---|---|---|
| a) Si en una multiplicación hay un número par de factores negativos, el resultado es positivo. | | |
| b) Si en una multiplicación hay un número par de factores positivos, el resultado siempre es positivo. | | |
| c) Si en una multiplicación sólo hay factores negativos, el resultado puede ser positivo o negativo. | | |

**8.** Escriban dos multiplicaciones de cuatro factores, una con resultado positivo y otra con resultado negativo. Al menos un factor debe ser fraccionario o decimal.

| a) | b) |
|---|---|
| | |

**9.** Registren el resultado que se obtiene al sustituir las literales por los valores de cada fila.

| $a$ | $b$ | $c$ | $abc$ | $a(b+c)$ | $a(b-c)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-2$ | $-5$ | $-3$ | | | |
| 3 | 4 | $\frac{1}{2}$ | | | |
| $\frac{3}{4}$ | $-3$ | $-2$ | | | |

**10.** Subrayen las opciones falsas.

El producto de tres factores es positivo cuando:

- los tres factores son positivos.
- dos factores son negativos.
- los tres factores son negativos.
- los factores son positivos.

**11.** En grupo y con apoyo de su maestro, comparen sus respuestas, analicen si hubo errores y corrijan lo que sea necesario.

Sesión 3

## ¿En qué orden se hacen?

**1.** Trabajen en pareja. Primero resuelvan individualmente cada operación y luego comparen sus resultados. Si no coinciden, identifiquen el error y corrijan juntos.

a) $\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{4}=$ ______________

f) $\frac{1}{2}\div\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)=$ ______________

b) $\frac{1}{4}+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)=$ ______________

g) $\frac{3}{5}+\frac{3}{4}\left(-\frac{4}{3}\right)=$ ______________

c) $3.5 \times 2-(-4.3)=$ ______________

h) $\frac{3}{5}-\frac{3}{4}\div\left(-\frac{3}{4}\right)=$ ______________

d) $-4.3-3.5 \times 2=$ ______________

i) $2.8 \times (3.4-2.2)=$ ______________

e) $\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)\div\frac{1}{4}=$ ______________

j) $\frac{5}{6}\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\right)=$ ______________

**2.** Con apoyo de su maestro, comparen sus resultados. Si son distintos, averigüen a qué se debe y corrijan. Después lean la siguiente información.

La jerarquía de operaciones que estudiaste para las operaciones con números naturales también es válida para las operaciones con números positivos y negativos.

- Primero se hacen las multiplicaciones y las divisiones, y después las sumas y las restas. Si sólo hay multiplicaciones y divisiones, o sólo sumas y restas, se hacen en el orden que aparecen.
- Si hay operaciones agrupadas en paréntesis, primero se hacen éstas.

**3.** Coloquen en cada cuadro el signo que corresponda (+, –, ×, ÷), para que la igualdad sea verdadera.

a) $\frac{1}{2}\square\left(-\frac{1}{3}\right)\square\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{12}$  b) $\frac{1}{2}\square\left(-\frac{1}{3}\right)\square\left(\frac{1}{4}\right) = 1\frac{1}{12}$

**4.** Con apoyo de su maestro, comparen sus resultados de la actividad anterior. En caso de que los signos anotados no coincidan, verifiquen si las igualdades que resultan son verdaderas.

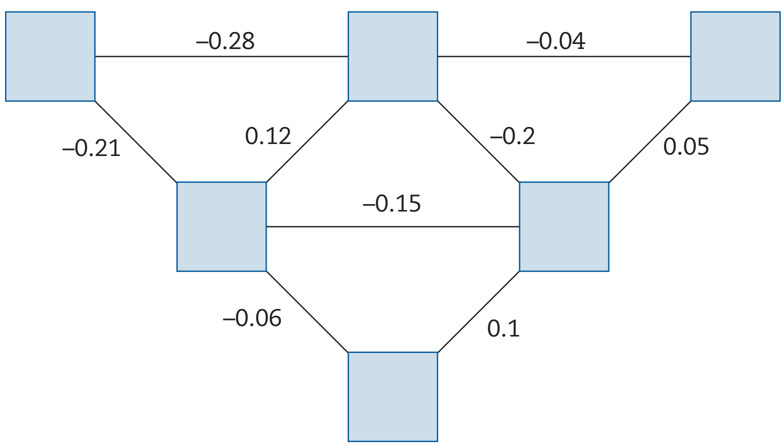
**5.** Escriban el número que falta en cada igualdad para que sea verdadera.

a) $\left(\frac{1}{2}\right)(\quad) = \left(\frac{1}{6}\right)(-1)$  d) $-3 \div (\quad) = -3(-5)$  g) $-4(0.75)\left(\frac{4}{3}\right) = 4\left(-\frac{3}{5}\right)(\quad)$

b) $(-1.5)(-1.5) = 1.25 \div (\quad)$  e) $-5(4-7) = 3 \div (\quad)$  h) $\frac{2}{5} - \frac{4}{5}\left(\frac{\quad}{\quad}\right) = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}$

c) $\frac{2}{5} \div \left(-\frac{3}{4}\right) = \left(-\frac{2}{5}\right)(\quad)$  f) $(\quad)(0.5) = \left(-\frac{3}{4}\right) \div 2$

**6.** Anoten en cada cuadrado los números que correspondan, de manera que al multiplicar dos números de dos cuadrados consecutivos se obtenga el número de en medio.




**7.** Con apoyo de su maestro, comparen sus resultados. Comenten lo que hicieron para encontrar los números faltantes, en qué casos tenían que ser positivos y en cuáles tenían que ser negativos.

8. Observen el recurso audiovisual *Jerarquía de las operaciones*. Analicen con detenimiento la manera de realizar las operaciones con números enteros, fracciones y números decimales positivos y negativos.

Sesión 4

# Para terminar

## Tarjetas con números

1. Resuelve los siguientes problemas.

   a) Pensé un número, lo multipliqué por 0.6 y al resultado le sumé –4. Obtuve 0.8 ¿Qué número pensé? ______

   b) Pensé un número, lo dividí entre –0.5 y al resultado le sumé –2. Obtuve –30. ¿Qué número pensé? ______

   c) Encuentra dos números que sumados den –2 y multiplicados den –35. Los números buscados son: ______ y ______

2. Encuentra el resultado de las siguientes operaciones.

   a) $\frac{5}{3} + \frac{4}{3} \times \frac{7}{6} =$ ______

   b) $\frac{5}{6} + \frac{1}{6} \div \frac{3}{2} =$ ______

   c) $-7\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) =$ ______

   d) $-8\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) =$ ______

   e) $40 \div \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{10}\right) =$ ______

   f) $\frac{3}{4}\left(-\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{5}{2}\right) =$ ______

3. Calcula el resultado de la multiplicación y con los mismos números escribe dos divisiones.

| Multiplicación | Primera división | Segunda división |
|---|---|---|
| $\left(-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{4}{5}\right)$ | | |

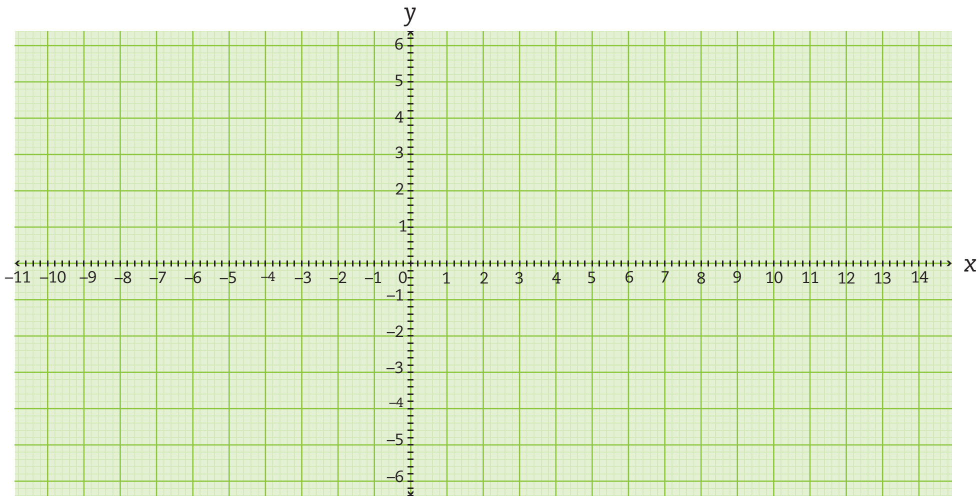
4. Considera la multiplicación $ab = -16$. Si $a = 32$, ¿cuánto vale $b$? ______

5. Considera la división $a \div b = -40$. Si $a = 5$, ¿cuánto vale $b$? ______

6. En grupo y con el apoyo de su maestro, comparen sus respuestas de las actividades 1 a 5. En caso de que no coincidan, averigüen a qué se debe y corrijan.

**7.** En el siguiente plano cartesiano haz lo que se indica.

a) Ubica los puntos $A(-1, 1)$, $B(-6, 1)$, $C(-2, 3)$, $D(-7, 3)$. Después únelos con líneas rectas en el orden en que aparecen.




b) Multiplica por –1 la primera coordenada de cada punto y anota los nuevos puntos: $A'($ $\quad)$, $B'($ $\quad)$, $C'($ $\quad)$, $D'($ $\quad)$

c) ¿Qué consideras que resultará al ubicar los puntos y unirlos en el orden que aparecen? ______________________________

d) Utiliza el plano cartesiano para verificar lo que predijiste.

**8.** Elige dos o más de las siguientes tarjetas con números y los signos ×, ÷, =, para formar operaciones con su resultado. Tacha las tarjetas que vayas utilizando. Cuando las uses todas, habrás ganado. Anota las operaciones en tu cuaderno.

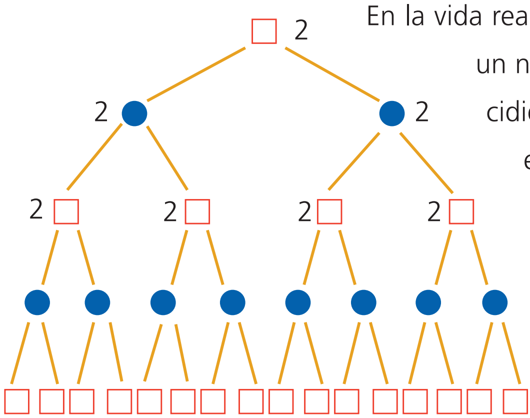
| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-\frac{1}{2}$ | $-0.2$ | $\frac{3}{5}$ | $-\frac{2}{3}$ | $\frac{4}{5}$ | $-\frac{3}{4}$ | $0.5$ | $-34$ |
| $\frac{6}{5}$ | $-\frac{2}{3}$ | $-4.6$ | $-\frac{4}{5}$ | $\frac{1}{2}$ | $6.8$ | $-\frac{2}{3}$ | $-2.3$ |

**9.** Utilicen las escenas de "Dividir, ejercicios y aplicaciones" propuestas en el recurso informático *Multiplicación y división de números con signo*, para ejercitar y resolver problemas que implican la multiplicación y división de números enteros, fraccionarios y decimales positivos y negativos que se presentan. Recuperado de: https://www.proyectodescartes.org/Telesecundaria/materiales_didacticos/2m_b01_t01_s01_descartes-JS/index.html

# 15. Potencias con exponente entero 1

Sesión 1

## Para empezar




En la vida real se presentan problemas en los que es necesario multiplicar un número varias veces por sí mismo. Por ejemplo, Lucina ha decidido ahorrar. En el primer mes tiene \$2, en el segundo \$4, en el tercero \$8, en el cuarto \$16, y así sucesivamente. ¿Cuánto tendrá ahorrado al cabo de un año?

La operación que representa esta situación es:

$2 \times 2 \times 2\ldots$ (12 veces). Esta multiplicación de doce factores iguales se puede representar, de manera simplificada, mediante la potenciación, que consiste en elevar un número, o una expresión, a una potencia determinada. En esta secuencia estudiarás ésta y otras operaciones que se pueden realizar entre potencias.

## Manos a la obra

### El gran ahorro

**1.** Trabajen en pareja. Con base en la información de la sección "Para empezar", mencionen cuánto habrá ahorrado Lucina al cabo de…

| | |
|---|---|
| Tres meses: | Seis meses: |
| Diez meses: | Doce meses: |

**2.** Expresen, mediante la potenciación, cada una de las preguntas anteriores. Básense en el ejemplo.

| | |
|---|---|
| Ahorro en tres meses: $2^3 = 8$ | Ahorro en seis meses: |
| Ahorro en diez meses: | Ahorro en doce meses: |

**3.** Exploren cómo encontrar los resultados de las siguientes potencias con una calculadora y luego lean la información.

a) $2^8 =$ b) $2^{21} =$ c) $2^{15} =$ d) $2^{30} =$

Los tres términos de la potenciación tienen un nombre en particular:

$$\underset{\text{Base}}{x}^{\overset{\text{Exponente}}{a}} = \underset{\text{Potencia}}{b}$$

**4.** Completen la siguiente tabla con los datos que faltan.

| Base | Exponente | Potencia |
|---|---|---|
| 5 | 3 | |
| | 2 | 64 |
| 10 | | 1 000 |
| 20 | | 160 000 |
| $x$ | 5 | |

**5.** Resuelvan los siguientes problemas.

a) En un terreno hay seis palmeras. Cada una tiene seis racimos de cocos, cada racimo tiene seis cocos y en cada coco se han posado seis abejas. ¿Cuántas abejas hay en el terreno? ____________________

b) Si para representar una potencia sólo se pueden utilizar las cifras 3 y 5 una sola vez, ¿cuál es el mayor número que se puede obtener? ____________________

**6.** Consideren las siguientes expresiones en las que $n$ es un número natural mayor que 1.

$3n$ $\qquad$ $3 + n$ $\qquad$ $3^n$ $\qquad$ $\frac{3}{n}$ $\qquad$ $3 - n$

a) ¿Cuál produce el mayor número? ____________________

b) ¿Cuál produce el menor número? ____________________

**7.** Anoten la cifra que falta en cada espacio. Puede haber diferentes resultados correctos.

| | |
|---|---|
| $(\square 7)^3 = \square\square\square 3$ | $(\square\square)^2 = \square\square 1$ |
| $(1 \square)^2 = \square\square\square$ | $(\square\square\square)^2 = \square\square 4 \square 4$ |

**8.** Con apoyo de su maestro, comparen sus resultados, analicen los errores y corrijan.

Sesión 2

## Leyes de los exponentes I

1. Resuelvan en pareja los siguientes problemas.

   a) Un número elevado al cubo, multiplicado por el mismo número elevado a la cuarta potencia da como resultado 128. ¿De qué número se trata? ________

   b) Un número elevado al cuadrado, multiplicado por el mismo número elevado al cubo da como resultado 3 125. ¿De qué número se trata? ________

2. Escriban los datos que faltan en la tabla. El primer renglón es un ejemplo resuelto.

| Primer factor | Segundo factor | Multiplicación | Multiplicación extendida | Suma de exponentes | Resultado |
|---|---|---|---|---|---|
| $2^2$ | $2^3$ | $2^2 \times 2^3$ | $(2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2)$ | $2^{2+3}$ | $2^5$ |
| $3^3$ | $3^2$ | | | | |
| $5^4$ | $5^5$ | | | | |
| $10^2$ | $10^5$ | | | | |
| $18^4$ | $18^4$ | | | | |
| $a^m$ | $a^n$ | | | | |

3. Con ayuda de su maestro, comparen los resultados de la tabla. Comenten cómo se obtiene el producto de dos potencias que tienen la misma base.

4. Completen la siguiente tabla.

| Primer factor | Segundo factor | Multiplicación | Multiplicación extendida | Suma de exponentes | Resultado |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | $(4 \times 4)(4 \times 4 \times 4)$ | | |
| | | | | $6^{3+5}$ | |
| | | $7^5 \times 7^3$ | | | |
| | | | $(b \cdot b \cdot b \cdot b)(b)$ | | |
| | | | | $9^{3+1}$ | |
| | | $8^5 \times 8^5$ | | | |

**5.** Lean y comenten, junto con su maestro, la siguiente información.

La expresión $a^m \times a^n$ es una multiplicación de dos potencias con la misma base. El resultado es la misma base elevada a la suma de los exponentes. De manera que:

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

La expresión $(2^2)^3$ se conoce como potencia de una potencia y se puede resolver como una multiplicación de potencias de la misma base. Así:

$$(2^2)^3 = 2^2 \times 2^2 \times 2^2 = 2^{2+2+2} = 2^{2 \times 3} = 2^6 = 64.$$

De manera abreviada, una potencia de una potencia es igual a la base elevada al producto de los exponentes. Así:

$$(x^a)^b = x^{ab}$$

**6.** Usen las leyes de los exponentes descritos en el recuadro anterior para resolver las siguientes operaciones.

a) $2^5 \times 2^3 =$ ________

b) $3^2 \times 3^2 =$ ________

c) $(2^3)^4 =$ ________

d) $5^2 \times 5^4 =$ ________

e) $15 \times 15^4 =$ ________

f) $(4^5)^3 =$ ________

g) $12^3 \times 12^2 =$ ________

h) $a^3 \times a^4 =$ ________

i) $(3^2)^2 =$ ________

j) $(5^3)^2 =$ ________

k) $(b^5)^3 =$ ________

l) $x^2 \cdot x =$ ________

**7.** Hagan lo que se indica.

a) Inventen tres *multiplicaciones de potencias con la misma base* y resuélvanlas.

| Primera | Segunda | Tercera |
|---|---|---|
| | | |

b) Inventen tres *potencias de potencias* y resuélvanlas.

| Primera | Segunda | Tercera |
|---|---|---|
| | | |

c) Tachen las operaciones cuyo resultado sea incorrecto.

$3^5 \times 3^2 = 3^{10}$ $\qquad (3^5)^2 = 3^{10}$ $\qquad 3^5 \times 3^2 = 3^7$ $\qquad (3^5)^2 = 3^7$

**8.** Con apoyo de su maestro, comparen sus respuestas. En caso de que no coincidan, identifiquen los errores y corrijan lo necesario.

9. Observen el recurso audiovisual *Potencias* para ampliar sus conocimientos acerca de las leyes de los exponentes.

Sesión 3

## Leyes de los exponentes II

1. Trabajen en pareja. Escriban los datos que faltan en la tabla. El primer renglón está resuelto a modo de ejemplo.

| Dividendo | Divisor | División | División extendida | Resta de exponentes | Resultado |
|---|---|---|---|---|---|
| $2^2$ | $2^3$ | $2^2 \div 2^3$ | $\frac{2\times2}{2\times2\times2}=\frac{1}{2}$ | $2^{2-3}$ | $2^{-1}=\frac{1}{2}$ |
| $3^3$ | $3^2$ | | | | |
| $5^4$ | $5^5$ | | | | |
| $10^2$ | $10^5$ | | | | |
| $18^4$ | $18^4$ | | | | |
| $20^2$ | $20^1$ | | | | |
| $50^3$ | $50^3$ | | | | |
| $a^m$ | $a^n$ | | | | |

2. Con apoyo de su maestro, comparen sus resultados de la tabla. Comenten cómo se obtiene el cociente de dos potencias que tienen la misma base.

3. Completen la siguiente tabla.

| Dividendo | Divisor | División | División extendida | Resta de exponentes | Resultado |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $4^3 \div 4^2$ | | | |
| | | | $\frac{6\times6\times6}{6\times6\times6\times6}=\frac{1}{6}$ | | |
| | | | | $7^{5-3}$ | |
| | | $7^3 \div 7^5$ | | | |
| | | | $\frac{6\times6\times6\times6}{6\times6\times6}=6$ | | |
| | | $18^5 \div 18^5$ | | | |
| | | | | $a^{2-3}$ | |

**4.** Lean y comenten, junto con su maestro, la siguiente información.

La expresión $a^m \div a^n$ es una división de dos potencias con la misma base. El resultado es la misma base elevada a la diferencia de los exponentes. De manera que: $a^m \div a^n = a^{m-n}$

Cuando el exponente del dividendo es igual al exponente del divisor, la diferencia es cero. Por ejemplo, $2^3 \div 2^3 = 2^{3-3} = 2^0$. Puesto que el exponente cero resulta al dividir dos números iguales (en este caso $2^3$), podemos concluir que cualquier número elevado a la cero potencia es igual a **1**.

Cuando el exponente del dividendo es menor que el exponente del divisor, la diferencia es un número negativo. Por ejemplo, $6^3 \div 6^4 = 6^{3-4} = 6^{-1} = \frac{1}{6}$. Podemos concluir que cualquier base elevada a un exponente negativo es igual a una fracción con numerador 1 y el denominador es la base con exponente positivo.

**5.** Marquen con una palomita (✓) si el enunciado es verdadero (V) o falso (F). En caso de que sea falso, muéstrenlo con un ejemplo.

| Enunciado | V | F | Ejemplo |
|---|---|---|---|
| a) El cociente de dos potencias con la misma base es igual a la base elevada a la diferencia de los exponentes. | | | |
| b) El producto de dos potencias de la misma base es igual a la base elevada al producto de los exponentes. | | | |
| c) Cualquier número elevado a la cero potencia es igual a cero. | | | |
| d) Un número elevado a un exponente negativo, como $a^{-2}$, es igual a: $\frac{1}{a^2}$ | | | |

**6.** Con apoyo de su maestro, comparen los resultados de la tabla de la actividad 3 y vean si coinciden con los enunciados de la actividad 5 de esta sesión.

**7.** Usen las leyes de los exponentes para calcular las siguientes potencias.

a) $6^5 \div 6^3 =$ ____________ c) $(15^3)^4 =$ ____________ e) $a^3 \times a^4 =$ ____________

b) $10^3 \times 10^4 =$ ____________ d) $(a^3)^2 =$ ____________ f) $a^3 \div a^4 =$ ____________

**8.** Conviertan a exponente positivo las siguientes expresiones.

a) $2^{-5} =$ ____________ c) $10^{-1} =$ ____________ e) $x^{-4} =$ ____________

b) $5^{-2} =$ ____________ d) $100^{-3} =$ ____________ f) $x^{-a} =$ ____________

**9.** Con apoyo de su maestro, comparen sus respuestas, identifiquen y analicen los errores y corrijan si es necesario.

Sesión 4

# Para terminar

## La notación científica

1. Trabajen en equipo. Analicen el enunciado que hay debajo de cada letra y contesten las siguientes preguntas.

| A | B |
|---|---|
| En México se consumen diariamente $1.23 \times 10^8$ litros de gasolina. | En México se consumen diariamente 123 000 000 de litros de gasolina. |
| **C** | **D** |
| En México se consumen diariamente 123 millones de litros de gasolina | En México se consumen diariamente ciento veintitrés millones de litros de gasolina. |

a) ¿Consideran que los cuatro enunciados dicen lo mismo? __________

Justifiquen su respuesta. __________

2. Anoten debajo de las letras la misma información que contiene el inciso G. Utilicen el mismo formato que la tabla de la actividad 1 de esta sesión. Después lean el recuadro.

| E | F |
|---|---|
| | |
| **G** | **H** |
| México genera 42 millones de toneladas de residuos sólidos al año. | |

El formato usado en los recuadros A y E se escribe, de manera general, $a \times 10^n$. Este formato se llama notación científica y se usa para representar cantidades muy grandes o muy pequeñas.

En la expresión $a \times 10^n$, $a$ es un número decimal mayor o igual que 1 y menor que 10. El exponente $n$ es un número entero.

La expresión $1.45 \times 10^8$ es equivalente a 145 000 000. El punto decimal se recorre 8 lugares a la derecha.

La expresión $4 \times 10^{-5}$ equivale a 0.00004; el punto se recorre cinco lugares a la izquierda.

3. Escriban debajo de cada letra la misma información que hay en el recuadro L. El recuadro I deberá llevar notación científica.

| I | J |
|---|---|
| | |
| **K** | **L** |
| | Un virus mide aproximadamente dos cienmillonésimas de centímetro. |

4. Escriban en notación científica las siguientes cantidades.
   a) La población de México es de 120 millones. ______________________
   b) El pez gobio enano pesa 0.00014 onzas. ______________________
   c) Después del Sol, la estrella más cercana a la Tierra está a 24 800 000 000 000 millas de distancia. ______________________

5. Los siguientes datos se refieren a la probabilidad de morir por algunas causas particulares. Escríbanlos en notación científica. El primer renglón está resuelto como ejemplo.

| Causa de muerte | Razón | Fracción | Decimal | Notación científica |
|---|---|---|---|---|
| Fumar 10 cigarros al día | 1 de 200 | $\frac{1}{200}$ | 0.005 | $5 \times 10^{-3}$ |
| Accidente en automóvil | 1 de 8 000 | | | |
| Accidente en la casa | 1 en 260 000 | | | |
| Accidente en tren | 1 en 500 000 | | | |

6. Ordenen de menor a mayor los siguientes números. Escriban dentro del cuadro el 1 al de menor valor, y el 5 al mayor.

a) ☐ $2 \times 10^{-2}$ b) ☐ $3 \times 10^{-1}$ c) ☐ $2.5 \times 10^{-3}$ d) ☐ $2.9 \times 10^{-2}$ e) ☐ $3.2 \times 10^{-1}$

7. Con apoyo de su maestro, comparen sus resultados. En caso de que no coincidan, identifiquen los errores, piensen cómo evitarlos y corríjanlos.

8. Utilicen el recurso informático *Potencias*, en el que podrán aplicar sus conocimientos acerca de las leyes de los exponentes.

# 16. Raíz cuadrada de números cuadrados perfectos

Sesión 1

## Para empezar

La raíz cuadrada de un número es la operación inversa de elevar al cuadrado dicho número. Un problema muy común en el que resulta útil la raíz cuadrada es el que consiste en calcular la medida de un lado de un cuadrado cuando se conoce su área.

$\sqrt{2} = 1.41421356237$

Por ejemplo, si el área de un cuadrado es 81 $m^2$, un lado de ese cuadrado mide 9 m, ya que 9 es la raíz cuadrada de 81.

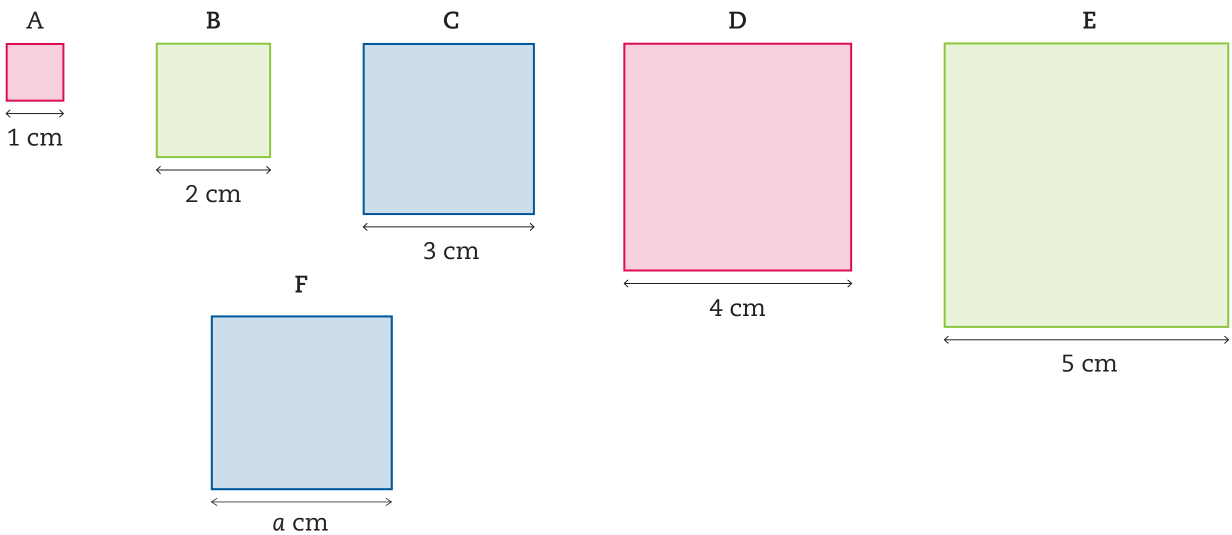
La raíz cuadrada tiene varias aplicaciones en otros contenidos matemáticos, como en el teorema de Pitágoras, la resolución de ecuaciones de segundo grado y el uso de fórmulas para resolver diversos problemas.

En esta secuencia comenzarás a estudiar los aspectos básicos de la raíz cuadrada.

## Manos a la obra

### La operación inversa de elevar al cuadrado

1. Trabajen en pareja. Calculen el área de cada cuadrado y anótenla dentro de la figura.



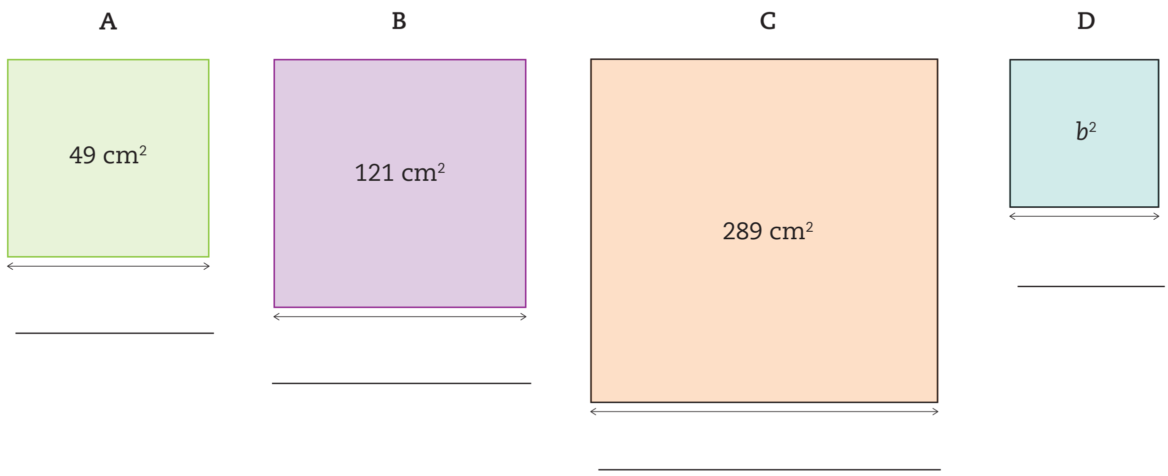

2. Describan el procedimiento que usaron para calcular el área de un cuadrado. ______

______

**3.** ¿Cuál de las siguientes expresiones corresponde al área de un cuadrado cuyo lado mide $n$? Enciérrenla con un círculo.

a) $4n$ b) $4 + n$ c) $n^2$ d) $2^n$ e) $\frac{4}{n}$

**4.** Calculen la medida de un lado de cada cuadrado y anótenla donde corresponda. Después hagan lo que se indica.




a) Expliquen cómo hicieron para calcular la medida del lado de un cuadrado a partir de su área. ______________________

b) Con el mismo procedimiento que anotaron, ¿podrían calcular la medida de un lado de un cuadrado cuya área es 3 249 cm²? ______________________

¿Cuál sería la medida? ______________________

c) Si el área fuera 1 296 cm², ¿cuánto mediría un lado del cuadrado? ____________

d) Si el área fuera 12 cm², ¿cuánto mediría un lado del cuadrado? ____________

**5.** En grupo y con apoyo de su maestro, lean y comenten la siguiente información.

La operación que permite calcular la medida de un lado de un cuadrado, si se conoce el área, se llama *raíz cuadrada*. Esta operación es la inversa de elevar al cuadrado.

Por ejemplo, si un lado del cuadrado mide 6 cm, el área es $6^2 = 36$ cm². Si el área es 36 cm², un lado del cuadrado mide $\sqrt{36} = 6$ cm.

**6.** Calculen la raíz cuadrada de los siguientes números.

a) $\sqrt{81}$ = ____________ e) $\sqrt{100}$ = ____________ i) $\sqrt{144}$ = ____________

b) $\sqrt{256}$ = ____________ f) $\sqrt{729}$ = ____________ j) $\sqrt{10\,000}$ = ____________

c) $\sqrt{25}$ = ____________ g) $\sqrt{1225}$ = ____________ k) $\sqrt{1}$ = ____________

d) $\sqrt{36}$ = ____________ h) $\sqrt{5^2}$ = ____________ l) $\sqrt{a^2}$ = ____________

**7.** Con apoyo de su maestro, comparen sus resultados y comenten cómo calcularon la raíz cuadrada de 1 225.

Sesión 2

## Aproximaciones sucesivas

**1.** Trabajen en pareja. Una manera de calcular la raíz cuadrada de un número es por *aproximaciones sucesivas*. Completen el procedimiento para calcular la raíz cuadrada de 8 742.

a) La raíz que se busca es menor que 100, porque $100^2$ = ____________ Se pasa.
b) Es mayor que 90, porque $90^2$ = ____________ Le falta.
c) Es menor que 95, porque ____________
d) Es mayor que 93, porque ____________
e) Es menor que 94, porque ____________
f) La raíz que se busca está entre ____________ y ____________
g) ¿Cuál es la raíz cuadrada de 8 742 aproximando hasta décimos? ____________

**2.** Expliquen en qué consiste el procedimiento de aproximaciones sucesivas para calcular la raíz cuadrada de un número. ____________

____________

**3.** Identifiquen la raíz cuadrada de cada número y anótenla después del signo "igual a".

a) $\sqrt{1\,849}$ = d) $\sqrt{484}$ = g) $\sqrt{3\,364}$ = j) $\sqrt{289}$ =

b) $\sqrt{361}$ = e) $\sqrt{5\,625}$ = h) $\sqrt{529}$ = k) $\sqrt{169}$ =

c) $\sqrt{784}$ = f) $\sqrt{1156}$ = i) $\sqrt{441}$ = l) $\sqrt{196}$ =

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 58 | 17 | 14 | 22 | 23 | 19 |
| 75 | 21 | 34 | 43 | 13 | 28 |

**4.** Con apoyo de su maestro, comparen sus respuestas. Comenten en qué se fijaron para identificar la raíz cuadrada de cada número.

**5.** En grupo y con apoyo de su maestro, analicen la siguiente información.

Con los tres términos que hay en un número elevado al cuadrado se puede escribir una operación de raíz cuadrada.

$$\underset{\text{Base}}{3}^{\overset{\text{Exponente}}{2}} = \underset{\text{Potencia}}{9} \qquad \sqrt[\text{Índice}]{\underset{\text{Radicando}}{9}} = \underset{\text{Raíz}}{3}$$

Cuando se trata de la raíz cuadrada, el índice (2) no se escribe.

**6.** Realicen lo que se indica a continuación.

a) Para cada número elevado al cuadrado, escriban debajo la raíz cuadrada que corresponde. Pueden usar calculadora. El primer caso está resuelto como ejemplo.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $11^2 = 121$ | $14^2 =$ | $16^2 =$ | $19^2 =$ | $20^2 =$ |
| $\sqrt{121} = 11$ | | | | |
| $23^2 =$ | $28^2 =$ | $32^2 =$ | $45^2 =$ | $50^2 =$ |
| | | | | |
| $105^2 =$ | $200^2 =$ | $321^2 =$ | $425^2 =$ | $520^2 =$ |
| | | | | |

b) Para cada raíz cuadrada, escriban debajo el número al cuadrado que corresponde. El primer caso está resuelto como ejemplo.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\sqrt{484} = 22$ | $\sqrt{676}$ | $\sqrt{5\,625}$ | $\sqrt{7\,396}$ | $\sqrt{15\,625}$ |
| $22^2 = 484$ | | | | |

**7.** Con apoyo de su maestro, comparen sus resultados. Comenten si su calculadora tiene la función de raíz cuadrada y si saben utilizarla.

Sesión 3

## Para terminar

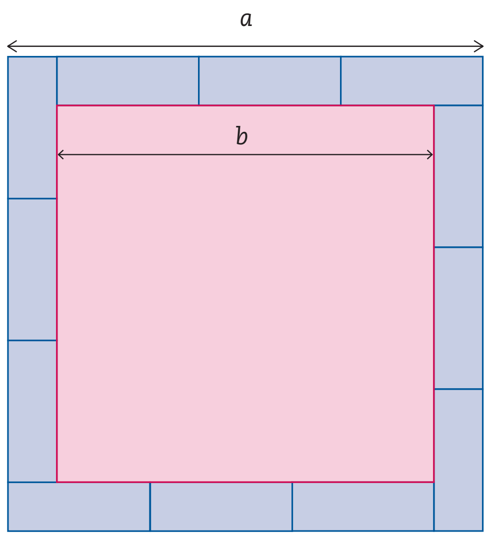
### La diagonal del cuadrado

1. Trabajen en equipo. Resuelvan los siguientes problemas.

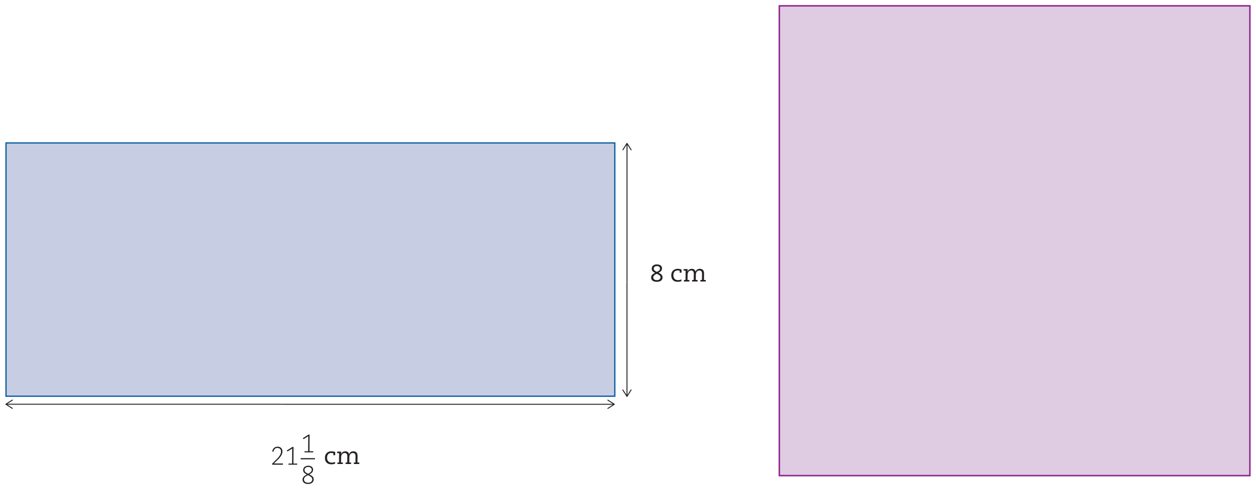
   a) El área del cuadrado cuyo lado mide $a$ es 2 500 $cm^2$. El área del cuadrado cuyo lado mide $b$ es 1 600 $cm^2$.

   - ¿Cuál es el valor de $a$? ______________________________
   - ¿Cuál es el valor de $b$? ______________________________
   - ¿Cuál es el área de uno de los rectángulos azules? __________________________
   - ¿Cuáles son las dimensiones de uno de los rectángulos azules?

     Largo: ______________ Ancho: ______________




   b) El rectángulo y el cuadrado tienen la misma área. ¿Cuánto mide un lado del cuadrado? ____________________________________________________________________



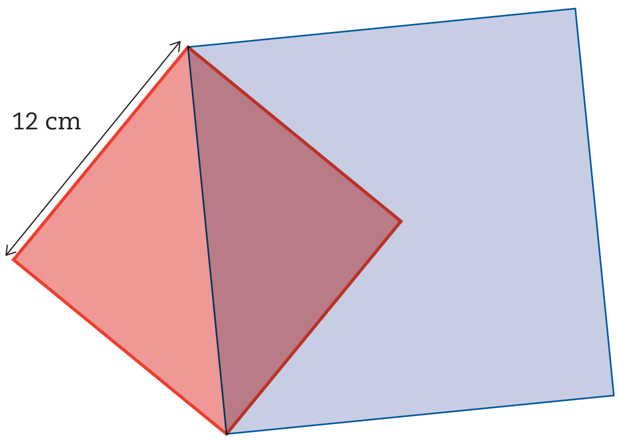
2. Con el apoyo de su maestro, comparen sus resultados, analicen los errores y corríjanlos si es necesario.

Algunos números tienen *raíz cuadrada entera* y se llaman *cuadrados perfectos*. Estos son: 1, 4, 9, 16, ... Otros números tienen raíz cuadrada decimal finita. Por ejemplo, 3.2 es la raíz cuadrada de 10.24, porque $3.2^2 = 10.24$

Otros números, como 2, 3, 5, tienen como raíz cuadrada un número con una parte decimal infinita. Por ejemplo, $\sqrt{2} = 1.414213562...$ Estos números se llaman *irracionales*.

Así que, si quieres hacer operaciones con la raíz cuadrada exacta de 2, usa la expresión: $\sqrt{2}$

3. El cuadrado azul está construido sobre la diagonal del cuadrado rojo. Analicen la figura y contesten las preguntas.




a) ¿Cuál es el área del cuadrado rojo? ______

b) ¿Cuál es el área del cuadrado azul? ______

c) ¿Cuánto mide un lado del cuadrado azul? Si es un número irracional, expresa la medida con el símbolo de la raíz cuadrada. ______

______

4. Calculen la raíz cuadrada de los siguientes números. Subraya los que consideres que son irracionales.

a) $\sqrt{64}$ = ______ b) $\sqrt{29.16}$ = ______ c) $\sqrt{21}$ = ______ d) $\sqrt{30}$ = ______

5. Con el apoyo de su maestro, revisen los resultados, analicen los errores y corrijan.

6. Observen el recurso audiovisual *Raíz cuadrada de un número* para conocer más sobre esta operación.

# 17. Reparto proporcional

Sesión 1

## Para empezar


Si entre dos personas compran un billete de lotería y cada uno aporta la mitad del costo, en caso de sacar un premio se espera que lo repartan por la mitad. También puede suceder que uno ponga tres cuartas partes del costo y el otro sólo la cuarta parte; entonces, ¿cómo se repartirá el premio?

De la misma manera, si el billete de lotería cuesta $ 25 y para comprarlo Alan pone $ 12, Eva pone $ 8 y Carmen $ 5, ¿cómo se repartirían un premio de $ 75 000? Problemas como el anterior reciben el nombre de repartos proporcionales y en esta secuencia estudiarás cómo se resuelven.

## Manos a la obra

**Dato interesante**
La Lotería Nacional de México es la más antigua de Latinoamérica. Se fundó en 1770 y se llamaba Real Lotería General de la Nueva España. Sus ganancias se utilizan en beneficio de México.

### ¿Qué parte del terreno les toca?

1. Los rectángulos representan terrenos que costaron $ 60 000. En cada uno se menciona quiénes lo compraron y el dinero que aportaron. Cada terreno se repartirá proporcionalmente entre las personas que lo compraron. Divídelos en partes y anota a quién le toca cada una.

**Terreno 1**
Lilia $ 30 000
Raúl $ 30 000

**Terreno 2**
Gabriela $ 30 000
Joaquín $ 15 000
Brenda $ 15 000

**Terreno 3**

Jessica $ 30 000

Christian $ 20 000

Laura $ 10 000

**Terreno 4**

Patricia $ 40 000

Alejandra $ 10 000

Jimena $ 10 000

**Terreno 5**

Leticia $ 12 000

Martín $ 12 000

Manolo $ 36 000

**Terreno 6**

Lourdes $ 20 000

Blanca $ 12 000

Andrés $ 24 000

Guillermo $ 4 000

**2.** Verifica tus particiones con las de otro compañero y respondan lo siguiente.

a) Lilia puso el mismo dinero que Raúl, ¿le toca la misma cantidad de terreno que a él? ____________________

b) Gabriela puso el doble de lo que puso Joaquín, ¿le tocó el doble de terreno que a Joaquín? ____________________

c) Jimena colaboró con la cuarta parte de lo que puso Patricia, ¿le tocó la cuarta parte del terreno que le tocó a Patricia? ____________________

**3.** Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Es probable que las partes en que dividieron los terrenos tengan diferente forma, pero deben representar la misma fracción de terreno. Busquen la forma de comprobarlo.

Sesión 2

## Nueces, almendras y pistaches

**1.** Trabajen en pareja y resuelvan el siguiente problema.

La maestra Laura va a repartir entre los equipos de su grupo nueces, almendras y pistaches. Como son 5 equipos, la maestra dice que dividirá en 5 partes iguales lo que va a repartir, pero algunos equipos protestaron. Observen las imágenes de abajo y respondan las preguntas.


a) ¿Qué equipos creen que hayan protestado y por qué? ________________

b) ¿A cuál equipo creen que tendría que darle menos? ________________

c) ¿Por qué creen que tendría que darle menos? ________________

________________________________

d) ¿A cuál tendría que darle más? ________________

e) ¿Por qué tendría que darle más? ________________

**2.** La maestra Laura va a repartir 75 nueces, 125 almendras y 50 pistaches. Anoten en el recuadro de cada equipo lo que debe recibir cada uno si se reparte todo de manera proporcional al número de integrantes del equipo.

| Semilla \ Equipo | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Nueces | | | | | |
| Almendras | | | | | |
| Pistaches | | | | | |

**3.** Si va a repartir también 200 gramos de piñones y 250 gramos de cacahuates, escriban lo que debe darle a cada equipo.

| Semilla \ Equipo | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Piñones (gramos) | | | | | | 200 |
| Cacahuates (gramos) | | | | | | 250 |

**4.** Respondan lo siguiente a partir del número de integrantes.

a) El equipo 4 tiene $\frac{1}{2}$ del número de integrantes del equipo 1. ¿Las cantidades que recibió de todo corresponden a $\frac{1}{2}$ de lo que recibió el equipo 1? __________

b) El equipo 4 tiene $\frac{3}{4}$ del número de integrantes del equipo 3. ¿Las cantidades que recibió de todo corresponden a $\frac{3}{4}$ de lo que recibió el equipo 3? __________

c) El equipo 3 tiene $\frac{4}{5}$ del número de integrantes del equipo 2. ¿Las cantidades que recibió de todo corresponden a $\frac{4}{5}$ de lo que recibió el equipo 2? __________

**5.** Comparen sus respuestas con las de sus compañeros.

**6.** Observen el recurso audiovisual *¿Cuánto le toca a cada quién?*, donde profundizarán sus conocimientos sobre los repartos proporcionales.

# Para terminar

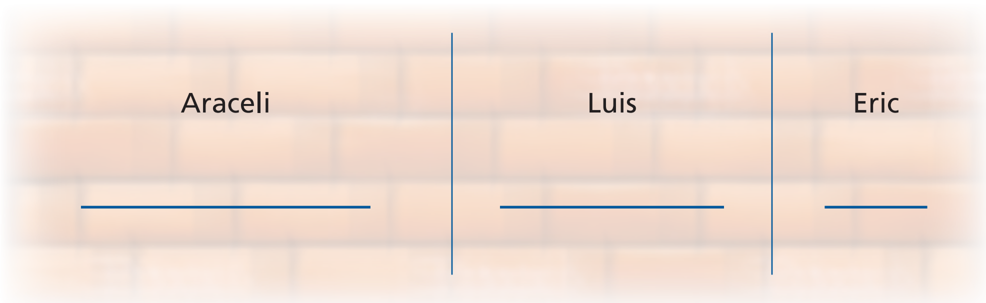
## Ser justos al repartir

1. Resuelvan en pareja los siguientes problemas.

Tres sastres hicieron un trabajo en equipo. Uno de ellos trabajó 12 horas; otro, 6 y el tercero, 4. Por el trabajo recibieron una ganancia de $4 400. ¿Cuánto le tocará a cada uno si se reparten la ganancia proporcionalmente al tiempo que trabajaron?

| | Sastre 1 | Sastre 2 | Sastre 3 | Total |
|---|---|---|---|---|
| Horas trabajadas | 12 | 6 | 4 | |
| Ganancia ($) | | | | 4 400 |

2. En el siguiente dibujo se indica la parte de una pared que pintaron tres amigos. Les pagaron $600 y piensan repartir este dinero proporcionalmente a lo que cada uno trabajó. Anoten debajo de cada nombre la cantidad que deberá recibir.




3. Entre Alma, Patricia, Brandon y Julio pintaron una pared. Por el trabajo recibieron $1 200. Completen la siguiente tabla considerando que las ganancias fueron repartidas de manera proporcional a lo que pintó cada quien.

| | Alma | Patricia | Brandon | Julio | Total |
|---|---|---|---|---|---|
| Parte que pintó cada uno | | | | | |
| Ganancia ($) | 600 | 300 | 150 | 150 | 1 200 |

4. En un campamento hay cuatro casas de campaña. En la siguiente tabla se indica el número de integrantes de cada una. Se repartirán proporcionalmente 60 litros de agua entre todas. Escriban el número de litros de agua que le toca a cada una.

| Casa de campaña | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Número de integrantes | 3 | 6 | 4 | 2 |
| Litros de agua | | | | |

5. Lean el siguiente relato.

### *Los ocho panes*

Nos encontramos en el camino a un viajero llamado Maclovio; él era uno de los hombres más ricos de California. Su caravana había sido saqueada y no tenía nada para comer. Yo tenía 3 panes y Octavio llevaba 5. Decidimos juntar los 8 panes y repartirlos en partes iguales entre los tres.

Cuando llegamos a Sacramento, Maclovio nos regaló 8 lingotes de oro como agradecimiento al pan que le compartimos. A mí me dio 3 lingotes y a Octavio le dio 5. Con sorpresa, Octavio protestó y dijo: "La división hecha de ese modo es sencilla, pero no justa". Octavio agregó: "Si yo entregué 5 panes, he de recibir 7 lingotes; y mi compañero, que dio 3 panes, debe recibir solo uno".



a) ¿Por qué creen que Octavio propuso este reparto de los lingotes? ______________________

______________________________________________

b) ¿Creen que la propuesta de Octavio es un reparto proporcional? ______________________

______________________________________________

c) Argumenten su respuesta.

______________________________________________

______________________________________________

______________________________________________

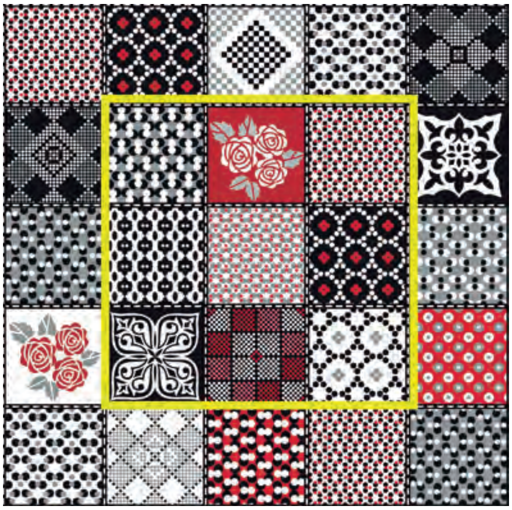
6. Con apoyo de su maestro, comparen sus respuestas y procedimientos con sus compañeros.

7. Utilicen el recurso informático *Repartos proporcionales*, donde practicarán la resolución de problemas de este tema.

# 18. Figuras geométricas y equivalencia de expresiones 2

Sesión 1

## Para empezar



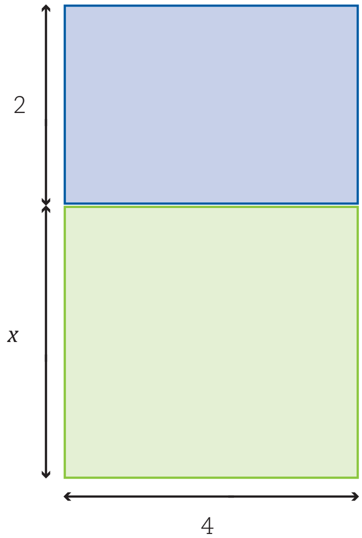
En varios países anglosajones, existe una técnica artesanal para hacer una colcha, un tapete o un mantel, cosiendo o tejiendo fragmentos de diversas telas. En los países hispanohablantes, a estas piezas se les conoce como *acolchados*.

Observa la ilustración. ¿Cuántas expresiones algebraicas distintas podrías escribir para calcular el perímetro o el área de la sección remarcada en la colcha?

En esta secuencia continuaremos relacionando la representación geométrica con la algebraica para aprender a obtener más de una expresión algebraica de una situación y verificar que sean equivalentes. Se espera que, al finalizar el estudio de la secuencia, puedas dar más de una respuesta a la pregunta anterior.

### Varias formas para lo mismo

**1.** Obtén dos expresiones algebraicas equivalentes para el perímetro y otras dos para el área de la siguiente figura.




**Perímetro**

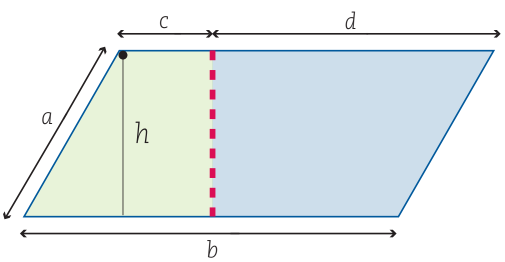
Expresión 1: ____________ Expresión 2: ____________

**Área**

Expresión 1: ____________ Expresión 2: ____________

## Manos a la obra

**2.** Formen un equipo para trabajar las siguientes actividades de esta sesión. Observen el siguiente romboide.




a) Obtengan una expresión algebraica para calcular su área. ____________

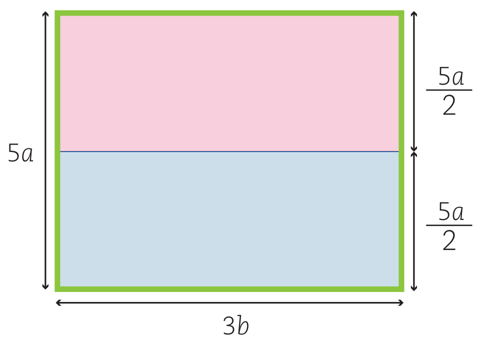
b) Escriban una expresión algebraica equivalente a la anterior. ____________

c) Dibujen una figura geométrica cuya área también corresponda a la expresión algebraica equivalente que acaban de obtener.

d) Verifiquen la equivalencia de ambas expresiones algebraicas, asignando diversos valores a las literales.

| Valor | | | | Área | |
|---|---|---|---|---|---|
| *h* | *b* | *c* | *d* | Primera expresión: | Segunda expresión: |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |

**3.** Consideren la siguiente figura:




a) Obtengan la expresión algebraica para calcular el área del rectángulo verde.

_______________

b) ¿Cómo expresarían el área del rectángulo verde, utilizando las medidas de los rectángulos interiores? _______________

c) Verifiquen en su cuaderno que las expresiones algebraicas son equivalentes asignando valores a las literales.

**4.** ¿Cuáles de las siguientes expresiones algebraicas también permiten obtener el área del rectángulo verde? Márcalas con una palomita (✓).

☐ $3b\left(\frac{5a}{2}+\frac{5a}{2}\right)$ ☐ $3b\left[2\left(\frac{5a}{2}\right)\right]$ ☐ $6b\left(\frac{5a}{2}\right)$

a) Escriban una igualdad con una de las expresiones algebraicas equivalentes que obtuvieron en la actividad 3 y con una de las que acaban de marcar.

| Expresión algebraica 1 | Igualdad | Expresión algebraica 2 |
|---|---|---|
| | = | |

b) Transformen la primera expresión en la segunda y viceversa, aplicando las reglas algebraicas que corresponden.

5. Comparen sus resultados con los de otro equipo. Si obtuvieron expresiones o figuras geométricas distintas, verifiquen que sean equivalentes.

6. Lean y comenten con su maestro la siguiente información.

Cuando se comprueba que una expresión para calcular el perímetro o el área de una figura es equivalente a otra mediante la manipulación algebraica, se usan las siguientes propiedades de la igualdad:

Para cualesquiera números $a$, $b$ y $c$, si $a = b$, entonces
$a + c = b + c$. Si $a = b$, entonces $a - c = b - c$.

Es decir, si se suma o resta el mismo valor a ambos lados de la igualdad, ésta no se altera. Esta propiedad se llama *propiedad aditiva* o *propiedad uniforme*.

Para cualesquiera números $a$, $b$ y $c$, si $a = b$, entonces
$a \cdot c = b \cdot c$, o bien, $ac = bc$.
Si $a = b$, entonces $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$; donde $c \neq 0$.

En otras palabras, cuando se multiplica o divide por el mismo número a ambos lados de la igualdad, la expresión resultante también será equivalente, siempre y cuando $c \neq 0$ para la división. Esta propiedad se llama *propiedad multiplicativa* o *propiedad de cancelación*.

Sesión 2

## Un paso adelante

1. Trabajen en pareja las actividades de esta sesión. Tracen dos figuras que formen una composición con las siguientes condiciones: el área de la figura A es $14x$ y el de la figura B es $6xy$.

a) Expresen el área total de la composición: ____________________

b) Dibujen otra figura geométrica que tenga como área $2x\,(3y + 7)$.

c) ¿Tienen la misma área la figura del inciso b) y la suma de las dos figuras del inciso a)?
____________ Justifiquen su respuesta. ____________________
____________________

**2.** Escriban una igualdad con las expresiones algebraicas equivalentes que han obtenido en la actividad 1.

a) Transformen la primera expresión algebraica en la segunda y viceversa.

b) Intercambien con otros compañeros sus respuestas y, en caso de que sean distintas, verifiquen las transformaciones que realizaron.

| Expresión algebraica 1 (figura A + figura B) | Igualdad | Expresión algebraica 2 (figura C) |
|---|---|---|
| | = | |

**3.** Observen la siguiente figura.

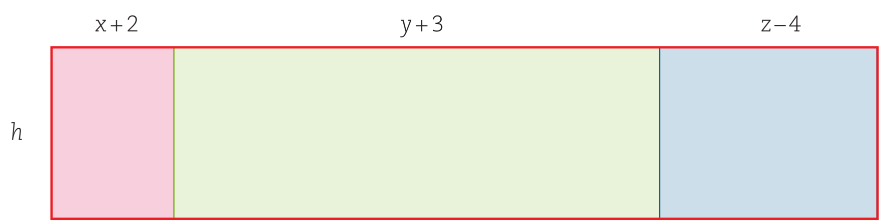



**Figura 1**

a) Obtengan el área del rectángulo rojo. ____________________

b) Escriban una expresión equivalente para el área del rectángulo rojo, pero que esté expresada con las medidas de los tres rectángulos interiores. ____________

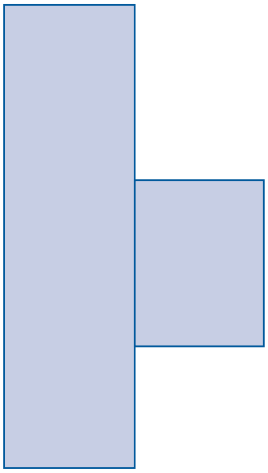


Figura 2

c) Verifiquen que las expresiones obtenidas en los dos incisos anteriores sean equivalentes, asignando valores a las variables de cada expresión.

**4.** La figura 2 es una transformación de la figura 1, sin que se haya alterado ninguna de las medidas del rectángulo rojo.

a) Asignen las dimensiones de la figura 2 respecto a las dimensiones de la figura 1.

b) ¿El área de ambas figuras mide lo mismo? Justifiquen su respuesta.________________________________________

______________________________________________________________________

c) ¿El perímetro de ambas figuras medirá lo mismo? ¿Por qué? ____________________

______________________________________________________________________

**5.** Observen el recurso audiovisual *Expresiones algebraicamente equivalentes*, con el cual ampliarán su conocimiento sobre este tema. Centren su atención en las maneras en que se realizan las transformaciones algebraicas.

Sesión 3

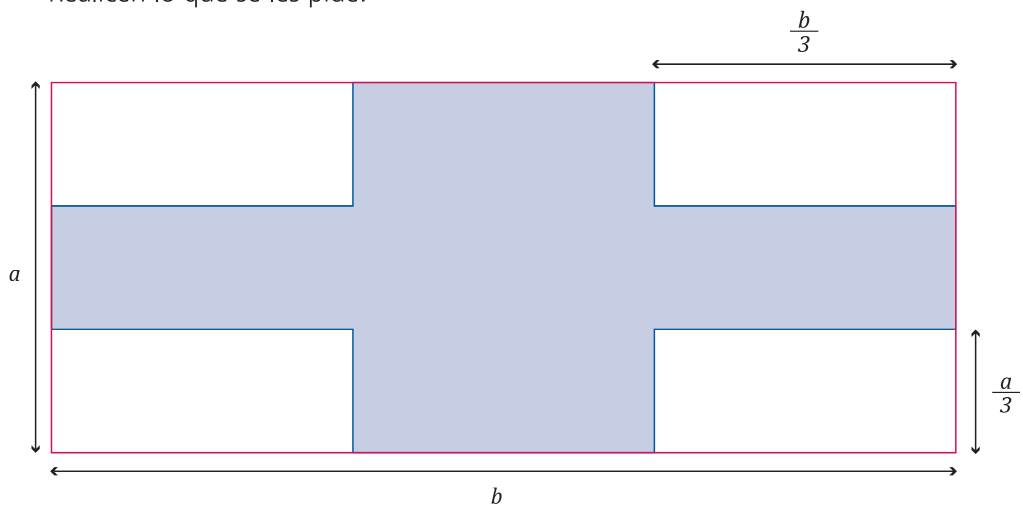
## Para terminar

### Para ejercitar aún más

**1.** Trabajen en pareja las actividades de esta sesión. Escriban expresiones equivalentes para cada una de las siguientes expresiones, realizando operaciones para transformarlas. Después, verifiquen su equivalencia con algunos ejemplos, asignando diversos valores.

| Expresión algebraica | Expresión algebraica equivalente |
|---|---|
| $3\left(\frac{1}{3}a + 13a + 6b\right)$ | |
| | $25m - 45k + 1$ |
| | $x + x + 4 + y + 7 + 2y$ |
| $(x + b)(y + 5)$ | |

2. La siguiente figura está formada por rectángulos con las medidas que se indican. Realicen lo que se les pide.




a) Obtengan la expresión algebraica para el perímetro del rectángulo rojo. ________

________________________________________

b) En el recuadro de abajo apliquen las propiedades de la igualdad y realicen las operaciones necesarias para obtener dos expresiones equivalentes a la expresión algebraica que obtuvieron en el inciso a).

c) Verifiquen en su cuaderno su equivalencia asignando algunos valores a cada literal.

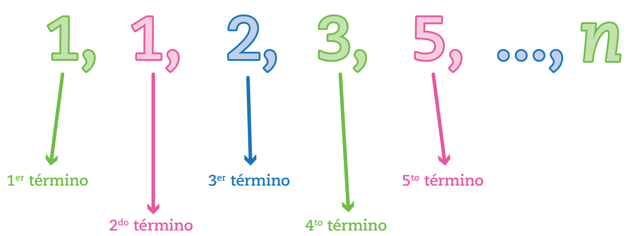
3. Observen el recurso audiovisual *Otras expresiones algebraicamente equivalentes*, con el cual ampliarán su conocimiento sobre este tema. Comenten con sus compañeros cómo se aplicaron las propiedades de la igualdad para obtener expresiones algebraicas equivalentes.

4. Resuelvan los problemas que se presentan en el recurso informático *Expresiones equivalentes 2* para seguir obteniendo expresiones algebraicas equivalentes y comprobando su equivalencia.

# 19. Sucesiones y expresiones equivalentes 2

Sesión 1

## Para empezar




A cada uno de los números que forman una sucesión se les llama *término*, *elemento* o *miembro*.

Anteriormente trabajaste con sucesiones de números enteros positivos y negativos, describiste con tus palabras las reglas o patrones que siguen, planteaste expresiones algebraicas que representan a esas reglas y verificaste que fueran equivalentes. Para recordarlo, encuentra dos expresiones algebraicas equivalentes que generen la sucesión de números: 3, 5, 7, 9, 11,…, $a_n$

| Expresiones algebraicas que representan la regla de la sucesión | Posición del término en la sucesión | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1ro | 2do | 3ro | 4to | 5to | $n$ |
| 1. $n + n + 1$ | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | $n + n + 1$ |
| 2. | | | | | | |
| 3. | | | | | | |

Comparen las expresiones algebraicas que escribieron y verifiquen si generan los términos de la sucesión. Si todas ellas lo hacen, entonces se puede decir que son expresiones algebraicas equivalentes de la regla.

En esta secuencia verificarán la equivalencia algebraica de expresiones de primer grado que generan sucesiones de números enteros y de números fraccionarios y decimales con signo.

## Manos a la obra

1. Trabajen en pareja. Observen las sucesiones I y II que aparecen en la tabla de la siguiente página y, para cada una de ellas:
   a) Encuentren la expresión algebraica de la regla que las genera.
   b) Busquen por lo menos dos expresiones algebraicas que sean equivalentes a cada expresión que encontraron y anótenlas en su cuaderno.
   c) Justifiquen en su cuaderno por qué esas expresiones son equivalentes.
   d) En el caso de la sucesión I, comprueben en cada una de las expresiones si el término que ocupa el lugar 110 de la sucesión es 328.
   e) En el caso de la sucesión II, comprueben en cada una de las expresiones si el término que ocupa el lugar 210 de la sucesión es 839.

| Sucesión | Posición del término | | | | | | $n$ (regla de la sucesión) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $1^{ro}$ | $2^{do}$ | $3^{ro}$ | $4^{to}$ | $5^{to}$ | $6^{to}$ | |
| I | 1 | 4 | 7 | 10 | 13 | 16 | |
| II | 3 | 7 | 11 | 15 | 19 | 23 | |

2. Comparen sus resultados con otra pareja y anoten todas las expresiones algebraicas diferentes que hayan encontrado. Verifiquen si son equivalentes y si permiten obtener los términos de cada sucesión.

3. Completen las siguientes sucesiones de números y escriban una expresión algebraica que las genere.

| Sucesión | Posición del término | | | | | | $n$ (regla de la sucesión) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $1^{ro}$ | $2^{do}$ | $3^{ro}$ | $4^{to}$ | $5^{to}$ | $6^{to}$ | |
| III | –4 | –8 | | –16 | | –24 | |
| IV | –9 | | –3 | 0 | 3 | | |

4. Marquen con una palomita (✓) las expresiones algebraicas que son equivalentes a la expresión que encontraron y, en su cuaderno, expliquen por qué lo son.

| Sucesión III. Expresiones algebraicas equivalentes que la generan | | |
|---|---|---|
| ☐ $n - 5$ | ☐ $-2(2n)$ | ☐ $n - 5n$ |
| ☐ $5 - n$ | ☐ $-n - n - n - n$ | ☐ $-(4n)$ |

| Sucesión IV. Expresiones algebraicas equivalentes que la generan | | |
|---|---|---|
| ☐ $3n - 12$ | ☐ $-n - n - n + (-12)$ | ☐ $3(n + 4)$ |
| ☐ $-12n + 3$ | ☐ $-3(n + 4)$ | ☐ $12n - 3$ |

## Sucesiones de números decimales y fraccionarios

Sesión 2

1. Trabajen en pareja. Encuentren la regla de las sucesiones de números y dos expresiones algebraicas equivalentes.

| Posición del término | $1^{ro}$ | $2^{do}$ | $3^{ro}$ | $4^{to}$ | $5^{to}$ | $6^{to}$ | $n$ (regla de la sucesión) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Sucesión V | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 | 3.5 | |

a) Marquen con una palomita (✓) las expresiones algebraicas equivalentes a la expresión que encontraron y expliquen en su cuaderno por qué lo son.

| | | |
|---|---|---|
| ☐ $n + 0.5$ | ☐ $\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right)$ | ☐ $0.5(n + 1)$ |

b) Busquen por lo menos otras dos expresiones algebraicas que sean equivalentes a la expresión que anotaron como regla de la sucesión.

| Expresión algebraica equivalente | Porque |
|---|---|
| 1. | |
| 2. | |

c) Comparen sus resultados con otra pareja y anoten las expresiones algebraicas que hayan encontrado. Verifiquen que todas sean equivalentes. Para ello, comprueben si el número 50.25 es un término de la sucesión. ¿Qué número ocupa la posición 100 de la sucesión? ______________________

**2.** Completen la siguiente sucesión de números y escriban una expresión algebraica que la genere.

| Posición del término | $1^{ro}$ | $2^{do}$ | $3^{ro}$ | $4^{to}$ | $5^{to}$ | $6^{to}$ | $n$ (regla de la sucesión) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Sucesión VI | $\frac{1}{6}$ | | $\frac{1}{18}$ | $\frac{1}{24}$ | | $\frac{1}{36}$ | |

a) Marquen con una palomita (✓) las expresiones algebraicas equivalentes a la expresión que encontraron para la sucesión 6 y, en su cuaderno, expliquen por qué lo son.

| | | |
|---|---|---|
| ☐ $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3n}\right)$ | ☐ $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2n}\right)$ | ☐ $\frac{6}{n}$ |
| ☐ $\frac{n}{6}$ | ☐ $0.6n$ | ☐ $\frac{n^{-1}}{6}$ |

b) Verifiquen con cada una de las expresiones algebraicas equivalentes que la fracción $\frac{1}{300}$ sea parte de la sucesión. Si lo es, ¿qué posición ocupa? ________ ¿Cuál es el término que corresponde a la posición 25? ____________ ¿Y cuál es el de la posición 100? ____________

c) Marquen con una palomita (✓) las sucesiones numéricas equivalentes a la sucesión: $\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{18}, \frac{1}{24},\ldots$ y, en su cuaderno, expliquen por qué.

| | |
|---|---|
| ☐ $\frac{2}{12}, \frac{4}{12}, \frac{6}{12}, \frac{8}{12}, \frac{10}{12},\ldots$ | ☐ $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right), \frac{2}{2}\left(\frac{1}{3}\right), \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right), \frac{4}{2}\left(\frac{1}{3}\right), \frac{5}{2}\left(\frac{1}{3}\right),\ldots$ |
| ☐ $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\times\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\times\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\times\frac{1}{8},\ldots$ | ☐ $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right), \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right), \frac{1}{2}\left(\frac{1}{9}\right), \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}\right), \frac{1}{2}\left(\frac{1}{15}\right),\ldots$ |

d) Comparen sus resultados con los de otra pareja.

**3.** Observen el recurso audiovisual *Operaciones algebraicas* para que recuerden algunas reglas de cómo escribir y operar con las literales y expresiones algebraicas.

**4.** Trabajen en pareja. Completen la siguiente sucesión de números y escriban la expresión algebraica que la genera.

| Posición del término | $1^{ro}$ | $2^{do}$ | $3^{ro}$ | $4^{to}$ | $5^{to}$ | $6^{to}$ | $7^{mo}$ | *n* (regla de la sucesión) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Sucesión VII | $\frac{3}{4}$ | $\frac{3}{2}$ | | 3 | $\frac{15}{4}$ | $\frac{9}{2}$ | | |

a) Marquen con una palomita (✓) las sucesiones numéricas equivalentes a la sucesión anterior y, en su cuaderno, expliquen por qué.

| | |
|---|---|
| ☐ $\frac{3}{4}, \frac{6}{4}, \frac{9}{4}, \frac{12}{4}, \frac{15}{4},\ldots$ | ☐ $0.75, \frac{6}{4}, 2.25, \frac{12}{4}, 3.75,\ldots$ |
| ☐ $0.75, 1.5, 2.25, 3, 3.75,\ldots$ | ☐ $\frac{75}{100}, \frac{150}{100}, \frac{225}{100}, \frac{300}{100}, \frac{375}{100},\ldots$ |

**5.** Busquen y anoten otra sucesión de términos que sea equivalente a la sucesión que se genera con la expresión algebraica $\frac{3}{4}n$.

| Posición del término | $1^{ro}$ | $2^{do}$ | $3^{ro}$ | $4^{to}$ | $5^{to}$ | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Sucesión VIII | | | | | | |

a) Marquen con una palomita (✓) las expresiones algebraicas que son equivalentes a la expresión que encontraron y, en su cuaderno, expliquen por qué lo son.

| | |
|---|---|
| ☐ $3\frac{1}{4n}$ | ☐ $\frac{1}{4}(3n)$ |
| ☐ $\frac{3n}{4}$ | ☐ $3\left(\frac{1}{4}n\right)$ |

b) Busquen por lo menos otras dos expresiones algebraicas que sean equivalentes a la expresión $\frac{3}{4}n$, anótenlas en su cuaderno y expliquen por qué lo son.

- Con cada una de las expresiones algebraicas equivalentes que encontraron verifiquen que el número 56.25 es parte de la sucesión. Si lo es, ¿qué posición ocupa? ____________ ¿Cuál es la fracción que le corresponde? ____________ ¿Cuál es el término que corresponde a la posición 50? ____________ ¿Y cuál a la posición 150? ____________

6. Con apoyo de su maestro, comparen sus respuestas con el grupo y, en caso necesario, corrijan.

Sesión 3

## Para terminar

### Más expresiones algebraicas

1. Anoten los primeros 5 términos de la sucesión de números que sigue la regla: $\frac{1}{4n} + \frac{1}{8}$

| Posición del término | $1^{ro}$ | $2^{do}$ | $3^{ro}$ | $4^{to}$ | $5^{to}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Sucesión IX | | | | | |

a) Marquen con una palomita (✓) las expresiones algebraicas que son equivalentes a la expresión que encontraste y explica por qué lo son.

| | |
|---|---|
| ☐ $\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\right)$ | ☐ $\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}n-\frac{1}{4}\right)$ |
| ☐ $\frac{n}{4}+\frac{1}{8}$ | ☐ $\frac{1}{4}\left(n^{-1}+\frac{1}{2}\right)$ |

b) Busquen por lo menos otras dos expresiones algebraicas que sean equivalentes a la expresión $\frac{1}{4n}+\frac{1}{8}$, anótenlas en su cuaderno y expliquen por qué lo son.

c) Verifiquen que todas las expresiones sean equivalentes. Para ello, comprueben si los números $\frac{2}{15}$, $\frac{25}{200}$ y $\frac{41}{320}$ son términos de la sucesión y, de pertenecer a ella, observen en qué posición se encuentran.

**2.** Anoten los primeros 5 términos de la sucesión de números que sigue la regla: $\frac{2}{3}n+\frac{1}{3}$

| Posición del término | 1ro | 2do | 3ro | 4to | 5to |
|---|---|---|---|---|---|
| Sucesión X | | | | | |

a) Busquen por lo menos otras dos expresiones algebraicas que sean equivalentes a la expresión $\frac{2}{3}n+\frac{1}{3}$

| Expresión algebraica equivalente | Porque |
|---|---|
| 1. | |
| 2. | |

b) Verifiquen que todas las expresiones sean equivalentes. ¿Qué número ocupa la posición 90 de la sucesión? ____________ ¿Y cuál está en la posición 200? ____________

c) Comparen sus resultados y argumentos con los de otra pareja; si hay expresiones equivalentes que ustedes no encontraron, agréguenlas en su cuaderno.

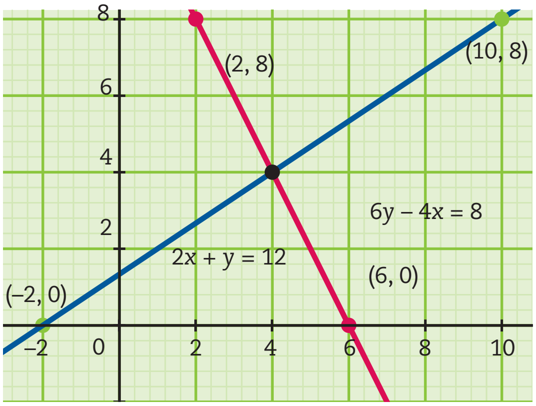
**3.** En grupo, y con apoyo de su maestro, a partir de lo trabajado hasta este momento describan algunas estrategias para encontrar expresiones equivalentes.

**4.** Utilicen el recurso informático *Sucesiones de números*, en el portal del proyecto Descartes, para resolver dudas que surjan sobre qué es una sucesión numérica, cuáles son sus elementos y dificultades para probar si las expresiones algebraicas propuestas como reglas que generan las sucesiones son o no equivalentes. En: https://www.proyectodescartes.org/Telesecundaria/materiales_didacticos/1m_b01_t03_s02-JS/index.html

# 20. Sistemas de ecuaciones. Métodos de igualación y de sustitución

Sesión 1

## Para empezar




En la secuencia 5 del primer bloque aprendiste a plantear un sistema de ecuaciones de dos incógnitas a partir de situaciones problemáticas que involucraban ciertas condiciones o limitantes, también lograste resolver tales sistemas mediante el método gráfico. En esta secuencia ampliarás tus conocimientos para resolver sistemas de ecuaciones de dos incógnitas con el empleo de algunos métodos algebraicos.

## Manos a la obra

### Igualar ecuaciones

**1.** Trabajen en pareja. Resuelvan en su cuaderno el siguiente sistema de ecuaciones mediante el método gráfico. Elaboren la tabla de valores y tracen en su cuaderno la gráfica para encontrar la solución.

Ecuación 1: $4x - y = 9$
Ecuación 2: $3x + 5y = 1$

a) La solución del sistema es el punto donde las dos rectas se intersecan, es decir, el punto común de las dos rectas, ¿cuál es la solución del sistema?

$x =$ ______________ $y =$ ______________

b) Como se observa, al elaborar la tabla de valores tuvieron que despejar la literal de ambas ecuaciones, dar valores arbitrarios a $x$, para obtener así el punto de intersección.

| Valor de $x$ | Valor de $y$ en la ecuación 1 ($y = -9 + 4x$) | Valor de $y$ en la ecuación 2 $\left(y = \frac{1-3x}{5}\right)$ |
|---|---|---|
| 2 | –1 | –1 |

Si el valor de $y$ es el mismo para ambas ecuaciones, quiere decir que las expresiones son iguales o equivalentes y podemos igualarlas:

$$-9 + 4x = \frac{1-3x}{5}$$

c) Resuelvan la ecuación anterior y escriban el valor que obtengan de $x$. ____________

d) Como se observa, al igualar las expresiones y resolver la ecuación que resulta, se obtiene el mismo valor para $x$ indicado en la tabla. ¿Qué pueden decir de este valor con respecto a la gráfica? ______________________________

e) Sustituyan el valor de $x$ en ambas ecuaciones y observen qué resulta.

| Sustitución del valor de $x$ en la ecuación 1<br>$4x - y = 9$ | Sustitución del valor de $x$ en la ecuación 2<br>$3x + 5y = 1$ |
|---|---|
| | |

**2.** En grupo y con ayuda de su maestro, lean y comenten la siguiente información.

Una ecuación de primer grado con una incógnita es aquella que, como su nombre lo indica, tiene sólo un valor desconocido y su exponente es 1. La solución de esta ecuación es el valor que la hace cierta, esto es, que permite obtener la igualdad. Por ejemplo: $3x + 4 = 10$ es una ecuación de primer grado y sólo es verdadera cuando $x = 2$, lo que representa su solución.

Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas está formado por dos ecuaciones de primer grado que relacionan dos incógnitas. Cada ecuación representa una condición o restricción del problema, por lo que encontrar la solución significa obtener los valores de las incógnitas que resuelven o hacen verdaderas simultáneamente ambas ecuaciones.

En el problema anterior, donde el sistema de ecuaciones está formado por:

Ecuación 1: $4x - y = 9$

Ecuación 2: $3x + 5y = 1$

La solución es $x = 2$, $y = -1$, ya que satisfacen o hacen ciertas a ambas ecuaciones, esto es, hacen verdaderas ambas igualdades. Cuando se obtienen los dos valores, es conveniente verificar que ambos son la solución del sistema, sustituyendo esos valores en las dos ecuaciones para corroborar la igualdad.

**3.** Observen el recurso audiovisual *Operaciones algebraicas 2* y pongan atención en los aspectos importantes de la manipulación algebraica, por ejemplo en el significado de despejar una ecuación y cómo hacerlo.

**4.** En grupo y con apoyo de su maestro, lean y comenten la siguiente información.

Otra forma de resolver un sistema de ecuaciones consiste en despejar la misma literal (puede ser $x$ o $y$) en ambas ecuaciones e igualar las expresiones que se obtienen. Al resolver la igualdad se obtiene el valor de la otra literal. Este procedimiento se denomina *Método de igualación*.

5. En pareja, resuelvan el siguiente problema, planteando primero el sistema de ecuaciones necesario y resolviéndolo por el método de igualación.

Leonora y Maribel fueron a la misma dulcería. Leonora compró cuatro paletas de caramelo y tres chocolates. Maribel compró tres paletas de caramelo y dos chocolates. Si Leonora gastó $48.00 y Maribel $34.00, ¿cuál es el costo de una paleta y el de un chocolate? Analicen y contesten las siguientes preguntas.

a) ¿Cuáles son las incógnitas de este problema? ______________________

b) En la tabla de la izquierda, planteen el sistema de ecuaciones que representa este problema.

| Sistema de ecuaciones | |
|---|---|
| Ecuación 1 | Ecuación 2 |
| | |

c) Despejen una de las dos incógnitas en ambas ecuaciones. En este caso, despejen *y*.

| Despejar *y* | |
|---|---|
| Ecuación 1 | Ecuación 2 |
| $y =$ | $y =$ |

d) Igualen las ecuaciones obtenidas: ______________ = ______________

e) Resuelvan en su cuaderno la ecuación de primer grado que se obtiene.

f) Sustituyan en cualquiera de las dos ecuaciones originales, el valor que se obtiene de la incógnita, en este caso de *x* para encontrar el valor de la otra incógnita (*y*).

g) Verifiquen que los valores obtenidos para las incógnitas cumplan con la igualdad en cada una de las ecuaciones del sistema.

6. Comparen con otros compañeros sus resultados. Revisen si obtuvieron las mismas ecuaciones y los mismos valores para *x* y *y*. Si no llegaron a lo mismo, comparen sus procedimientos en los pasos *c* a *f*. Luego, comenten en grupo y con su maestro si tuvieron alguna dificultad al resolver el sistema de ecuaciones por el método de igualación y señalen cuáles ventajas o desventajas tiene éste respecto al método gráfico.

## Con otro método



**1.** Trabajen en pareja el siguiente problema.

En una clase de baile hay 30 alumnos entre hombres y mujeres. Los alumnos se organizaron para ir a un salón de baile a practicar y asistieron sólo 26. Se sabe que asistió el 75% de los hombres y todas las mujeres. ¿Cuántos chicos y cuántas chicas hay en la clase de baile?

a) Encierren con un círculo el sistema de ecuaciones que corresponde al problema.

| | |
|---|---|
| $x + y = 30$<br>$x + y = 26$ | $x + y = 26$<br>$0.25x + 0.75y = 30$ |
| $x + y = 30$<br>$0.75x + y = 26$ | $x + y = 26$<br>$0.75x + 0.25y = 30$ |

b) De acuerdo con el sistema de ecuaciones que consideran correcto, ¿qué representa $x$? ____________ ¿Qué representa $y$? ____________

c) Escriban en la tabla de la derecha las ecuaciones que obtuvieron al despejar $y$ de cada ecuación.

| Ecuación 1 | Ecuación 2 |
|---|---|
| $y =$ | $y =$ |

d) Tomen la expresión que obtienen de despejar $y$ de la primera ecuación y sustitúyanla en el lugar de $y$ de la segunda ecuación. Comenten por qué este procedimiento es válido.

$0.75x +$ ____________________ $= 26$

Expresión que corresponde a $y$ despejada de la ecuación 1

e) Resuelvan en su cuaderno la ecuación de primer grado que obtuvieron para encontrar el valor de *x*.

f) Determinado el valor de *x*, analicen cómo pueden obtener el valor de *y*. Consideren lo que trabajaron en la sesión 1.

g) Comparen con otros compañeros sus resultados. Revisen si obtuvieron las mismas expresiones al despejar *y* en las ecuaciones y los mismos valores para las dos incógnitas. Si no obtuvieron lo mismo, verifiquen sus procedimientos en los pasos *a*, *b* y *c*.

h) Comenten en grupo y con su maestro si tuvieron alguna dificultad al resolver el sistema de ecuaciones por el método de sustitución. Además, señalen las ventajas o desventajas que tiene este método respecto al método gráfico y al de igualación.

Otra forma de resolver un sistema de ecuaciones consiste en transformar las dos ecuaciones en una que tenga sólo una incógnita, es decir, convertirla en una ecuación de primer grado. Para ello se despeja una incógnita en una de las dos ecuaciones y la expresión obtenida se sustituye en la otra ecuación. Este procedimiento se denomina *Método de sustitución*.

**2.** Resuelvan en pareja el siguiente sistema de ecuaciones por el método de sustitución. Si requieren apoyo para operar algebraicamente y despejar las literales, pidan ayuda a su maestro.

Ecuación 1: $\frac{1}{2}a + 3b = 15$

Ecuación 2: $2a + \frac{1}{4}b = 13$

a) Despejen una de las dos incógnitas. En este caso, *a* de la ecuación 1:

$a =$ ____________________

b) Sustituyan la expresión que equivale al valor de la incógnita *a* en la ecuación 2:

$2(\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_) + \frac{1}{4}b = 13$

c) Realicen en su cuaderno las operaciones indicadas en los incisos anteriores y reduzcan los términos semejantes para resolver la ecuación de primer grado que resulta.

d) Sustituyan, en cualquiera de las dos ecuaciones originales, el valor obtenido de la incógnita, en este caso de *b*, para encontrar el valor de la otra incógnita, es decir, *a*. Luego, resuelvan la ecuación de primer grado que resulta.

e) Comprueben que los valores obtenidos para las incógnitas satisfacen la igualdad en cada una de las ecuaciones del sistema.

**3.** En equipo describan en su cuaderno el procedimiento para resolver un sistema de ecuaciones lineales por el método de igualación y el de sustitución. Comparen sus resultados con otros compañeros y con ayuda de su maestro formulen en grupo un procedimiento.

## ¿Cuál es el método más conveniente?



**1.** Trabajen en pareja el siguiente problema.

En el grupo 2° B, han aprobado la asignatura de Inglés 50% de las alumnas y 80% de los alumnos, mientras que Matemáticas la aprobó 75% de las alumnas y 70% de los alumnos. Calculen el número de alumnas y de alumnos que hay en el grupo si el total de aprobados es 24 en Inglés y 26 en Matemáticas. Analicen y contesten las siguientes preguntas para resolver el problema:

| | Inglés | Matemáticas |
|---|---|---|
| Alumnas | 50% | 75% |
| Alumnos | 80% | 70% |
| Total de estudiantes aprobados | 24 | 26 |

a) ¿Cuáles son las incógnitas de este problema? Represéntenlas con las literales $x$, $y$.

$x$: ____________________ $y$: ____________________

b) Planteen el sistema de ecuaciones que representa este problema. Si necesitan, pidan apoyo a su maestro.

c) Resuelvan en su cuaderno el sistema, tanto por el método de igualación como por el método de sustitución.

d) Resuelvan el sistema de ecuaciones por el método gráfico y comprueben que los valores obtenidos sean correctos.

e) Si los valores obtenidos en los tres métodos no coinciden, revisen sus procedimientos. De ser necesario comparen resultados con otra pareja o pidan ayuda a su maestro.

**2.** Observen el recurso audiovisual *Métodos de igualación y sustitución para resolver sistemas de ecuaciones* e identifiquen las diferencias y similitudes entre ambos métodos.

**3.** Respondan en su cuaderno cuál de los dos métodos les parece más fácil y por qué.

**4.** En grupo, lean sus respuestas, escuchen y analicen con atención los argumentos que dan para justificar la elección que hicieron.

**5.** De manera individual, resuelve en tu cuaderno los siguientes sistemas de ecuaciones por el método que prefieras. No olvides comprobar que los valores obtenidos para las incógnitas sean correctos para ambas ecuaciones.

$x + 4y = 1$ 　　$3x + 5y = 15$ 　　$5x + 2y = 1$

$2x + y = -5$ 　　$2x - 3y = -9$ 　　$-3x + 3y = 5$

**6.** Compara tus resultados con los de tus compañeros y, en caso de que no coincidan, revisen sus procedimientos o pidan apoyo a su maestro.

**7.** Utiliza el recurso informático *Métodos de resolución de sistemas de ecuaciones 1* para ejercitarte en la resolución de sistemas de ecuaciones por diversos métodos.

# 21. Relación funcional 1

Sesión 1

## Para empezar

Contrario a lo que muchos creen, en la cima de la montaña no escasea el oxígeno. La mezcla de gases en la atmósfera es la misma desde el nivel del mar hasta casi los 100 km de altitud. Entonces, ¿por qué a los alpinistas les resulta difícil respirar cuando escalan las cumbres más altas, al grado de necesitar tanques de oxígeno?

Como en el caso anterior, hay situaciones en las que la variación de una cantidad depende de otra; a esto se le conoce como *relaciones funcionales*. Por ejemplo, la variación entre el costo de un producto y la cantidad que se compra de él; la distancia que recorre un automóvil y el tiempo en que realiza el recorrido; la variación de las medidas del ancho y largo de un rectángulo a partir de un área fija. En esta secuencia estudiarás situaciones que corresponden a variación lineal e inversamente proporcional a partir de su representación gráfica, tabular y algebraica.

## Manos a la obra

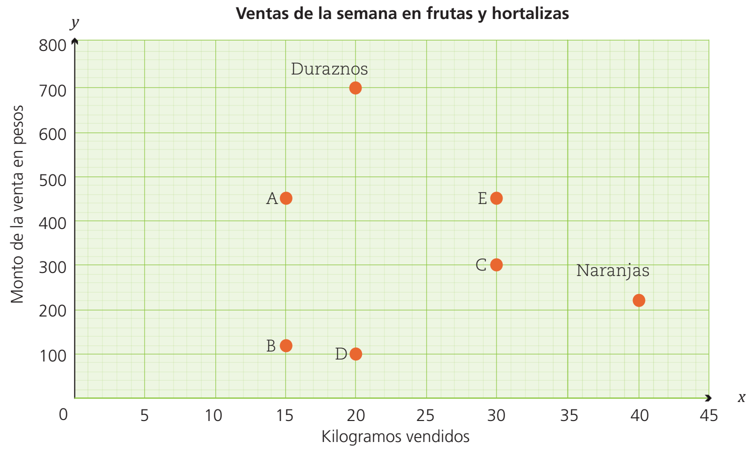
### Diversos tipos de variación

**Dato interesante**
La presión atmosférica y la altura están en una relación de proporcionalidad inversa; por ello, mientras más se sube en una montaña, más disminuye la presión y los pulmones parecen no tener suficiente "fuerza" para aspirar y expulsar el aire.

1. En equipo, realicen las actividades de esta sesión.
   Antonio vende hortalizas y frutas como las que se ven en la imagen.


La gráfica de la página siguiente muestra la cantidad en kilogramos y el monto de venta en pesos de cada hortaliza o fruta que ha vendido durante la semana.

a) En cada punto de la gráfica, escriban el nombre de la hortaliza o fruta que le corresponde.




b) Antonio también vende duraznos y naranjas. En la gráfica anterior se muestra la cantidad de kilogramos y el monto de la venta de esas frutas durante la semana, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas? Márquenlas con una palomita (✓).

| Afirmación | Verdadero |
|---|---|
| Entre más alto es el precio de una fruta, más alto está el punto en la gráfica que lo representa. | |
| Entre más kilogramos de fruta se vendan, más alto está el punto en la gráfica que lo representa. | |
| Si dos puntos están en la misma línea vertical, las hortalizas o frutas representadas por esos puntos tienen el mismo precio por kilogramo. | |
| Si dos puntos están en la misma línea horizontal, las hortalizas o frutas representadas por esos puntos tienen el mismo precio por kilogramo. | |

**2.** Elaboren en su cuaderno una tabla y una gráfica que muestren los precios por cada kilogramo de la fruta que más vende Antonio.

a) Si se unieran los puntos, ¿qué forma tendría la gráfica? ______________________

b) ¿Qué tipo de variación hay entre el número de kilogramos de fruta vendidos y el monto en pesos? ______________________

c) Si se prolonga la línea que une los puntos hasta que corte al eje *y*, ¿en qué punto lo interseca? ____________ ¿Qué significado tendría ese valor en el eje en este contexto? ______________________

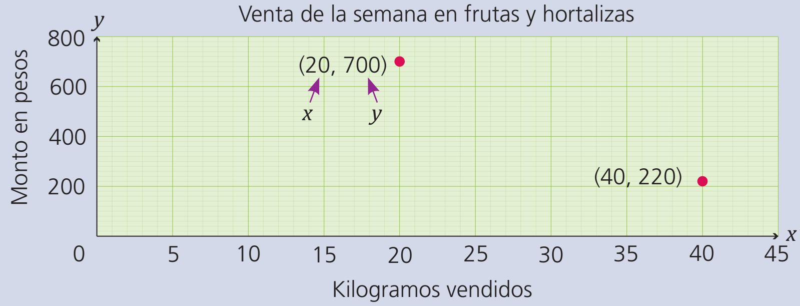
d) ¿Es posible que el monto de venta sea de $275? ______________________
¿A cuántos kilogramos vendidos corresponde? ______________________

e) ¿De qué manera se determina el monto de la venta? ______________________

______________________________________________

3. Con ayuda de su maestro, revisen las respuestas obtenidas en las actividades anteriores. Después lean y comenten en grupo la siguiente información.

Los valores de las coordenadas de los puntos permiten comparar los datos de una gráfica. Así, entre más a la derecha esté un punto, mayor es el valor de la abscisa del punto (x). Entre más arriba esté un punto, mayor es el valor de la ordenada (y).



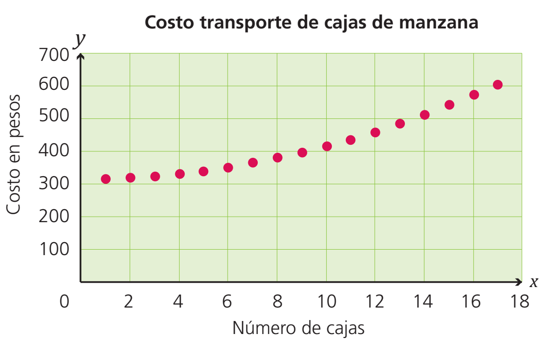

Sesión 2

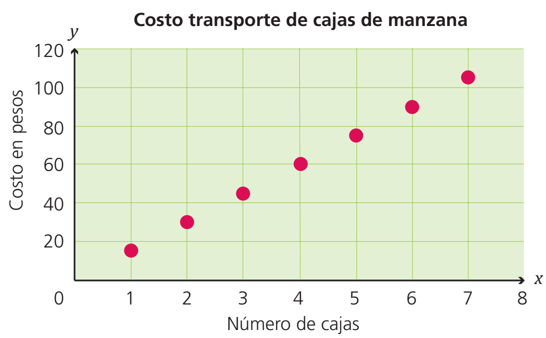
## Más variaciones sobre un mismo tema

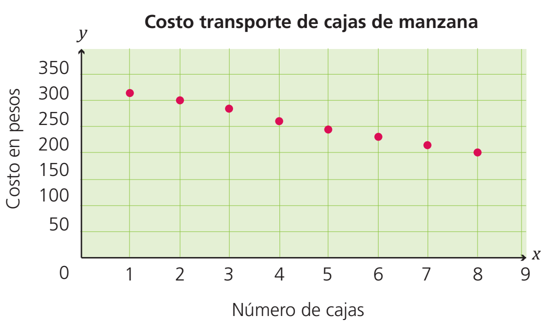
1. Trabajen en pareja las actividades de esta sesión.

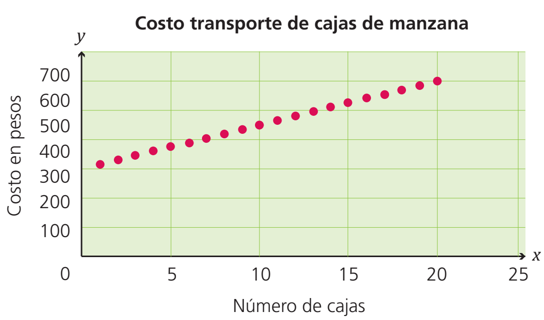
Antonio debe contratar un transporte para llevar a su puesto las cajas de manzana. Un transportista le cobra $300, más $15 por cada caja a transportar.

a) ¿Cuál de las gráficas representa esta situación? Enciérrenla en un círculo.



b) Si se prolonga la línea recta hasta cruzar el eje $y$, ¿en qué punto se interseca con él? ___________

c) ¿Qué representa ese punto en el contexto de la situación? ___________

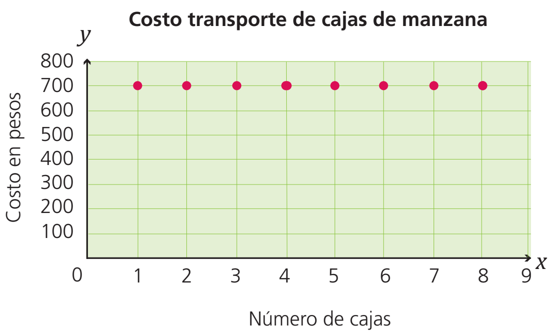
d) ¿Cuál es el valor máximo que puede tener en el eje $x$? ___________

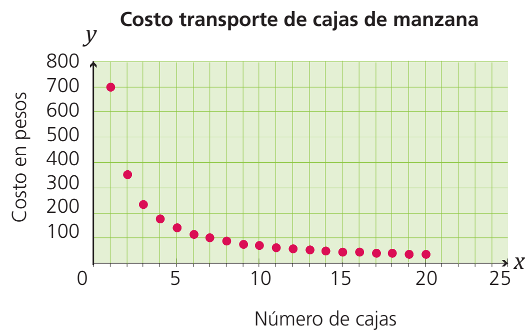
e) ¿Cuál es la expresión algebraica que corresponde a esa situación? ___________

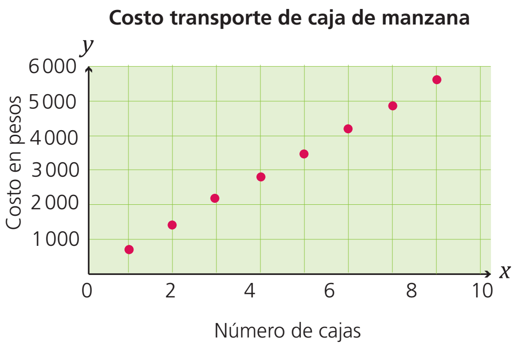
**2.** Otro transportista le cobra a Antonio \$700 por viaje y le ofrece una capacidad máxima de 60 cajas.

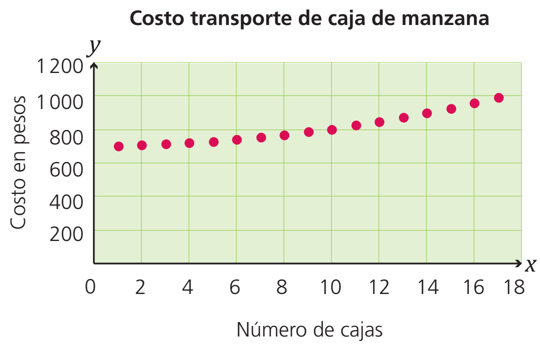
a) Antonio compara costos. Si transporta 5 cajas, ¿cuál será el costo por caja en la segunda opción? ___________ ¿Y por 10 cajas? ___________

b) ¿Cuál de las gráficas representa esta situación? Enciérrenla en un círculo.




c) Si Antonio compra regularmente 30 cajas de manzana a la semana, ¿cuál de los dos transportes le conviene contratar? ___________

Justifiquen su respuesta. ___________

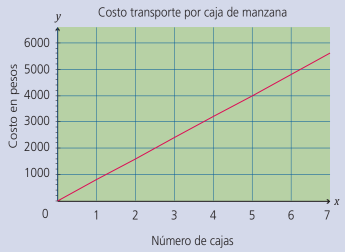
d) Comparen sus respuestas y resultados con otro equipo. Consideren el costo de la segunda opción y unan los puntos de la gráfica con una línea. Después contesten:

- ¿Es una línea recta? ___________
- ¿Qué le sucede a la gráfica conforme aumenta el número de cajas de manzana por transportar? Por ejemplo, si de 5 cajas pasa a 10, ¿cuál es el costo?

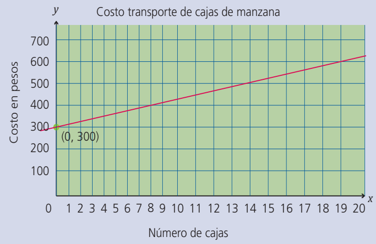
___________

3. Lean y analicen con su maestro la siguiente información.

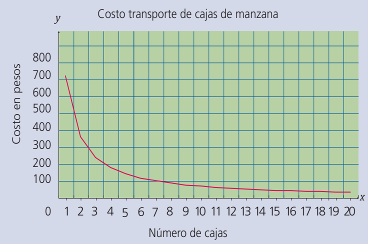
La gráfica de una relación de variación de proporcionalidad directa es una línea recta que siempre pasa por el origen.




La gráfica de una variación lineal también es una recta, pero no necesariamente pasa por el origen.




La gráfica de una variación que es inversamente proporcional es una curva que se llama **hipérbola**.




Al valor de la ordenada que interseca al eje *y* se le llama ordenada al origen.

4. Observen el recurso audiovisual *Diversos tipos de variación*. Pongan especial atención en las formas de variación que se muestran y en cuál es la diferencia entre ellas.

Sesión 3

## Para terminar

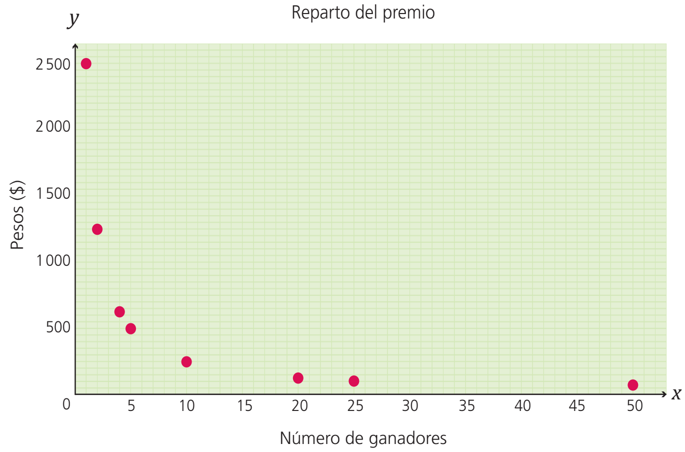
### Otras situaciones semejantes

1. En su cuaderno, tracen rectángulos con medidas de base y altura diferentes, pero que tengan como área 60 cm$^2$.
   a) Completen la tabla de la izquierda con las dimensiones de los rectángulos que trazaron.

| Familia de rectángulos de área 60 cm$^2$ | |
|---|---|
| Base ($x$) | Altura ($y$) |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |

   b) De acuerdo con las dimensiones registradas, ¿cuál es el valor máximo, en números naturales, que puede tener la base del rectángulo?
   En ese caso, ¿cuál es el valor de su altura? ____________________
   c) ¿Cuál es el valor máximo, en números naturales, que puede tener la altura del rectángulo? ____________ En ese caso, ¿cuál es el valor de su base? ____________
   d) Tracen en su cuaderno la gráfica con los valores obtenidos en la tabla y observen qué forma tiene.
   e) Analicen si es posible que la medida de la base sea 6.5 cm y por qué. Observen cuál sería la medida de la altura.
   f) Escriban si es posible que la medida de la base sea –6 cm y por qué.
   g) Anoten también la expresión algebraica que representa la manera en que varía la altura ($y$) cuando la base ($x$) varía.
   h) ¿Qué tipo de variación es? Justifiquen su respuesta.

2. Una lotería escolar tiene un premio de $2 500 y se repartirá en partes iguales entre el número de ganadores, como se observa en la gráfica. Contesten lo que se pide.




a) ¿Qué le sucede a la gráfica conforme aumenta el número de ganadores? ________

b) ¿Qué pasa con la cantidad a repartir cuando el número de ganadores aumenta al doble? ________________ ¿Y cuando el número de ganadores aumenta al triple? ________________ ¿Y al cuádruple? ________________

c) Unan los puntos de las gráficas con una línea, ¿es una línea recta? ________________

d) ¿Qué obtienen si se multiplica un valor del eje *x* con su correspondiente valor del eje *y*? ________________ Prueben con los diferentes valores de la abscisa y la ordenada de los puntos.

e) Escriban una expresión algebraica con la que determinen la cantidad de dinero que le toca a cualquier número de ganadores. ________________________________

3. Con apoyo de su maestro, revisen sus respuestas y, en caso necesario, corrijan. Comparen las gráficas y hagan en su cuaderno lo que se indica.

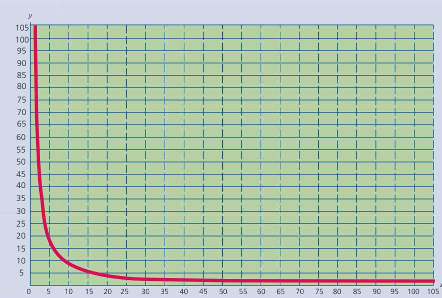
a) Describan en qué se parecen y en qué son diferentes.

b) ¿Qué valores obtienen si se dividen cualquier valor del eje *y*, entre su correspondiente eje *x*?

c) Observen en cada gráfica cuál es el valor de *y* cuando *x* vale cero. Posteriormente, lean y comenten la siguiente información.

La gráfica que corresponde a una variación inversa, cuando todos los valores involucrados son positivos, es una *hipérbola de una sola rama*.

La expresión algebraica que representa una situación de variación inversamente proporcional es $k = xy$, donde $k$ representa la constante de proporcionalidad, $x$ es diferente de 0 y también $y = \frac{k}{x}$

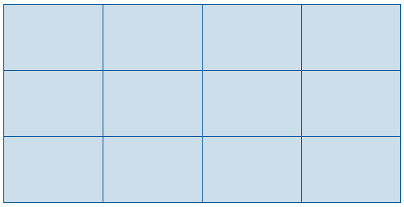


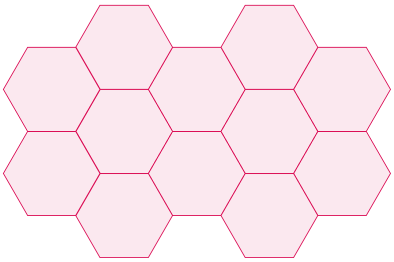
4. Resuelvan los problemas presentados en el recurso informático *Problemas de distintos tipos de variación*, que implican variación lineal, directa e inversa, para que continúen estudiando las características de los diferentes tipos de variación.

# 22. Polígonos 2

## Para empezar

Sesión 1



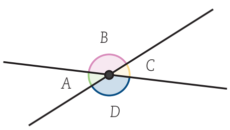


Desde la antigüedad se usan polígonos para recubrir pisos, hacer patrones en telas, tapetes o vitrales. Sin embargo, no todos los polígonos sirven para cubrir completamente las superficies; para lograr esto es necesario tomar en cuenta sus ángulos y algunas de sus propiedades.

En primer grado estudiaste algunos tipos de ángulos y las relaciones entre ellos; por ejemplo, los ángulos opuestos por el vértice y los ángulos adyacentes. En esta secuencia estudiarás algunas relaciones entre los ángulos de los polígonos.

**Glosario**

Los ángulos opuestos por el vértice son los que tienen el mismo vértice, y los lados de uno son prolongación de los lados del otro. Estos ángulos siempre tienen la misma medida. Los ángulos adyacentes tienen un lado común y la suma de ambos es 180°.



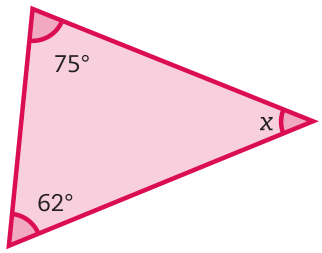

<A y <C
<B y <D } son opuestos por el vértice

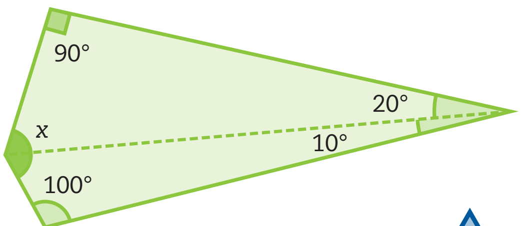
<B y <C
<A y <D } son adyacentes

### Suma de ángulos internos

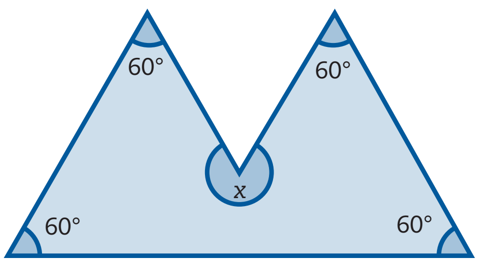
1. Determina cuánto mide el ángulo faltante en cada polígono sin usar el transportador.

$x =$ _______________



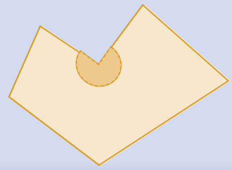

$x =$ _______________




$x =$ _______________

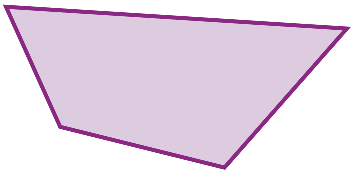
2. En grupo, comparen sus respuestas y describan en su cuaderno qué procedimiento utilizaron para encontrar la medida de los ángulos faltantes. Luego, lean la siguiente información.

Un *ángulo interno* de un polígono es el que se encuentra delimitado por dos lados consecutivos, es decir, por cada vértice del polígono hay un ángulo interno. Como su nombre lo indica, el ángulo se forma dentro del polígono.

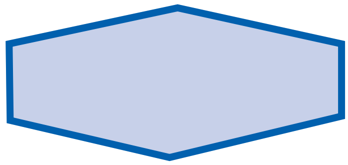


## Manos a la obra

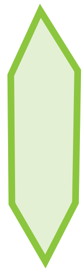
3. Mide los ángulos internos de los siguientes polígonos con tu transportador, anótalos sobre la figura y calcula su suma. Después, escribe el resultado en las líneas.



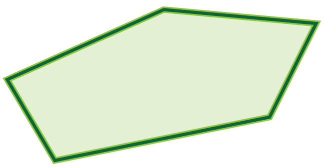
______________



______________

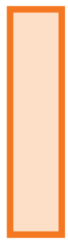


______________

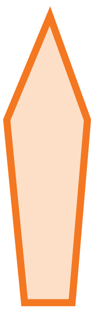


______________

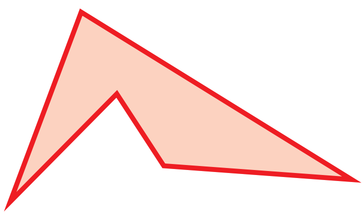
______________



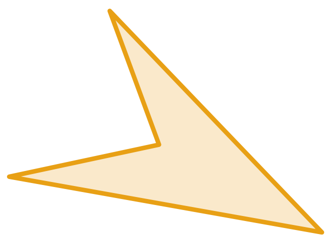
______________



______________

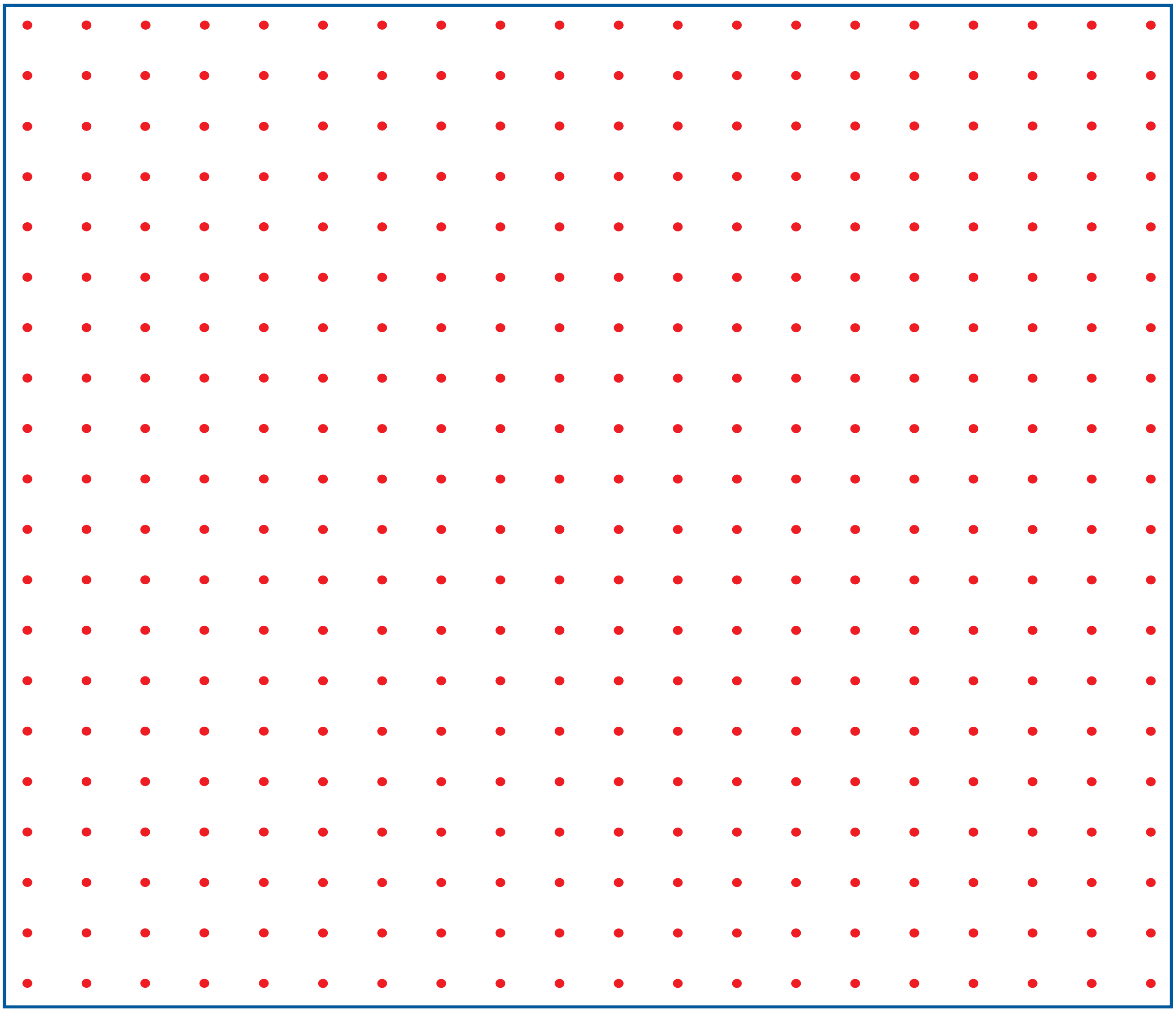


______________



______________

**4.** En la siguiente retícula traza diferentes polígonos regulares e irregulares de 4, 5, 6 y 7 lados. Luego mide los ángulos internos de cada uno y obtén su suma.



**5.** Marquen en parejas la opción correcta a partir de sus respuestas anteriores.

| Enunciado | Suma de los ángulos internos | | | |
|---|---|---|---|---|
| a) La suma de los ángulos internos de un polígono de cuatro lados es: | ☐ 180° | ☐ 270° | ☐ 360° | ☐ 450° |
| b) La suma de los ángulos internos de un polígono de cinco lados es: | ☐ 180° | ☐ 360° | ☐ 450° | ☐ 540° |
| c) La suma de los ángulos internos de un polígono de seis lados es: | ☐ 180° | ☐ 360° | ☐ 540° | ☐ 720° |
| d) La suma de los ángulos internos de un polígono de siete lados es: | ☐ 360° | ☐ 540° | ☐ 720° | ☐ 900° |

6. Comparen sus resultados con los de sus compañeros; si fueron diferentes, discutan en qué lo son y corrijan lo que sea necesario. En particular, observen qué sucedió con las respuestas que marcaron en la actividad 5. ¿Pudieron indicar cuál es la suma de los ángulos internos de un polígono de 7 lados?

7. A partir de los resultados de las actividades anteriores, lean en grupo la siguiente información.

La suma de los ángulos internos de un polígono cualquiera con $n$ lados es $(n - 2) \times 180°$

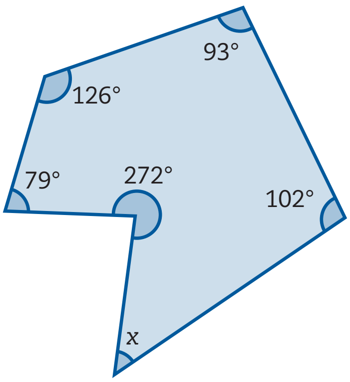
## Ángulos internos y externos de un polígono

Sesión 2

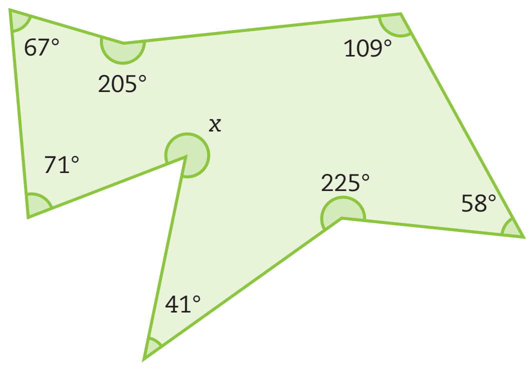
1. Calcula la suma de los ángulos internos de los siguientes polígonos utilizando la fórmula establecida en la sesión anterior.

| Número de lados del polígono $n$ | 8 | 11 | 24 | 2018 |
|---|---|---|---|---|
| Suma de ángulos internos | | | | |

2. Determina la medida del ángulo faltante en cada polígono sin usar transportador.




$x =$ ________________




$x =$ ________________

3. Encuentra el número de lados del polígono y completa la tabla según corresponda.

| Suma de los ángulos internos del polígono | 1080° | 17640° | 21060° |
|---|---|---|---|
| Número de lados del polígono | | | |

4. Comenta con un compañero cómo calcularían la medida de los ángulos internos de un polígono regular con *n* lados y justifiquen su procedimiento.

   a) ¿Cómo son entre sí los ángulos internos de un polígono regular? ______________

   ______________________________________________

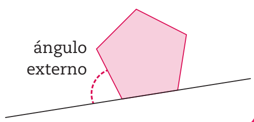
5. En equipo, lean la definición de **ángulo externo** y respondan tomando en cuenta la siguiente figura.

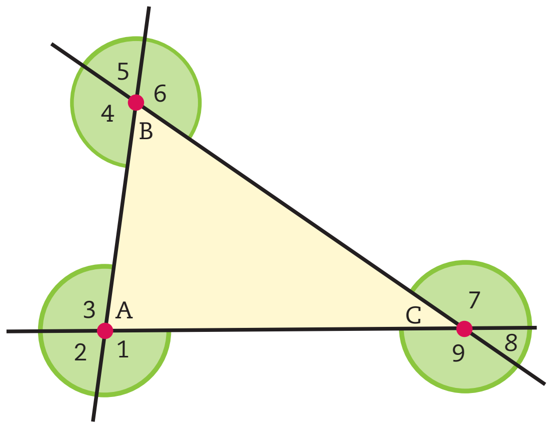
   a) De los ángulos marcados, ¿cuáles son ángulos externos del triángulo?

   ______________________________________________

**Glosario**

El ángulo externo de un polígono es el que se forma por uno de sus lados y la prolongación del lado adyacente. Cada ángulo externo es suplementario del ángulo interior que comparte el mismo vértice.




   b) ¿Cuántos ángulos externos del triángulo encontraron? ______________

   c) ¿Qué relación tienen los ángulos $\angle 4$ y $\angle 6$? ______________

   ¿Y los ángulos $\angle 7$ y $\angle 9$? ______________

6. Deduzcan cuánto suman las medidas de las siguientes parejas de ángulos adyacentes sin usar transportador. Después, lean la información.

a) $\angle ABC + \angle 4 =$ ______________ c) $\angle BCA + \angle 7 =$ ______________ e) $\angle CAB + \angle 1 =$ ______________

b) $\angle ABC + \angle 6 =$ ______________ d) $\angle BCA + \angle 9 =$ ______________ f) $\angle CAB + \angle 3 =$ ______________

La suma de las medidas de los ángulos interno y externo de un vértice de un polígono es 180°. Es decir, dado un vértice, el ángulo interno y cualquiera de los dos externos son suplementarios.

7. En pareja, hagan lo siguiente en su cuaderno.

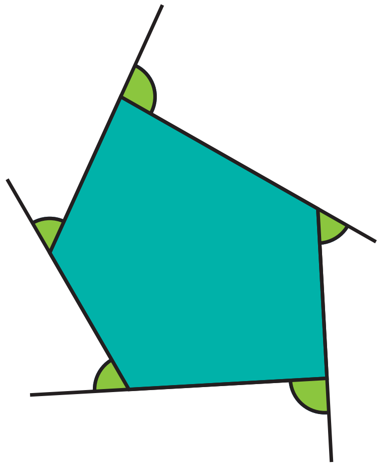
Paso 1. Dibujen un pentágono convexo e irregular en una hoja cuadriculada.

Paso 2. Tracen un ángulo externo por cada vértice, es decir, prolonguen los lados como en la figura de la derecha.

Paso 3. Marquen los ángulos externos como en la figura.

Paso 4. Recorten con tijeras cada uno de los ángulos que marcaron.

Paso 5. Háganlos coincidir en un punto sin que se traslapen.



8. Comenten sus resultados y respondan las siguientes preguntas.

a) ¿Qué observaron? ____________________

____________________

b) ¿Creen que pasará lo mismo si dibujan un pentágono diferente o si dibujan un polígono con un número de lados diferente? ____________________

c) ¿A qué conclusión llegan? ____________________

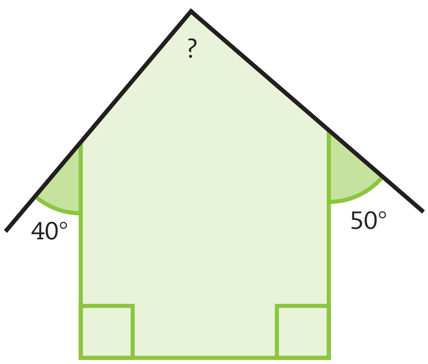
____________________

9. Con apoyo de su maestro, lean y analicen la siguiente información.

La suma de los ángulos externos de un polígono, uno por cada vértice, es de 360°. No importa cuál de los dos ángulos externos se tome por cada vértice porque miden lo mismo.

10. Observen el recurso audiovisual *Ángulos internos y externos de un polígono*. Después comenten cuáles son las características y propiedades de estos ángulos.

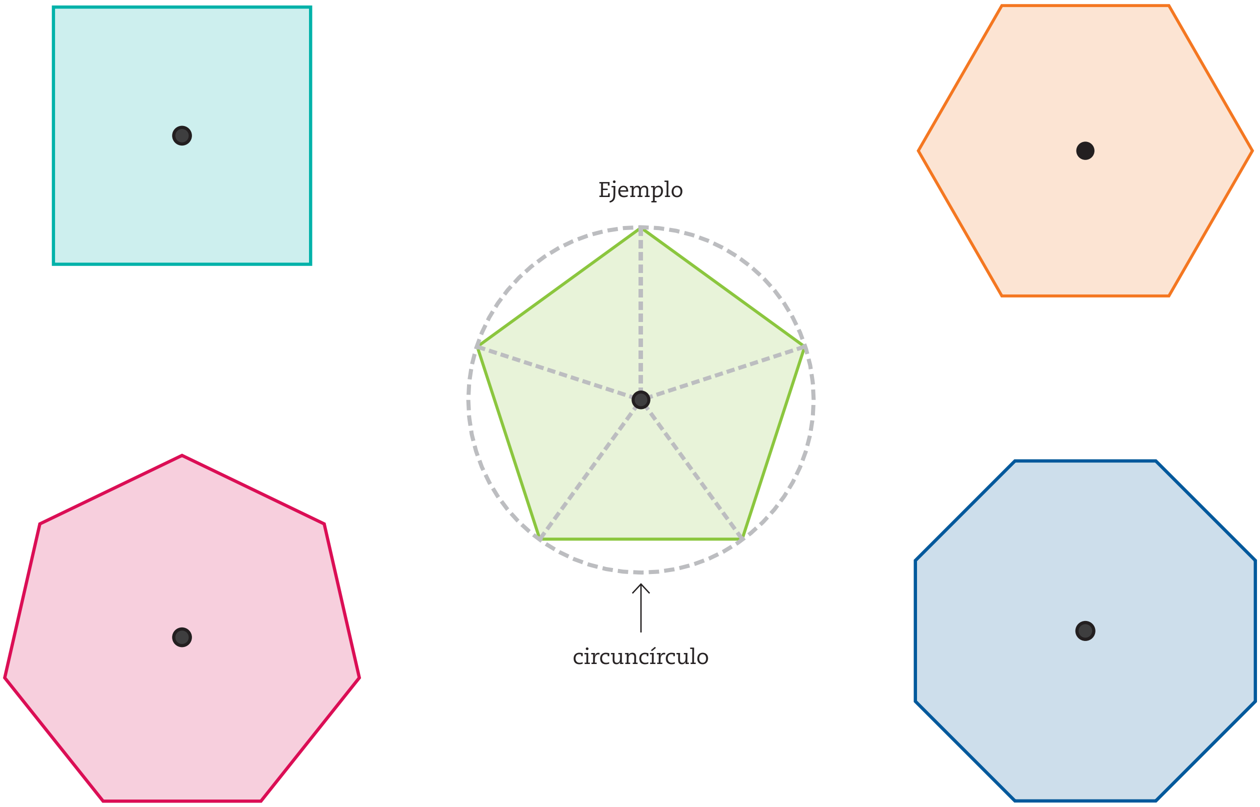
11. Calculen el ángulo faltante de la figura.



Sesión 3

## Ángulo central y relaciones entre los demás

1. Traza con el compás el circuncírculo de los siguientes polígonos regulares, es decir, el círculo que pasa por todos los vértices. Revisa el ejemplo. También traza los radios a cada vértice y contesta las preguntas.




a) Describe qué tipo de triángulos se forman en cada polígono y qué relación hay entre ellos. ______________________________

b) Compara tus respuestas con las de un compañero. ¿Son iguales? ______________
Si no lo son, comenten en qué son diferentes y argumenten sus respuestas.

2. En grupo y con ayuda de su maestro, lean la siguiente información.

Los polígonos regulares tienen una circunferencia circunscrita, es decir, una circunferencia que pasa por cada uno de sus vértices. El *ángulo central* del polígono regular se forma con los radios que unen el centro del polígono con dos vértices consecutivos.

**3.** Completen la tabla sin usar transportador y contesten las preguntas.

| Número de lados | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | *n* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Nombre del polígono regular | | | | | | |
| Medida del ángulo central | | | | | | |
| Medida del ángulo interno | | | | | | |
| Medida del ángulo externo | | | | | | |

a) ¿De qué manera pueden calcular la medida del ángulo central de cada polígono regular sin usar transportador? ____________________

____________________

b) ¿De qué manera pueden calcular la medida del ángulo interno de cada polígono?

____________________

____________________

c) Una vez que conocen la medida del ángulo interno, ¿cómo pueden calcular la medida del ángulo externo?

____________________

d) En cada polígono, ¿qué relación tienen las medidas del ángulo central y el externo?

____________________

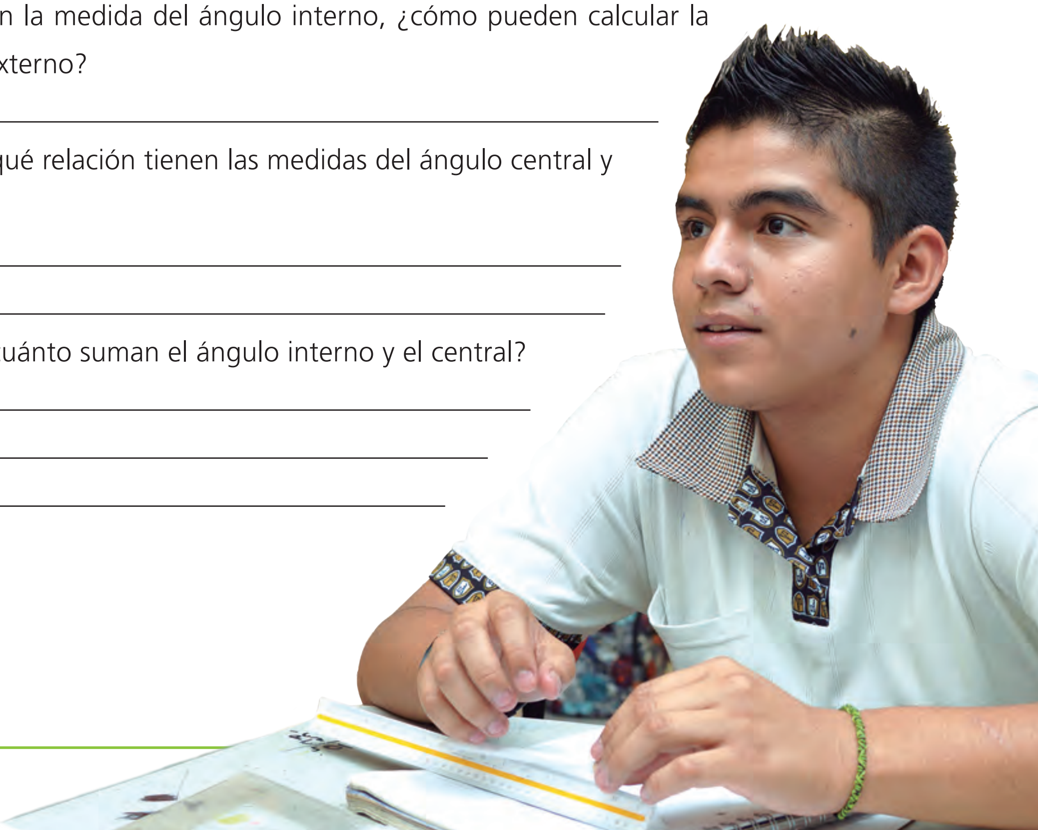
____________________

e) En cada polígono, ¿cuánto suman el ángulo interno y el central?

____________________

____________________

____________________



4. Con apoyo de su maestro, lean y comenten la siguiente información.

En un polígono regular con $n$ lados, la medida del ángulo central es: $\frac{360°}{n}$

En un polígono regular, las medidas de los ángulos central y externo coinciden. Y los ángulos central e interno son suplementarios, es decir, suman 180°.

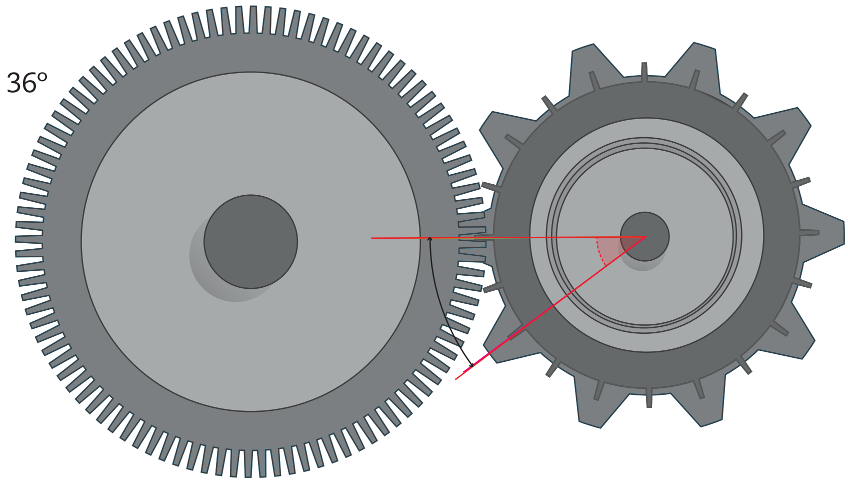
5. Observen el recurso audiovisual *Ángulos centrales de un polígono regular.* Presten atención a los elementos que lo forman y cómo calcular su medida.

Sesión 4

## Para terminar

### Problemas sobre ángulos de polígonos

1. Trabajen en pareja. Resuelvan las siguientes preguntas sobre engranes.




a) ¿Cuántos grados tiene que girar un engrane de 20 dientes para que cada diente se mueva una posición de su lugar? ______________________

b) Si el engrane tuviera 100 dientes, ¿cuántos grados tendría que girar? ________

c) Se tienen dos engranes como en la figura, uno de 100 dientes y otro de 20. Si el pequeño da una vuelta, ¿cuántos grados gira el grande? ______________

d) Y si el grande da una vuelta, ¿cuántos grados girará el pequeño? __________
¿Cuántas vueltas completas dará? ______________________

**2.** Respondan las siguientes preguntas sobre pistas de carreras.

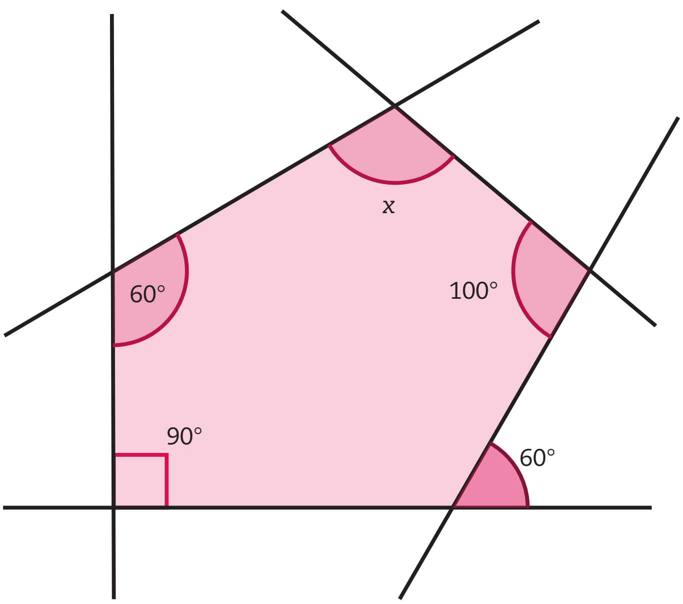
a) Observen la pista de carreras de automóviles con forma hexagonal. Midan los ángulos con transportador y contesten: ¿cuál es el mayor ángulo de giro que tendría que dar un automóvil que recorre la pista? ______________________________

b) ¿Es posible hacer una pista hexagonal diferente donde los giros sean, a lo más de 60°? ________________ ¿Por qué? ______________________________

______________________________________________________________

c) Se quiere diseñar una pista de carreras poligonal donde los automóviles giren en cada esquina hacia el mismo lado y en un ángulo no mayor a 20°, ¿cuál es el menor número de lados que puede tener la pista? ________________________

**3.** Calculen el ángulo faltante de la siguiente figura.



# 23. Conversión de medidas 2

Sesión 1

## Para empezar

La talla y el peso de los bebés pueden ser indicadores de su estado de salud. Por eso es importante que desde su nacimiento se realicen estas mediciones. La mayoría de los bebés que nacen entre las semanas 37 y 40 de gestación, y están sanos, pesan entre 2.6 y 4 kg. La alimentación que recibe el bebé también es importante para su desarrollo. Generalmente, los bebés que se alimentan con leche de fórmula consumen entre 3 y 4 onzas cada tres horas.

¿De cuántos gramos es la diferencia que hay entre el peso mínimo y el máximo que tiene un bebé sano al nacer? ¿Cuántos mililitros de leche toma un bebé recién nacido al día? En esta secuencia trabajarás con equivalencias entre unidades de peso del Sistema Internacional y del Sistema Inglés, así como con las unidades de capacidad, para contestar preguntas como las anteriores.

## Manos a la obra

### Peso y alimentación

1. Trabaja individualmente. Marca con una palomita (✓) la unidad de medida que consideres adecuada para cada caso. En tu cuaderno justifica tu elección.

a) El peso aproximado de un colibrí es de:

☐ 0.0120 toneladas ☐ 0.120 kilogramos ☐ 12 gramos ☐ 1 200 miligramos

b) El peso aproximado de un elefante es de:

☐ 5 toneladas ☐ 500 kilogramos ☐ 50 000 gramos ☐ 500 hectogramos

c) El peso aproximado del libro de Matemáticas 2 de Telesecundaria es de:

☐ 450 decigramos ☐ 0.450 kilogramos ☐ 450 gramos ☐ 4 500 miligramos

d) La **dosis** de un medicamento en cápsula es de:

☐ 20 decigramos ☐ 0.200 kilogramos ☐ 2 000 gramos ☐ 2 miligramos

**Glosario**
**Dosis:** cantidad de medicamento que se debe administrar para producir el efecto deseado.

2. En grupo y con ayuda de su maestro, comenten y argumenten sus respuestas.

3. Trabajen en pareja para resolver lo que se indica.

Monserrat tiene un bebé de cuatro meses de edad. En la siguiente tarjeta de salud se presenta el registro del peso mensual del bebé a partir de su nacimiento. Si en la revisión de agosto se observó que el peso aumentó 500 gramos respecto a julio, ¿cuál es su peso en ese momento? Completen la tabla.

| Fecha | Peso en kilogramos | Peso en gramos |
|---|---|---|
| 1/abr/2019 | | 3 120 |
| 2/may/2019 | 3.8 | |
| 1/jun/2019 | | 4 706 |
| 3/jul/2019 | 5.159 | |
| 2/ago/2019 | | |

a) ¿Cuánto aumentó de peso el bebé en su primer mes?

_______________

b) ¿En qué mes aumentó más de peso? _______________ ¿Cuánto aumentó? _______________

c) En la revisión hay otras dos bebés, una pesa 3.3 kg, y la otra, 3 kilogramos con 200 gramos. ¿Quién pesa más? _______________

**Dato interesante**

La *masa* es la cantidad de materia que contiene un cuerpo y no varía; la unidad básica para medirla es el **kilogramo**. El peso es la acción que ejerce la fuerza de gravedad sobre cualquier objeto.

Una persona no pesa lo mismo en la Tierra que en la Luna, pero su masa será la misma en ambos lugares. Sin embargo, comúnmente se habla del peso de los cuerpos, cuando lo correcto sería decir la *masa de los cuerpos*.

**4.** ¿Cuáles de estas igualdades son verdaderas? Márcalas con una palomita (✓).

☐ 1 g = 0.001 kg ☐ 1 g = 0.01 kg ☐ 1 g = $\frac{1}{100}$ kg ☐ 1 g = $\frac{1}{1000}$ kg

**5.** En grupo, revisen sus respuestas y, con apoyo de su maestro, analicen la siguiente información para determinar si es correcto lo que hicieron. Recuerden que el kilogramo es la unidad básica de masa en el Sistema Internacional de Unidades (SI) y su símbolo es **kg**.

| Tonelada métrica | Quintal métrico | Kilogramo | Hectogramo | Decagramo | Gramo | Decigramo | Centigramo | Miligramo |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T | Q | kg | hg | dag | g | dg | cg | mg |
| 1 000 kg | 100 kg | 1 000 g | 100 g | 10 g | 1 g | 0.1 g | 0.01 g | 0.001 g |

a) Completen la siguiente tabla:

| Kilogramos | 5 | 2.5 | | | 7.5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Miligramos | 5 000 000 | | 50 000 | 500 | |

b) Expresen en gramos cada una de las siguientes cantidades.

1.5 kg = _________ 1 450 cg = _________ $3\frac{1}{4}$ kg = _________ $\frac{20}{100}$ kg = _________

c) Expresen en su cuaderno, de manera general, cómo convierten una cantidad de una unidad menor a una mayor y viceversa.

Sesión 2

## Cuidados maternos

| Fecha | Peso (lb) | Peso (kg) |
|---|---|---|
| 04/01/2019 | 6.88 | 3.120 |
| 05/02/2019 | | |
| 06/01/2019 | | |
| 07/03/2019 | | 5.159 |
| | 12.48 | |
| | | |

1. Formen equipos para trabajar la siguiente actividad. Monserrat y su bebé van a vivir a Estados Unidos de América y en la primera revisión del bebé en ese país le solicitaron que llenara la tarjeta de salud que usan allá. Ayúdenla a completarla a partir de la tarjeta que ya tenía, considerando la información del recuadro.

| | |
|---|---|
| Unidad del Sistema Inglés | Libra |
| Símbolo | lb |
| Equivalencia con el Sistema Internacional | 1 lb = 453.6 g |

El médico sugirió a Montserrat que diera a su bebé diariamente 6 tomas de 4 oz de leche en polvo cada una.

a) ¿Cuánta leche de fórmula toma al día el bebé?

_______________________________

b) Los papás de Montserrat le enviaron de México 10 botes de leche como el que se observa en la imagen, ¿para cuántas tomas le alcanzará? _______________________________


| | |
|---|---|
| Unidad del Sistema Inglés | Onza |
| Símbolo | oz |
| Equivalencia | 1 oz = 0.0625 lb<br><br>1 lb = 16 oz |
| Equivalencia con el Sistema Internacional | 1 oz = 28.35 g |

2. Comparen sus respuestas con el resto del grupo y comenten sus estrategias de cálculo.

3. Anoten en su cuaderno, para cada cantidad, un objeto que pueda tener la medida que se indica en cada inciso.

a) 1 kg    c) 7.5 g    e) 1 lb    g) 110 lb

b) 50 mg    d) $\frac{1}{4}$ kg    f) 1 oz    h) 5 oz

4. Observen el recurso audiovisual *Unidades de masa (peso) en el Sistema Inglés*, para que conozcan más acerca de cómo surgen estas unidades de medida.

5. Trabaja individualmente. Marca con una palomita (✓) la unidad de medida que consideres adecuada en cada caso. Explica tu elección.

a) La cantidad de sangre promedio que tiene una mujer en el cuerpo.

☐ 42.5 litros    ☐ 42.5 decalitros    ☐ 42.5 mililitros    ☐ 42.5 decilitros

b) El agua que le cabe a un tinaco.

☐ 45 kilolitros    ☐ 45 hectolitros    ☐ 45 litros    ☐ 45 decilitros

c) La capacidad de una botella de agua.

☐ 0.1 decalitro ☐ 0.1 litro ☐ 0.1 hectolitro ☐ 0.1 decilitro

d) La cantidad de café que cabe en una taza.

☐ 250 decalitros ☐ 250 litros ☐ 250 hectolitros ☐ 250 mililitros

**Dato interesante**
La *onza* es una unidad inglesa que se usa tanto para capacidad (volumen) como para peso. Para diferenciarlas, la onza para medir líquidos se llama *onza fluida*; sin embargo, si el contexto permite establecer esa diferencia, se puede usar sólo la palabra "onza".

**6.** En grupo, y con apoyo de su maestro, comenten y argumenten sus respuestas.

**7.** Resuelvan en pareja las siguientes actividades.

a) En un vaso, ¿entrará más o menos de medio litro de agua? ____________
¿Y que 200 ml? ________ Justifiquen sus respuestas. ____________

b) Para hacer 4 pizzas se usa 1 litro de agua, ¿será cierto que para cada pizza se necesitan 250 mililitros de agua? ________ ¿Por qué? ____________

____________________________________________

c) Si en una botella hay un litro de agua, ¿cuántos goteros de 10 ml se podrían llenar? ____________ ¿Y de 1 decilitro? ____________

**8.** En grupo, revisen sus respuestas a las actividades anteriores y, con el apoyo de su maestro, analicen y utilicen la siguiente información.

El litro es la unidad básica de capacidad (volumen de un líquido) en el Sistema Internacional de Unidades (SI). Su símbolo es **l** o **L**, y de él se obtienen múltiplos o submúltiplos.

| Múltiplos | | | Base | Submúltiplos | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Kilolitro | Hectolitro | Decalitro | Litro | Decilitro | Centilitro | Mililitro |
| kl | hl | dal | L o l | dl | cl | ml |
| 1 000 l | 100 l | 10 l | 1 L | 0.1 l | 0.01 l | 0.001 l |

$\underbrace{\text{Kilolitro, Hectolitro, Decalitro}}_{\text{Mayores que el litro}}$ $\underbrace{\text{Decilitro, Centilitro, Mililitro}}_{\text{Menores que el litro}}$

a) ¿Cuáles de estas igualdades son verdaderas? Márquenlas con una palomita (✓).

☐ 1 ml = 0.001 litro ☐ 1 ml = 0.01 litro ☐ 1 ml = $\frac{1}{100}$ litro ☐ 1 ml = $\frac{1}{1000}$ litro

**9.** Completen las siguientes tablas:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Litro | 3 | 9 | | 0.50 | | $\frac{3}{4}$ |
| Mililitro | 3 000 | | 6 000 | | 1 500 | |

| Litro | 3 | 9 | | 1 500 | $\frac{3}{4}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Hectolitro | | | 6 000 | | | 0.75 |

10. Comparen sus respuestas con el resto del grupo y comenten sus estrategias de cálculo.

Sesión 3

## Para terminar

### Alimentación y material de construcción

| Unidad del Sistema Inglés | Onza |
|---|---|
| Símbolo | oz |
| Equivalencia | 1 fl oz = 0.0078125 gal |
| Equivalencia con el Sistema Internacional | 1 fl oz = 0.0295 L = 29.5 ml |

| Unidad del Sistema Inglés | Galón |
|---|---|
| Símbolo | gal |
| Equivalencia | 1 oz = 0.0625 lb<br>1 lb = 16 oz |
| Equivalencia con el Sistema Internacional | 1 galón = 3.7851 L |

1. Trabajen en pareja. En la preparación de la alimentación del bebé de Monserrat, cada onza de leche en polvo se disuelve en una onza de agua. Respondan en su cuaderno.
   a) Si el bebé toma 4 onzas de leche en cada biberón, ¿qué cantidad de agua en mililitros consume?
   b) Montserrat compra garrafones de 5 galones de agua. ¿Cuántas tomas de leche se pueden preparar con esa cantidad de agua?
   c) Montserrat tiene biberones de dos tamaños diferentes: uno de 5 fl oz y otro de 240 ml. ¿A cuál de los dos biberones le cabe más agua?

2. Completen las siguientes tablas:

| Litros | 24 | | $\frac{2}{3}$ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Galones | | 24 | | 0.5 | 100 |

| Onzas | 50 | | | $1\frac{1}{2}$ | 3.25 |
|---|---|---|---|---|---|
| Litros | | 5 | $\frac{3}{4}$ | | |

3. Comenten y argumenten sus respuestas con su maestro y sus compañeros. Luego, resuelvan la siguiente actividad.

   María es pediatra y sabe que, para un niño de 9 años, la dosis de un medicamento es de 15 ml al día por cada 10 kg de peso, que se debe repartir en tres tomas iguales.

   a) ¿Qué cantidad de jarabe le debe indicar en cada toma a Alonso, que tiene 9 años y pesa 42 kg? ______________

4. Anoten en su cuaderno un objeto que pueda tener la capacidad que se indica en cada inciso.

a) 10 litros c) $\frac{3}{4}$ litro e) 1.5 oz g) 10 oz

b) 500 mililitros d) 5 mililitros f) 2 gal h) $\frac{1}{2}$ gal

5. En grupo, y con apoyo de su maestro, comenten y argumenten sus respuestas.

6. Observen el recurso audiovisual *El volumen de los líquidos en el Sistema Inglés* para que conozcan más acerca de cómo surgen estas unidades de medida.

7. Trabaja individualmente.

a) Leonardo construye una casa y compró dos toneladas y media de varilla de $\frac{3}{8}$".

- Si cada tonelada tiene 150 varillas, ¿cuál es el peso de cada varilla? ______
- Para construir una habitación de 4 m × 4 m se requieren 82 piezas de varilla. ¿Para cuántas habitaciones de ese tamaño alcanzan las dos toneladas y media que compró? ______


b) Compró 35 bultos de cemento para construir el piso (echar el firme) de una habitación de 4 m × 5 m. Un ingeniero le dijo que calculara dos bultos por cada 1.5 m$^2$. ¿Cuánto cemento sobrará o faltará? ______


- ¿Puede transportar los 35 bultos de cemento en una camioneta de dos toneladas de carga? ______ ¿Por qué? ______
- En un balde entran 5 kg de cemento, ¿cuántos baldes de 500 g se pueden llenar? ______
- Compró dos galones de pintura para pintar una superficie de 72 m$^2$. Si el rendimiento de la pintura es de 9 m$^2$ por cada litro, ¿sobra o falta pintura? ______ ¿Cuánta? ______ ¿Para cuántos metros cuadrados alcanza la pintura que compró? ______
- Compró una cubeta de 5 gal de impermeabilizante para el techo de una habitación de 4 m × 5 m. Con dos pasadas, cada litro rinde un metro cuadrado. ¿Alcanza la cubeta para impermeabilizar la habitación? Justifica tu respuesta. ______
- Para dar un acabado texturizado en algunas paredes compró una cubeta como la que se observa en la imagen. Le dijeron que con un litro cubría 1 m$^2$. Si la superficie de las paredes que recubrirá es de 135 m$^2$, ¿cuántas cubetas de éstas necesita? Justifica tu respuesta. ______

8. Compara tus respuestas con otros equipos y comenten sus estrategias de solución.

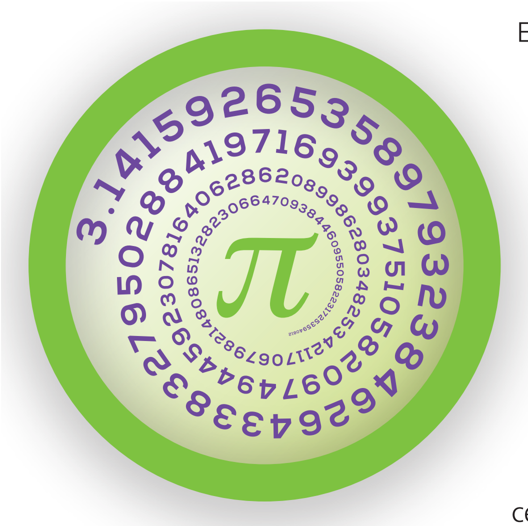
**Dato interesante**

En el Sistema Inglés de medidas existen algunas diferencias. Por ejemplo, el galón británico, llamado también *galón imperial*, es mayor que el galón estadounidense y equivale a 4.546 litros. El galón estadounidense se usa con mayor frecuencia en productos químicos, pinturas y solventes, incluso en productos de limpieza.

# 24. Área del círculo

Sesión 1

## Para empezar



En primaria estudiaste que para calcular el perímetro de un círculo se usa un número especial llamado *Pi*, cuyo símbolo es la letra griega $\pi$ y tiene un valor aproximado de 3.14. Este número indica cuántas veces cabe el diámetro de un círculo en su circunferencia; por eso, para calcular el perímetro del círculo se utiliza la fórmula: $P = \pi \cdot$ diámetro, o lo que es lo mismo, $P = 2 \cdot \pi \cdot$ radio.

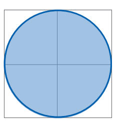
¿Por qué estas fórmulas son equivalentes? ¿Sabes cómo se calcula el área de un círculo? ¿Será necesario hacer uso siempre de $\pi$? En esta secuencia lo descubrirás.

## Manos a la obra

**Dato interesante**
Es imposible conocer el valor exacto de $\pi$. Para cuestiones prácticas se usa 3.14, pero en realidad la parte decimal es infinita y sin periodo, como lo puedes ver en la imagen de inicio.

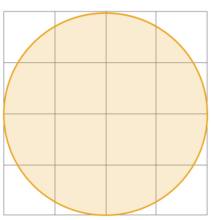
### Contando cuadritos

1. Trabajen en pareja. Completen los datos que se piden; consideren el lado de cada cuadrito como la unidad de longitud ($u$), por lo tanto, cada cuadrito mide 1 unidad cuadrada ($u^2$).



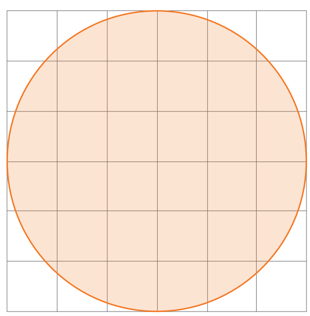
Radio del círculo = ______________

Área aproximada del círculo = ______________



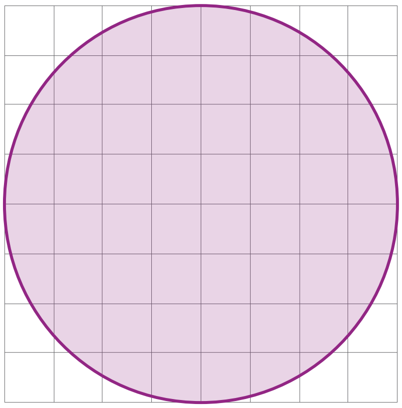
Radio del círculo = ______________

Área aproximada del círculo = ______________



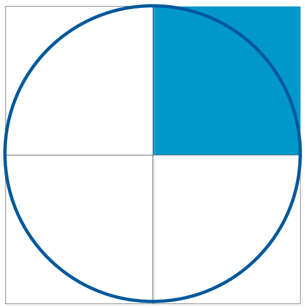
Radio del círculo = ______________

Área aproximada del círculo = ______________



Radio del círculo = ______________

Área aproximada del círculo = ______________



**2.** La parte azul de la siguiente figura corresponde al cuadrado que se forma sobre un radio del círculo. Analicen sus resultados de la actividad 1 y observen esta figura; con base en su análisis, subrayen la afirmación que completa el enunciado.

El área del círculo está entre:

- 2 y 3 veces el cuadrado del radio.
- 3 y 4 veces el cuadrado del radio.
- 4 y 5 veces el cuadrado del radio.

**3.** A partir de sus respuestas, marquen con una palomita (✓) la opción que consideren correcta según la medida del radio indicado. Pueden usar calculadora.

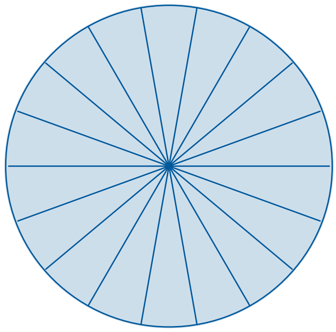
| Radio (cm) | El área del círculo ($cm^2$) está entre: | | | |
|---|---|---|---|---|
| 5 | ☐ 25 y 50 | ☐ 50 y 75 | ☐ 75 y 100 | ☐ 100 y 125 |
| 8 | ☐ 128 y 192 | ☐ 192 y 256 | ☐ 256 y 320 | ☐ 320 y 384 |
| 10 | ☐ 50 y 100 | ☐ 100 y 200 | ☐ 200 y 300 | ☐ 300 y 400 |
| 15 | ☐ 675 y 900 | ☐ 900 y 1125 | ☐ 1 125 y 1 350 | ☐ 1 350 y 1 575 |

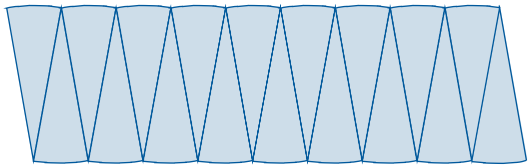
**4.** Comparen sus resultados con sus compañeros; si son diferentes, verifiquen por qué lo son y corrijan lo necesario. En particular, argumenten la respuesta que subrayaron en la actividad 2.

Sesión 2

## ¿Y cuál es la fórmula?

**1.** Trabajen en pareja. Tracen en una hoja una circunferencia de 6 cm de radio. Divídanla en 18 partes como se muestra en la figura de la izquierda. Recorten cada una de las partes y acomódenlas formando la figura de la derecha.





Observen que la figura formada se parece a un romboide. Calculen el área de esa figura considerándola un "romboide"; para ello respondan las siguientes preguntas.

a) ¿Cuál es la fórmula para calcular el área del romboide? ______________

b) Observen que la altura del "romboide" es aproximadamente igual al radio del círculo. ¿Cuánto mide? ______________

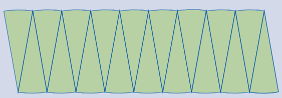
c) Observen que la base del "romboide" es la mitad del perímetro del círculo. ¿Cuánto mide la mitad del perímetro del círculo? ______________

d) ¿Cuál es el área del "romboide"? ______________

e) ¿Y la del círculo? ______________

**2.** Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Después, lean y comenten la siguiente información.

Si pudiéramos dividir un círculo en más partes y formar una figura como la siguiente:



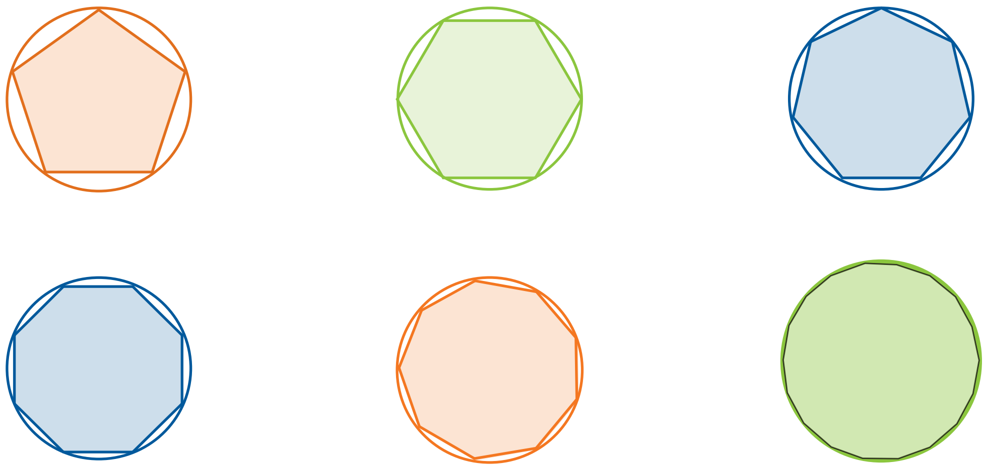
Observaríamos que cada vez se parece más a un romboide cuya área es:

$$A = \textit{base} \times \textit{altura}$$

Como la base del romboide es la mitad del perímetro del círculo, entonces: $\frac{P}{2} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{2} = \pi \cdot r$ y la altura del romboide corresponde al radio del círculo; por lo tanto, el área del círculo es:

$$A = \pi \cdot r \cdot r, \quad \text{o bien,} \quad A = \pi \cdot r^2$$

**3.** Analicemos otra manera de encontrar la fórmula para calcular el área del círculo. Reúnanse nuevamente en parejas y consideren los siguientes polígonos regulares.



Observen que entre más lados tiene un polígono regular, más se asemeja a un círculo.

a) ¿Cuál es la fórmula para calcular el área de un polígono regular? ______________

b) ¿Cómo se calcula el perímetro de un círculo? ______________

c) ¿A qué medida del círculo se aproxima la apotema del polígono regular entre más lados tenga? ______________

d) Si sustituyen sus respuestas de los incisos b) y c) en la fórmula para calcular el área de un polígono regular, ¿qué obtienen? ______________

**4.** En grupo, comenten sus respuestas y corrijan lo necesario. Luego, con ayuda de su maestro lean la siguiente información.

El área de un polígono regular se calcula con la fórmula: $A = \dfrac{\textit{Perímetro} \times \textit{apotema}}{2}$

Si consideramos el círculo como un polígono regular de un número infinito de lados, podemos aplicar esta fórmula al círculo. Con lo que obtenemos:

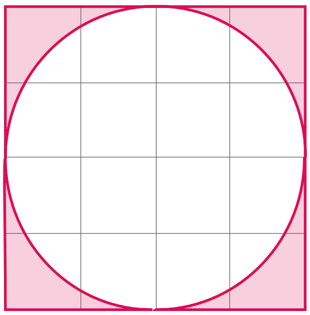
$$A = \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot r}{2} = \pi \cdot r \cdot r, \text{ o bien, } A = \pi \cdot r^2$$

**5.** Utilicen el recurso informático *Cálculo del área del círculo según Arquímedes*, donde analizarán algunas maneras de determinar la fórmula para calcular el área de un círculo. En: https://www.proyectodescartes.org/Telesecundaria/materiales_didacticos/1m_b04_t06_s01-JS/index.html

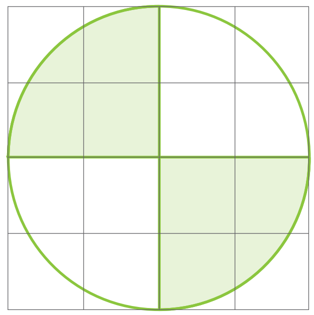
# Para terminar

## Las partes coloreadas

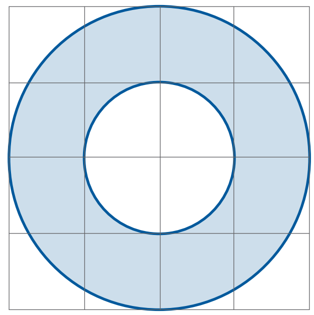
**1.** Calcula el área de cada parte coloreada. Considera un cuadrito como $u^2$.



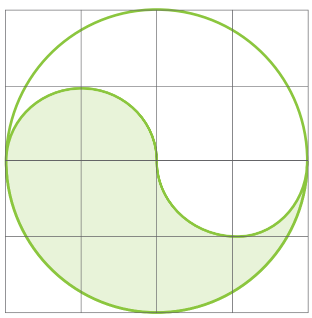
Área = ____________



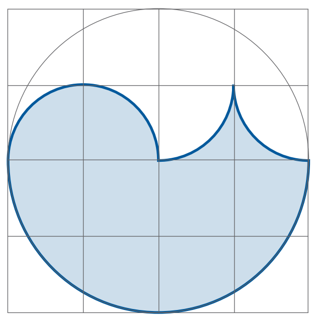
Área = ____________



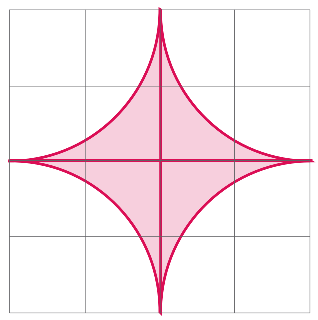
Área = ____________



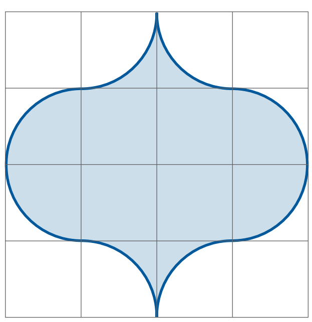
Área = ____________



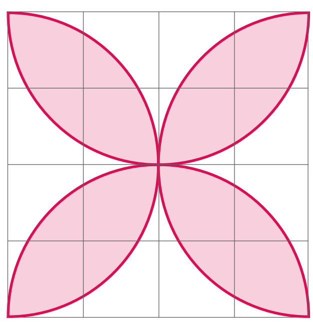
Área = ____________



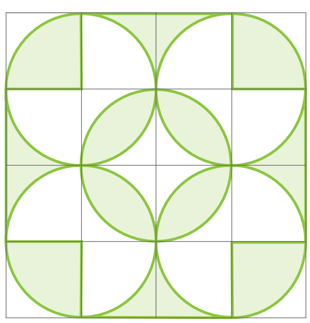
Área = ____________



Área = ____________



Área = ____________



Área = ____________

2. Resuelve los siguientes problemas.

a) ¿Cuál es el área de un círculo cuyo diámetro mide 10 m? ______________

b) El área de un círculo es 12.56 $cm^2$, ¿cuánto mide su radio? ______________

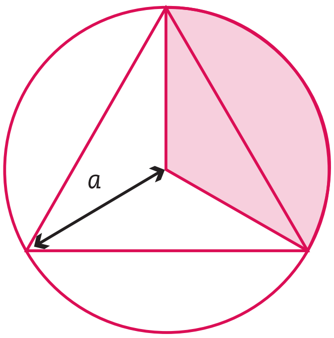
c) El perímetro de un círculo es 6.28 cm, ¿cuál es su área? ______________

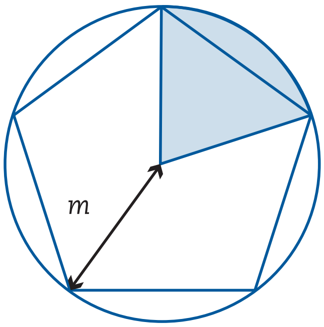
d) Una glorieta mide 10 m de radio y tiene en su centro una fuente circular de 3 m de radio.

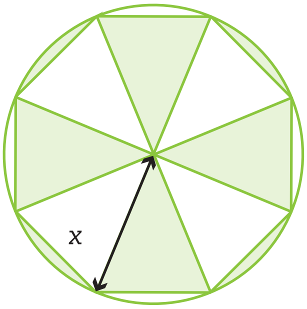
- La base de la fuente se va a cubrir con mosaico, ¿cuál es el mínimo de metros de mosaico que deben comprarse? ______________

- La parte de la glorieta que no queda cubierta con la fuente se va a cubrir con pasto en rollo, ¿cuántos metros cuadrados de pasto deben comprarse? ______________

e) Los polígonos de las siguientes imágenes son regulares. Anota la expresión que corresponde al área de la parte de color.




Área = ______________ Área = ______________ Área = ______________

3. Observen el recurso audiovisual *El área del círculo* y comenten los procedimientos para calcular el área del círculo que permiten resolver problemas relacionados con este tema.

# 25. Medidas de tendencia central y de dispersión 1

Sesión 1

## Para empezar


¿En alguna ocasión te ha tocado participar en un estudio, encuesta o conteo estadístico? Tal vez no lo has hecho, pero quizá los conoces o has utilizado sus resultados.

Por ejemplo, en la página electrónica del Instituto Nacional de Estadística y Geografía (Inegi) se puede consultar el portal *Cuéntame*, donde se encuentran los resultados de diversas encuestas, como la Encuesta Nacional de Vivienda (Envi), la Encuesta Nacional sobre el Uso del Tiempo (ENUT), la Encuesta Nacional de Ocupación y Empleo (ENOE) o la Encuesta de Cohesión Social para la Prevención de la Violencia y la Delincuencia (Ecopred), entre muchas otras.

En esta secuencia emplearás algunos de esos resultados para continuar estudiando las medidas de tendencia central y dispersión. Particularmente, aprenderás qué es la desviación media y cómo se obtiene.

### Grado de escolaridad

**Dato interesante**
Los grados de escolaridad nos permiten conocer el nivel de educación de una población determinada.

1. Lean en pareja la siguiente situación y respondan lo que se les pide.

Emma consulta el portal *Cuéntame* y encuentra esta información:

> *En México, los habitantes de 15 años y más tienen 9.1 grados de escolaridad en promedio, lo que significa un poco más de la secundaria concluida.*
>
> *Inegi, "Encuesta intercensal", 2015.*

Al leer esto, a Emma le surge el interés por averiguar en su comunidad:

- ¿Cuál es el grado de escolaridad más frecuente?
- ¿Cuál es el grado promedio de escolaridad (media aritmética)?
- ¿Cuál es el grado máximo y mínimo de escolaridad?

a) ¿De qué manera creen que Emma podría obtener información para dar respuesta a sus inquietudes? ___

___

**2.** Por su parte, Joel realizó una encuesta a las primeras 30 personas que encontró y que aceptaron responderla. Los resultados que registró son los siguientes:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 7 | 9 | 22 | 14 | 20 |
| 3 | 1 | 4 | 19 | 5 |
| 10 | 5 | 11 | 4 | 8 |
| 18 | 12 | 9 | 16 | 13 |
| 11 | 10 | 8 | 13 | 21 |
| 13 | 18 | 2 | 15 | 22 |

a) Con base en la información anterior, contesten.

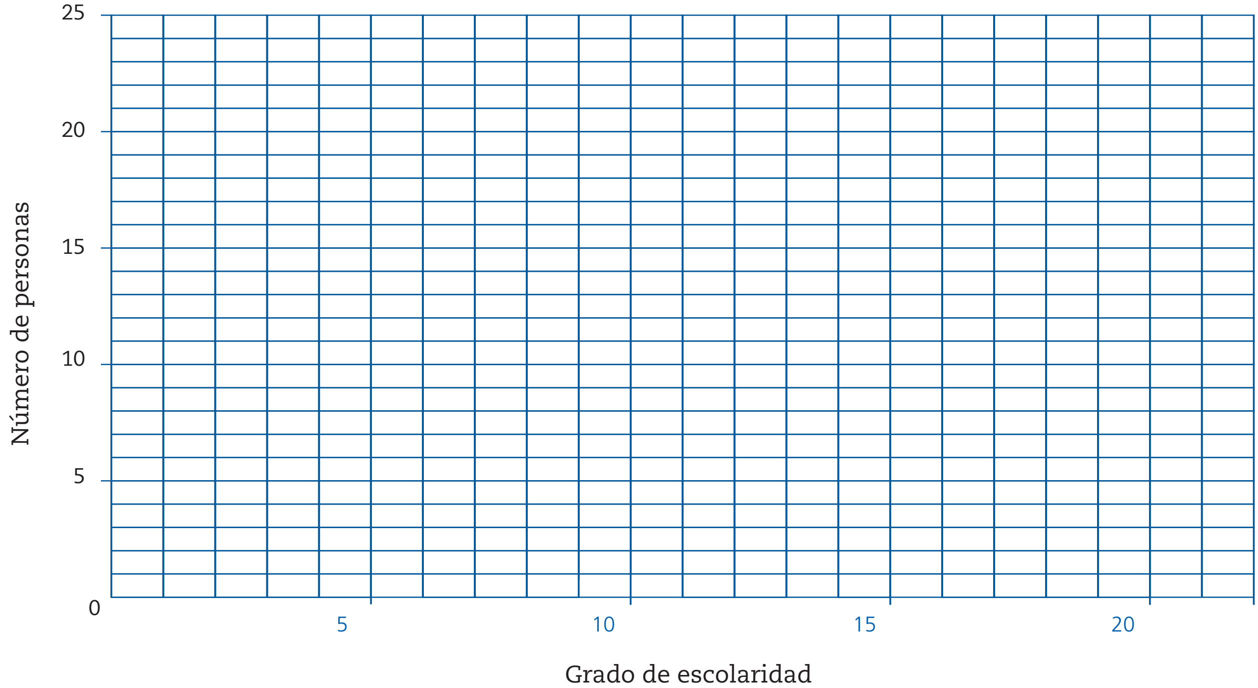
| | |
|---|---|
| ¿Cuál es el grado de escolaridad más frecuente (**Mo**)? | ¿Cuál es el grado de escolaridad promedio (media aritmética, **M**)? |
| ¿Cuáles son los grados de escolaridad máximo y mínimo (**Ls** y **Li**)? | ¿Cuál es el **rango** de los grados de escolaridad (**R**)? |

**3.** Manuel es una de las 30 personas que contestó la encuesta. Él tiene 18 grados de estudio y considera que el grado de escolaridad promedio nacional (9.1) no refleja su situación. ¿Qué tan alejado del promedio nacional se encuentra? ___

___

a) Analicemos qué tan alejados o cercanos al número de grados de escolaridad promedio de estudios están las personas que participaron en la encuesta de Joel a partir de la ubicación de cada uno de los datos en la siguiente gráfica.

**Grados de escolaridad de las 30 personas encuestadas por Joel**




b) En el eje horizontal, ubiquen el punto que corresponde al valor del grado de escolaridad promedio (**M**) del grupo. También ubiquen los valores del grado de escolaridad más frecuente (**Mo**) y el valor de la mediana (**Me**). ¿Cuál de estos tres valores está más al centro de los datos? ______________________

c) En la gráfica también ubiquen el grado de escolaridad promedio nacional (9.1) y comparen los datos y valores de sus medidas de tendencia central. Observen cómo están distribuidos todos estos datos, ¿consideran que el valor de 9.1 grados de escolaridad también es representativo para el caso de los 30 datos registrados? ____________ ¿Por qué? ______________________

______________________________________________

d) ¿Cuál es la diferencia entre el grado de escolaridad mínimo de las 30 personas (**Li**) y el promedio nacional? ____________ ¿Y cuál es la diferencia entre el grado máximo (**Ls**) y el del promedio nacional? ____________ ¿Qué tan alejado o cercano lo observan? ______________________

**4.** Comparen sus respuestas con el grupo. También consideren comparar los grados promedio de escolaridad nacional (9.1) y la media aritmética del conjunto de las 30 respuestas (**M**). ¿Cuál valor consideran que representa mejor el caso de Manuel y por qué? ______________________

______________________________________________

# Manos a la obra

## Comparando conjuntos

1. Trabajen en parejas. Analicen qué tan alejados o cercanos están los 30 datos registrados por Joel respecto a su media aritmética que representa los grados de escolaridad promedio del grupo de las personas que participaron en la encuesta.

Consideren el valor del grado de escolaridad promedio (media aritmética, **M**) y obtengan la diferencia que hay respecto a los grados de escolaridad de Manuel y de cada uno de los datos.

| Dato | Diferencia respecto a la media aritmética | | Dato | Diferencia respecto a la media aritmética | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 – (*media aritmética*) = | | 16 | | |
| 1 | | | 17 | | |
| 2 | | | 18 | 18 – (*media aritmética*) = | |
| 3 | | | 19 | | |
| 4 | | | 20 | | |
| 5 | | | 21 | | |
| 6 | | | 22 | | |
| 7 | | | 23 | | |
| 8 | | | 24 | | |
| 9 | | | 25 | | |
| 10 | | | 26 | | |
| 11 | | | 27 | | |
| 12 | | | 28 | | |
| 13 | | | 29 | | |
| 14 | | | 30 | | |
| 15 | | | | | |

a) El número de grados de escolaridad que tiene Manuel, ¿es menor o mayor que el valor promedio del grupo (**M**)? ______

b) Comparen la diferencia entre el valor 0 y el de los grados de escolaridad de Manuel, ¿qué signo tiene esa diferencia? ______
¿Cuál es mayor? ______

c) Sumen todas las diferencias, ¿cuál es el total? ____________________

El signo de la diferencia entre el dato y el valor de su media aritmética indica si el dato está antes o después de ese valor.

d) Completen la siguiente tabla con el valor absoluto de cada diferencia obtenida en la tabla anterior.

| Dato | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| \|dato – media aritmética\| | | | | | | | | | | | |
| Dato | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 |
| \|dato – media aritmética\| | | | | | | | | | | | |

e) Obtengan el promedio de las distancias. Pueden utilizar una calculadora. ____________________

**Dato interesante**

El valor absoluto de un número es la distancia de dicho número al cero. Se expresa así:
$|-5| = 5$, y se lee: "el valor absoluto de –5 es igual a 5".
$|5| = 5$ se lee: "el valor absoluto de 5 es igual a 5".

Dos números que tienen igual valor absoluto, pero distintos signos se llaman *opuestos* o *simétricos*.

Cada valor absoluto representa la distancia del valor de un dato a la media aritmética. Las distancias se consideran siempre positivas, por eso se obtiene el valor absoluto.

**2.** Comparen sus resultados con sus compañeros. Comenten cuál es la mayor distancia que hay entre un dato y su media aritmética. Después, lean y comenten la siguiente información con ayuda de su maestro.

Al promedio de los valores absolutos de las distancias entre cada dato (valor) con respecto a su media aritmética se le llama desviación media (DM) y representa una medida de la dispersión de los datos. Se expresa como:

$$DM = \frac{|d_1 - M| + |d_2 - M| + |d_3 - M| + \cdots + |d_n - M|}{n}$$

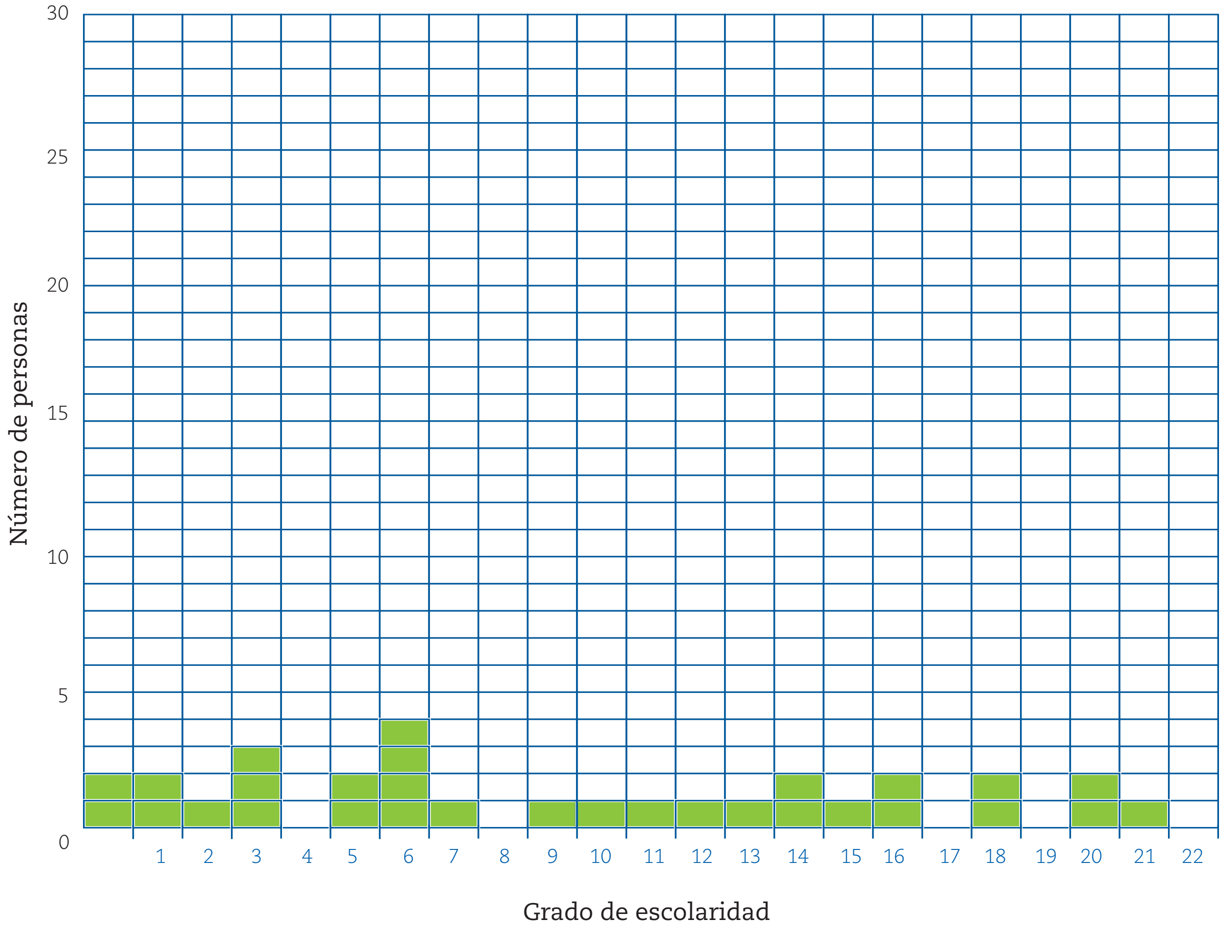
Donde M es el valor de la media aritmética del conjunto de datos, $n$ es el número total de datos y $d_1, d_2, \ldots, d_n$ son los valores de los datos.

Si el valor de la desviación media es muy alto implica mayor variabilidad entre los datos, mientras que un valor igual que 0 implica que todos los valores son iguales, no hay variabilidad y, por lo tanto, coinciden con el valor de la media aritmética.

a) Con base en la información anterior y en las actividades de la sesión 1, ¿entre qué datos hay mayor diferencia respecto a los grados de escolaridad promedio? ____________________

**3.** Emma también realiza una encuesta a 30 personas y los datos que obtiene son los siguientes:

**Grados de escolaridad de las 30 personas encuestadas por Emma**




a) En este caso, ¿cuál es el número de grados de escolaridad más frecuente?
____________________

b) ¿Cuál es el número de grados de escolaridad que corresponde a la mediana?
____________________ Represéntenlo en la gráfica.

c) ¿Cuál es el número de grados de escolaridad promedio (media aritmética)?
____________________ Represéntenlo en la gráfica.

d) ¿Cuál es el rango de los grados de escolaridad? ____________________

e) Completen la siguiente tabla.

| Dato | Valor absoluto de la diferencia respecto a la media aritmética | Dato | Valor absoluto de la diferencia respecto a la media aritmética |
|---|---|---|---|
| 0 | \|0 – *media aritmética*\| = | 16 | |
| 1 | | 17 | |
| 2 | | 18 | |
| 3 | | 19 | |
| 4 | | 20 | |
| 5 | | 21 | |
| 6 | | 22 | |
| 7 | | 23 | |
| 8 | | 24 | |
| 9 | \|9 – *media aritmética*\| = | 25 | |
| 10 | | 26 | |
| 11 | | 27 | |
| 12 | | 28 | |
| 13 | | 29 | |
| 14 | | 30 | |
| 15 | | | |

f) Calculen el promedio de las distancias de cada dato respecto a su media aritmética, es decir, la desviación media (**DM**). Pueden apoyarse de una calculadora.

g) De acuerdo con el valor de la desviación media, ¿este conjunto de datos tiene mayor o menor variabilidad? ______________________

**4.** En grupo, revisen sus resultados y respuestas. Con apoyo de su maestro, comparen la gráfica y los resultados de la sesión 1 con los de esta sesión. ¿En qué conjunto hay mayor dispersión entre los datos? Justifiquen su respuesta. ______________________

______________________________________________

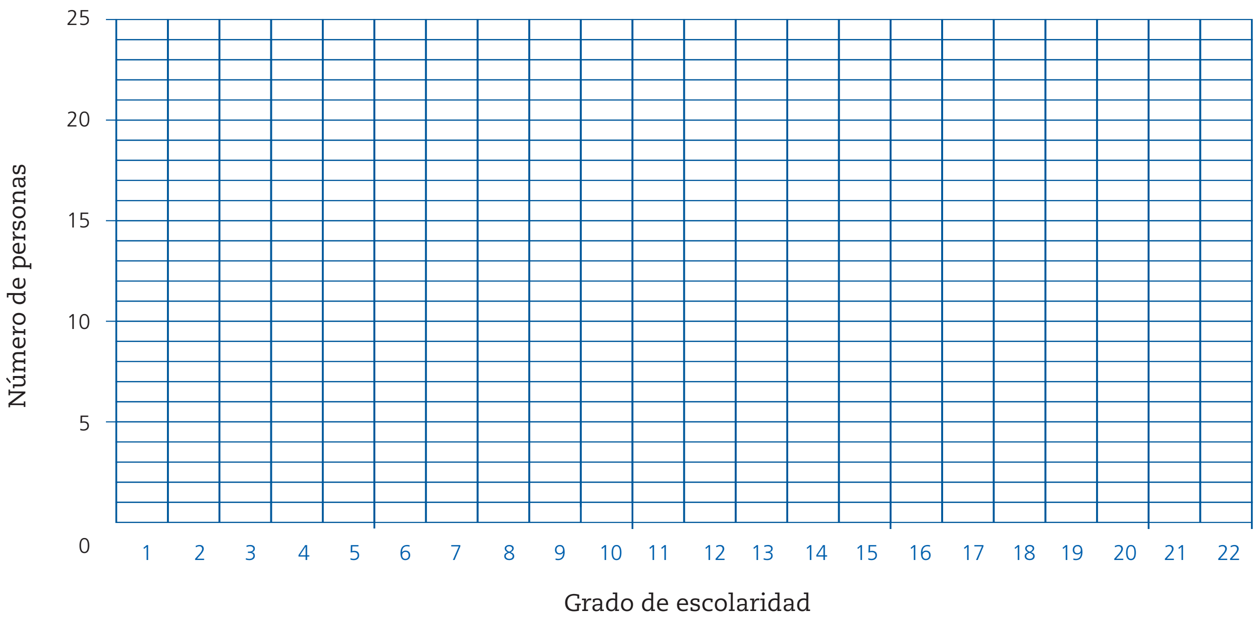
**5.** Observen el recurso audiovisual *Cómo obtener la desviación media de un conjunto de datos*. Posteriormente, comenten en grupo y con apoyo de su maestro el procedimiento que se sigue para calcularla.

# Para terminar

## La asistencia

**1.** Entrevisten a 30 personas de su localidad y pregunten su grado de escolaridad. Registren sus resultados en la siguiente gráfica.

**Grados de escolaridad de las 30 personas entrevistadas por** ______________________




a) Obtengan a continuación las medidas de tendencia central y de dispersión, y ubíquenlas en la gráfica.

| | | |
|---|---|---|
| Moda | Media aritmética | Mediana |
| Rango | Desviación media | |

b) Comparen sus resultados con los de la actividad 2 y los de la sesión anterior. Describan qué cambios y coincidencias observan.

c) Consideren los grados de escolaridad promedio nacional según el Inegi y describan en su cuaderno qué tan lejos o cerca de ese valor se encuentran los valores de los grados de escolaridad promedio de cada conjunto estudiado.

**2.** Durante una semana, la asistencia a dos talleres de artes fue la siguiente:

A: 0, 45, 49, 50, 51, 55, 100
B: 48, 48, 50, 50, 51, 51, 52

a) En el taller A, ¿cuál fue la asistencia promedio de la semana (media aritmética)?

______________________________

¿Cuál es el valor de la mediana de asistencia durante esa semana? ______________

b) En el taller B, ¿cuál es la asistencia media de la semana? ______________

¿Cuál es el valor de la mediana? ______________

c) ¿Qué tanto varió la asistencia en el taller A? ______________

¿Y en el B? ______________

d) Para reconocer la dispersión de los datos de estas dos muestras, ¿sería necesario calcular la desviación media o es suficiente con calcular el rango? ______________

¿Por qué? ______________

e) ¿Cuál es la desviación media? ______________

**3.** Las carreras anotadas por dos equipos de beisbol en la serie de cinco partidos han sido:

| Equipo | Carreras anotadas en cada partido | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 6 | 8 | 1 | 2 | 3 |
| B | 8 | 4 | 3 | 4 | 1 |

a) ¿Cuál es el rango del número de carreras anotadas por cada equipo? ______________

¿Y la media aritmética? ______________

b) En este caso, ¿sirve el rango para diferenciar entre sí los resultados de estos equipos? Justifiquen su respuesta. ______________

______________________________

c) Si ubican en una recta los cinco datos del equipo A, ¿a qué distancia de la media está cada uno? (Recuerda que la distancia se considera siempre positiva.)

______________________________________________

d) Registra en la tabla la distancia a la que se halla cada dato con respecto a la media.

| Número de carreras anotadas por partido | 6 | 8 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| Distancia con respecto a la media | | | | | |

e) ¿Cuál es el valor más cercano a la media aritmética? ______________

¿Y el más lejano? ______________

f) ¿Cuál es la media aritmética de esas distancias? ______________

**4.** Discutan, con argumentos, sus respuestas con otros compañeros. En caso de no coincidir, revisen sus procedimientos y cálculos para llegar a un acuerdo.

**5.** Calculen la desviación media de las carreras anotadas por el equipo B.

**6.** En grupo y con ayuda de su maestro, expongan y argumenten sus procedimientos y cálculos. Determinen cuál es el equipo más consistente y por qué. ______________

______________________________________________

**7.** Completen la siguiente conclusión sobre el tema de los grados de escolaridad en México y su comunidad.

*De acuerdo con los resultados obtenidos al realizar ______________ encuestas a grupos de 30 personas de ______________, el número de grados de escolaridad máximo es ______________ y el mínimo es ______________.*

*El número de grados de escolaridad promedio es ______________, y al compararlo con los grados de escolaridad promedio nacional se observa que es ______________; lo que implica que las personas están ______________ que la población del país.*

# 26. Histogramas y polígonos de frecuencia

Sesión 1

## Para empezar

¿Te has preguntado alguna vez cómo se produjeron las estadísticas o la información que nos proporcionan los medios de comunicación? Por ejemplo, sabemos que en México tres de cada diez mujeres se convierten en madres antes de cumplir 20 años; también que entre 40 y 60% de los embarazos entre las jóvenes no son deseados. ¿De dónde surgen estos datos? ¿Por qué podemos confiar en ellos?

La mayor parte de los datos se generan a partir de su levantamiento y registro por medio de encuestas, conteos o sondeos. Una vez que se han recolectado, es importante saber comunicarlos. Para ello es necesario conocer, estudiar y aplicar los diferentes conceptos, técnicas, procedimientos y recursos estadísticos que existen. En esta secuencia conocerás y utilizarás dos tipos de gráficas que permiten organizar y presentar datos agrupados en clases o intervalos.

## Manos a la obra

### Programa de televisión

1. Trabajen en pareja la siguiente actividad.

A 30 alumnos de segundo grado que vieron un programa de televisión se les aplicó una encuesta y una de las preguntas planteadas fue: "¿Qué calificación le asignas, entre 0 y 20 puntos, según tu grado de satisfacción, a los contenidos del programa?". La serie de 30 respuestas que dieron fue:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 14 | 13 | 3 | 13 | 9 | 17 | 13 | 3 | 17 |
| 8 | 0 | 9 | 13 | 8 | 8 | 20 | 14 | 10 | 2 |
| 20 | 13 | 9 | 10 | 16 | 2 | 12 | 1 | 2 | 20 |

a) ¿Cómo organizarían esta serie de respuestas? ____________________

b) Muestren en su cuaderno los datos organizados de acuerdo con el criterio que indicaron.

c) ¿Qué gráfica elegirían para representar los resultados de las respuestas y por qué? ____________________

Constrúyanla en su cuaderno.

d) ¿Cuál es el grado de satisfacción más frecuente acerca de los contenidos del programa por parte de los estudiantes? ____________________

¿Es posible identificar ese valor en la gráfica? ____________________

Si la respuesta es afirmativa, ubíquenlo.

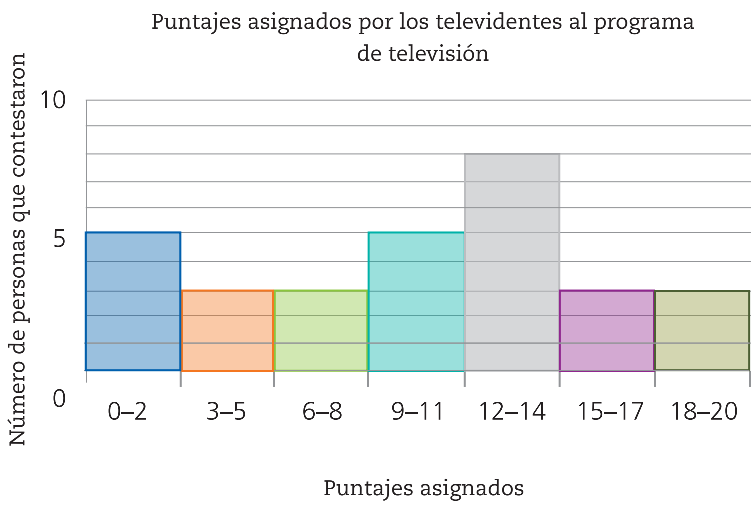
e) ¿Cuál es el promedio del grado de satisfacción (media aritmética)? ____________

De igual manera, si es posible, ubiquen ese valor y tracen una línea perpendicular al eje horizontal.

f) Si se toma como referente la ubicación de la media aritmética, ¿es posible decir que hay 50% de respuestas antes del valor de la media y otro 50% después? ____________ En caso negativo, señalen la proporción en que se distribuyen las respuestas a partir de la ubicación de la media aritmética. ____________

g) Ahora consideren cuál es el puntaje de las respuestas más frecuentes y señalen qué proporción representa del total de respuestas obtenidas. ____________

**2.** Observen la gráfica.



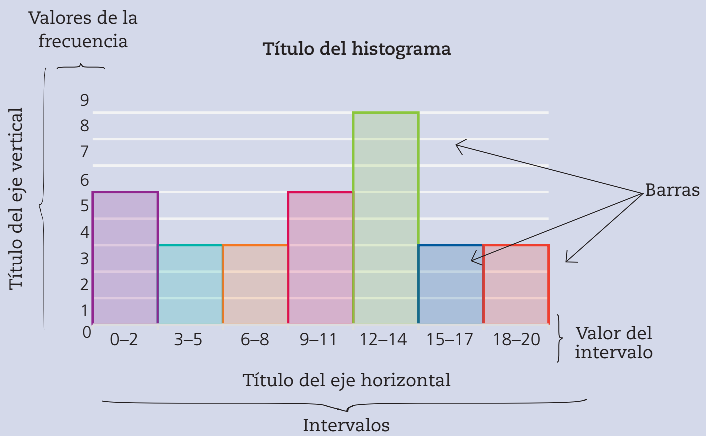

a) Describan en su cuaderno sus características: los valores de los ejes, el tipo de barras, los títulos de los rótulos de las series de datos representados, entre otros.

b) Comparen esta gráfica con la que construyeron y señalen en su cuaderno las diferencias.

c) En esta última gráfica, ubiquen los valores de la media aritmética y la moda. Luego describan en su cuaderno en qué porcentaje quedan distribuidas las respuestas de los estudiantes respecto de cada una de esas medidas.

**3.** En grupo, comparen sus respuestas. Consideren las características diferentes a las suyas que otros compañeros encontraron y la manera en que se presentan en el gráfico. Con ayuda de su maestro, lean la siguiente información, coméntenla y consideren las características que identificaron.

El histograma es una representación gráfica que se utiliza en estadística. Está formado por barras que se presentan juntas, es decir, sin espacio entre ellas. La base de cada barra corresponde a un intervalo y su altura representa la frecuencia de ese intervalo.




Sesión 2

## Los intervalos

**1.** Trabajen en pareja. La siguiente pregunta también pertenece a la encuesta aplicada a los estudiantes: "¿Cuánto tiempo pasaste frente al televisor viendo ese programa?". Las respuestas se han reagrupado en cinco intervalos. El intervalo 30-59 agrupa los tiempos iguales o mayores que 30 minutos y menores o iguales que 59 (esto se expresa como: $30 \leq t \leq 59$).

| Tiempo (min) | 0-29 | 30-59 | 60-89 | 90-119 | 120-149 |
|---|---|---|---|---|---|
| Frecuencia | 2 | 4 | 8 | 7 | 9 |

a) Representen en su cuaderno estos resultados con la gráfica que consideren más adecuada.

b) El punto medio del intervalo (30-59) es $(30 + 59) \div 2 = 44.5$, ¿cuál es el centro, o punto medio, de los demás intervalos? Completen la tabla.

| Tiempo (min) | 0-29 | 30-59 | 60-89 | 90-119 | 120-149 |
|---|---|---|---|---|---|
| Frecuencia | 2 | 4 | 8 | 7 | 9 |
| Punto medio del intervalo (tiempo en min) | | 44.5 | | | |

c) ¿Cuál es el tiempo más frecuente que pasaron viendo el programa? ________

Expliquen cómo lo determinaron. ________________________________

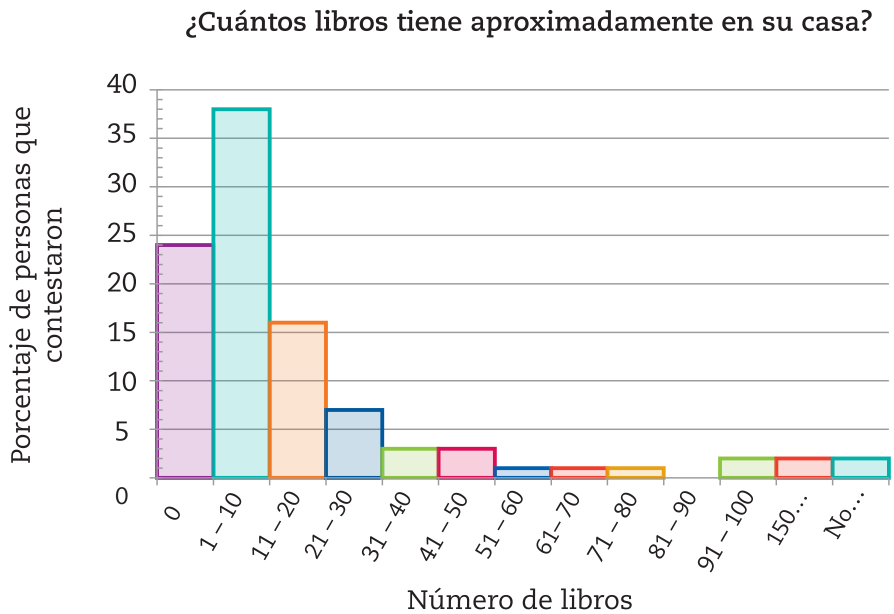
________________________________________

d) Elaboren en su cuaderno el histograma utilizando valores centrales de cada intervalo.

e) En grupo y con apoyo de su maestro, lean la siguiente información.

El tamaño de un intervalo es igual a la diferencia entre dos límites inferiores o superiores sucesivos. Por ejemplo, en el ***histograma*** el primer límite superior es 29, y el siguientes es 59; en consecuencia, el tamaño del intervalo es igual a 59 – 29 = 30.

**2.** La siguiente gráfica es un histograma. En ella se muestran los datos obtenidos al contestar una de las preguntas de la "Encuesta Nacional de Hábitos, Prácticas y Consumo Culturales" realizada por el Consejo Nacional para la Cultura y las Artes (Conaculta) en 2010.




Fuente: Conaculta, "Encuesta Nacional de Hábitos, Prácticas y Consumo Culturales", 2010.

**Dato interesante**
Cada intervalo del histograma tiene un límite inferior y uno superior.

a) ¿Cuál es la pregunta que contestaron las personas entrevistadas? ______________

______________________________

b) ¿Qué porcentaje contestó que tiene 10 libros o menos en su casa? ______________

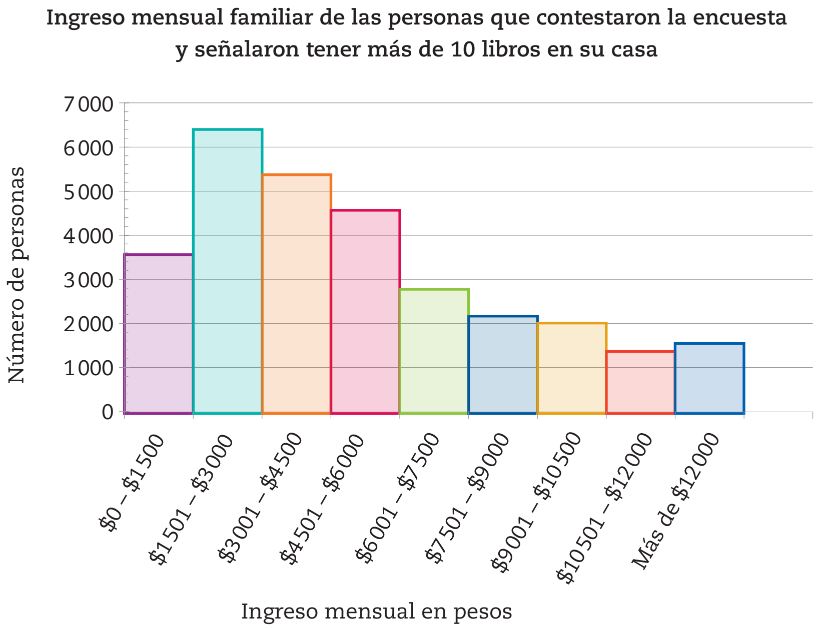
c) ¿Qué porcentaje contestó que tiene entre 51 y 100 libros? ______________

d) El número total de personas encuestadas es 30 403. ¿Cuántas personas contestaron que tienen 10 libros o menos en su casa? ______________

**3.** Comparen sus respuestas con las de otra pareja. Comenten cómo las determinaron. Si los procedimientos fueron diferentes, intercámbienlos y pruébenlos.

# Elaboración de más histogramas

**1.** Trabajen en equipo y analicen las siguientes gráficas que muestran otros resultados relacionados con la pregunta: "¿Cuántos libros tiene aproximadamente en su casa?".




a) ¿Qué información presenta la gráfica anterior? ____________________

______________________________

b) ¿Qué representa cada número del eje vertical de la gráfica? ____________________

______________________________

c) Observen cómo está rotulado el eje horizontal. ¿Qué representa cada valor, por ejemplo, $1 501-$3 000? ____________________

d) Utilicen los datos de la gráfica para completar la siguiente tabla.

| Ingreso mensual en pesos (intervalo) | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Número de personas (frecuencia) | | | | | | | | | | |

e) La primera barra corresponde al intervalo $0-$1 500. ¿Qué interpretación dan al $0 en este intervalo? ____________________

f) Supongan que unen dos barras continuas de la gráfica para formar una sola barra. ¿Cuál será el rótulo de la nueva barra? ____________________

¿Qué altura tendrá la nueva barra? ____________________

**2.** Completen la tabla de frecuencias y el histograma que corresponde a la edad de las personas que contestaron la encuesta.

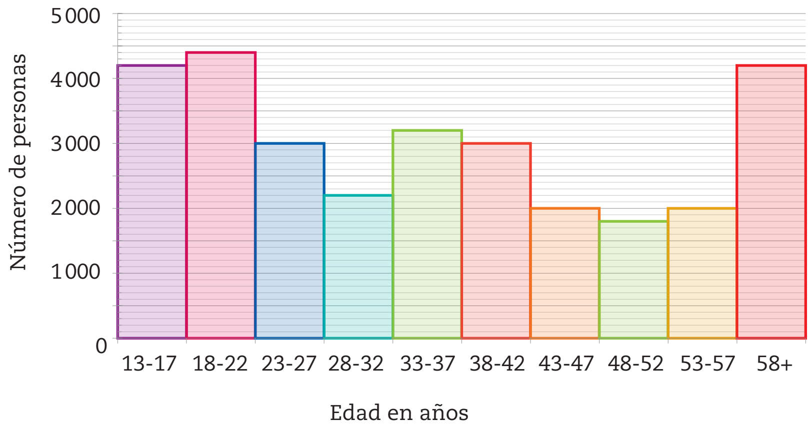
**Edad de las personas que señalaron tener más de 10 libros en casa**

| Edad en años (intervalo de edades) | 13-17 | 18-22 | | | 33-37 | 38-42 | | 48-52 | | 58 o más |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Número de personas (frecuencia) | 4 200 | | 3 000 | | 3 200 | 3 000 | 2 000 | 1 800 | | 4 200 |

a) Comparen y comenten la información que presentan la tabla y el histograma, a partir de los siguientes aspectos.

- ¿Qué representa la base de cada barra en el eje horizontal? ______________________
- En cada situación, ¿de qué tamaño son los intervalos? ______________________

**Edad de las personas que contestaron la encuesta y señalaron tener más de 10 libros en su casa**




- ¿Qué datos se presentan en el eje vertical y qué escala se utiliza? ______________________

______________________________________________

**3.** De acuerdo con la información que presentan la tabla y el histograma de la "Encuesta de Hábitos, Prácticas y Consumo Culturales", completen el siguiente párrafo:

*La "Encuesta Nacional de Hábitos, Prácticas y Consumo Culturales" realizada en agosto de 2010 fue contestada por ______________ personas en total. De ellas, 4 400 personas tenían entre ______________ años de edad y ______________ personas de 58 años o más. La edad de las personas más jóvenes que contestaron tener más de 10 libros en su casa es de ____________ años.*

**4.** Observen el recurso audiovisual *Histograma* y centren su atención en los aspectos relacionados con la construcción de este tipo de gráficas.

Sesión 4

## Gráficas poligonales de frecuencias

**1.** Trabajen en pareja. A partir de los siguientes datos, elaboren en su cuaderno una tabla de frecuencias y un histograma que los presente organizados en 5 o 6 intervalos, según consideren conveniente. Después, respondan las preguntas en su cuaderno.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 80 | 68 | 102 | 95 | 124 | 95 | 121 | 81 | 80 | 106 |
| 76 | 92 | 68 | 119 | 84 | 113 | 72 | 65 | 97 | 107 |
| 115 | 73 | 100 | 82 | 98 | 100 | 85 | 94 | 105 | 119 |
| 67 | 87 | 93 | 120 | 104 | 82 | 115 | 111 | 74 | 82 |
| 96 | 102 | 77 | 66 | 75 | 92 | 100 | 68 | 124 | 93 |

a) ¿Cuál es el dato con mayor valor? ¿Cuál es el de menor valor? ¿Cuál es la diferencia entre el dato mayor y el menor?

A la diferencia entre el dato mayor y el dato menor se le llama rango. Una manera de determinar el tamaño de cada intervalo es dividir el rango entre el número de intervalos.

b) Si se quisieran formar 6 intervalos, ¿de qué tamaño debería ser cada intervalo?

c) Determinen el valor mínimo y el máximo de cada intervalo de su tabla e histograma.

**2.** Comparen su tabla e histograma con los de otros compañeros y respondan:

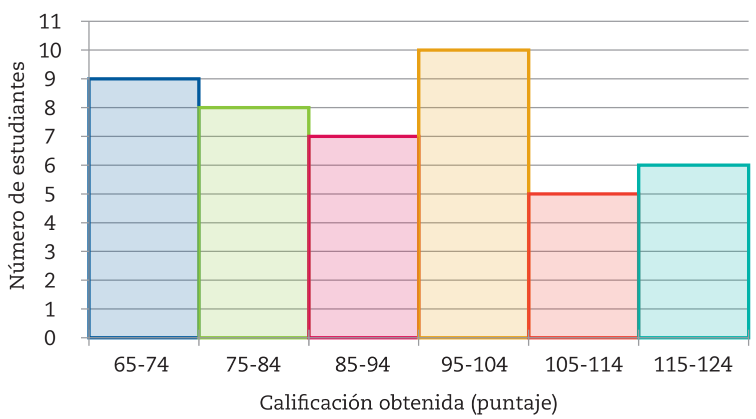
a) ¿Utilizaron los mismos intervalos? ¿Son todos del mismo tamaño?

b) Una pareja propuso los siguientes intervalos:

61-70, 71-80, 81-90, 91-100, 101-110, 111-120

- ¿Son adecuados estos intervalos para considerar los datos? ¿Por qué?

**3.** Un par de estudiantes elaboró el siguiente histograma. Analícenlo y respondan en su cuaderno.




a) ¿Cuántos intervalos tiene el histograma? ¿Son del mismo tamaño? ¿Cuál es el tamaño de cada intervalo?

b) En el intervalo 65 a 74 puntos hay 9 estudiantes que obtuvieron esos puntajes. ¿Podrían decir cuántos estudiantes obtuvieron exactamente 70 puntos? ¿Y cuántos obtuvieron 71 puntos? ¿Por qué?

En un histograma por intervalos se pierde la frecuencia de los datos individuales. Además, no es posible realizar operaciones aritméticas con intervalos. En su lugar, se obtiene el punto medio del intervalo, llamado también marca de clase, para representarlo y operar.

El punto medio de un intervalo se calcula de la siguiente manera:

$$\text{Marca de clase} = \frac{\textit{Límite superior} + \textit{Límite inferior}}{2}$$

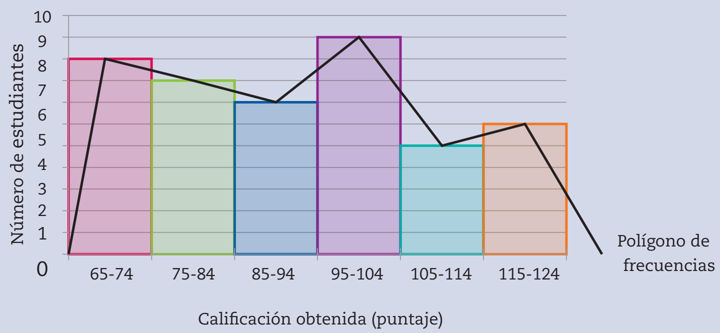
$$\text{Por ejemplo: } \frac{74+65}{2} = \frac{139}{2} = 69.5$$

c) Señalen con un punto en el eje horizontal del histograma que elaboraron los valores del punto medio de cada intervalo. Tracen, a partir del primer punto medio, un segmento perpendicular al eje horizontal que interseque el techo de la barra que corresponde con la frecuencia del intervalo. ¿Cómo queda dividida cada barra? ______

d) Hagan lo mismo en cada barra para ubicar los puntos medios sobre los techos de las barras. Unan los puntos obtenidos en el techo de cada barra con segmentos de recta. Al terminar de unirlos, habrán construido un polígono de frecuencias. Comparen su trabajo con el de sus compañeros. Luego, lean y comenten en grupo la siguiente información:

La gráfica poligonal de frecuencias de datos agrupados en intervalos del mismo tamaño se obtiene al unir, mediante segmentos de recta, los puntos medios consecutivos de los techos de las barras del histograma correspondiente.

Por ejemplo:




**4.** Tracen los polígonos de frecuencias de las gráficas que elaboraron anteriormente. Para ello deberán determinar el punto medio de cada intervalo. Anótenlo en las tablas correspondientes.

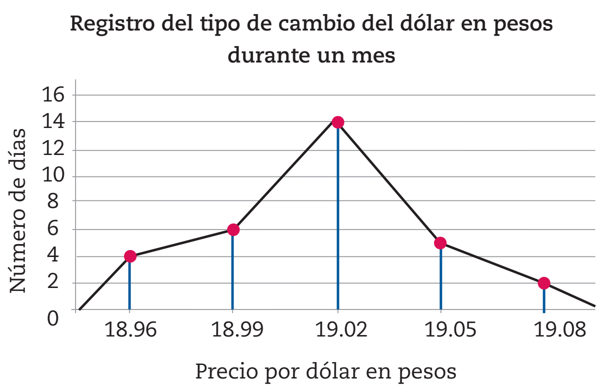
**5.** Observen el recurso audiovisual *Polígonos de frecuencia* para revisar los aspectos relacionados con la construcción de este tipo de gráficas.

# Para terminar

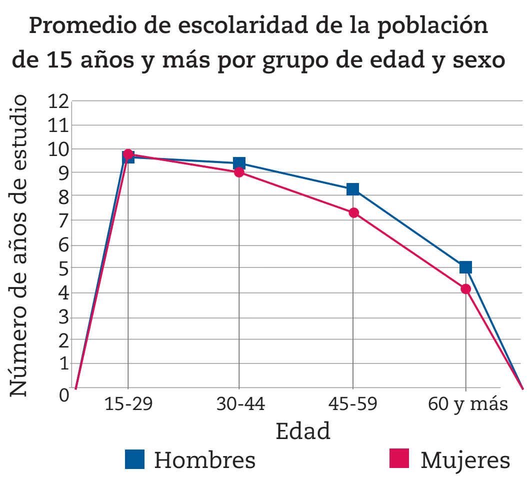
## Interpretación de gráficas estadísticas

1. Considera el polígono de frecuencias para completar la tabla de distribución de frecuencias.

| Número de intervalo | Intervalo | Punto medio del intervalo | Frecuencia absoluta |
|---|---|---|---|
| 1 | 18.95-18.97 | 18.96 | |
| 2 | 18.98-19.00 | | 6 |
| 3 | | 19.02 | 14 |
| 4 | | | 5 |
| 5 | | 19.08 | 2 |



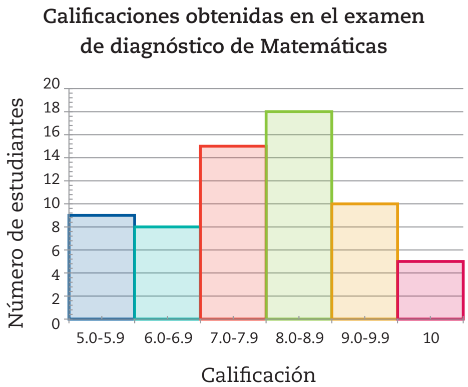
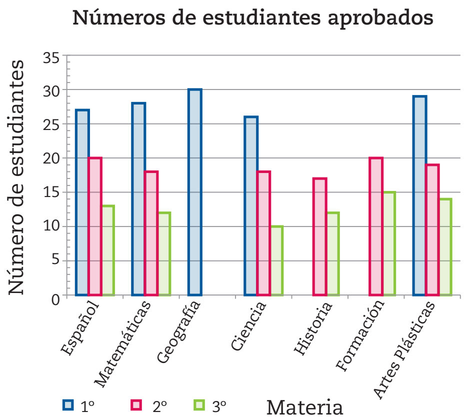
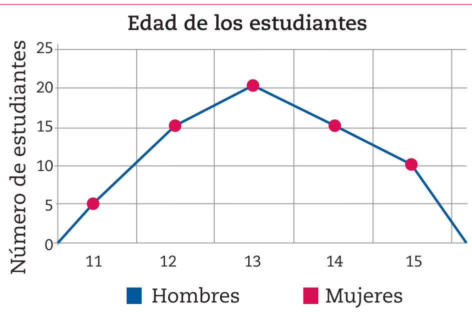

2. A partir de los polígonos de frecuencia, contesta en tu cuaderno las preguntas.
   a) ¿Qué información presenta cada polígono de frecuencia?
   b) Describe qué ocurre con el grado de estudios de las mujeres respecto al intervalo de edad y qué ocurre en el caso de los hombres.
   c) Describe también qué ocurre entre hombres y mujeres cuando el grado de estudios de cada grupo es igual o muy cercano, cuando es mayor y cuando se invierte.
   d) Al terminar, intercambia y compara tus respuestas con las de otros compañeros. Luego, lean la siguiente información.




La gráfica poligonal de frecuencias permite comparar el comportamiento de dos o más conjuntos de datos que se refieren a la misma situación.

3. A partir de la gráfica de la actividad anterior, contesta las preguntas.
   a) ¿En qué intervalo de edad las mujeres presentan mayor grado de estudios que los hombres? ______________________
   b) ¿En qué intervalo de edad es mayor la diferencia entre el grado de estudios de los hombres respecto al de las mujeres? ______________________

4. Las siguientes gráficas muestran algunas de las características de los estudiantes de una telesecundaria. Relaciona cada gráfica con la o las afirmaciones que consideres que describen la información que muestra.

<table>
<tr><th>Gráfica</th><th>Afirmación</th></tr>
<tr><td>A<br>
</td><td>(  ) La edad de los estudiantes está entre 11 y 15 años.<br><br>(  ) Hay 18 estudiantes de segundo grado aprobados en Matemáticas.</td></tr>
<tr><td>B<br>
</td><td>(  ) Aproximadamente 50% de los estudiantes están inscritos en primer grado.</td></tr>
<tr><td>C<br>
</td><td>(  ) En la telesecundaria, 31% de los estudiantes son de segundo grado.<br><br>(  ) En la materia de Ciencias hubo alumnos aprobados de los tres grados.</td></tr>
</table>

5. Compara tus respuestas con las de otros compañeros. Comenta qué tipo de datos se presentan en un histograma y en un polígono de frecuencias. ¿En qué se parecen y en qué son diferentes las gráficas? Anota las conclusiones en tu cuaderno.

6. Utilicen el recurso informático *Polígonos de frecuencia* para analizar otras situaciones en las que sea posible organizar y presentar los datos en polígonos de frecuencia. En: https://www.proyectodescartes.org/Telesecundaria/materiales_didacticos/2m_b01_t10_s01_descartes-JS/index.html

# Evaluación

Es tiempo de revisar lo que has aprendido después de trabajar en este bloque. Resuelve los siguientes problemas.

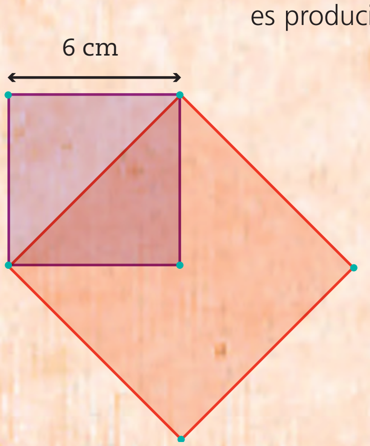
1. Encuentra dos números cuya suma es –12 y su cociente es –5: ______________

2. Escribe una división cuyo cociente sea $-\frac{3}{4}$: ______________

3. Escribe una multiplicación de dos factores cuyo producto sea –4.5: ______________

4. Un camión transporta 50 huacales. En cada huacal van 50 pollos y cada pollo se venderá en 50 pesos. ¿Cuánto dinero se obtendrá de la venta de los pollos? ______ Si cada huacal pesa en promedio 125 kg, ¿cuántas libras pesa en promedio un pollo?
______________

5. En México se producen diariamente $1.9 \times 10^5$ barriles de petróleo crudo. La meta es producir $2.5 \times 10^5$ barriles por día. ¿Cuántos barriles faltan para lograr la meta?
______________




6. ¿Cuánto mide un lado del cuadrado anaranjado de la izquierda? ______

7. En una escuela primaria, las utilidades de la cooperativa escolar en un ciclo escolar fueron de \$2 438. Este dinero se repartirá proporcionalmente entre los seis grupos de la escuela. Los grupos de primero y segundo tienen 20 alumnos cada uno; el grupo de tercero tiene 18; y cuarto, quinto y sexto tienen 16 alumnos cada uno. Completa la siguiente tabla anotando lo que corresponde a cada grupo.

| Primero | Segundo | Tercero | Cuarto | Quinto | Sexto |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |

8. Para tejer un mantel de cierta puntada, la maestra indica que deben comprar una madeja de estambre por cada metro cuadrado que mida el mantel. Clara quiere hacer un mantel circular de 1.5 m de diámetro, ¿cuántas madejas de estambre debe comprar? ______________

9. A continuación se muestra el número de aciertos obtenidos en el examen de Matemáticas por los dos grupos de 2° grado.

| |
|---|
| A: 100, 90, 50, 10, 30, 60, 70, 60, 75, 85, 65, 32, 28, 20, 60, 65, 90, 77, 63, 40 |
| B: 26, 30, 15, 48, 35, 97, 25, 60, 28, 75, 35, 68, 70, 57, 85, 80, 55, 80, 64, 72 |

El examen tuvo 100 preguntas y se considera que el desempeño del grupo es bueno si el promedio (media aritmética) del número de aciertos obtenidos en total es mayor que 60.

a) ¿Qué grupo consideras que tiene mejor desempeño? ____________________
Justifica tu respuesta. ____________________

b) Elabora en tu cuaderno el histograma que muestre la distribución del número de aciertos obtenidos en el examen de Matemáticas por el grupo A.

c) Traza en el histograma los polígonos de frecuencias que muestren las distribuciones de los aciertos obtenidos por los dos grupos, así como los valores que consideres importantes para destacar la justificación de tu respuesta en el inciso a).

Selecciona la respuesta correcta.

**1.** En una multiplicación de cinco factores, el resultado es un número negativo. ¿Cuántos factores negativos es posible que haya en esa multiplicación?

a) Sólo uno    b) Uno, tres o cinco    c) Dos o cuatro    d) Sólo tres

**2.** Encierra en un círculo las expresiones equivalentes a $\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}$ :

a) $\frac{1}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right)$    c) $2\left(\frac{1}{4}n\right) + \frac{1}{4}$    e) $0.5n + 0.5$

b) $\frac{1}{2}(n + 1)$    d) $\frac{2(n+1)}{2}$    f) $\frac{1}{2}n + 0.5$

**3.** Subraya las expresiones que generan la siguiente sucesión de números:

$$\frac{1}{2}, 1, \frac{6}{4}, 2, \frac{10}{4}, \frac{11}{4}, \ldots$$

a) $\frac{n}{4}$    b) $\frac{1}{2}n$    c) $\frac{2^n}{4}$    d) $\frac{n}{4} + \frac{1}{4}$    e) $\frac{1}{4}(n + 1)$    f) $\frac{n}{4} + \frac{1}{4}$    g) $0.5n$

**4.** Se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

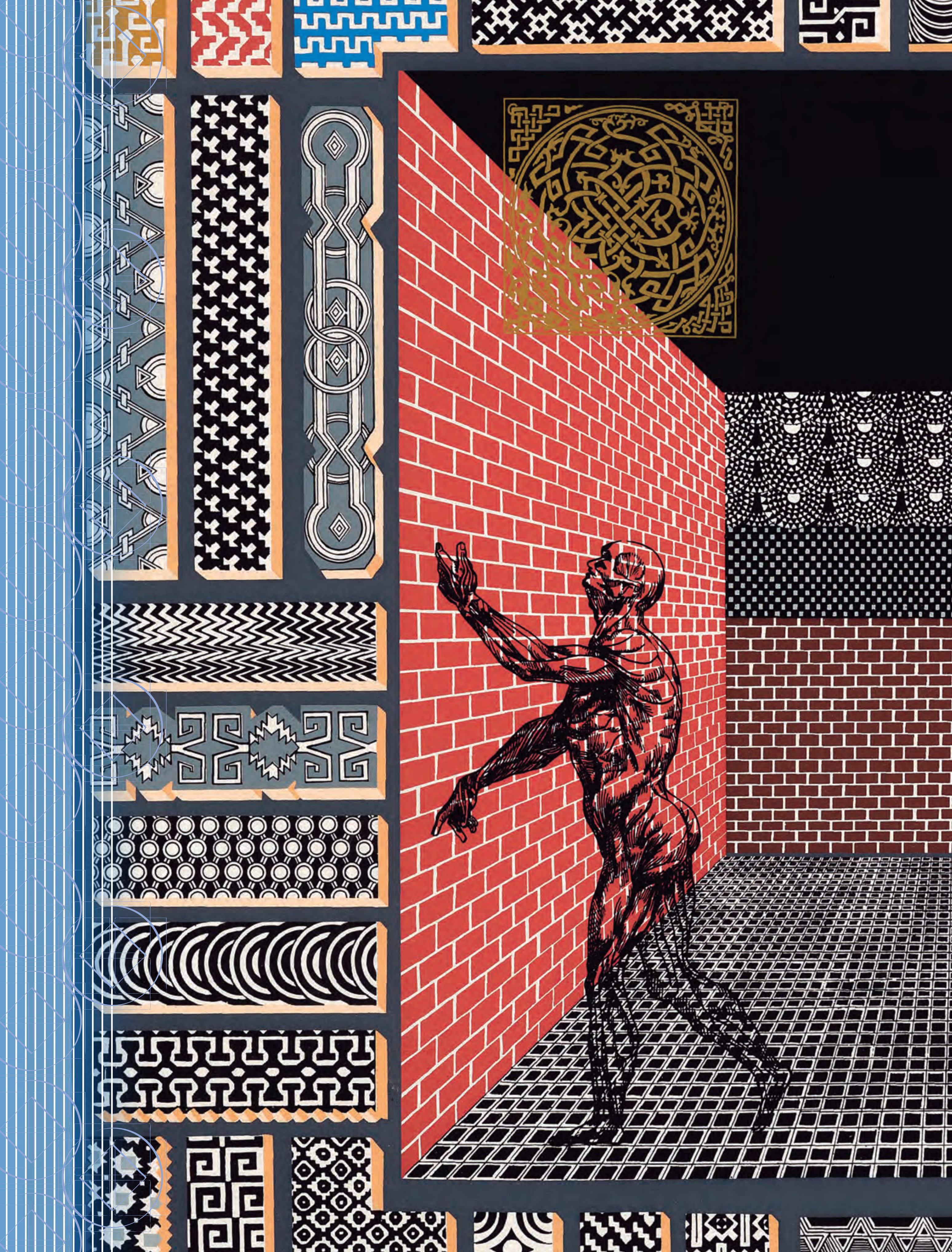
$$3x - 2y = 7$$
$$2x + y = 14$$

a) Si se resuelve por el método de igualación, ¿cuál es la igualdad que resulta si se despeja *y* de ambas ecuaciones? Enciérrala en un círculo.

- $4x - 3x = 7 - 28$
- $4x + 3x = 7 + 28$
- $4x - 3x = 7 + 28$
- $4x + 3x = 7 - 28$

b) Si se resuelve por el método de sustitución, ¿cuál es la expresión que resulta de despejar *x* de la segunda ecuación y sustituirla en la primera? Enciérrala.

- $-7y = 14 - 42$
- $-7y = 14 + 42$
- $7y = 14 - 42$
- $7y = -14 - 42$



# Bloque 3

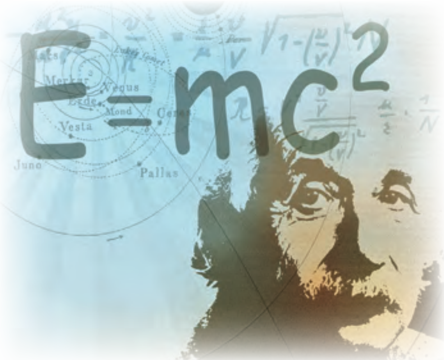
## El arte de las matemáticas y las matemáticas del arte

El pintor Pedro Friedeberg considera que el arte debe estar lleno de simbolismos y lo muestra en sus obras. En ésta podemos apreciar la conjunción de dos creaciones humanas: el arte y la matemática. ¿Reconoces en esta pintura las figuras que has estudiado? ¿Qué formas geométricas identificas en ella? ¿Podrías escribir algo acerca de lo que te inspira?

# 27. Potencias con exponente entero 2

Sesión 1

## Para empezar




En diferentes ámbitos de la sociedad se manejan cantidades muy grandes o muy pequeñas. Por ejemplo, el monto total de las remesas que envían los mexicanos que trabajan en Estados Unidos asciende a miles de millones de dólares; la deuda pública de México en 2018 era de 11 billones de pesos, aproximadamente; el presupuesto del gobierno federal también está en el rango de los billones de pesos; la población mundial ronda los siete mil millones de habitantes. Además de estas grandes cantidades, se conocen desde hace años las que sirven para expresar datos relacionados con el cosmos, a las que suele llamarse *cantidades astronómicas*.

En esta secuencia continuarás el estudio de la potenciación, que sirve para expresar, de manera simplificada, cantidades muy grandes o muy pequeñas, como la medida del diámetro de una bacteria; así como para resolver problemas en los que una o varias cantidades crecen exponencialmente.

## Manos a la obra

### La base, el exponente y la potencia

**1.** Trabajen en pareja. Calculen las potencias que se piden y después contesten las preguntas sin hacer las operaciones.

$4^2 =$ $4^3 =$ $4^4 =$ $4^5 =$ $4^6 =$

a) ¿En qué cifra termina la séptima potencia de 4? ______

b) ¿En qué cifra termina la vigésima potencia de 4? ______

$7^2 =$ $7^3 =$ $7^4 =$ $7^5 =$ $7^6 =$

c) Sin hacer el cálculo, ¿cuál es la última cifra de $7^7$? ______

d) ¿En qué cifra terminará la décima potencia de 7? ______

**2.** Expliquen qué hicieron para responder las preguntas anteriores y concluyan: ¿las potencias de una misma base tienden a generar un patrón? Argumenten su respuesta.

______

______

**3.** Calculen mentalmente el resultado de las operaciones y el valor de $x$.

$(8 + 3)^2 =$ $\qquad$ $\sqrt{42 - 6} =$ $\qquad$ $(3 + x)^2 = 25$

$\sqrt{(35 + 14)} =$ $\qquad$ $(9 + 6 - 11)^2 =$ $\qquad$ $(12 - x)^2 = 49$

a) Marquen con una palomita (✓) el resultado que consideren correcto para la operación $(298)^2$, sin usar calculadora.

☐ 88 804 $\qquad$ ☐ 8 804 $\qquad$ ☐ 90 804

b) Elijan el resultado que consideren que corresponde a la operación $(195)^2$, sin usar calculadora.

☐ 40 405 $\qquad$ ☐ 38 025 $\qquad$ ☐ 24 405

**4.** En grupo, comparen sus respuestas y comenten la manera en que las obtuvieron.

Los tres elementos de la potenciación son:

Exponente

Base $x^a = b$ Potencia

La raíz cuadrada es la ***operación inversa*** de elevar al cuadrado una cantidad llamada base.

Índice

$\sqrt[a]{b} = x$ Raíz

Radical

Radicando

Cuando se trata de la raíz cuadrada, el índice (2) no se escribe.

**5.** Marquen con una palomita (✓) las respuestas correctas; pueden ser más de una.

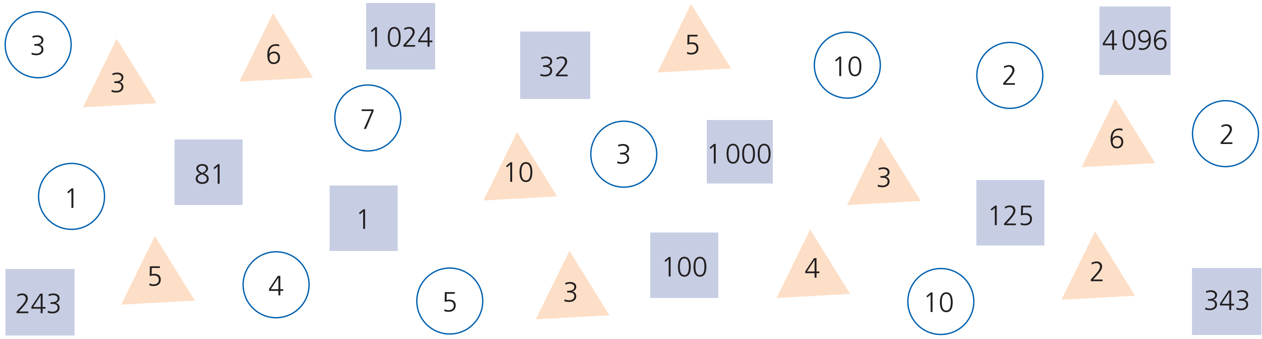
La base de una potencia puede ser expresada como:

☐ un número ☐ una literal ☐ una suma ☐ una diferencia ☐ una ecuación

El radicando de una raíz puede expresarse como:

☐ un número ☐ una literal ☐ una suma ☐ una diferencia ☐ una ecuación

**6.** Trabajen en pareja. Los números anotados en círculos son bases de potencias, los anotados en triángulos son exponentes y los que están en cuadrados son potencias (resultados). Anoten en la tabla las diez expresiones exponenciales que se pueden formar con ellos.




| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| a) | c) | e) | g) | i) |
| b) | d) | f) | h) | j) |

**7.** Con apoyo de su maestro, comparen sus resultados. Expliquen cómo los encontraron y a qué se debe que obtuvieran esas expresiones.

Sesión 2

## Crecimiento exponencial

**1.** Trabajen en pareja. Resuelvan los siguientes problemas.

a) En una escuela secundaria hay cinco grupos. En cada grupo se pueden formar cinco equipos de cinco alumnos cada uno. ¿Cuántos alumnos hay en la escuela?

________________________________

b) Un número, más su cuadrado, es igual a 30. ¿Cuáles números cumplen con esta condición? ____________________

c) Un número, más su cubo, es igual a 30. ¿Cuáles números cumplen con esta condición? ____________________

d) Encuentren dos números enteros consecutivos cuya diferencia de cuadrados sea 37. ____________________

e) Encuentren dos números impares consecutivos cuya diferencia de cuadrados sea 72. ____________________

**2.** Con apoyo de su maestro, comparen sus resultados. Vean si hay resultados diferentes que sean correctos y corrijan los posibles errores.

**3.** Anoten el término que falta en cada operación.

a) $3^5 \times \square^{\square} = 3^7$

b) $\square^{\square} \times 5^3 = 5^7$

c) $2^7 \times 2^5 = \square^{\square}$

d) $4^4 \times \square^{\square} = 4^4$

e) $7^4 \times \square^{\square} = 7^5$

f) $\square^{\square} \times a^5 = a^8$

g) $3^2 \times 3^{-3} \times 3^4 = \square^{\square}$

i) $(2 + 3)^2 \times (2 + 3)^3 =$ __________

h) $2^3 \times \square^{\square} \times 2^7 = 2^0 = 1$

j) $(8 - 3)^{-2} \times (8 - 3)^5 \times (8 - 3)^3 =$ __________

**4.** Lean la siguiente información y revisen sus respuestas de la actividad 3. Analicen los posibles errores y corríjanlos.

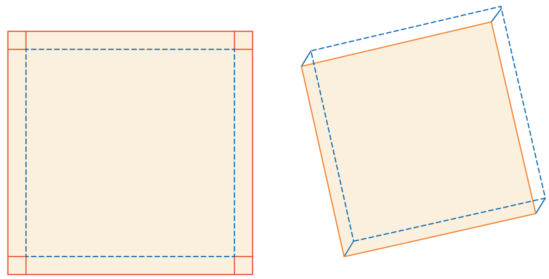
> La expresión $a^m \times a^n$ es una multiplicación de dos potencias con la misma base. El resultado es la misma base elevada a la suma de los exponentes, $a^m \times a^n = a^{m+n}$.

**5.** Para hacer una caja de papel sin tapa, a una hoja de 20 cm por lado se le recortan cuadrados de un centímetro por lado en cada esquina. Luego, las cuatro partes marcadas con líneas punteadas se doblan hacia arriba, como se muestra en la figura.

a) ¿Cuánto mide un lado de la base de la caja? __________

b) ¿Cuál es el área de la base de la caja? __________

c) ¿Cuál es el volumen de la caja? __________



**6.** En grupo y con apoyo de su maestro, comparen sus resultados y analicen los procedimientos que utilizaron; corrijan los errores.

**7.** Piensen en otras cajas que se pueden hacer con la misma hoja de 20 cm por lado. Usen la siguiente tabla para contestar las preguntas que vienen después. Si necesitan más renglones, hagan una tabla más grande en su cuaderno.

| Medida de cada lado de la hoja (en cm) | Medida de un lado de los cuadrados que se recortan (en cm) | Volumen de la caja (en $cm^3$) |
|---|---|---|
| 20 | 1 | $(20 - 2)^2 \times 1 = 324$ |
| 20 | 2 | |
| 20 | 3 | |
| 20 | 4 | |
| 20 | 5 | |

a) ¿Cuál es el mayor volumen que le cabe a la caja? __________

b) ¿Qué medida tendrán los cuadrados que se recorten para esa caja? __________

**8.** Con apoyo de su maestro, comparen sus resultados. Vean qué medidas pusieron los equipos que lograron obtener el mayor volumen de la caja; si no coincidieron, analicen quién tiene la razón y por qué.

| Día | María | Pedro |
|---|---|---|
| 1 | 100 | 1 |
| 2 | 100 | 2 |
| 3 | 100 | 4 |
| 4 | | 8 |
| 5 | | 16 |
| 6 | | 32 |
| 7 | | |
| 8 | | |
| 9 | | |
| 10 | | |
| 11 | | |
| 12 | | |
| 13 | | |
| 14 | | |

**9.** Resuelvan el siguiente problema.

Pedro se propone ahorrar cada día el doble de lo que guardó el día anterior. María piensa ahorrar cada día $100. Analicen cada plan, completen la tabla de la izquierda y contesten las preguntas.

Analicen lo que sucede el día 5.

a) ¿Cuánto ahorró María? ______ ¿Cuánto fue el ahorro de Pedro? ______

b) ¿A partir de qué día el ahorro de Pedro es mayor que el de María? ______

c) La operación $2^{15}$ permite averiguar lo que ahorró Pedro en un día específico. ¿A qué número de día le corresponde? ______

**10.** Con apoyo de su maestro, comparen los resultados de la tabla. Comenten por qué hay un momento en el que Pedro rebasa la cantidad ahorrada por María.

**11.** Observen el recurso audiovisual *Crecimiento exponencial* para conocer y analizar otras situaciones que corresponden a este tipo de crecimiento.

Sesión 3

## El número más grande posible

**1.** Trabajen en equipo. Resuelvan los siguientes problemas; algunos pueden tener más de una solución correcta.

a) ¿Cómo se expresaría el número 10 utilizando cinco nueves? ______
Una manera es la siguiente: $\frac{9^9}{9^9} + 9 = 10$. Encuentren otras dos formas distintas y expliquen por qué se cumplen las igualdades. ______

______

b) Utilizando dos cifras diferentes y ningún otro signo, expresen el menor valor entero positivo. ______

c) Utilizando al mismo tiempo las diez cifras del sistema decimal de numeración, expresen el número 1. ______

d) ¿Cuál es el mayor valor que se puede expresar con cuatro unos? ______

e) Expresen el mayor valor posible utilizando tres números dos. ______

f) Expresen el mayor valor posible utilizando tres números cuatro. ______

**2.** Con apoyo de su maestro, comparen sus resultados.

**3.** Piensen cuál es la diferencia entre las expresiones $(2^2)^2$ y $2^{2^2}$, y escriban si son equivalentes. Justifiquen en su cuaderno su respuesta.

**4.** Con apoyo de su maestro, lean la siguiente información y compárenla con lo que escribieron en el punto anterior.

> La expresión $(a^x)^y$ es una potencia cuya base es también una potencia que está dentro del paréntesis $(a^x)$. A esta expresión se le denomina ***potencia de una potencia*** y su resultado es $a^{xy}$.
>
> La expresión $a^{x^y}$ es una potencia cuya base es $a$ y cuyo exponente es la potencia de una potencia $a^{x^y}$.
>
> Por ejemplo, si se da un valor cualquiera a estas expresiones, se tiene:
>
> $(3^3)^3 = 3^9$, mientras que $3^{3^3} = 3^{27}$, por lo tanto, estas expresiones **no son equivalentes**.

**5.** Escriban el término que falta en cada operación para que sea correcta.

a) $\frac{3^{10}}{\square^{\square}} = 3^4 = 81$

b) $\frac{\square^{\square}}{4^3} = 4^2 = 16$

c) $\frac{5^2}{5^3} = \square^{\square} = \frac{\square}{\square}$

d) $\frac{2^5}{\square^{\square}} = 2^2$

e) $\frac{\square^{\square}}{3^5} = 3^{-1} = \frac{\square}{\square}$

f) $\frac{4^5}{\square^{\square}} = \square^{\square} = 1$

g) $\frac{\square^{\square}}{6^4} = 6^{-1} = \frac{\square}{\square}$

h) $\frac{3^{15}}{3^{10}} = \square^{\square}$

i) $\frac{\square^{\square}}{8^3} = 8^{-3} = \frac{\square}{\square}$

j) $\frac{\square^{\square}}{\square^{\square}} = \square^{\square} = 1$

k) $\frac{a^{\square}}{a^{\square}} = \square^{\square} = 1$

l) $\frac{x^a}{x^b} = \square^{\square}$

**6.** Con apoyo de su maestro, comparen sus respuestas. Vean si hay resultados diferentes que sean correctos. Analicen los errores y corrijan lo necesario.

**7.** Los siguientes ejercicios están resueltos. Desarrollen en su cuaderno los procedimientos necesarios para verificar que los resultados son correctos. Si no lo son, corríjanlos.

| | |
|---|---|
| $(2^2)^{-3} = \frac{1}{64}$ | $\left(\frac{2}{3^2}\right)^{-3} \times \left(\frac{2^2}{3^2}\right) = 3$ |
| $\frac{2^4 \times 3^4}{6^2} = 6$ | $(3^2)^3 \times (2 \times 3^5)^{-2} \times (3^2 \times 2)^2 = 1$ |

**8.** Con apoyo de su maestro, revisen los procedimientos que emplearon en la actividad anterior y determinen qué resultados son correctos y cuáles no.

**9.** Resuelvan individualmente ésta y la siguiente actividad.

a) $1^2 =$ ______ c) $1^{25} =$ ______ e) $2^1 =$ ______ g) $25^1 =$ ______ i) $2^0 =$ ______ k) $25^0 =$ ______

b) $1^5 =$ ______ d) $1^n =$ ______ f) $5^1 =$ ______ h) $n^1 =$ ______ j) $5^0 =$ ______ l) $n^0 =$ ______

| Afirmación | V | F |
|---|---|---|
| Si la base de una potencia es 1, el resultado es el exponente. | | |
| Si el exponente de una potencia es 1, el resultado es la base. | | |
| Si el exponente de una potencia es cero y la base no es cero, el resultado es 1. | | |

**10.** Anoten en la tabla si el enunciado es verdadero (V) o falso (F) y escriban un ejemplo en su cuaderno.

**11.** Con apoyo de su maestro, comparen sus resultados. Analicen los posibles errores y corrijan.

Sesión 4

## Para terminar

### ¿Cuántos ceros después del uno?

| Nombre del número | Notación decimal | Notación exponencial | Notación científica |
|---|---|---|---|
| Uno | | $10^0$ | $1 \times 10^0$ |
| Un mil | | | |
| Un millón | | | |
| | 1 000 000 000 | | |
| | | | $1 \times 10^{12}$ |
| Un mil billones | | | |
| Un trillón | | | |

**1.** Trabajen en equipo. Anoten lo que falta en la tabla y después contesten.

a) ¿Cuántos ceros después del 1 aparecen en la escritura decimal del cuatrillón? ____________ ¿Cuál es la escritura decimal del cuatrillón?

____________

b) La Tierra tiene una masa de seis cuatrillones de gramos. Anoten la masa de la Tierra en:

Notación decimal: ____________

Notación exponencial: ____________

c) ¿Cuántos ceros después del uno tiene el millón? ____________

d) ¿Cuántos ceros más que el millón tiene el billón? ____________

e) ¿Cuántos ceros más que el billón tiene el trillón? ____________

| Número | ¿Es notación científica? |
|---|---|
| $1.5 \times 10^{-3}$ | |
| $2.8 \times 10^{\frac{1}{2}}$ | |
| $0.6 \times 10^3$ | |
| $15 \times 10^{-4}$ | |

**2.** En la secuencia 15 de este volumen estudiaron la notación científica, que es una manera de expresar números muy grandes o muy pequeños. Anoten lo que falta en la tabla y escriban en su cuaderno por qué lo son.

**3.** Con apoyo de su maestro, comparen sus resultados y corrijan si es necesario.

La notación científica se usa para representar cantidades muy grandes o muy pequeñas. En la expresión $a \times 10^n$, $a$ es un número decimal mayor o igual que 1 y menor que 10. El exponente es un número entero.

**4.** Completen individualmente la tabla.

| Números grandes | | Números pequeños | |
|---|---|---|---|
| Notación decimal | Notación científica | Notación decimal | Notación científica |
| 80 000 | | 0.00008 | |
| 45 000 000 | | 0.00000045 | |
| | $2.7 \times 10^9$ | | $2.7 \times 10^{-9}$ |
| 125 000 000 000 000 | | 0.000000000000125 | |

**5.** Trabajen en equipo. Resuelvan los problemas.

a) La distancia del planeta Venus al Sol es $1.082 \times 10^8$ km, mientras que la distancia de Marte al Sol es $2.28 \times 10^8$ km.

- ¿Cuál de los dos planetas está más cerca del Sol? ____________________
- ¿Cuántos kilómetros más cerca? ____________________

b) Se estima que en una galaxia hay $1 \times 10^{11}$ estrellas y que en el cosmos hay $1 \times 10^{11}$ galaxias. ¿Cuántas estrellas se estima que hay en el cosmos? __________

c) La velocidad de la luz es $3 \times 10^8$ m/s. Del Sol a la Tierra la luz tarda en llegar $5 \times 10^2$ s. ¿Cuál es la distancia del Sol a la Tierra? Expresen el resultado en notación científica. ________________________

d) La siguiente tabla muestra el comportamiento de la deuda pública en México de 2012 a 2017.

| Año | 2012 | 2013 | 2014 | 2015 | 2016 | 2017 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Monto de la deuda pública (en pesos) | $5.6 \times 10^{12}$ | $6.1 \times 10^{12}$ | $7.0 \times 10^{12}$ | $8.3 \times 10^{12}$ | $8.8 \times 10^{12}$ | $9.2 \times 10^{12}$ |

- ¿Cuánto mayor era la deuda pública en 2017 que en 2012? ________________
- En 2017 había en México $1.2 \times 10^8$ habitantes. ¿Cuál era la deuda por habitante? ________________

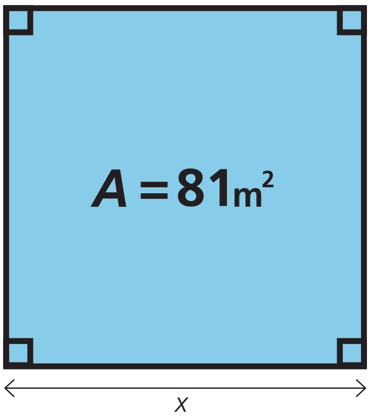
**6.** Con apoyo de su maestro, comparen sus resultados y corrijan.

**7.** Utilicen el recurso informático *Crecimiento exponencial* para resolver algunas situaciones en las que se aplica este tipo de crecimiento. En: https://www.proyectodescartes.org/Telesecundaria/materiales_didacticos/3m_b04_t04_s01-JS/index.html

# 28. Raíz cuadrada de números positivos

Sesión 1

## Para empezar




La raíz cuadrada permite resolver problemas prácticos, como calcular la medida del lado de un cuadrado conociendo su área, o la medida del radio de un círculo conociendo su área. Además, hay otros problemas en el campo de las matemáticas que se valen de la raíz cuadrada; por ejemplo, la resolución de ecuaciones de segundo grado y el cálculo de la medida de uno de los lados de un triángulo rectángulo cuando se conocen las medidas de los otros dos.

Esta secuencia es continuación de la secuencia 16; al estudiarla tendrás la posibilidad de profundizar tus conocimientos sobre la raíz cuadrada, tanto para efectuar la operación, como para usarla al resolver problemas.

### La raíz entera y el resto

**1.** Realiza individualmente la siguiente actividad. A continuación aparecen los números naturales del 1 al 100. Tacha los que sean cuadrados perfectos y después contesta las preguntas.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 |
| 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 |
| 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 |
| 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 |

a) ¿Cuántos números naturales, entre 1 y 100, son cuadrados perfectos? ____________

b) ¿Crees que entre 101 y 200 haya la misma cantidad de cuadrados perfectos? ____________ Verifícalo en tu cuaderno. Luego, lee la siguiente información.

Se llaman *cuadrados perfectos* a los números que son resultado de elevar al cuadrado un número entero, o también a los números que tienen raíz cuadrada exacta. Por ejemplo: 64 es un número cuadrado perfecto porque resulta de elevar 8 al cuadrado, o bien porque su raíz cuadrada es 8 y no hay sobrante o resto.

## Manos a la obra

**2.** Trabajen en pareja. Resuelvan los siguientes problemas.

a) Si se quieren plantar 172 rosales en un terreno cuadrado, de manera que en cada fila y en cada columna los rosales queden a un metro de distancia…

- ¿Cuántas filas de rosales habrá? ______________
- ¿Sobrarán algunos rosales? ______________ ¿Cuántos? ______________

b) Para cubrir el piso de una sala cuadrada se utilizaron 256 losetas y no se tuvo que cortar ninguna...

- ¿Cuántas losetas se pusieron en cada fila? ______________
- Si cada loseta mide 30 cm por lado, ¿cuánto mide un lado de la sala? ________

**3.** Al calcular la raíz cuadrada de algunos números se obtuvieron los resultados que se indican. Anoten sobre cada línea el número que corresponde y verifiquen en su cuaderno que los datos sean correctos.

a) Raíz 7, resto 14 ______________

b) Raíz 12, resto 24 ______________

c) Raíz 15, resto 32 ______________

**4.** Realicen en pareja el siguiente juego. Para ello, indiquen a su compañero lo siguiente:

a) Piensa un número.

b) Elévalo al cuadrado.

c) Súmale el doble del número que pensaste.

d) Súmale 1.

e) Después de realizar las operaciones anteriores, pregunten a su compañero qué resultado obtuvo. La raíz cuadrada de ese resultado, menos 1, es el número que pensó su pareja. Realicen varias veces el juego y traten de explicar por qué se cumple esto.

5. Completen la siguiente tabla.

| Número | Raíz entera | Resto | Doble de la raíz más 1 |
|---|---|---|---|
| 99 | | | |
| 231 | | | |
| 1 456 | | | |
| 44 099 | | | |

6. Con apoyo de su maestro, comparen sus resultados. Verifiquen en la tabla que en los cuatro casos el resto es menor que el doble de la raíz más 1.

7. Analicen la siguiente información con apoyo de su maestro y vean si coincide con lo que concluyeron en la actividad 6.

La raíz cuadrada de un número positivo que no es cuadrado perfecto tiene una parte entera y una parte decimal. Por ejemplo, la raíz cuadrada de 138 es 11.7473… La parte entera es 11 y la parte decimal 7473…, los puntos suspensivos indican que hay más cifras en la parte decimal.

Otra manera de expresar la raíz cuadrada de 138 es: parte entera 11 y resto 17.

El resto siempre es menor que el doble de la parte entera, más 1.

Sesión 2

## La medida del radio

1. Trabajen en equipo. Resuelvan el siguiente problema y luego completen el procedimiento.

René compró una cisterna de forma cilíndrica a la que le caben 2 800 litros de agua. La altura de la cisterna mide 1.5 metros. ¿Cuánto mide su diámetro? __________


Fórmula del volumen del cilindro: $V$ = *área de la base* × *altura* = $\pi r^2 h$

Sustitución: 2 800 dm$^3$ = $(\pi r^2)$15 dm

(2 800 litros equivalen a 2 800 dm$^3$, para igualar términos convertimos 1.5 m en 15 dm).

Dividimos ambos miembros de la igualdad del paso anterior entre 15 dm:

$$\frac{2\,800 \text{ dm}^3}{15 \text{ dm}} = \frac{(\pi r^2)\ 15 \text{ dm}}{15 \text{ dm}}$$

Al efectuar las operaciones, obtenemos: 186.7 dm$^2$ = __________

Dividimos el resultado del paso anterior entre $\pi$ para obtener el radio al cuadrado:

$$\frac{186.7\ \text{dm}^2}{\pi} =$$

Al efectuar las operaciones resulta: $\frac{186.7\ \text{dm}^2}{\pi} =$ , que equivale a $r^2 = 59.42\ \text{dm}^2$.

Obtenemos la raíz cuadrada en ambos miembros de la igualdad:

$$\sqrt{r^2} = \sqrt{59.42\ \text{dm}^2}$$

Al efectuar las operaciones resulta: $r =$ ________

Duplicamos el radio para obtener el diámetro:

$$7.7\ \text{dm} \times 2 = \_\_\_\_\_\_\ \text{dm} = \_\_\_\_\_\_\ \text{m}$$

**2.** Con apoyo de su maestro, analicen el procedimiento anterior. Comenten por qué, al dividir $\text{dm}^3$ entre dm, se obtiene $\text{dm}^2$.

**3.** Lean y comenten la siguiente información.

> La raíz cuadrada permite simplificar ecuaciones en las que la incógnita está elevada al cuadrado, puesto que la raíz cuadrada es la operación inversa de elevar al cuadrado.
>
> Por ejemplo, si $r^2 = 25$, entonces $r = \sqrt{25} = 5$. Si $c^2 = 30$, entonces $c = \sqrt{30} = 5.4$ aproximadamente.

**4.** ¿Cuánto medirá el diámetro de una cisterna que tiene la misma altura que la cisterna de René, pero a la que le caben 5 000 litros de agua? __________________

**5.** Trabajen en pareja. Anoten los números que faltan en el esquema.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 20 | Al cuadrado → | | Raíz cuadrada → | |
| 1.5 | Al cuadrado → | | Raíz cuadrada → | |
| –5 | Al cuadrado → | | Raíz cuadrada → | |
| –3.4 | Al cuadrado → | | Raíz cuadrada → | |

6. Anoten sobre la línea si el enunciado es falso o verdadero. Si consideran que es falso, den un ejemplo.

a) Si un número positivo se eleva al cuadrado y al resultado se le extrae raíz cuadrada, se llega al número original. ______________________________

b) Si un número negativo se eleva al cuadrado y al resultado se le extrae raíz cuadrada, se llega al número original. ______________________________

7. Con apoyo de su maestro, comparen sus respuestas. En caso de que no coincidan, averigüen quién tiene razón. Apóyense en la lectura de la siguiente información.

Si un número positivo se eleva al cuadrado y al resultado se le extrae raíz cuadrada, se obtiene el número original.

$$7^2 = 49 \text{ y } \sqrt{49} = 7$$

Verifiquen cómo esta ley no se cumple con los números negativos.

8. Observen el recurso audiovisual *La raíz cuadrada* para conocer más sobre su historia, su función y cómo obtener la parte entera y el resto.

Sesión 3

# Para terminar

## Aproximación a la raíz cuadrada

1. Trabajen en pareja. Anteriormente estudiaron un procedimiento para encontrar la raíz cuadrada de un número mediante aproximaciones sucesivas. A continuación analizarán otro procedimiento para encontrar las cifras de la parte entera cuando se requiere calcular la raíz cuadrada de un número que no es cuadrado perfecto. Por ejemplo, encontrar la parte entera de $\sqrt{4528}$.

a) Hay que determinar cuántas cifras tendrá la parte entera de la raíz. Comenten entre ustedes y con otros equipos por qué no es posible que tenga tres cifras.

b) La parte entera de la raíz tiene dos cifras, por lo tanto, es de la forma $10a + b$. El término $10a$ representa las decenas y $b$ representa las unidades. Eleven este número al cuadrado: $(10a + b)^2 = (10a + b)(10a + b) =$ ______________

c) Para encontrar la cifra de las decenas, usamos el término $100a^2$ del resultado anterior. Encuentren esa cifra completando la primera tabla de la siguiente página.

¿Para qué valor de $a$ el valor numérico de $100a^2$ es mayor que 4 528? ______________ Esto significa que la mejor aproximación por defecto (esto es, por abajo de 4 528) se produce cuando $a = 6$. Ésta es la cifra de las decenas de la parte entera que se busca.

| Valores de $a$ | Valor numérico de $100a^2$ | Comparación del valor numérico de $100a^2$ con 4 528 |
|---|---|---|
| 1 | $100 \times 1^2 = 100$ | $100 < 4528$ |
| 2 | | |
| 3 | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |

d) Para encontrar la cifra de las unidades, utilizamos los términos $20ab + b^2$ de la expresión obtenida en el inciso b). Como ya se sabe que $a = 6$, se sustituye en la expresión anterior y se obtiene $120b + b^2$. Con esta expresión hay que aproximarnos a $4528 - 100a^2 = 4528 - 3600 = 928$. Encuentren la cifra de las unidades completando la segunda tabla.

| Valores de $b$ | Valor numérico de $120b + b^2$ | Comparación del valor numérico de $120b + b^2$ con 928 |
|---|---|---|
| 0 | $120 \times 0 + 0^2 = 0$ | $0 < 928$ |
| 1 | | |
| 2 | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |

¿Para qué valor de $b$, el término $120b + b^2$ es mayor que 928? ____________ Esto significa que la mejor aproximación, por defecto, a 928, se produce cuando $b = 7$. Ésta es la cifra de las unidades de la parte entera de la raíz.

**2.** Verifiquen en su cuaderno que 67 es la parte entera de la raíz cuadrada de 4 528 que más se aproxima, e indiquen cuál es el resto.

**3.** Trabajen en equipo para calcular la parte entera de la raíz cuadrada y el resto de los siguientes números.

a) $\sqrt{2827}$ b) $\sqrt{5392}$ c) $\sqrt{8721}$

**4.** Resuelvan el siguiente problema.

Rosendo tiene 4 865 losetas de 10 cm de ancho por 20 cm de largo. Quiere formar un cuadrado lo más grande posible, sin tener que cortar ninguna loseta.

a) ¿Cuál sería el área del cuadrado? ______________

b) ¿Cuánto mediría por lado? ______________

c) ¿Cuántas losetas le sobrarían? ______________

**5.** Con el apoyo de su maestro, comparen sus resultados y corrijan los errores.

# 29. Sistemas de ecuaciones 2 × 2. Método de suma y resta

Sesión 1

## Para empezar

Luis presentó un examen para ingresar a un puesto de trabajo y su puntuación fue 9. El examen tenía 30 preguntas; cada acierto le generó 1 punto y cada error le restó 2 puntos. ¿Cuántas respuestas correctas tuvo y en cuántas se equivocó?

Este tipo de problemas originan un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$x + y = 30$$
$$x - 2y = 9$$

Para resolver un sistema de ecuaciones como éste, anteriormente estudiaste los métodos gráfico, de sustitución y de igualación. Ahora conocerás otro método llamado *de suma y resta*, *de reducción*, o bien *de eliminación*. Así, cuando tengas que resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, podrás recurrir al método que más te convenga.

### Reducción de incógnitas

**1.** Trabaja de manera individual.

a) Resuelve las siguientes operaciones:

- $(5a - 3b + m) - (-a - 2b + 3m) =$ ____________________
- $(7a + 4b) - (2a + 2b - 3c) =$ ____________________
- $(4x + 8y) + (4x - 7y) =$ ____________________
- $(-5x + 2y) - (5x - 10y) =$ ____________________

b) Encierra en un círculo la ecuación o expresión algebraica que es equivalente a la que aparece en color. Luego, explica en tu cuaderno por qué las otras ecuaciones no son equivalentes.

$$2x - 6y = -8$$

$6x - 6y = -24$ $\quad$ $6x - 18y = -24$ $\quad$ $6x - 18y = -8$

$$-3x - 2y = 12$$

$-21x - 14y = 12$ $\qquad$ $-21x - 14y = 84$ $\qquad$ $-3x - 14y = -84$

**2.** En grupo, y con apoyo de su maestro, compartan sus respuestas. Si tienen dudas, vuelvan a consultar las secuencias donde estudiaron cómo resolver sumas y restas de términos semejantes y en las que obtuvieron expresiones equivalentes.

## Manos a la obra

**3.** Trabajen en pareja. En sus cuadernos resuelvan el siguiente sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas por el método gráfico.

Ecuación 1: $3a + b = 22$

Ecuación 2: $4a - 3b = -1$

a) ¿Se intersecaron las dos rectas? __________ ¿En qué punto? __________

b) Por lo tanto, los valores de $a$ y $b$ son: __________ y __________, respectivamente.

**4.** Analicen los siguientes pasos del método de reducción, también denominado *de suma y resta*, para resolver un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

1º Se deben obtener coeficientes simétricos u opuestos para una de las incógnitas en las dos ecuaciones, por ejemplo, los coeficientes de $b$.

Como el coeficiente de $b$ en la ecuación 1 es +1 y en la ecuación 2 es –3, se puede multiplicar la primera ecuación por 3, de donde se obtiene la siguiente ecuación equivalente:

$$9a + 3b = 66$$

2º Se suman miembro a miembro las ecuaciones y se reducen los términos semejantes:

$$\begin{array}{r} 9a + \cancel{3b} = 66 \\ 4a - \cancel{3b} = -1 \\ \hline 13a \phantom{+3b} = 65 \end{array}$$

3º Se resuelve la ecuación resultante para obtener el valor de $a$:

$$13a = 65 \longrightarrow a = \frac{65}{13} \longrightarrow a = 5$$

4º El valor obtenido se sustituye en cualquiera de las dos ecuaciones originales para calcular el valor de la otra incógnita:

$$3(5) + b = 22 \longrightarrow b = 22 - 15 \longrightarrow b = 7$$

5º Finalmente, se comprueba que los valores obtenidos sirven para hacer verdaderas ambas ecuaciones:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Ecuación 1: | $3a + b = 22$ | Ecuación 2: | $4a - 3b = -1$ |
| | $3(5) + (7) = 22$ | | $4(5) - 3(7) = -1$ |
| | $15 + 7 = 22$ | | $20 - 21 = -1$ |
| | $22 = 22$ | | $-1 = -1$ |

¿Los valores de $a$ y de $b$ son los mismos que los que obtuvieron por el método gráfico? ______________

5. Ahora prueben resolver el mismo sistema de ecuaciones en su cuaderno, pero buscando coeficientes simétricos de $a$.

6. Contesten las siguientes preguntas.
   a) ¿Cómo decidieron por cuál número multiplicar los coeficientes? ______________
   ______________________________
   b) ¿Qué operación emplearon para reducir los términos semejantes? ______________
   ______________________________
   c) ¿Obtuvieron los mismos resultados para ambas incógnitas que cuando se despejó $b$? ______________________________

7. En grupo y con apoyo de su maestro, lean y comenten la siguiente información.

> Para resolver un sistema de ecuaciones por el método de reducción, o de suma y resta, se multiplica una o las dos ecuaciones por un número que permita obtener coeficientes simétricos de cualquiera de las dos literales.
>
> Después, se suman miembro a miembro las ecuaciones y se reducen los términos semejantes. El propósito es obtener una ecuación de primer grado, o lineal, con una sola incógnita.
>
> El valor obtenido se sustituye en cualquiera de las dos ecuaciones originales para obtener el valor de la otra incógnita.

Sesión 2

## Más sistemas de ecuaciones

1. Resuelvan en pareja los siguientes problemas mediante el método de reducción o de suma y resta.

a) Luis tiene una joyería; hoy vendió 6 pulseras de plata y 5 de oro. Por la venta, obtuvo \$13 000. Si una pulsera de oro cuesta cuatro veces lo que cuesta una de plata, ¿cuál es el precio de una pulsera de cada clase? ______

- ¿Cuáles son las incógnitas de este problema? ______ y ______
- Si $x$ = valor de la pulsera de oro, $y$ = valor de la pulsera de plata, encierren en un círculo el sistema de ecuaciones que representa el problema.

$$\begin{aligned} 5x + 6y &= 13\,000 \\ x + y &= 4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 6x + 5y &= 13\,000 \\ x + 4y &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 5x + 6y &= 13\,000 \\ 4y &= x \end{aligned}$$

- Expliquen por qué los otros dos sistemas no representan el problema.

______

______

- ¿El coeficiente de qué incógnita les conviene igualar? ______
- Resuelvan en su cuaderno el sistema de ecuaciones que eligieron por el método de suma y resta, y regresen a responder la pregunta del problema.
- Comprueben que los valores obtenidos hacen verdaderas las dos ecuaciones.

b) Doña Lucila tiene un terreno donde cría gallinas y puercos. En total tiene 45 animales. Si la cantidad de patas de todos los animales es 120, ¿cuántas gallinas y cuántos puercos cría doña Lucila? ______

- Si se representa con $x$ la cantidad de gallinas y con $y$ la cantidad de puercos, ¿cuál de los siguientes sistemas de ecuaciones corresponde al problema? Enciérrenlo en un círculo.

$$\begin{aligned} x + y &= 45 \\ 4x + 2y &= 120 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + y &= 45 \\ 2x + 4y &= 120 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x - y &= 45 \\ 4x - 2y &= 120 \end{aligned}$$

- Expliquen por qué los otros dos sistemas no representan el problema.

______

______

- Resuelvan en su cuaderno el sistema que eligieron usando el método de reducción, también conocido como *de suma y resta*.
- Comprueben que los valores obtenidos son válidos para las dos ecuaciones; si son correctos, respondan la pregunta del problema.

c) Se tienen dos números cuya suma es cero. Si al primer número se le suma 15, se obtiene el doble del segundo. ¿Qué números son? ______

- Encierren en un círculo el sistema de ecuaciones que representa este problema.

$$\begin{aligned} x + y &= 0 \\ x + 2y &= 15 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + y &= 0 \\ x + 15 &= 2y \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x - y &= 0 \\ 2x - y &= 15 \end{aligned}$$

- ¿Es necesario multiplicar una o ambas ecuaciones para obtener los coeficientes simétricos de una de las incógnitas? __________ ¿Por qué? ______________

______________________________________________________________

d) Resuelvan en su cuaderno el sistema con el método de reducción. No olviden comprobar los valores obtenidos y respondan el problema.

**2.** Comparen sus resultados con otra pareja. Si tienen dudas en algunos de los pasos del método de reducción, revisen en el grupo, apoyados por el maestro, el trabajo hecho en la sesión 1.

Sesión 3

## Para terminar

### Más problemas con sistemas de ecuaciones

**1.** Resuelve individualmente y en tu cuaderno el siguiente sistema de ecuaciones por el método de suma y resta.

Ecuación 1: $5x - 2y = 9$

Ecuación 2: $x + 2y = 9$

a) ¿Es necesario multiplicar alguna ecuación para obtener coeficientes simétricos de alguna literal? _________ ¿Por qué? ______________________________

______________________________________________________________

b) Comprueba que los valores obtenidos cumplen con las ecuaciones.

**2.** En grupo, comparen sus resultados. Si hay alguna diferencia, revisen sus procedimientos, analicen a qué se debieron y corrijan si es necesario.

**3.** En equipo resuelvan el siguiente sistema de ecuaciones por los cuatro métodos que estudiaron (gráfico, de sustitución, de igualación y de reducción o suma y resta).

Ecuación 1: $5x + 4y = 26$

Ecuación 2: $x + 2y = 10$

a) ¿Cuál método les resultó más conveniente para resolverlo? ______________
Justifiquen su respuesta. ______________________________________
______________________________________
______________________________________

**4.** Observen el recurso audiovisual *Método de suma y resta, otra opción para resolver sistemas de ecuaciones* para que puedan comparar los cuatro métodos que han aprendido.

**5.** En equipo, analicen los siguientes problemas. Decidan qué método les parece más adecuado y expliquen por qué. Después, resuelvan en su cuaderno el sistema de ecuaciones y anoten la respuesta de cada problema.

a) La suma de las edades de Edna y Juan es 82. Edna es mayor que Juan por 18 años.

Edad de Edna: ______________

Edad de Juan: ______________

b) El museo de la caricatura tuvo 440 visitantes el día de hoy (hombres y mujeres). Si la razón entre hombres y mujeres es de $\frac{3}{5}$, ¿cuántos hombres y cuántas mujeres asistieron?

Hombres: ______________

Mujeres: ______________

c) Si se suma 7 al numerador y al denominador de una determinada fracción, se obtiene la fracción $\frac{4}{5}$. Si se resta 2 al numerador y al denominador, se obtiene la fracción $\frac{1}{2}$, ¿cuál es la fracción original? ______________

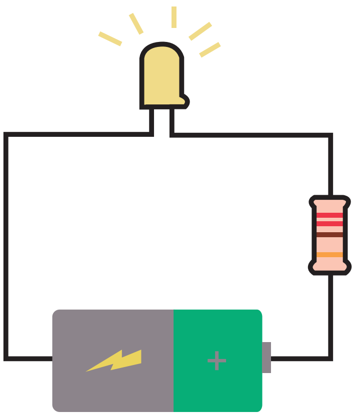
**6.** En grupo y con ayuda de su maestro, comparen sus resultados y los métodos que utilizaron en cada equipo. Escuchen y analicen los argumentos de cada equipo para justificar la elección que hicieron.

**7.** Utilicen el recurso informático *Métodos de resolución de sistemas de ecuaciones 2* para resolver otros problemas que implican un sistema de dos ecuaciones lineales de dos incógnitas y continuar aplicando los métodos de resolución.

# 30. Relación funcional 2

Sesión 1

## Para empezar



Cuando oprimes el interruptor de la luz, se prende o se apaga el foco. Esto se debe a un sistema de ingeniería eléctrica que se construyó a partir de cálculos complejos.

La imagen muestra un circuito básico al que se le aplica voltaje con una pila; el circuito está formado por una resistencia y un foco pequeño. La cantidad de corriente que pasa y que permite que el foco se prenda sin fundirse depende del voltaje y de la resistencia. ¿Cómo es esta dependencia?, ¿tendrá que ver con la variación proporcional?, ¿será directa o inversa?

En esta secuencia estudiarás este y otros fenómenos de la física sobre los diferentes tipos de variación a partir de sus tablas, gráficas y expresiones algebraicas.

## Manos a la obra

### A mayor velocidad, menor tiempo

1. Resuelvan en equipos las actividades de la siguiente sesión.

Bruno viajará en carretera de la Ciudad de México a San Luis Potosí. La distancia entre ambas ciudades es de 417 km, aproximadamente. La siguiente tabla representa la distancia que Bruno recorre hacia algunos puntos intermedios por los que pasará. Complétenla y ubiquen los valores de la distancia recorrida ($x$) y la distancia que falta recorrer ($y$) en la gráfica.

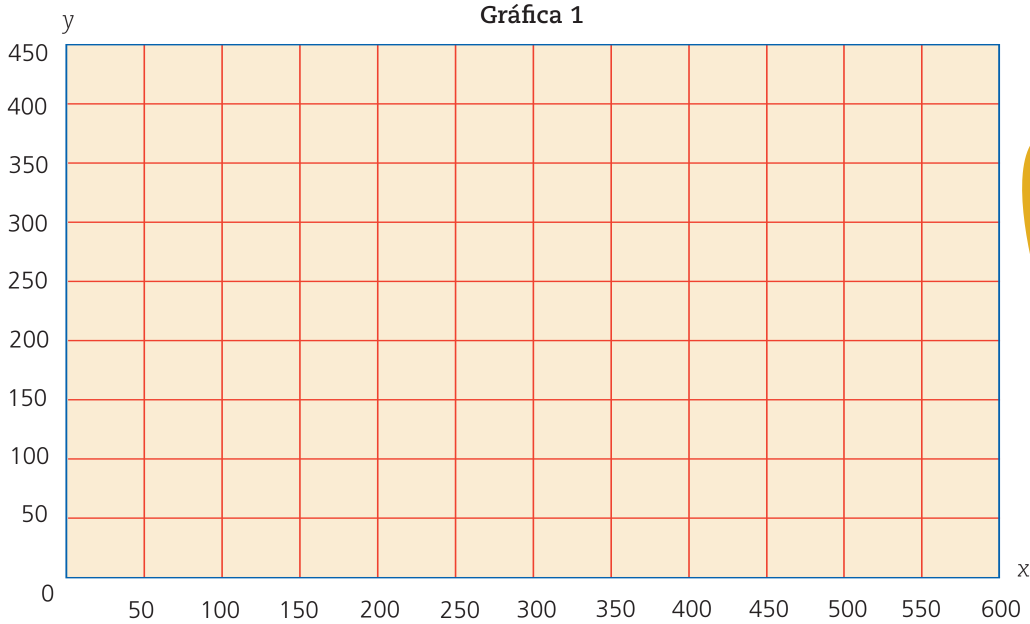
**Tabla 1**

| Lugar al que llegará | Tepeji del Río | San Juan del Río | Pedro Escobedo | Querétaro | San Luis Potosí |
|---|---|---|---|---|---|
| Distancia recorrida en km ($x$) | 76 | 131 | 174 | 205 | 417 |
| Distancia que falta recorrer en km ($y$) | | | | | |

Escriban una expresión algebraica que relacione los valores de las variables.

________________________________________

**Gráfica 1**




**Dato interesante**
La generación de energía eléctrica inició en México en 1879 en León, Guanajuato, con la planta generadora de la fábrica textil La Americana.

**2.** Algunos aspectos que también se pueden analizar a partir del viaje que Bruno realiza son: el tiempo que tarda en llegar de acuerdo con la velocidad promedio a la que circule en su recorrido y la distancia que recorre en diferentes momentos considerando una velocidad constante. Completen las tablas 2 y 3. Tracen en su cuaderno las gráficas correspondientes.

**Tabla 2**

| Considerar distancia constante de 417 km | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Velocidad promedio (*v*) | 40 km/h | 80 km/h | 90 km/h | 95 km/h | 110 km/h | 120 km/h |
| Tiempo en horas que tardará en llegar (*t*) | | | | | | |

**Tabla 3**

| Considerar una velocidad constante de 80 kilómetros por hora | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Tiempo que hará en horas (*t*) | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{4}$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Distancia recorrida (km) (*d*) | | | | | | | |

a) ¿Qué sucede en cada gráfica cuando se acerca al origen?

| Gráfica 2 | Gráfica 3 |
|---|---|
| | |

b) Escriban una expresión algebraica que relacione las variables en cada caso.

| Expresión algebraica 1 | Expresión algebraica 2 |
|---|---|
| | |

3. Comparen sus respuestas y las gráficas que hicieron con las de sus compañeros. Revisen que las expresiones algebraicas que obtuvo cada equipo sean iguales o equivalentes en cada caso y contesten en su cuaderno las siguientes preguntas.
   a) ¿La gráfica crece o decrece? Si ocurre, ¿en qué intervalos?
   b) Si hay más de un intervalo en que crece o decrece, ¿en cuál es más rápido?
   c) ¿La gráfica corta alguno de los ejes? ¿Cuál y en qué punto?
   d) ¿Qué significado tiene esto en el contexto de la situación que representa?
   e) ¿Cuál es la relación que describen en cada caso? ¿Cómo lo supieron?

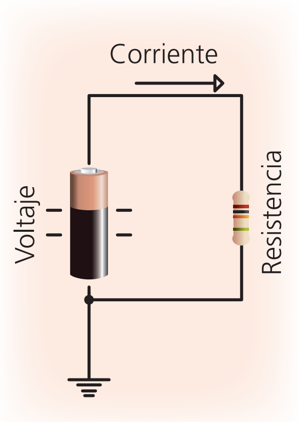
4. En grupo y con ayuda de su maestro, comparen sus respuestas. Después, lean la siguiente información.

La gráfica que corresponde a una relación de variación directamente proporcional es una *línea recta que siempre pasa por el origen.*
a) La expresión general que representa una variación directamente proporcional es: $y = kx$.
La gráfica de una variación que es inversamente proporcional es una curva que se llama *hipérbola.*
b) La expresión general que representa una variación inversamente proporcional es: $k = xy$.

5. Utilicen el recurso audiovisual *Tablas, expresiones algebraicas y gráficas* para conocer otros ejemplos que les permitan comprender la forma en que se vinculan estas tres representaciones para analizar qué tipo de variación existe entre dos variables.

Sesión 2

## Circuito eléctrico




1. Trabajen en pareja. El siguiente esquema pertenece a un circuito eléctrico básico.
   - La *pila* aplica un *voltaje* que provoca que la corriente eléctrica *circule alrededor* de un circuito.
   - La resistencia se conecta al circuito para cambiar la *intensidad* de la corriente eléctrica.
   - La resistencia del circuito se mide en **ohmios**, y la corriente que circula por el circuito se mide en **amperes**.

En un circuito con una resistencia (R) de 15 ohmios se aplicaron diferentes voltajes. Al medir la corriente eléctrica se obtuvieron los siguientes resultados. Analicen la relación entre voltaje (V) y corriente eléctrica (I), y completen la tabla.

| Voltaje, V (en volts) | 10 | 15 | 20 | 25 | 32 | 45 | V |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Corriente eléctrica, I (en amperes) | 150 | 225 | 300 | 375 | | | |

a) ¿La corriente eléctrica que pasa por el circuito es proporcional al voltaje que se aplica? ____________________

b) Si su respuesta es afirmativa, ¿qué tipo de proporcionalidad es? ____________ Argumenten su respuesta. ____________________

____________________

c) ¿Qué expresión relaciona el voltaje (V) con la corriente eléctrica (I) de este circuito?

____________________

**Dato interesante**
Para saber más sobre circuitos eléctricos, consulta *Circuitos eléctricos* en: http://www.objetos.unam.mx/fisica/circuitosElectricos/pdf/circuitos.pdf

**2.** En otro circuito se aplicó un voltaje de 30 volts, pero se cambió varias veces el valor de la resistencia. Al medir la corriente eléctrica, se obtuvieron los siguientes resultados. Completen la tabla.

| Resistencia, R (en ohmios) | 5 | 10 | 15 | 20 | 30 | 45 | R |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Corriente eléctrica, I (en amperes) | 6 | 3 | 2 | 1.5 | | | |

a) ¿La corriente eléctrica (I) que pasa por el circuito es proporcional a la resistencia (R) que se coloca? ____________________

b) Si su respuesta es afirmativa, ¿qué tipo de relación de proporcionalidad es?

____________________

Argumenten su respuesta. ____________________

____________________

c) ¿Qué expresión algebraica relaciona la corriente eléctrica (I) con la resistencia (R) de este circuito? ____________

**3.** Tracen en su cuaderno la gráfica de las dos situaciones anteriores.

**4.** La siguiente es una gráfica que relaciona la corriente eléctrica con la resistencia cuando a un circuito se le aplica un voltaje constante. La expresión que relaciona la corriente eléctrica (I), la resistencia (R) y el voltaje (V) en un circuito básico es: $V = RI$.

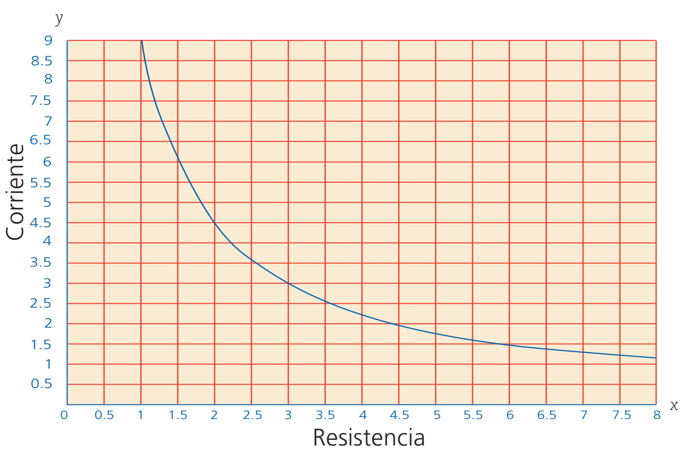
a) ¿Qué voltaje se aplicó al circuito de la gráfica? ____________________

b) Cuando la resistencia aumenta, ¿qué pasa con la corriente eléctrica? ________

____________________

Despejen la variable que representa la corriente eléctrica en la expresión anterior. I = ____________

c) Analicen su respuesta al inciso b) y relaciónenla con el despeje que hicieron. Anoten en su cuaderno qué sucede con la corriente eléctrica cuando el valor de la resistencia se acerca a cero.



d) ¿En qué intervalos el valor de la corriente eléctrica decrece rápidamente? ______________________ ¿Y en qué intervalos decrece lentamente? ____________________________________________

e) ¿Se trata de una relación de proporcionalidad? _______ Si su respuesta es afirmativa, ¿de qué tipo? _______ Argumenten en su cuaderno su respuesta.

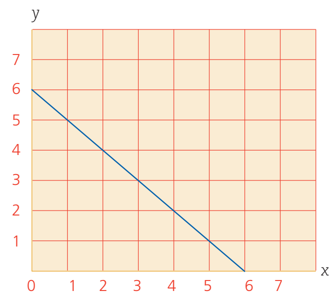
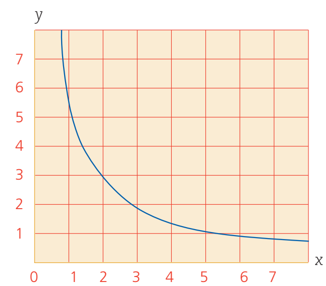
**5.** Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. En particular, comenten el análisis pedido en los incisos de la actividad 4.

Sesión 3

# Para terminar

## Diversos tipos de variación

**1.** Trabajen en pareja. Completen la siguiente tabla. Anoten si cada gráfica ilustra una relación de proporcionalidad y de qué tipo, o si no lo hace. También anoten una expresión algebraica que relacione *x* con *y*.

| Gráfica |  |  |
|---|---|---|
| ¿Se trata de una relación de proporcionalidad? | ☐ Sí ☐ No | ☐ Sí ☐ No |
| Si la respuesta es afirmativa, ¿de qué tipo es? | | |
| Expresión algebraica | | |



**2.** Una pileta de agua de 400 litros tarda en llenarse 16 horas al abrir una llave.

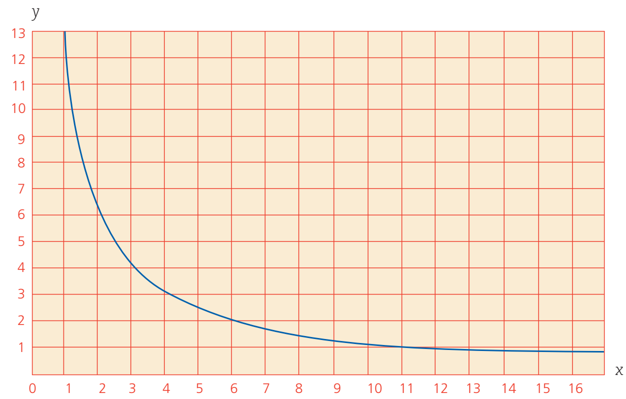
a) Completen la siguiente tabla considerando que se usan más llaves iguales para llenarla.

| Número de llaves (*x*) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | *x* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Tiempo en horas que tarda en llenarse (*y*) | | | | | | |

b) Anoten la expresión algebraica que relaciona el número de llaves (*x*) con el tiempo que tarda en llenarse (*y*). ____________________________

c) Tracen en su cuaderno la gráfica correspondiente y anoten si se trata o no de una relación de proporcionalidad; de ser así, anoten de qué tipo.

3. La siguiente gráfica corresponde a la corriente de un circuito eléctrico sencillo con una resistencia y que está conectado a una pila de 12 V. El eje *x* corresponde a la resistencia (R) conectada al circuito (en ohmios), y el eje *y* a la corriente eléctrica que circula por el circuito (en amperes).



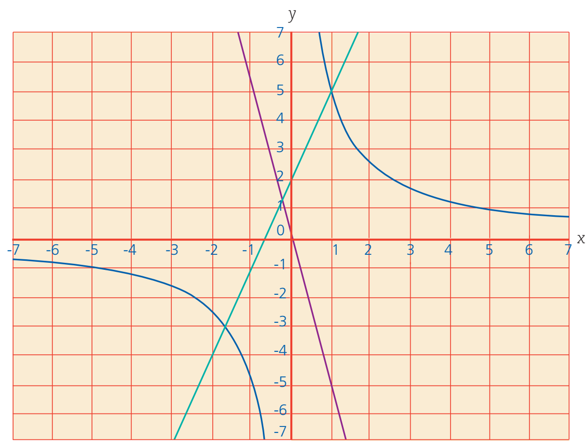

a) ¿Cuántos amperes de corriente eléctrica se obtienen cuando el circuito tiene una resistencia de 1 ohm? ____________________

b) ¿Cuál es la resistencia cuando pasa una corriente de 3 amperes por el circuito? __________

c) ¿Cuál es la expresión algebraica que relaciona la corriente (I) con el voltaje (V) y la resistencia (R)? ____________________

d) ¿Es una relación de proporcionalidad? Si su respuesta es afirmativa, ¿de qué tipo? ____________________ Argumenten en su cuaderno su respuesta.

4. En el plano cartesiano se han trazado tres gráficas. Para cada una, elaboren en su cuaderno la tabla correspondiente (con 5 parejas de números, incluir al menos dos parejas donde la *x* sea negativa). También anoten cada expresión algebraica que relaciona *x* con *y*, tanto en la tabla como en el plano cartesiano, de manera que sea posible identificar las gráficas.




5. Comparen sus respuestas con las de sus compañeros, corrijan en caso de que sea necesario. Después lean la siguiente información.

La expresión algebraica que representa una situación de variación inversamente proporcional es $k = xy$, donde $y = \frac{k}{x}$, $k$ es la constante de proporcionalidad, $x$ es diferente de 0.

6. Utilicen el recurso informático *Leyendo gráficas* para profundizar en el estudio de la lectura y construcción de gráficas que representan diferentes tipos de variación.

# 31. Polígonos 3

Sesión 1

## Para empezar

Lo que has aprendido sobre las relaciones entre los ángulos de los polígonos es muy útil en el arte y en la vida cotidiana; por ejemplo, en la elaboración de bellos mosaicos con que los árabes adornan las paredes y los pisos de sus templos y palacios; o la obra de Maurits Cornelis Escher, artista gráfico que usaba la geometría para elaborar sus famosos teselados. También se observan en la confección de objetos como cajas y tarjetas.

En esta secuencia aplicarás las construcciones geométricas para trazar polígonos regulares y elaborar tus propios teselados.

## Manos a la obra

### Construcción de polígonos

**1.** En equipo realicen los trazos que se indican. Usen sus instrumentos geométricos para construir en su cuaderno el polígono que se les pide. En caso necesario, consulten lo que aprendieron en la secuencia 8 del bloque 1, así como en la secuencia 22 del bloque 2.

a) Un hexágono regular de cualquier medida.
b) Un octágono regular de cualquier medida.
c) Un pentágono regular cuyo lado mida 2 cm.
d) Un octágono regular inscrito en una circunferencia.
e) Un decágono regular inscrito en una circunferencia.

**2.** Comparen con otros equipos los procedimientos que usaron para realizar las construcciones anteriores. Si son diferentes, averigüen a qué se debe y, en caso necesario, corrijan sus construcciones.

3. En grupo y con apoyo de su maestro, lean y analicen la siguiente información.

En un polígono regular de $n$ lados:

- Todos los lados y ángulos tienen la misma medida.
- Cada ángulo interno mide: $\frac{180°(n-2)}{n}$
- La medida del ángulo central es: $\frac{360°}{n}$
- Las medidas de los ángulos central y externo coinciden.
- Los ángulos central e interno son suplementarios, es decir, suman 180°.

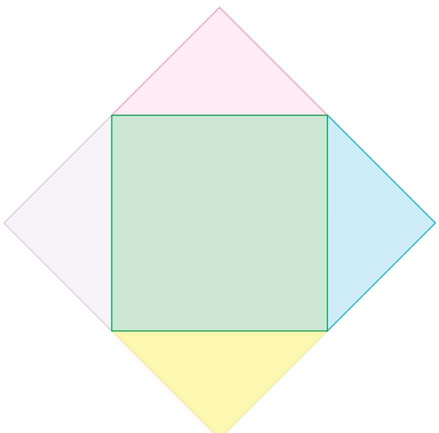
4. Observen el recurso audiovisual *Construcciones de polígonos regulares*, donde conocerán diferentes maneras de trazar los polígonos regulares.

## Diseños con polígonos

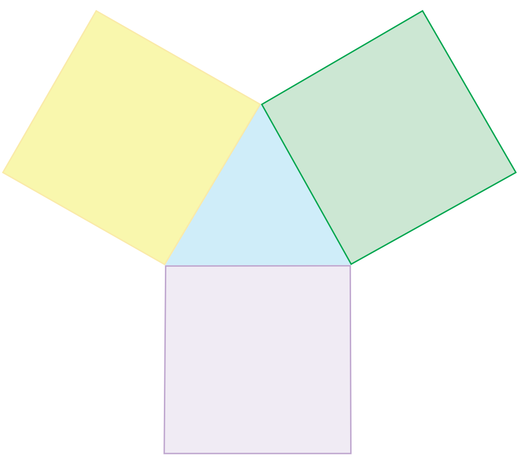
Sesión 2

1. Trabajen en equipo. Utilicen sus instrumentos geométricos para reproducir, a la derecha, el diseño que se muestra, de tal manera que quede aproximadamente del mismo tamaño. Primero hagan todos los diseños y, al final, coloréenlos a su gusto. No se permite calcar.

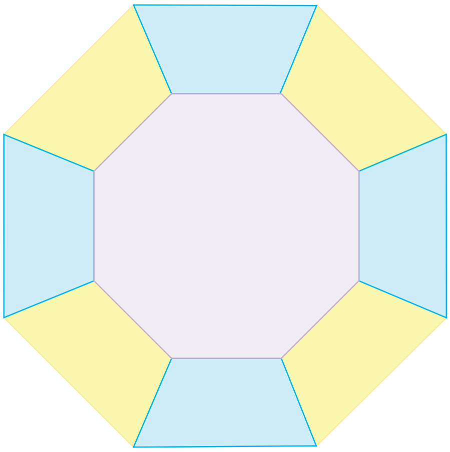
**A**



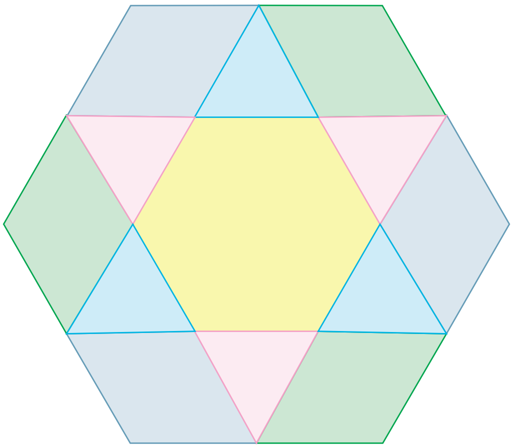
**B**



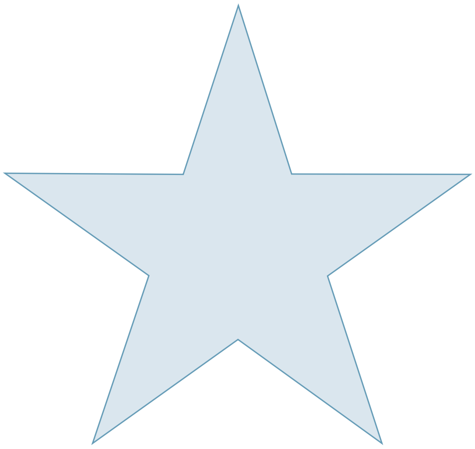
**C**



**D**



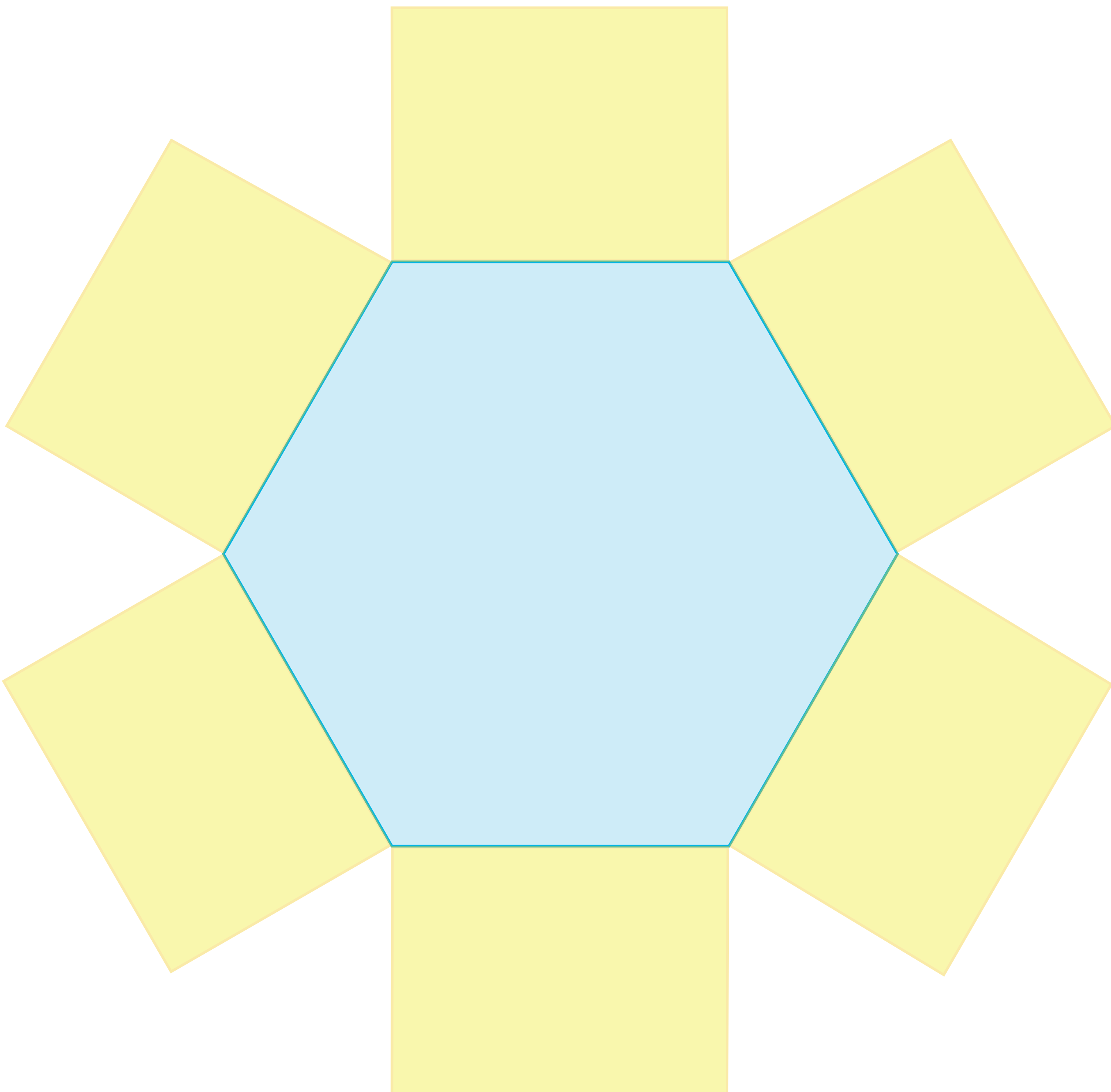
**E**



**2.** En grupo, comenten la manera en que trazaron cada uno de los diseños de esta sesión. Con apoyo de su maestro, anoten en su cuaderno los procedimientos que permiten trazar un polígono regular cuando está inscrito en una circunferencia y los que se requieren para trazarlo cuando se conoce la medida de uno de sus lados.

## Cajitas

1. Trabajen en equipo las actividades de esta sesión. Necesitan su juego de geometría, cartulina, tijeras y pegamento.
   a) Reproduzcan en la cartulina el siguiente molde para hacer una cajita sin tapa. Pongan pestañas donde consideren necesario. El hexágono regular de la base de la caja debe medir 8 cm de lado; la altura de los rectángulos debe ser de 6 cm.
   b) Recorten y armen la cajita.



2. Ahora tracen la tapa de la caja. Reproduzcan el mismo molde con un hexágono de 8.5 cm de lado; la altura de los rectángulos de 1.5 cm. Recorten y armen la tapa. Decoren la caja y la tapa a su gusto.

3. Construyan una caja similar a la anterior con su tapa. Ahora la base de la caja será un decágono regular y las caras laterales de la caja deben ser cuadrados. El tamaño es el que ustedes decidan. No olviden decorarla.

4. Hagan lo que se indica.
   a) Inventen un molde para hacer una caja. Pueden hacerlo del tamaño que quieran, la única condición es que usen, al menos, un polígono regular.
   b) Ármenla y decórenla como prefieran.

5. Muestren a sus compañeros sus cajas. Comenten la manera en que hicieron el trazo en cada uno de los moldes. Hagan una exposición en el salón donde muestren sus trabajos.

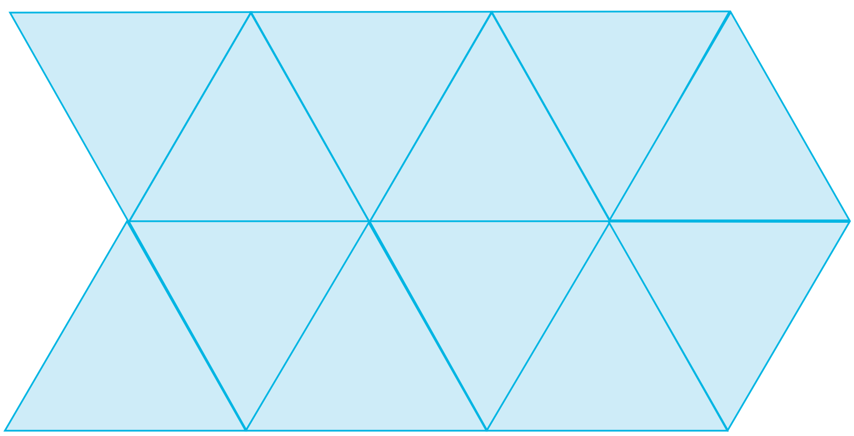
Sesión 4

## Para terminar

### Mosaico de polígonos

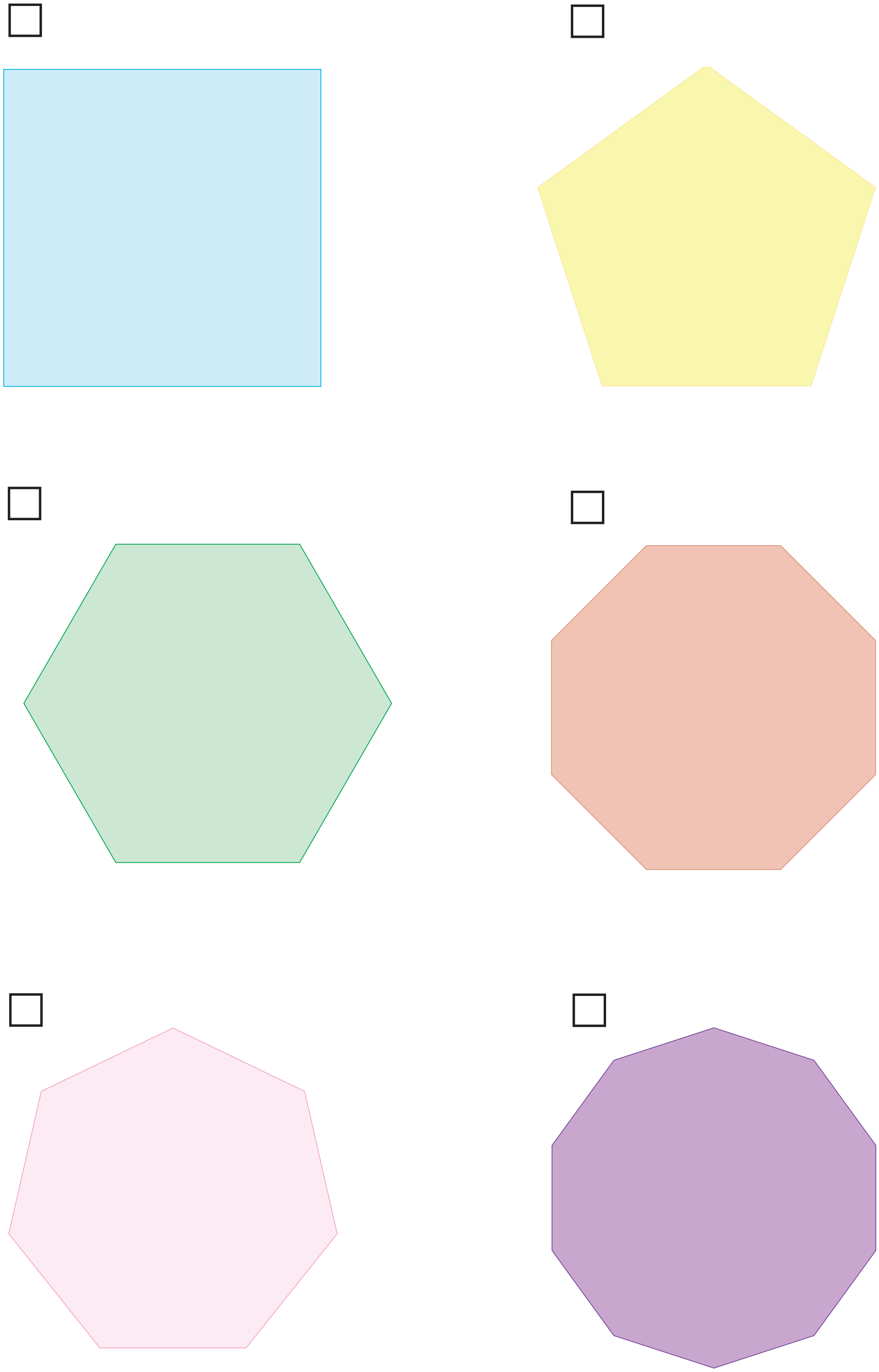
1. Trabaja de manera individual.

Para hacer mosaicos que cubran un piso o una pared es necesario que tengan la forma de una figura geométrica que cubra el plano sin dejar huecos y sin encimarlos. Por ejemplo:



a) Observa cómo se pueden poner los triángulos uno al lado de otro y se cubre el plano sin dejar huecos y sin encimarlos.

b) Anota una palomita (✓) a los polígonos con los que se pueden elaborar mosaicos usando un solo tipo de figura, como en el ejemplo anterior. Si tienes duda de alguno, puedes calcarlo y usarlo como molde para verificar si permite, o no, cubrir completamente el plano.

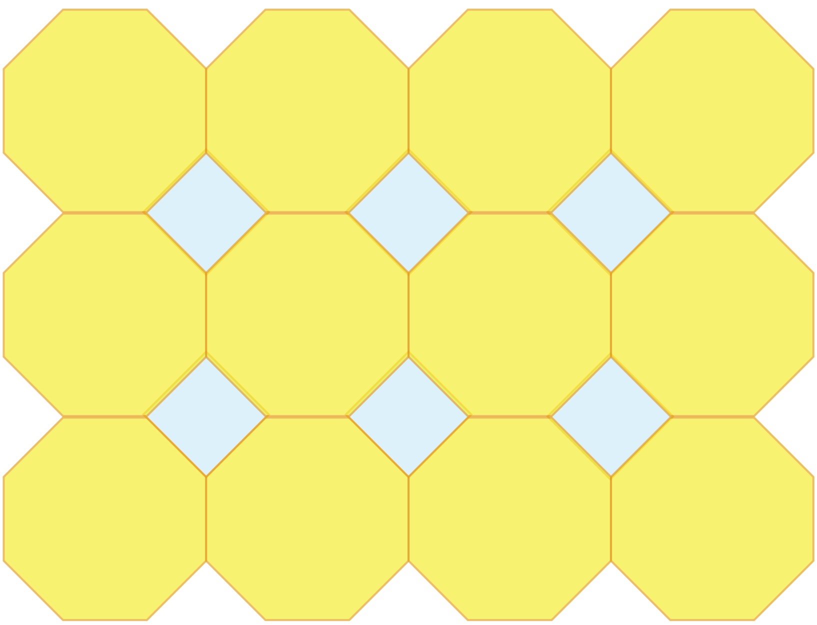


2. Para determinar por qué con unos polígonos sí se puede cubrir el plano con las condiciones anteriores y con otros no, completa la siguiente tabla.

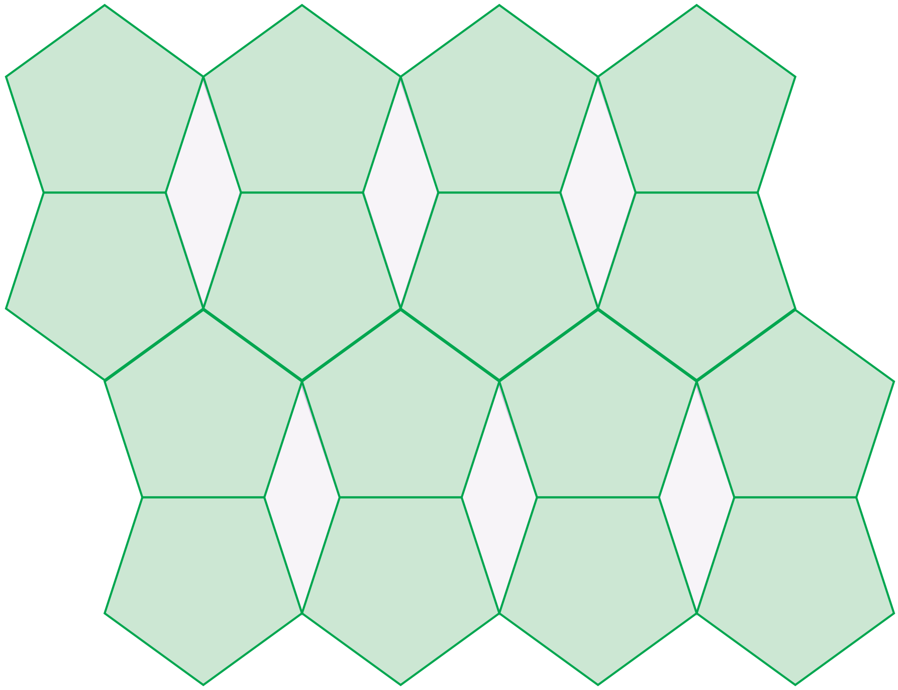
| Polígono regular | Medida del ángulo interno | ¿La medida del ángulo interno es divisor de 360°? | ¿Cubre el plano con las condiciones indicadas? |
|---|---|---|---|
| Triángulo equilátero | | | |
| Cuadrado | | | |
| Pentágono | | | |
| Hexágono | | | |
| Heptágono | | | |
| Octágono | | | |
| Decágono | | | |

3. Responde las siguientes preguntas.
   a) ¿Qué característica tienen los polígonos regulares con los que es posible cubrir el plano? ______
   b) ¿Cuáles son esos polígonos? ______
   c) ¿Existe otro polígono regular que no esté en la tabla anterior y con el cual se pueda cubrir también el plano? Justifica tu respuesta. ______

4. También es posible cubrir un piso o una pared usando dos tipos diferentes de polígonos, como los siguientes. Elige uno de los diseños y reprodúcelo en una hoja de tu cuaderno.



**Dato interesante**
Maurits Cornelis Escher fue un artista neerlandés que usó la geometría para hacer teselados de diversas formas. Si bien algunos de sus teselados muestran aves, caballos o algún otro animal, la base para hacerlos siempre fueron las figuras geométricas.



5. Comenta con tus compañeros cómo reprodujiste el teselado que seleccionaste.

6. Haz lo que se indica.
   a) Crea tu propio teselado en una cartulina. Luego usa el molde que inventaste para hacer una caja. Puedes hacerlo del tamaño que gustes, la única condición es que el decorado sea el papel teselado que creaste.
   b) Al terminar, arma tu caja. ¡Has aprendido a hacer tu propio arte!
   c) Elabora una ficha en la cual describas la composición de figuras que forman tu teselado y los polígonos que utilizaste para el molde de la caja.

7. Compara tu caja con la de tus compañeros. Comenta qué relaciones entre los ángulos de los polígonos se deben cumplir para que sea posible *teselar* el plano.

8. En grupo y con ayuda de su maestro, analicen la siguiente información.

> La medida del ángulo interno del polígono que se utilice para *teselar* un plano debe ser un divisor de 360°.

9. Utilicen el recurso informático *Teselados* y construyan diferentes mosaicos para *teselar* el plano.

# 32. Conversión de medidas 3

Sesión 1

## Para empezar

¿Sabías que el barril se usa mundialmente para medir la producción de petróleo? Para trasladarlo por mar, se utilizan buques petroleros o buques cisterna cuya velocidad promedio es de 21 millas náuticas por hora.

¿Cuántos litros de petróleo le caben a un barril? ¿Cuántos barriles de petróleo puede transportar un buque? ¿Cuál es la velocidad en kilómetros por hora de los buques? En esta secuencia calcularás estas y otras equivalencias.

## Manos a la obra

### Barriles de petróleo

**1.** Trabajen en equipo para responder lo que se pide. Marquen con una palomita (✓) la opción que consideren correcta.

Los principales productores de petróleo de América Latina son Venezuela, Brasil, México, Colombia y Ecuador. La producción de petróleo de un país se cuenta por la cantidad de barriles extraídos diariamente. México extrajo 1 728 875 barriles diarios en diciembre de 2018.

> **Dato interesante**
> El litro (L) es la unidad básica de medida de capacidad en el Sistema Internacional, usada para medir el volumen de un líquido. El galón (gal) es una unidad de capacidad o volumen de líquidos en el Sistema Inglés y equivale a 3.785 litros.

a) Si un barril de petróleo equivale a 42 galones y el galón a 3.785 litros, ¿qué operación permite calcular la cantidad de litros que tiene un barril de petróleo?

☐ (3.785) ÷ (42) ☐ (42) (3.785)

☐ (42) ÷ (3.785) ☐ (3.785) (42)

b) ¿Qué cantidad de litros tiene un barril de petróleo? ____________________

c) ¿Qué operación permite obtener la cantidad de galones de petróleo producidos diariamente en México en esa fecha?

☐ (1 728 875) ÷ (42) ☐ (42) (3.785)

☐ (1 728 875) ÷ (3.785) ☐ (1 728 875) (42)

d) En 2018, ¿cuál fue la cantidad de galones de petróleo producidos diariamente en México? ____________

2. La imagen muestra los porcentajes de otros productos que se obtienen de un barril de petróleo. Anoten en la siguiente tabla la cantidad en litros de cada producto obtenido de un barril.

| Litros de petróleo por barril | Gasolina | Diésel | Betún | Gases | Naftas | Queroseno | Fuelóleo | Lubricantes | Otros |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 159 | | | | | | | | | |


3. México comercializa su producción de petróleo con varios países. España es uno de los que compra petróleo a México.

a) Un buque petrolero sale del puerto de Coatzacoalcos, en México, al de Cartagena, en España. La distancia entre ambos puertos es de 5 063.175 millas náuticas.

Marquen con una palomita (✓) el recuadro con la expresión que permite calcular esta distancia en kilómetros y obténgala.

☐ (5 063.175) / (1.609) ☐ (5 063.175) (1.609)

☐ (1.852) / (5 063.175) ☐ (1.852) (5 063.175)

b) El buque tiene una velocidad promedio de 19 millas por hora, ¿cuánto tardará en llegar a su destino? ______________

c) Cada barril de petróleo crudo que traslada el buque pesa en promedio 136 kg. Si el buque lleva 272 000 toneladas en barriles de petróleo, ¿cuántos barriles transporta? ______________

d) En abril de 2019 el precio del barril de petróleo mexicano se vendió en un promedio de 63 dólares. Si en ese momento el cambio del dólar estaba alrededor de $18.90, ¿cuál era el precio del barril en pesos mexicanos? ______________

**Dato interesante**

La milla náutica es una unidad del Sistema Inglés que se usa para la navegación marítima y aérea. Ésta equivale a 1.852 km, mientras que la terrestre es de 1.609 km. Su velocidad se mide en nudos, que representan el avance de millas por hora.

4. Comparen sus respuestas y comenten cuáles son las operaciones que eligieron para calcular la cantidad de litros que tiene un barril de petróleo y la de galones producidos diariamente en México en 2018. Además, comenten la estrategia que siguieron para completar la tabla de la actividad 2 y contestar las preguntas de los incisos b) y d) de la actividad 3. Si hay errores, analicen en qué consistieron y corríjanlos.

## Un deporte rudo

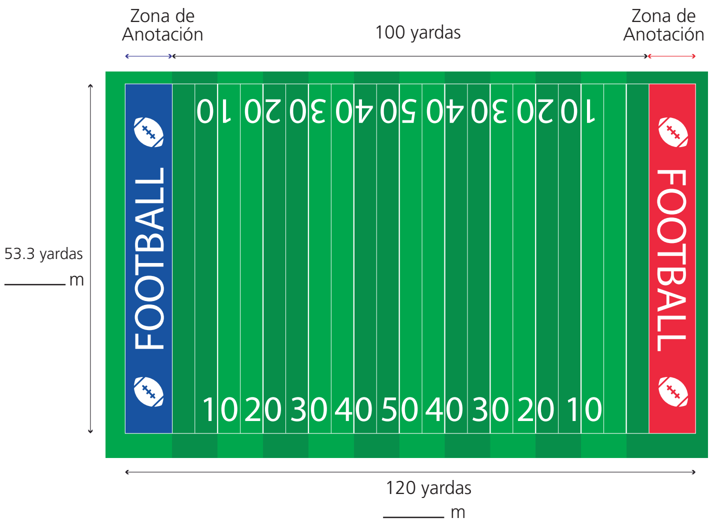
Sesión 2

1. Trabajen en pareja las actividades de esta sesión.

En el futbol americano participan en la cancha dos equipos con 11 jugadores cada uno, un equipo es ofensivo y otro defensivo. El equipo ofensivo debe llevar el balón hasta la línea de anotación.

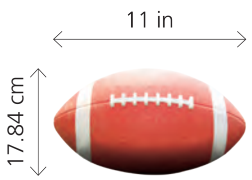
a) En un partido, el equipo de los Búhos avanzó un total de 278 yardas, mientras que el equipo de los Halcones logró 349 yardas. ¿Cuántos metros avanzó cada equipo? Escríbanlo en la tabla.

| Equipo | Avance en… | |
|---|---|---|
| | Yardas | Metros |
| Búhos | 278 | |
| Halcones | 349 | |




b) En una colonia se va a construir un centro deportivo con varias canchas, entre ellas habrá una de futbol americano como la que se muestra. Para trazarla, los trabajadores requieren las medidas en metros. ¿Cuántos metros tiene de largo y de ancho la cancha? Anoten las medidas en el dibujo.

c) ¿Cuántos metros deben dejar para la zona de anotación en cada lado de la cancha? ____



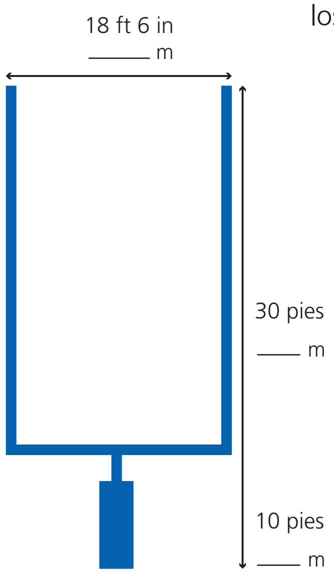

**2.** Consideren las medidas del balón de futbol americano y contesten lo que se pide.

a) ¿Cuántas pulgadas mide de circunferencia central? ____

b) ¿Cuántos centímetros tiene de largo? ____

c) Cuando está inflado, el peso del balón es de 15 onzas, aproximadamente. ¿Cuántos gramos pesa? ____

d) Para un juego se deben tener listos 8 balones. ¿Cuál es el peso en gramos de todos los balones? ____




**3.** La imagen muestra las medidas del poste de gol. Anoten en el dibujo las medidas en metros.

**4.** Máximo González es el mejor jugador mexicano de futbol americano colegial y el primero en participar en el Programa Internacional de Jugadores de la Liga de Futbol Americano Nacional de Estados Unidos de América (NFL).

a) Completen la tabla:

| | |
|---|---|
| Peso: 110 kilogramos | En libras: |
| Estatura: 1.89 metros | En ft: |

5. Cada equipo de futbol americano tiene un grupo de jugadores defensivos y otro de ofensivos. Dos ejemplos de esas posiciones son la de mariscal de campo y ala defensiva, respectivamente.

   a) El peso (masa) promedio de un mariscal de campo en la liga de Estados Unidos (*quarterbacks*) es de 88 kg, ¿a cuánto equivale esto en libras? ____________________

   b) Un jugador de ala defensiva pesa 270 libras en promedio, ¿cuál es su peso en kilogramos? __________

   c) Comparen el peso de Máximo González con el del promedio de los mariscales de campo. ¿Cuántas libras hay de diferencia? ____________________

6. En grupo, y con apoyo de su maestro, comparen sus respuestas y comenten las operaciones que eligieron para responder las preguntas. Si hay diferencias, analicen a qué se debieron y lleguen a acuerdos.

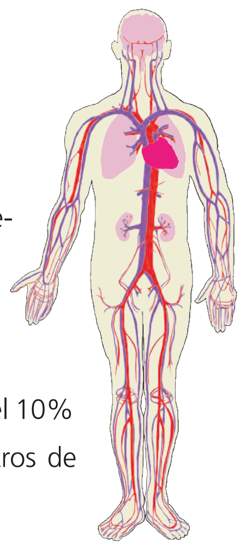
> En el Sistema Internacional de unidades (SI), la unidad básica de medida de masa es el kilogramo (kg).
>
> En el Sistema Inglés, la libra y la onza son unidades de masa (peso), cuya equivalencia es de 0.453 kg y 28.3 g, respectivamente.
>
> La yarda (yd) y el pie (ft) son unidades de medida de longitud en el Sistema Inglés. Una yarda equivale a 0.9144 m y un pie a 0.3048 m.

7. Observen el recurso audiovisual *Más sobre las unidades de medidas*, donde encontrarán más información sobre las unidades del Sistema Internacional de Unidades y del Sistema Inglés.

## Para terminar

Sesión 3

### Cuestión de vida



1. Trabajen en pareja para responder las siguientes preguntas.

   La sangre es un componente fundamental de nuestro cuerpo. El promedio de sangre que tiene un bebé es de 75 ml por cada kilogramo de peso corporal.

   a) Si un bebé pesa 9 kg, ¿cuánta sangre tiene aproximadamente? __________

   b) A los donadores de sangre les extraen 450 ml de sangre, que representan el 10% de la sangre total que tiene el cuerpo de un adulto. Calcula cuántos litros de sangre, en promedio, tiene un adulto. ______________

c) En un hospital requirieron 7 donadores de sangre, ¿cuántos litros de sangre obtuvieron de todos ellos? ______________

d) El corazón de una persona en reposo late, en promedio, 80 veces por minuto y bombea, en promedio, 2.5 onzas de sangre en cada latido. ¿Cuántos mililitros de sangre bombea en un minuto? __________

¿Cuántas veces late el corazón en una hora? __________

e) Aproximadamente, 15% de la sangre bombeada por el corazón en un minuto va directa hacia el cerebro, ¿cuántos mililitros de sangre llegan al cerebro por minuto? ______________

f) Si se pudieran colocar en fila todas las arterias, venas y capilares del sistema cardiovascular de una sola persona, se obtendría un hilo de aproximadamente 96 000 km. La longitud de la circunferencia de la Tierra es 24 901.451 millas. ¿Cuál de las dos longitudes es mayor? _______________

¿De cuánto es la diferencia? __________________

**2.** Trabaja individualmente para hacer lo que se pide. Elige la opción o las opciones que consideres que podrían corresponder a cada caso; es decir, haz una estimación. Justifica tu elección en tu cuaderno.

a) La longitud de una lombriz de tierra.
- 60 metros
- 60 centímetros
- 60 kilómetros

b) El peso de una abeja.
- 150 miligramos
- 150 gramos
- 150 onzas

c) La distancia de México a Argentina.
- 8 000 kilómetros
- 8 000 centímetros
- 8 000 metros

d) La cantidad de agua de la cisterna de una casa.
- 6 000 galones
- 6 000 mililitros
- 6 000 litros

**3.** Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Revisen particularmente los procedimientos que realizaron y por qué los eligieron. Si tienen diferencias, analicen a qué se debieron y, si es necesario, corrijan.

**4.** Daniel trabaja como ayudante de un profesor de Biología. Ambos están elaborando fichas informativas de algunos animales acuáticos. Cuando el maestro escribe los datos en unidades del Sistema Internacional, Daniel debe hacer otra ficha con las equivalencias en el Sistema Inglés; cuando el maestro le da la información en el Sistema Inglés, Daniel debe escribirla también en el Sistema Internacional. Ayúdale anotando los datos que hacen falta en la segunda ficha de cada animal.

Ballena azul
Nombre científico: *Balaenoptera musculus*
Reproducción: cada dos o tres años
Velocidad promedio: 20 km/h

| | | | |
|---|---|---|---|
| Tamaño a edad adulta (longitud) | 30 m | | ft |
| Peso máximo (masa) | 180 toneladas | | libras |
| Alimentación diaria | 3 500 kg de krill | | libras de krill |
| Peso de una cría al nacer | 3 toneladas | | lb |
| Tamaño de una cría al nacer | 7 m | | ft |
| Alimentación diaria de una cría | 145 litros de leche | | fl oz de leche |

**Dato interesante**
El krill es un crustáceo muy pequeño y nutritivo que se parece al camarón. Se encuentra en grandes cantidades en el océano y es parte del zooplancton (grupo de especies pequeñas que viven en aguas dulces y marinas). El krill sirve de alimento a pingüinos, peces y grandes mamíferos como las ballenas.

Elefante marino del sur o mirounga
Nombre científico: *Mirounga leonina*
Periodo de gestación: 11 meses

| | | | |
|---|---|---|---|
| Tamaño del macho | 19 ft | | m |
| Tamaño de la hembra | 10 ft | | m |
| Peso del macho | 8 000 lb | | kg |
| Peso de la hembra | 1 900 lb | | kg |
| Peso de una cría al nacer | 77 lb | | kg |
| Tamaños de una cría al nacer | 3.5 ft | | m |

**5.** Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Si tienen diferencias, analicen los procedimientos que realizaron para hacer las conversiones; si tuvieron errores, corríjanlos.

**6.** Resuelvan problemas que implican convertir medidas de longitud, peso y capacidad (volumen de líquidos) mediante el recurso informático *Conversión de unidades de medida*.

# 33. Volumen de cilindros rectos

## Para empezar

Sesión
1


Cuando vayas a una tienda, observa cómo muchos productos están envasados en latas. En la fabricación de latas cilíndricas entran en juego varios conocimientos matemáticos, por ejemplo: ¿cuáles podrían ser las medidas de una lata cilíndrica si se requiere que el contenido sea de un cuarto de litro?, ¿cuáles medidas deben considerarse para calcular el volumen de una lata cilíndrica?

Con el estudio de esta secuencia resolverás problemas de este tipo.

## Manos a la obra

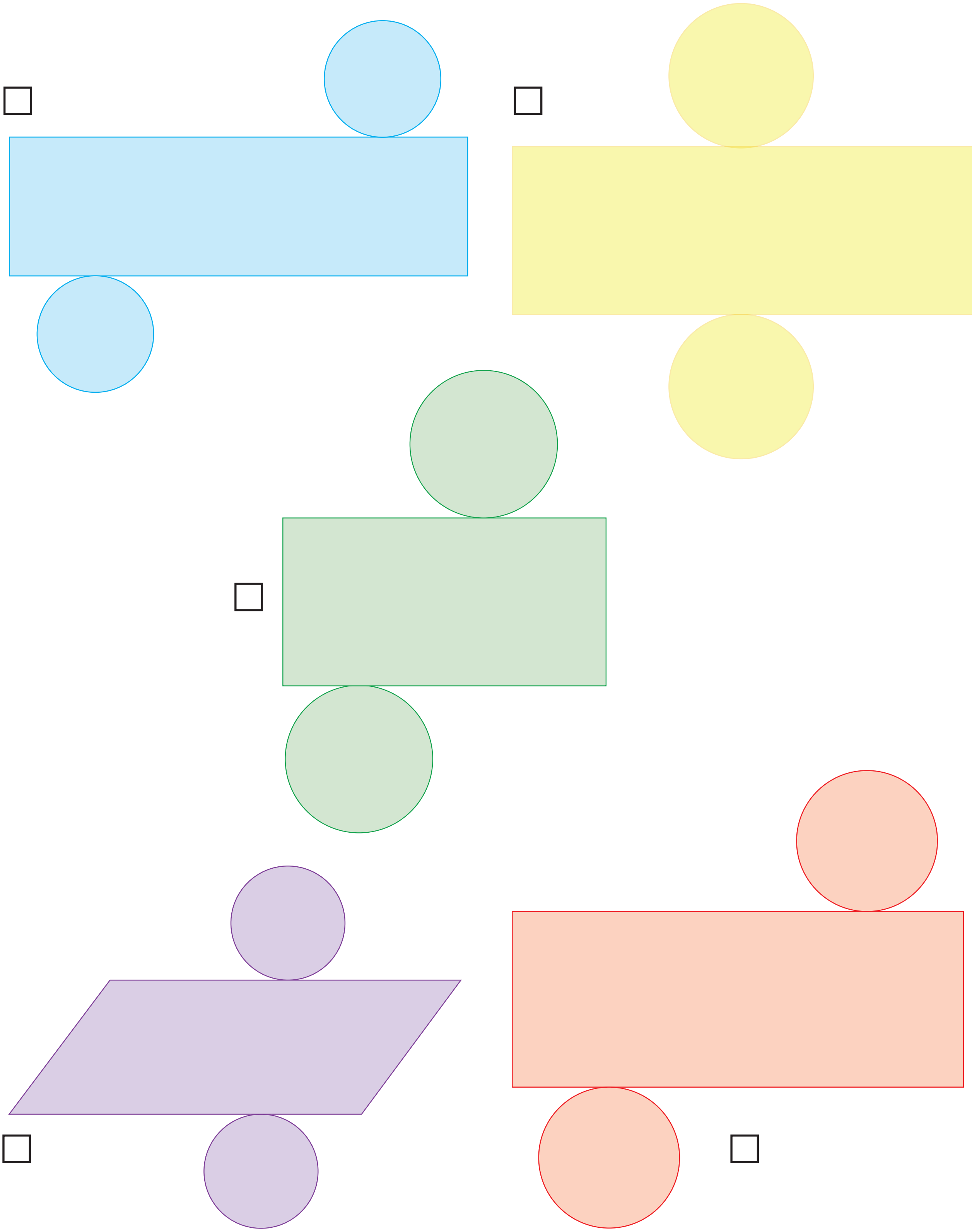
### Latas

1. Trabajen en pareja las siguientes actividades. Observen los moldes que aparecen en la página 255. Marquen con una palomita (✓) aquellos con los que es posible construir un cilindro.

2. Completen la siguiente tabla. Para responder la tercera columna, consideren sólo los moldes con los que sí se puede armar un cilindro; anoten 1 al que piensen que tiene el mayor volumen, 2 al siguiente y así sucesivamente.

| Color | ¿Se puede o no armar un cilindro? | Orden de acuerdo con su volumen |
|---|---|---|
| Rojo | | |
| Azul | | |
| Verde | | |
| Amarillo | | |
| Morado | | |

3. Comprueben sus respuestas de la tabla anterior siguiendo estos pasos:
   a) Calquen y recorten los moldes; confirmen con cuáles se puede armar un cilindro. No olviden colocar las pestañas necesarias para construirlo.
   b) Busquen una manera de comprobar si ordenaron correctamente los volúmenes de los cilindros. Anoten en su cuaderno lo que hicieron.

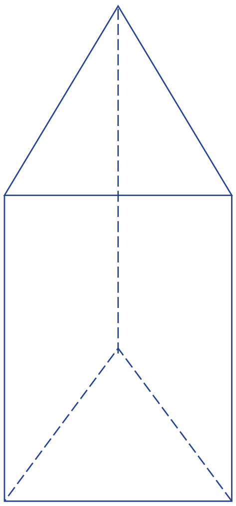


4. En grupo, comenten en qué se fijaron para saber si con un molde podría armarse un cilindro. ¿Qué estrategia siguieron para ordenar los cilindros de acuerdo con su volumen?

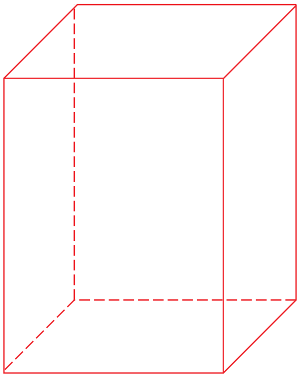
Sesión
2

## ¿Cuál es la fórmula?

**1.** Trabajen en equipo. Consideren los siguientes cuerpos geométricos. Tracen los moldes correspondientes y ármenlos.

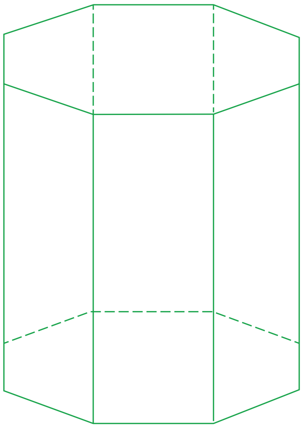


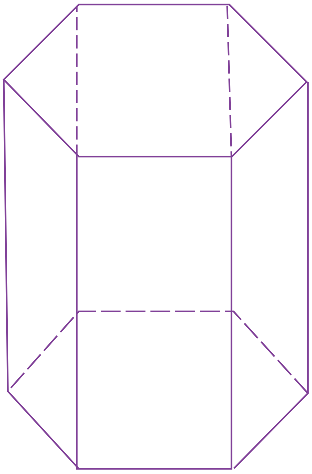
Base: Triángulo equilátero
Lado del triángulo: 3 cm
Altura del prisma: 5 cm



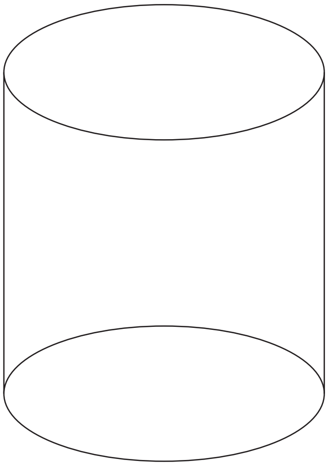
Base: Cuadrado
Lado del cuadrado: 4.2 cm
Altura del prisma: 5 cm

Base: Octágono regular
Lado del octágono: 2.3 cm
Altura del prisma: 5 cm





Base: Hexágono regular
Lado del hexágono: 3 cm
Altura del prisma: 5 cm



Radio del círculo: 3 cm
Altura del cilindro: 5 cm

2. Completen la siguiente tabla. En el caso del cilindro anoten el volumen aproximado.

| Nombre | Volumen ($cm^3$) |
|---|---|
| Prisma triangular | |
| Prisma cuadrangular | |
| Prisma hexagonal | |
| Prisma octagonal | |
| Cilindro | |

3. Escriban la estrategia que siguieron para estimar el volumen aproximado del cilindro.

4. Observen que para calcular el volumen de un cilindro pueden considerarlo como un prisma cuya base es un círculo. Con base en lo anterior, completen la siguiente información:

Para calcular el volumen de un prisma se usa la fórmula:
- Volumen de un prisma = área de la base × ______________

Si consideramos el cilindro como un prisma, su base es un círculo.
- Área del círculo = ______________

Sustituyendo la fórmula para calcular el área de un círculo, se tiene:
- Volumen del cilindro = ______________ × altura

5. En grupo, comparen sus respuestas y respondan lo que se pide.
   a) ¿Todos llegaron a la misma fórmula para calcular el volumen de un cilindro? ______________ ¿Cómo lo supieron? ______________
   b) ¿Qué medidas del cilindro necesitan saber para calcular su volumen? ______________ y ______________
   c) Utilicen la fórmula que anotaron para calcular el volumen del cilindro en la actividad 2 (consideren $\pi = 3.14$) y determinen si llegaron a un resultado cercano.

6. Observen el recurso audiovisual *Volumen de cilindros*, donde se desarrolla la fórmula para calcular el volumen de cilindros.

Sesión 3

# Para terminar

## Resolvamos problemas

**1.** Trabajen en pareja. Calculen en su cuaderno el volumen de las siguientes latas.

$d$ = 10 cm


$h$ = 4 cm

$V$ = ___________

$r$ = 4 cm


$h$ = 10 cm

$V$ = ___________

$r$ = 2 cm


$h$ = 15 cm

$V$ = ___________

$d$ = 9 cm


$h$ = 7 cm

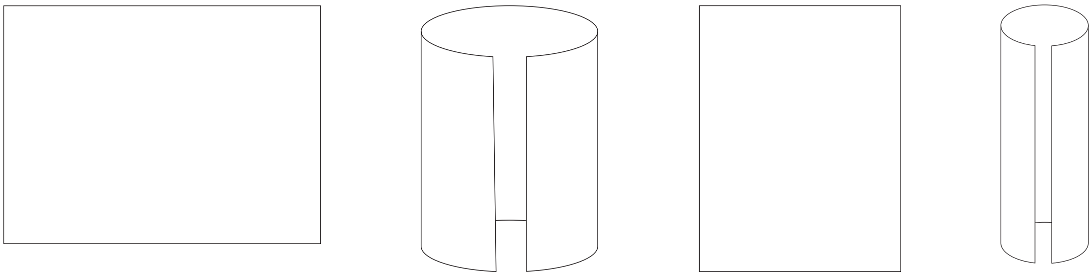
$V$ = ___________

**2.** La siguiente tabla muestra algunas medidas de tinacos con forma de cilindro. Escriban los datos faltantes. Recuerden que en un decímetro cúbico cabe un litro de agua.

| Capacidad (L) | Diámetro (m) | Altura (m) |
|---|---|---|
| 452 | 0.759 | 1 |
| | 0.97 | 1.12 |
| 750 | 1.10 | |
| 1 100 | 1.10 | |
| 2 500 | | 1.60 |

3. Se tiene una tarjeta rectangular que mide 8 cm de largo y 6 cm de ancho. Si esta tarjeta se usa como cara lateral de un cilindro puede usarse de dos maneras.

***A*** ***B***



a) ¿Con cuál se obtiene un cilindro de mayor volumen? ______________________

4. Un fabricante desea hacer latas cilíndricas con capacidad de un litro.

a) Anoten tres propuestas de medidas que podría tener la lata:

| Propuesta | Radio de la base | Altura de la lata |
|---|---|---|
| 1 | | |
| 2 | | |
| 3 | | |

b) ¿Cuál le conviene construir si quiere usar la menor cantidad de material?

______________________________________________

5. En grupo, comenten sus conclusiones de las actividades anteriores. Luego, completen el siguiente enunciado:

Si un cilindro mantiene constante su altura pero el radio varía,

______________________________________________

a) ¿El volumen del cilindro es proporcional a la medida del radio? ______________

b) Argumenten su respuesta. ______________________________________________

______________________________________________

______________________________________________

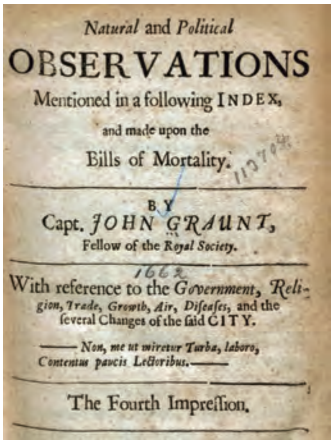
6. En grupo, comparen sus respuestas y procedimientos. Si hay errores, corríjanlos.

7. Practiquen la resolución de problemas que implican el cálculo de volúmenes de cilindros en el recurso informático *Cilindros y volúmenes*. En: https://proyectodescartes.org/EDAD/materiales_didacticos/EDAD_2eso_volumen_cuerpos_geometricos-JS-LOMCE/index.htm

# 34. Gráficas de línea

Sesión 1

## Para empezar




Desde épocas antiguas, los seres humanos han registrado diversos aspectos de su vida. Por ejemplo, en el Imperio egipcio se efectuaban periódicamente recuentos de personas, terrenos y utensilios, pues las inundaciones ocasionadas por el desbordamiento del río Nilo provocaban pérdidas humanas y materiales. También, en el Imperio romano se realizaban censos de población.

En 1662, el inglés John Graunt publicó en Londres unas tablas acerca de la mortalidad en esa ciudad que permitieron establecer las posibles causas, según los conocimientos de aquella época. Esa publicación demostró que los registros sirven para saber cuánta población hay en un momento determinado, pero también para obtener conclusiones, hacer predicciones e inferencias, y tomar decisiones. A esto actualmente se le conoce como *Estadística*.

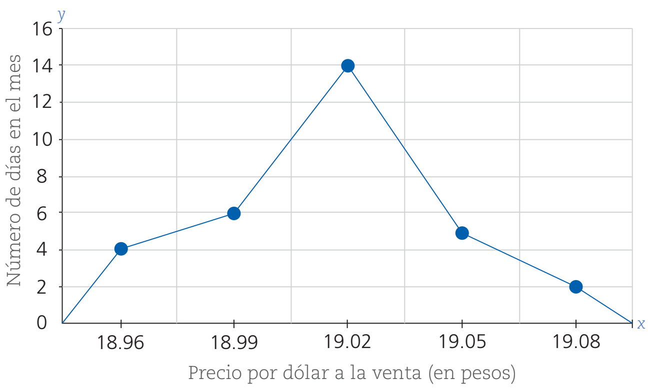
Hacer estudios estadísticos implica recolectar datos, organizarlos y presentarlos, para luego analizarlos, interpretarlos y utilizarlos. Desde la primaria has aprendido a hacer tablas y gráficas estadísticas, y te has ejercitado en su interpretación. Ahora profundizarás en ese conocimiento al trabajar con las gráficas de línea y los polígonos de frecuencia.

## Manos a la obra

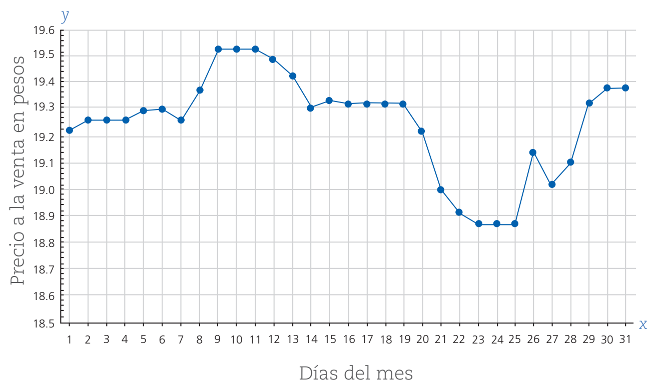
### Cambio de divisas

**1.** Trabajen en pareja las actividades de esta sesión. Consideren las siguientes gráficas y respondan cada inciso.

Gráfica 1 | Distribución del tipo de cambio del dólar a la venta en pesos durante un mes




Gráfica 2 | Tipo de cambio del dólar en pesos durante el mes de marzo 2019




Fuente: Banco de México, "Mercado cambiario (tipos de cambio)", 2019.

| Información | Gráfica 1 | Gráfica 2 |
|---|---|---|
| a) El tipo de cambio del dólar a la venta en pesos con que inicia el mes. | | |
| b) El tipo de cambio del dólar a la venta más frecuente en el mes. | | |
| c) El rango del precio de venta en pesos del tipo de cambio del dólar en un mes. | | |
| d) El tipo de cambio del dólar más caro en el mes. | | |
| e) El tipo de cambio del dólar al terminar el mes. | | |
| f) El mayor incremento en el mes del tipo de cambio del dólar. | | |
| g) El tipo de cambio del dólar en el día 15 del mes. | | |
| h) El tipo de cambio del dólar es de $18.50 | | |

**2.** Observen las gráficas del numeral anterior y escriban lo que se pide en cada inciso.

| Elemento | Gráfica 1 | Gráfica 2 |
|---|---|---|
| a) Título de la gráfica. | | |
| b) Título del eje horizontal. | | |
| c) Título del eje vertical. | | |
| d) Escala de valores del eje horizontal. | | |
| e) Escala de valores del eje vertical. | | |

**3.** Elaboren en su cuaderno la tabla que le corresponde a cada gráfica.

**4.** En grupo, comparen sus respuestas. Apóyense en las siguientes preguntas.

a) ¿Cuántos renglones (o filas) utilizaron para representar los valores del eje horizontal?

b) ¿Qué representa cada renglón (o fila)?

c) ¿Cuántas filas (renglones) utilizaron para representar los valores del eje vertical?

5. En grupo y con apoyo de su maestro, lean y comenten la siguiente información.

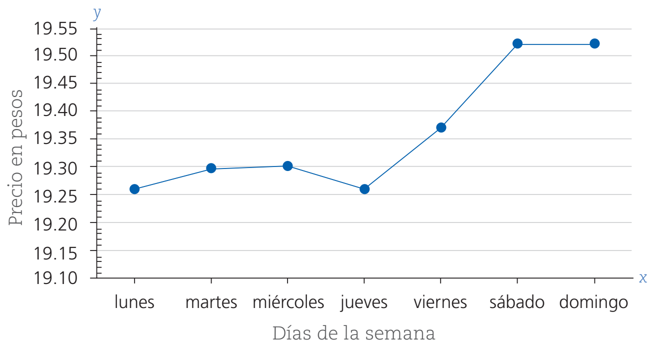
Una **gráfica de línea**, como la gráfica 2, presenta el comportamiento registrado a través del tiempo de una situación o fenómeno, mientras que un **polígono de frecuencias**, como la gráfica 1, presenta la distribución del número de veces que se registraron los datos.

Sesión 2

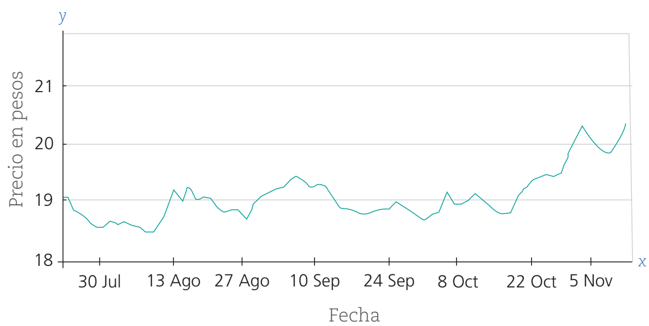
## El precio del dólar a través del tiempo

1. Realiza individualmente la siguiente actividad. Se encontraron las siguientes gráficas respecto al tipo de cambio del dólar en pesos.

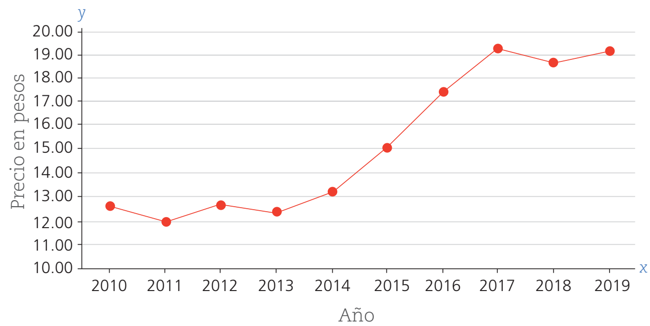
Gráfica 3 | Tipo de cambio del dólar en pesos del 04/03/2019 al 10/03/2019




Gráfica 4 | Tipo de cambio del dólar en pesos del 20 de julio de 2018 al 9 de noviembre de 2018




Gráfica 5 | Comparativo del tipo de cambio del dólar en pesos a la venta tomando como referente el día 22 de marzo de cada año




2. Escribe lo que se pide en cada inciso.

| Elemento | Gráfica 3 | Gráfica 4 | Gráfica 5 |
|---|---|---|---|
| a) Título de la gráfica. | | | |
| b) Título del eje horizontal. | | | |
| c) Título del eje vertical. | | | |
| d) Escala de valores del eje horizontal. | | | |
| e) Escala de valores del eje vertical. | | | |

**3.** Completen en equipo la siguiente conclusión a partir de la información de las gráficas.

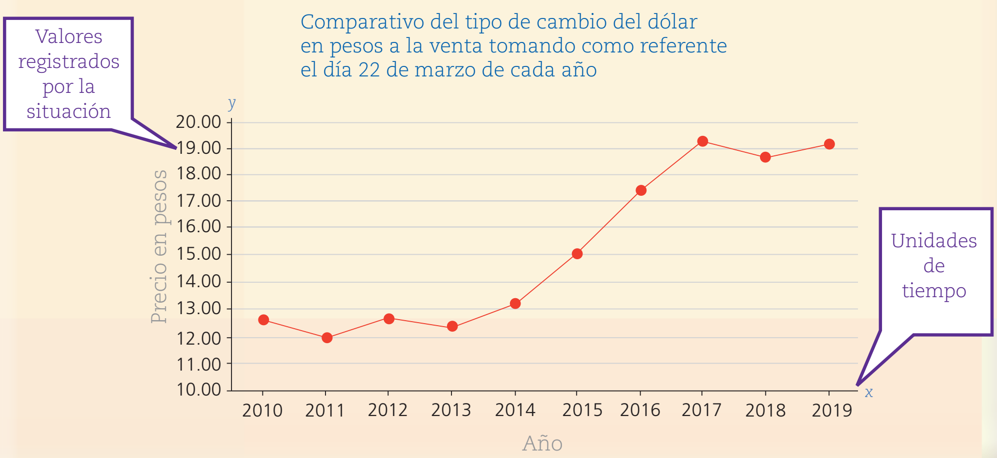
La gráfica 3 muestra ______________________________.

Se observa que hay un ______________ (aumento/decremento) el día jueves y al día siguiente se presentó un ______________ (aumento/decremento). El mayor ______________ (aumento/decremento) del precio en el tipo de cambio del dólar en pesos se presentó el día ______________.

**4.** Con apoyo de su maestro, comparen las cinco gráficas, observen los elementos que las integran y la información que presentan. Luego, anoten en su cuaderno cuáles son las semejanzas y diferencias que identificaron.

**5.** Comparen sus respuestas y después lean la siguiente información.

Una gráfica de línea muestra las variaciones que ha tenido una situación en el tiempo. De ahí que en el *eje horizontal* se presentan las unidades de tiempo, que pueden ser años, meses, días, horas, etcétera. En el *eje vertical* se registran los valores que adquiere la situación o fenómeno durante el tiempo que se observa y analiza; por lo que no necesariamente debe iniciar con un valor de 0. Por lo tanto, una gráfica de línea no siempre corta el eje horizontal ni es cerrada.




**6.** Observen el recurso audiovisual *Gráficas de línea* para que analicen y aprecien diferentes gráficas de este tipo y conozcan otras situaciones que es posible presentar en ellas, así como algunos aspectos que hay que considerar en su construcción.

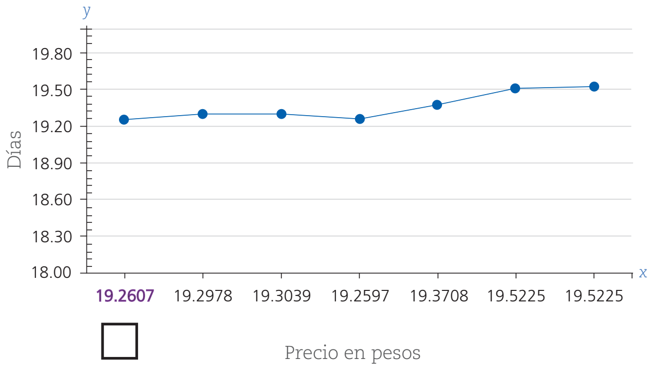
Sesión 3

# El precio de los productos básicos

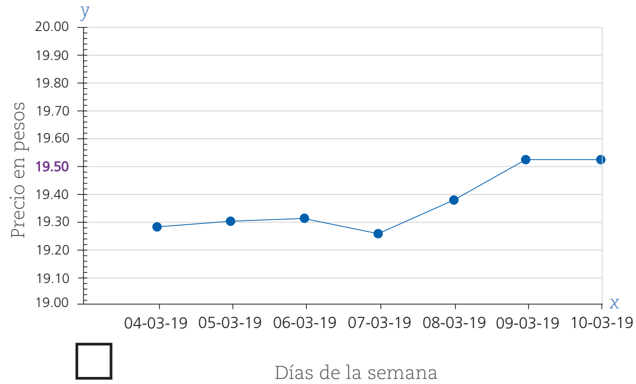
**1.** Trabajen en equipo.

a) Observen la gráfica 3 de la sesión anterior. Luego, indiquen con una palomita (✓) cuál de las siguientes gráficas presenta la misma información. Justifiquen en su cuaderno su respuesta.

Gráfica 6 | Tipo de cambio del dólar en pesos durante una semana

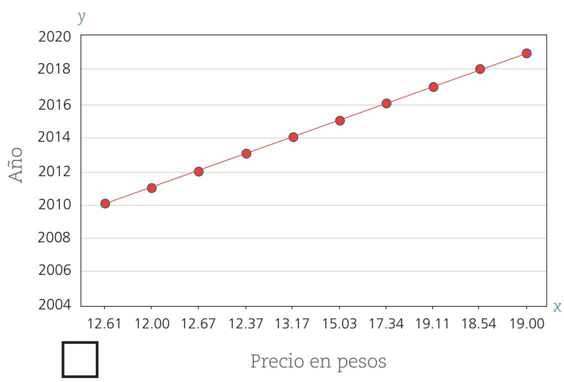



Gráfica 7 | Tipo de cambio del dólar en pesos durante una semana

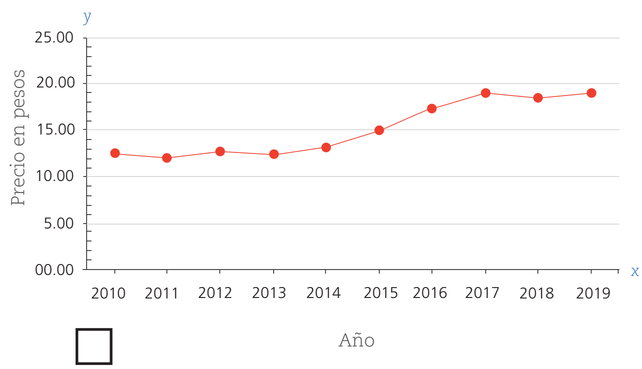



b) Ahora, consideren la gráfica 5 e indiquen cuál de las siguientes gráficas presenta la misma información. Justifiquen en su cuaderno su respuesta.

Gráfica 8 | Comparativo del tipo de cambio del dólar en pesos a la venta tomando como referente el día 22 de marzo de cada año




Gráfica 9 | Comparativo del tipo de cambio del dólar en pesos a la venta tomando como referente el día 22 de marzo de cada año




**2.** En su cuaderno escriban las razones por las cuales eligieron las gráficas en cada caso, después comenten en grupo y lean la siguiente información.

Un aspecto importante al trazar una gráfica es considerar la escala de valores que se usará, ya que una selección adecuada permite visualizar de mejor manera la tendencia y comportamiento de los datos. En Estadística, cuando se hacen ajustes a la escala de valores de una gráfica, puede ocurrir que se *suavice* o *acentúe* la tendencia de los datos, lo cual puede ser utilizado para manipular la información.

**3.** Comparen las gráficas 5 y 9, y respondan las siguientes preguntas en su cuaderno.

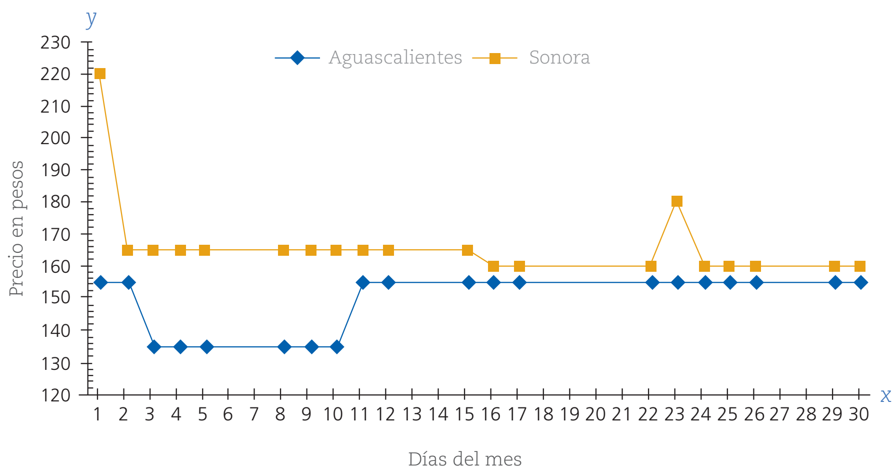
a) ¿En cuál se observa mejor el incremento que ha tenido el tipo de cambio del dólar en pesos en los últimos 10 años?

b) ¿Es correcto afirmar que a mitad del año 2018 el precio del dólar era de $18.75? Justifiquen su respuesta.

c) ¿Cómo cambiarían la escala de valores de la gráfica 5 para exagerar el aumento del precio del dólar? Elaboren la gráfica.

**4.** Observen la siguiente gráfica y contesten las preguntas.

Gráfica 10 | Precio máximo de la caja de tomate tipo *saladette* 13 kg en el mes de abril de 2019 en dos estados del país




Fuente: Sistema Nacional de Información e Integración de Mercados, "Mercados nacionales".

a) ¿Cuál es el precio máximo de la caja del tomate *saladette* de 13 kg en Aguascalientes el día 2 de abril? ____________________

b) ¿En qué estado es más caro el tomate? ______________________ ¿Cuál es su tendencia: aumenta o disminuye? ______________________

c) ¿Cuál es la diferencia máxima entre la serie de precios máximos del tomate en Aguascalientes y Sonora? ______________ ¿Cuál es la mínima? __________________

5. Comenten sus respuestas; si hay diferencias, argumenten por qué las de ustedes son las correctas. De ser necesario, corrijan. Posteriormente, junto con su maestro, lean y comenten la siguiente información.

Una ventaja de las gráficas de línea es que permiten la comparación entre dos o más conjuntos de datos que corresponden a la misma situación o fenómeno, ya que es posible trazar más de una gráfica en un mismo plano. En ese caso, para trazar los puntos (llamados también *marcadores*) y líneas de cada gráfica se pueden utilizar colores diferentes o figuras, como ocurre en la situación de análisis y comparación del precio del tomate *saladette* en algunos estados del país.

Sesión 4

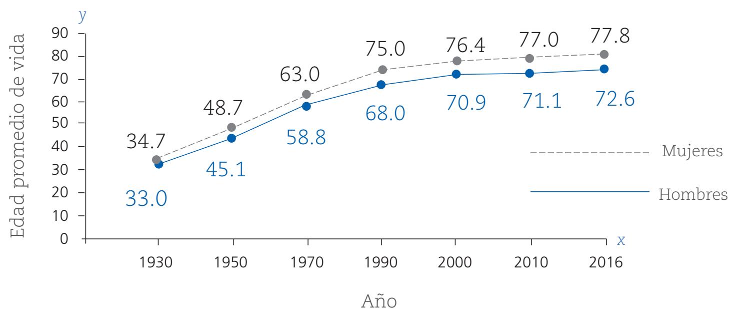
## Para terminar

### Gráficas en mi comunidad

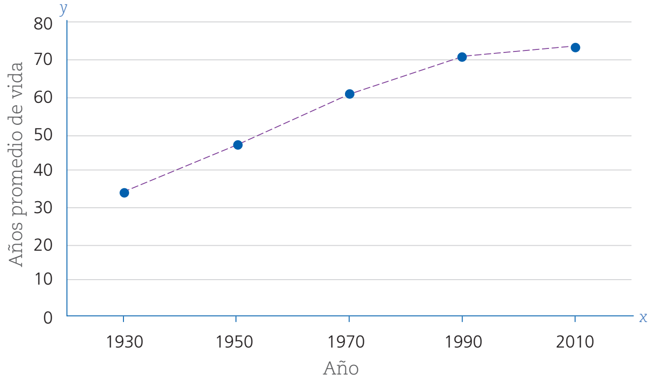
1. Reúnete con otro compañero para realizar lo que se indica.
   a) Registren en su cuaderno, durante una semana, el precio mínimo del kilogramo de alguno de los siguientes productos: leche, tortillas, frijol, pollo, bistec, chile, cebolla, limón, o cualquier otro que se comercie en su localidad.
   b) Después organicen y presenten los datos en una gráfica de línea donde sea posible comparar la información del mismo producto con la obtenida por otros compañeros.
   c) Elaboren una gráfica de línea en la que presenten la comparación del precio mínimo de dos o más productos.
   d) Interpreten cada gráfica de línea y elaboren un cartel en el que se incluyan sus gráficas y las interpretaciones de la información que presentan. Inviten a sus padres y compañeros de otros grupos y presenten sus carteles para que vean los precios de los productos básicos en su localidad.

2. Analiza y escribe en tu cuaderno la información que puedes deducir de cada una de las gráficas.

Gráfica 11 | ¿Quién vive más, los hombres o las mujeres?



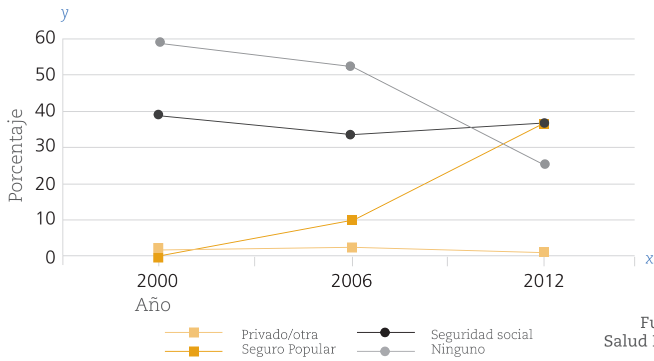
Gráfica 12 | Esperanza de vida al nacer (1930-2010)




Fuente: Inegi, "Esperanza de vida", en *Cuéntame…*

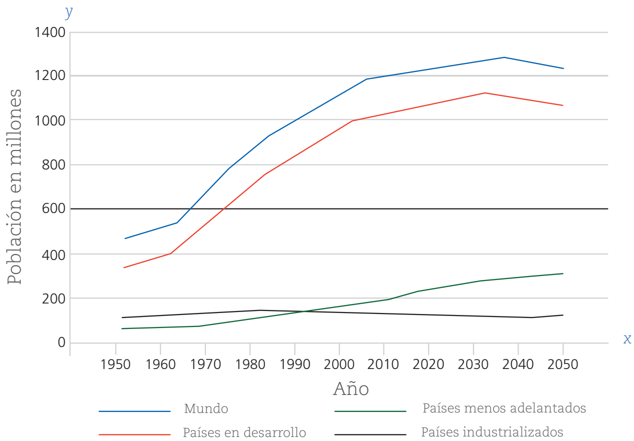
**3.** Analicen las siguientes gráficas de línea y en su cuaderno describan la información y los principales resultados que presentan.

Gráfica 13 | Porcentaje de población con protección en salud, México, ENSA, 2000, Ensanut 2006 y 2012




Fuente: Instituto Nacional de Salud Pública, "Encuesta Nacional de Salud y Nutrición 2012".

Gráfica 14 | Tendencias en la población adolescente 1950 - 2050




Fuente: Organización de las Naciones Unidas, "Tendencias en la población adolescente, 1950-2050", 2010.

**4.** Utilicen el recurso informático *Gráficas de línea* para analizar y resolver otras situaciones en las que es posible organizar y presentar la información empleando este tipo de gráficas.

# 35. Medidas de tendencia central y de dispersión 2

Sesión 1

## Para empezar

En la Olimpiada Nacional, las Adelitas de Chihuahua aprovecharon su condición de local para buscar la medalla de oro.

La estadística tiene gran aplicación en distintas áreas, pues el registro de datos nos permite describir y representar una situación para posteriormente analizarla, obtener conclusiones y tomar decisiones. Entre muchos ejemplos, en los deportes y en la investigación de mercado el registro de datos es una tarea básica.

En esta secuencia aplicarás los conocimientos que aprendiste respecto a las medidas de tendencia central y de dispersión, tales como la desviación media en contextos de distribución de cantidades de productos y resultados deportivos.

## Manos a la obra

### ¿Local o visitante?

**1.** Trabajen en pareja. Pueden utilizar calculadora.

En México, el equipo Correcaminos de Tamaulipas participa en la Liga Nacional de Basquetbol Profesional (LNBP). En las siguientes tablas se presentan algunos de los resultados que obtuvo como local y como visitante en las temporadas de 2016 a 2018.

| | Temporada | Juegos jugados | Juegos ganados | Juegos perdidos | Puntos anotados | Puntos en contra | Diferencia |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Como visitante | 2018 | 20 | 8 | 12 | 1 854 | 1 952 | –98 |
| | 2017 | 20 | 8 | 12 | 1 744 | 1 836 | –92 |
| | 2016 | 18 | 4 | 14 | 1 358 | 1 523 | –165 |
| Como local | 2018 | 20 | 10 | 10 | 1 896 | 1 833 | 13 |
| | 2017 | 20 | 15 | 5 | 1 791 | 1 718 | 73 |
| | 2016 | 18 | 2 | 16 | 1 496 | 1 617 | –121 |

a) Para el equipo Correcaminos, ¿crees que representa una ventaja jugar como local y por qué? ______________________________

**2.** Consideren los resultados del equipo Correcaminos en las tres últimas temporadas para completar la siguiente tabla. Después, respondan las preguntas en su cuaderno.

| | Promedio de puntos anotados (media aritmética) | Desviación media | Promedio de puntos en contra (media aritmética) | Desviación media | Rango |
|---|---|---|---|---|---|
| Como visitante | | | | | |
| Como local | | | | | |

a) Como equipo visitante, ¿dónde se presenta mayor dispersión: en los puntos anotados o en los puntos en contra?

b) ¿Qué ocurre con la dispersión en el caso de jugar como local?

c) ¿En qué casos se obtiene un mejor promedio en puntos anotados: como local o visitante?

d) ¿En qué caso hay menor dispersión entre los puntos anotados y su promedio? ¿Por qué?

e) ¿En qué casos se obtiene un menor promedio de puntos en contra: como local o visitante?

- En ese caso y considerando su desviación media, se puede afirmar que:
  - ☐ Hay poca dispersión entre los puntos en contra y su promedio.
  - ☐ No hay dispersión entre los puntos en contra y su promedio.
  - ☐ La dispersión entre los puntos en contra y su promedio es mínima.

f) Completen la siguiente conclusión.

*De acuerdo con los resultados de las tres últimas temporadas, el equipo Correcaminos obtuvo mejores resultados como ________ (local/visitante) que como ________ (local/visitante), debido a que su promedio de puntos ________ (anotados/en contra) es ______, con una variación de ________; mientras que su promedio de puntos ________ (anotados/en contra) es ________, con una variación de ________. Esto se interpreta que como local es ________ (más/menos) constante su desempeño, dada la variabilidad de sus puntajes.*

**3.** La nueva temporada de basquetbol se inicia en octubre. Si ustedes tuvieran que entrenar y dirigir al equipo de Correcaminos, ¿qué trabajarían más: la defensiva o la ofensiva? Justifiquen su respuesta en su cuaderno. Además, investiguen si hay alguna recomendación, regla o indicador que permita valorar cuándo un equipo aprovecha su condición de local.

4. En grupo, lean y comenten la siguiente información. Analicen el ejemplo que contiene para relacionarla con las actividades anteriores.

Las medidas de dispersión como *el rango y la desviación media* representan la variabilidad de los datos de un conjunto; éstas, con las medidas de tendencia central, describen la distribución del conjunto. Particularmente, la desviación media nos dice qué tan cercanos o alejados de la media aritmética se encuentran los datos. El siguiente es un ejemplo de cómo se interpreta lo anterior:

| Conjunto de datos A<br>Media aritmética = 20<br>Desviación media (DM) = 0.5 | Conjunto de datos B<br>Media aritmética = 20<br>Desviación media (DM) = 5.2 |
|---|---|
| El valor mínimo y máximo de los datos, considerando la media aritmética y la desviación media, son:<br>20 – 0.5 = 19.5 y 20 + 0.5 = 20.5,<br>respectivamente. | El valor mínimo y máximo de los datos, considerando la media aritmética y la desviación media, son:<br>20 – 5.2 = 14.8 y 20 + 5.2 = 25.2,<br>respectivamente. |

Respecto a la media aritmética, el conjunto A tiene menor dispersión entre sus datos que el conjunto B. Por lo tanto, los datos del conjunto A están más cercanos al valor de su media. Es importante señalar que el valor mínimo y el valor máximo que se obtienen son sólo referentes y no necesariamente son el dato mínimo y el máximo registrados en el conjunto, ya que los valores de las medidas de tendencia central y de dispersión resumen un conjunto de datos, por lo que se pierde precisión en ellos.

Sesión 2

## Otras estadísticas deportivas

1. Trabajen en pareja. Fuerza Regia es el equipo campeón de las últimas temporadas en la LNBP. Algunas de sus estadísticas registradas son:

| | Promedio de juegos ganados | Promedio de juegos perdidos | Promedio de puntos anotados | Promedio de puntos en contra | Promedio de puntos anotados por partido | Promedio de puntos en contra por partido |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Como local | 16.333 | 3 | 1 661.333 | 1 483.666 | 85.9 | 76.61 |
| Desviación media (DM) | 0.4 | 0.6 | 87.555 | 115.111 | 0.6 | 2.518 |
| Como visitante | 13 | 6.333 | 1 596.666 | 1 477.333 | 82.65370 | 76.38 |
| Desviación media (DM) | 2.6 | 3.111 | 61.555 | 80.22 | 0.660 | 2.5024 |

a) Consideren los promedios de puntos anotados y recibidos por partido, así como su respectiva desviación media, tanto de local como visitante del equipo. ¿En qué caso su desempeño es mejor y por qué?

b) Utilicen las estadísticas del equipo Fuerza Regia para completar la siguiente tabla.

| Número | Visitante | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Juegos ganados | Juegos perdidos | Puntos anotados | Puntos en contra | Puntos anotados por partido | Puntos en contra por partido |
| Mínimo | | | | | | |
| Máximo | | | | | | |
| | **Local** | | | | | |
| | Juegos ganados | Juegos perdidos | Puntos anotados | Puntos en contra | Puntos anotados por partido | Puntos en contra por partido |
| Mínimo | | | | | | |
| Máximo | | | | | | |

c) Manuel dice que en las temporadas 2016 a 2018, el equipo Fuerza Regia tuvo una temporada en que perdió dos juegos y otra en que perdió cuatro, según el promedio de juegos perdidos y su desviación media. ¿Es cierto o no? ________ ¿Por qué? ______________________________________________

d) ¿Es posible determinar en qué temporada obtuvieron el número mínimo de puntos anotados? ________ ¿Por qué? ______________________________________________

______________________________________________

e) Comparen las estadísticas tanto de visitante como de local y, en su cuaderno, determinen cuándo tiene mejor desempeño y qué tan constante es en sus resultados.

f) Completen la siguiente conclusión:

*De acuerdo con los resultados de las tres últimas temporadas, el equipo Fuerza Regia obtiene mejores resultados como* ______________ (local/visitante) *que como* ______________ (local/visitante)*, debido a que su promedio de puntos* ______________ (anotados/en contra) *es* ______________ *con una variación de* ______________*; mientras que su promedio de puntos* ______________ (anotados/en contra) *es con una variación de* ______________.

**2.** En grupo, comparen sus respuestas. Si hay diferencias, averigüen a qué se deben y revisen sus procedimientos. Propongan un indicador que les permita determinar si un equipo está haciendo valer su calidad como local o no para que esto deje de ser una simple creencia. Anótenlo en su cuaderno.

3. Utilicen el recurso informático *Estadística* para practicar el cálculo de las medidas de tendencia central y de dispersión de datos no agrupados.

4. Trabajen en equipo.

En la mayoría de los patios de las escuelas telesecundarias hay al menos una cancha de basquetbol. En algunas zonas escolares y estados se efectúan torneos.

a) ¿Su escuela tiene cancha de basquetbol? ______ ¿Practican o pertenecen a un equipo de basquetbol? ______ ¿Han participado en un torneo de basquetbol? ______ Si su respuesta es afirmativa, ¿registran los resultados obtenidos?______ ¿Con qué datos cuentan? ______________________________

Si es posible, apliquen el indicador que propusieron en la actividad anterior y presenten los resultados que obtengan.

b) Si su respuesta es negativa, busquen e investiguen sobre otros equipos de la LNBP o de otros deportes en equipo que consideren de su interés en revistas, periódicos o, si les es posible, en internet. Organicen y presenten los resultados de manera que puedan publicarse en el periódico escolar.

Sesión 3

## Para terminar

### Litros de a litro

1. Realicen la siguiente actividad en equipos de tres.

Desde 2018, para garantizar la venta de litros de a litro, en nuestro país se aplica la **Norma Oficial Mexicana** NOM-005-SCFI-2017 en la verificación de los sistemas e instrumentos de medición y despacho de gasolina y otros combustibles líquidos. Esta norma describe el proceso de autorización para el despacho de una bomba de gasolina, que consiste en hacer tres pruebas en cada uno de los tres tipos de despacho de combustible de la bomba, llamados: gasto máximo, medio y mínimo.

En cada tipo de gasto se verifica que el error máximo de tolerancia (ETM) entre el instrumento de verificación y la bomba de gasolina sea menor que 100 ml por cada 20 000 ml. Además se tiene que considerar que el error de repetibilidad (R) entre una prueba y otra del mismo tipo de gasto sea menor o igual que 60 ml por cada 20 L.

**Glosario**

**Norma Oficial Mexicana:** también se conocen como NOM y son reglas o regulaciones técnicas y obligatorias que expiden las dependencias competentes para garantizar que el etiquetado de productos que se comercializan en el país (nacionales e importados) contengan la información adecuada para que los consumidores puedan tomar una decisión adecuada al comprarlos, con la certeza de que el producto es confiable.

En una estación de gasolina se lleva a cabo una verificación. Se ha elegido al azar una bomba que debe cumplir con la norma NOM-005-SCFI-2017. Las siguientes tablas presentan los resultados de las tres pruebas que se realizaron a la misma bomba para cada tipo de gasto.

a) Cada integrante del equipo complete una tabla. Pueden utilizar calculadora. Consideren que:

- El renglón de promedio se refiere a la media aritmética de las tres pruebas realizadas para cada tipo de gasto: mínimo, medio y máximo.

- El promedio del error máximo tolerado (EMT) y el promedio del error de repetibilidad (R) en cada tipo de gasto también debe cumplir con lo indicado en la norma para continuar con el proceso de verificación.

| Tipo de gasto | Prueba | Volumen que registra la bomba de gasolina seleccionada (V en ml) | Volumen registrado en el instrumento de verificación (I en ml) | Error máximo tolerado (EMT ≤ 100 ml por cada 20 L) | Error de repetibilidad **R** = \| error entre una prueba y otra \| (R ≤ 60 ml por cada 20 L) |
|---|---|---|---|---|---|
| Mínimo | 1 | 19 450 | 19 400 | | |
| | 2 | 19 500 | 19 440 | | R = \| 50 – 60 \| = 10 |
| | 3 | 19 400 | 19 370 | | R = \| 60 – 30 \| = 30 |
| Promedio | | | | | $\frac{30 + 10}{2} = \frac{40}{2} = 20$ |
| Medio | 1 | 19 500 | 19 500 | | |
| | 2 | 19 530 | 19 490 | | |
| | 3 | 19 545 | 19 500 | | |
| Promedio | | | | | |
| Máximo | 1 | 20 200 | 20 150 | | |
| | 2 | 20 100 | 19 090 | | |
| | 3 | 20 060 | 19 080 | | |
| Promedio | | | | | |

b) Verifiquen y comenten sus resultados. Considerando estos datos, ¿la bomba seleccionada cumple con la norma? ______________________


**2.** En grupo y con apoyo de su maestro, comparen sus respuestas. Después, comenten las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál consideran que es el propósito de que la norma establezca tres pruebas diferentes de las mediciones? ¿Cuáles son los conceptos y procedimientos estadísticos que se utilizan en esta situación? ¿De qué manera crees que este proceso de autorización beneficia a los consumidores de gasolina?

**3.** Lean la siguiente información.

Una aplicación de la desviación media es cuando se obtienen valores diferentes de las mediciones o pruebas que se le realizan a un mismo objeto. Las diferencias que se tienen corresponden a errores en la medición. Cuando el valor del error de medida es mínimo, se considera que el valor de la medición es precisa.

**4.** Utiliza el recurso audiovisual *Aplicación de la estadística* para conocer otras aplicaciones de normas en las que se utilizan como referentes o indicadores medidas de tendencia central y de dispersión de datos no agrupados.

# 36. Probabilidad clásica 2

Sesión 1

## Para empezar

Ganar la lotería, seleccionar un objeto al azar, jugar volados, son ejemplos de experiencias aleatorias. Algunos aspectos importantes que las distinguen son: la posibilidad de repetir cada experiencia indefinidamente, siempre y cuando no se alteren las condiciones esenciales; que al realizarlas no se puede determinar el resultado específico, aunque sí se pueden describir y enumerar los resultados posibles; y que conforme se lleve a cabo un mayor número de repeticiones, cada resultado posible pasa de un comportamiento desordenado a uno estable. Todo lo anterior permite analizar, modelar y calcular la probabilidad de un resultado.

En esta secuencia trabajarás con situaciones aleatorias para calcular la probabilidad frecuencial y clásica de algunos eventos; también aprenderás qué es un evento complementario y cómo se calcula su probabilidad

## Manos a la obra

### Probabilidad clásica vs. probabilidad frecuencial

**1.** Trabajen en pareja.

En un grupo de telesecundaria hay 24 alumnos en total: 16 son mujeres y los demás son hombres. Si se selecciona un alumno al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea un hombre?

*P(A: el alumno seleccionado al azar es un hombre)* = ____________________

b) ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar al azar a una mujer?

*P(B: el alumno seleccionado al azar es una mujer)* = ____________________

Justifiquen sus respuestas. ________________________________________

________________________________________________________________

c) Paula representó la situación anterior colocando en una bolsa oscura 16 papelitos doblados con la letra M y 8 con la letra H, los revolvió y sacó uno al azar. Luego anotó la letra que tenía el papelito y lo regresó. De este modo continuó hasta realizar 20 extracciones. Procedan del mismo modo que Paula y anoten sus resultados en las siguientes celdas.

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

d) De acuerdo con los resultados obtenidos en el experimento aleatorio que realizaron, ¿cuál es la probabilidad frecuencial de seleccionar al azar un hombre?

*P´(A: el alumno seleccionado al azar es un hombre)* = ____________________

e) ¿Cuál es la probabilidad frecuencial de seleccionar a una mujer?

*P´(B: el alumno seleccionado al azar es una mujer)* = ____________________

f) Comparen las probabilidades frecuencial y teórica del evento A, y comenten con sus compañeros lo que sucede. Si lo consideran necesario, realicen 20 extracciones más y anoten los resultados en sus cuadernos. Luego, lean la siguiente información.

La probabilidad frecuencial de un evento *P´(A)* se obtiene al comparar el número de veces que ocurre en relación con el número de veces que se realizó el experimento.

La probabilidad teórica de un evento *P(A)* se calcula al comparar el número de resultados favorables con el número total de resultados posibles.

Al comparar los valores de la probabilidad frecuencial y de la probabilidad teórica es posible observar que mientras más veces se repita el experimento, se espera que el valor de la primera se acerque cada vez más al valor teórico.

Hay situaciones aleatorias que no es posible realizar directamente; en esos casos se plantea y realiza una situación semejante que cumpla con las condiciones de la primera; este proceso se llama simulación. Por ejemplo, el ejercicio que Paula planteó con los papelitos y la bolsa para simular la situación de su grupo.

2. Los alumnos del grupo de telesecundaria señalaron su color preferido. La siguiente tabla muestra sus preferencias.

| Color | Azul | Verde | Rosa | Morado |
|---|---|---|---|---|
| Número de alumnos | 12 | 6 | 4 | 2 |

a) Si se selecciona un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que prefiera el color azul?

*P(C: el alumno seleccionado al azar prefiere el color azul)* = ____________________

b) ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar un alumno al azar que prefiera el color verde o el rosa?

*P(D: el alumno seleccionado al azar prefiere el color verde o rosa)* = ____________

c) ¿Es mayor la probabilidad de elegir un alumno que prefiera el color azul o uno que no lo prefiera? Justifiquen su respuesta.____________________________________

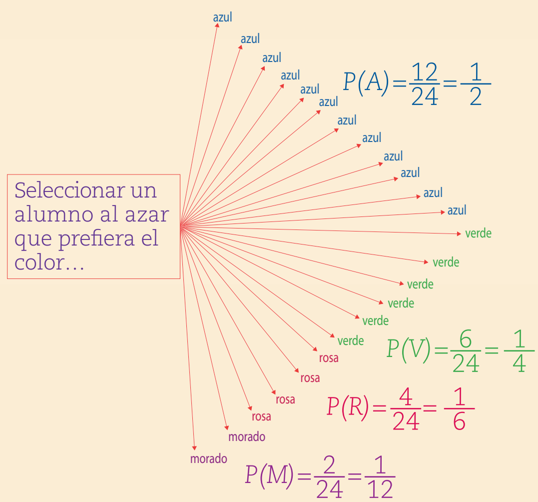
______________________________________________________________________________

3. Verifiquen sus respuestas. Después, lean y comenten con su maestro la siguiente información.

La medida de la probabilidad de un evento siempre está entre 0 y 1. El valor 0 significa que es imposible que ocurra un evento (por ejemplo, que un alumno prefiera el color negro), y el valor 1 indica que es seguro que ocurra un evento (por ejemplo, que un alumno prefiera azul, verde, rosa o morado).

Así, la probabilidad de seleccionar a un alumno que prefiera el color verde, rosa o morado es *equivalente* a la probabilidad de seleccionar a un alumno que no prefiere el color azul, según se observa en el diagrama de árbol.

Donde $P(A)$ = seleccionar un alumno al azar que prefiera el color azul; $P(V)$ = seleccionar un alumno al azar que prefiera el color verde; $P(R)$ = seleccionar un alumno al azar que prefiera el color rosa; $P(M)$ = seleccionar un alumno que prefiera el color morado.



4. Describan en su cuaderno cómo podrían simular la situación anterior y realizar el experimento para obtener la probabilidad frecuencial del evento *extraer el color rosa*, es decir, $P'(R)$. Anoten sus resultados en el cuaderno.

## Complementos



1. Trabajen en equipo. Pueden utilizar un recurso (tabla o diagrama de árbol) que les permita mostrar y verificar el espacio de resultados e identificar los resultados favorables de cada evento.

En otro grupo de segundo grado de telesecundaria hay 7 mujeres y 6 hombres cuya fecha de cumpleaños es antes del 1 de julio, mientras que 4 mujeres y 5 hombres lo celebran el 1 de julio o después. Si se elige un alumno al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que su fecha de cumpleaños sea antes del 1 de julio?

_______________

b) ¿Cuál es la probabilidad de que su fecha de cumpleaños sea el 1 de julio o después? _______________

c) ¿Cuál es la probabilidad de que sea hombre y su cumpleaños sea antes del 1 de julio? Justifiquen su respuesta. _______________

_______________

d) ¿Cuál es la probabilidad de que sea una mujer? Justifiquen su respuesta.

_______________

_______________

El evento $J$: *elegir un alumno al azar cuyo cumpleaños sea antes del 1 de julio*, y el evento $\bar{J}$: *elegir un alumno al azar cuyo cumpleaños sea el 1 de julio o después*, son eventos complementarios. Porque:

$$P(J) + P(\bar{J}) = 1,$$

de donde se obtiene que:

$$P(J) = 1 - P(\bar{J}) \text{ o } P(\bar{J}) = 1 - P(J)$$

e) Marquen con una palomita (✓) el evento complementario del evento $A$: *se elige a una mujer*.

☐ $\bar{A}$: *Se elige a una mujer cuyo cumpleaños es el 1 de julio o después.*

☐ $\bar{A}$: *Se elige a un hombre.*

☐ $\bar{A}$: *Se elige a un hombre cuyo cumpleaños sea antes del 1 de julio.*

2. Comparen sus respuestas con las de los otros equipos.

3. Comenten y escriban en su cuaderno cómo podrían simular un experimento equivalente a la situación de este grupo de telesecundaria. Luego, expliquen por qué es una simulación.
   a) Realicen el experimento al menos 20 veces para generar los resultados de la simulación. Después anótenlos en los siguientes recuadros.

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

   b) Comparen los valores de la probabilidad frecuencial de los eventos con los valores de la probabilidad clásica que les corresponden y escríbanlos a continuación.

4. El maestro del grupo anterior eligió al azar tres números de su lista y pidió que los alumnos correspondientes salieran del salón.
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que haya salido el alumno que tiene el número 4 de la lista? ______
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que no haya salido el alumno que tiene el número 4 de la lista? ______
   c) ¿Cuál es la probabilidad de que haya salido el alumno que tiene el número 22 de la lista? ______
   d) ¿Cuál es el evento complementario del inciso anterior? ______

5. Observen el recurso audiovisual *Evento complementario* para identificar este tipo de eventos en otras experiencias aleatorias.

Sesión 3

# Para terminar

## Control de calidad

1. Resuelvan en pareja los siguientes problemas. Pueden elaborar diagramas de árbol o tablas que les permitan justificar y verificar sus resultados.

   Recuerden que una de las principales aplicaciones de la probabilidad es el control de calidad de los artículos.

a) A una tienda le surten un lote de 20 artículos sin defectos, 10 artículos con defectos mínimos y 2 con defectos graves. Si el supervisor elige un artículo al azar, cuál es la probabilidad de que:

- El artículo no tenga defectos: ______
- El artículo tenga un defecto mínimo: ______
- El artículo sea defectuoso: ______

b) El supervisor de la tienda decide elegir dos artículos al mismo tiempo para revisarlos. ¿Cuál es la probabilidad de los siguientes eventos?

- Que ninguno de los dos artículos esté defectuoso: ______
- Que ambos artículos estén defectuosos: ______
- Que uno de ellos esté defectuoso: ______
- Que uno de ellos tenga defectos graves: ______

c) Se sabe que, en un lote de 1 600 pantallas, el 20% son defectuosas.

- ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar al azar una pantalla que no esté defectuosa? ______
- ¿A cuántas pantallas equivale? ______
- ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar al menos un radio? ______

d) En una urna hay 10 fichas numeradas del 1 al 10. Un jugador extrae, sin ver, dos fichas y suma los números que traen. No regresa las fichas a la urna. Gana si la suma de los números es 10.

- ¿Cuál es la probabilidad de que las fichas sumen 10? ______
- ¿Cuál es la probabilidad de que no sumen 10? ______

**2.** En grupo, verifiquen sus respuestas y comenten la manera en que determinaron cada probabilidad. Para comprender mejor de qué trata la situación o apreciar cuáles pueden ser los resultados posibles, simulen alguna de las situaciones.

**3.** Utilicen el recurso informático *Probabilidad clásica vs. probabilidad frecuencial* para interpretar y analizar los resultados que arrojan ambas probabilidades en diversos experimentos aleatorios.

# Evaluación

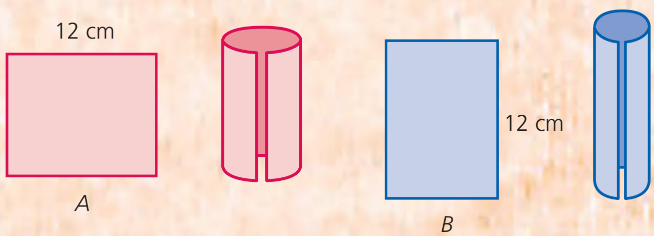
Es tiempo de revisar lo que has aprendido después de trabajar en este bloque. Resuelve los siguientes problemas.

1. Si $3^3 = 27$, ¿en qué cifra termina $3^9$? ____________________

2. El volumen de un cubo es 125 cm$^3$. ¿Cuántas veces aumentará el volumen de ese cubo si se duplica la medida de su arista? ____________________

3. ¿Cuál es el mayor cuadrado que se puede formar con 300 losetas cuadradas sin cortar ninguna? ____________ ¿Cuántas losetas sobran? ____________

4. ¿Cuál es el valor de $x$ en la ecuación $(x - 5)^2 = 144$? ____________________




5. Un fabricante desea hacer latas cilíndricas utilizando láminas rectangulares que midan 12 cm de largo y 9 cm de ancho. ¿Con cuál de las dos formas que se ilustran obtiene una lata con el mayor volumen? __________

6. El fabricante decidió mantener la altura de la lata cilíndrica de 9 cm como constante, y variar la medida de la base de la lata. ¿El volumen de la lata será proporcional a la medida del radio de su base? ______ Si tu respuesta es afirmativa, indica qué tipo de proporcionalidad es: ____________________

Marca con una palomita (✓) la respuesta correcta.

1. Ana surte gelatinas y flanes en diferentes tiendas. En una tienda cobró \$500 por 20 flanes y 10 gelatinas. En otra tienda, cobró \$300 por 40 flanes y le regresaron 50 gelatinas. ¿A qué precio vende Ana un flan?

   ☐ \$30.00 ☐ \$20.00 ☐ \$15.00 ☐ \$10.00

2. ¿Cuál de los siguientes sistemas modela la situación de Ana?

☐ Ec. 1: $20x + 10y = 500$
Ec. 2: $40x + 50y = 300$

☐ Ec. 1: $20x + 40y = 500$
Ec. 2: $10x + 50y = 300$

☐ Ec. 1: $20x + 10y = 500$
Ec. 2: $40x - 50y = 300$

3. Jaime se enfermó del estómago y bajó de peso 10 libras. Si su peso era de 89 kg, ¿qué operación se debe hacer para saber cuánto pesa ahora? Una libra equivale a 454 g.

☐ $89 - (454 \times 10)$ ☐ $89 - (454 \div 10)$ ☐ $89 - (0.454 \times 10)$ ☐ $89 - (0.454 \div 10)$

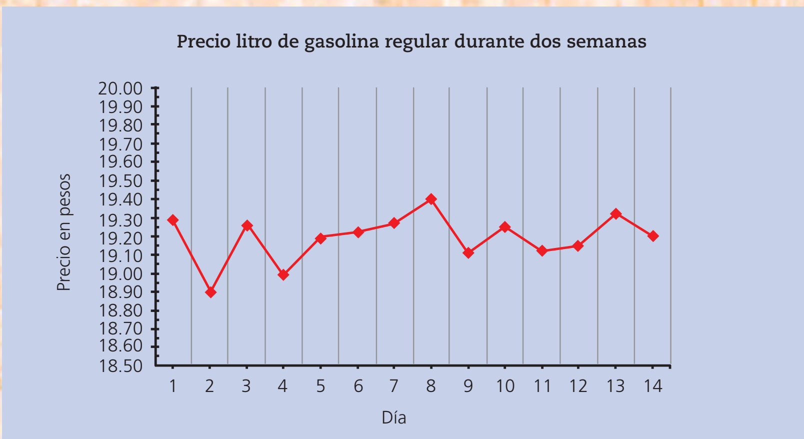
4. El corazón bombea 5 litros de sangre cada minuto, de los cuales 22% va directamente a los riñones. ¿Qué operación permite saber cuántos mililitros de sangre reciben los riñones en un minuto?

☐ $5 \times 1000 \times 0.22$ ☐ $5 \times 1000 \div 0.22$ ☐ $5 \div 1000 \times 0.22$ ☐ $5 \div (1000 \div 0.22)$

5. Se tiene un dado con 12 caras (dodecaedro), ¿cuál es la probabilidad de que al lanzarlo al aire caiga un 8?

☐ $\frac{1}{12}$ ☐ $\frac{8}{12}$ ☐ 0.1 ☐ 0.8

6. La siguiente gráfica de línea muestra el precio del litro de gasolina regular registrado durante dos semanas en una estación. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?




☐ \$19.29 es el precio mínimo del litro de gasolina regular registrado durante las dos semanas y con una variación entre los precios de 20 centavos.

☐ \$19.19 es el precio promedio del litro de gasolina regular registrado durante las dos semanas con una variación media de 10 centavos.

☐ \$19.40 es el precio máximo del litro de gasolina regular registrado durante las dos semanas y es 20 centavos más caro que el precio mínimo.

☐ \$18.90 es el precio mínimo del litro de gasolina regular registrado durante las dos semanas con una variación media de 10 centavos.

# Bibliografía


Blatner, David (2003). *El encanto de pi*, México, Aguilar.

Bosch Giral, Carlos *et al.* (2002). *Una ventana a la incertidumbre*, México, Santillana (Biblioteca Juvenil Ilustrada).

________ (2002). *Una ventana a las incógnitas*, México, Santillana (Biblioteca Juvenil Ilustrada).

________ (2002). *Una ventana al infinito*, México, Santillana (Biblioteca Juvenil Ilustrada).

________ (2004). *Una ventana a las formas*, México, Santillana (Biblioteca Juvenil Ilustrada).

Castelnuovo, Emma (2001). *De viaje con la matemática. Imaginación y razonamiento matemático*, México, Trillas.

Cottin, Menena (2007). *La doble historia de un vaso de leche*, México, Ediciones Tecolote.

Crilly, Tony (2014). *50 cosas que hay que saber sobre matemáticas*, Barcelona, Ariel.

Espinosa Pérez, Hugo *et al.* (2001). *Fichero de actividades didácticas. Matemáticas. Educación secundaria*, México, Secretaría de Educación Pública.

Hernández Garciadiego, Carlos (2002). *La geometría en el deporte*, México, Santillana (Biblioteca Juvenil Ilustrada).

________ (2002). *Matemáticas y deportes*, México, Santillana (Biblioteca Juvenil Ilustrada).

Jiménez, Douglas (2010). *Matemáticos que cambiaron al mundo. Vidas de genios del número y la forma que fueron famosos y dejaron huella en la historia*, Providencia, Chile, Tajamar Editores.

Jouette, André (2000). *El secreto de los números*, Barcelona, Ediciones Robinbook.

López Escudero, Olga Leticia y Silvia García Peña (2011). *La enseñanza de la Geometría*, México, Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (Materiales para apoyar la práctica educativa).

Noreña Villarías, Francisco *et al.* (2002). *El movimiento*, México, Santillana (Biblioteca Juvenil Ilustrada).

________ (2002). *La energía*, México, Santillana (Biblioteca Juvenil Ilustrada).

________ (2002). *La medición y las unidades*, México, Santillana (Biblioteca Juvenil Ilustrada).

Peña, José Antonio de la (2002). *Geometría y el mundo*, México, Santillana (Biblioteca Juvenil Ilustrada).

Peña, José Antonio de la (2002). *Matemáticas y la vida cotidiana*, México, Santillana (Biblioteca Juvenil Ilustrada).

Perelman, Yakov (2003). *Matemáticas recreativas*, México, Planeta.

Reid, Constance (2008). *Del cero al infinito. Por qué son interesantes los números*, Pablo Martínez Lozada, trad., México, Consejo Nacional para la Cultura y las Artes.

Ruiz, Concepción *et al.* (2002). *Crónicas geométricas*, México, Santillana (Biblioteca Juvenil Ilustrada).

Ruiz, Concepción y Sergio de Régules (2002). *Crónicas algebraicas*, México, Santillana (Biblioteca Juvenil Ilustrada).

________ (2003). *El piropo matemático*. *De los números a las estrellas*, México, SEP-Lectorum.

Sánchez Torres, Juan Diego (2012). *Recreamáticas*. *Recreaciones matemáticas para jóvenes y adultos*, Madrid, Ediciones Rialp.

Tahan, Malba (2005). *El hombre que calculaba*, Basilio Lozada (trad.), México, SEP-Limusa (Libros del Rincón).


## Referencias electrónicas


Banco de México (2019). "Mercado cambiario (tipos de cambio)". Disponible en http://www.banxico.org.mx/tipcamb/main.do?page=tip&idioma=sp (Consultado el 28 de junio de 2019).

Inegi (2016). "Esperanza de vida". Disponible en http://cuentame.inegi.org.mx/poblacion/esperanza.aspx?tema=P (Consultado el 28 de junio de 2019).

Instituto Nacional de Salud Pública (2012). "Encuesta Nacional de Salud y Nutrición 2012". Disponible en https://ensanut.insp.mx/informes/ENSANUT2012ResultadosNacionales2Ed.pdf (Consultado el 28 de junio de 2019).

Sistema Nacional de Información e Integración de Mercados (2019). "Mercados nacionales". Disponible en http://www.economia-sniim.gob.mx/nuevo/Home.aspx?opcion=Consultas/MercadosNacionales/PreciosDeMercado/Agricolas/ConsultaFrutasYHortalizas.aspx?SubOpcion=4|0 (Consultado el 28 de junio de 2019).

# Créditos iconográficos

### Ilustración

Roberto Ángel Flores Angulo: **pp.** 44, 48, 98, 54-55, 65, 132, 150, 176, 184 y 200.

Brian González: **pp.** 251 y 258.

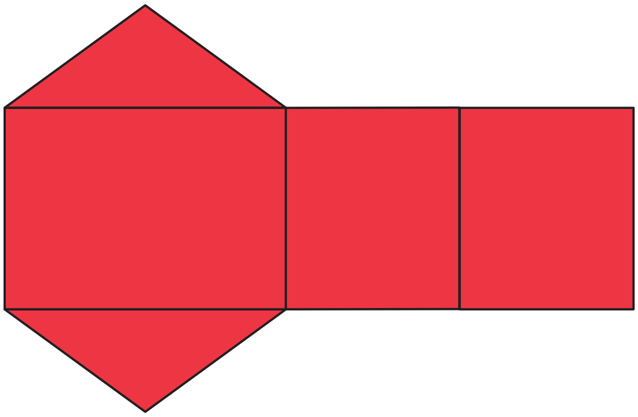
David Núñez Bahena: **pp.** 124, 177, 222, 234, 236, 249 y 250.

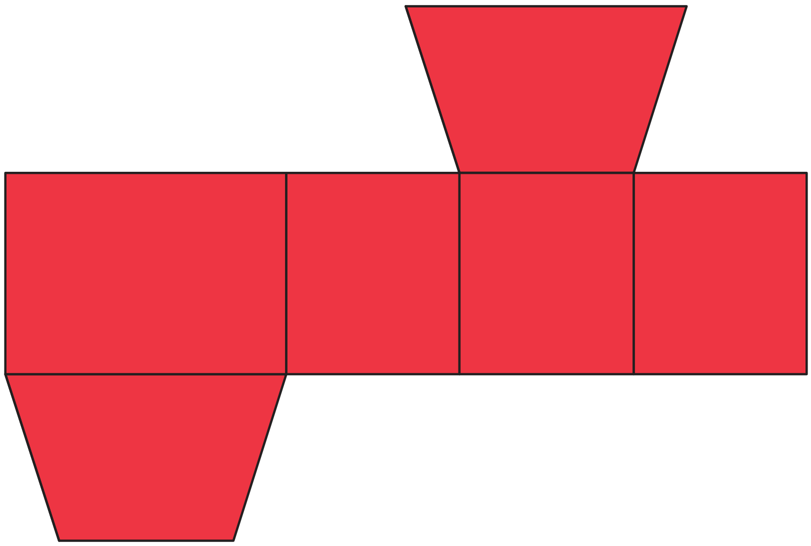
Carolina Tovar González: **pp.** 32, 46, 96 y 140.

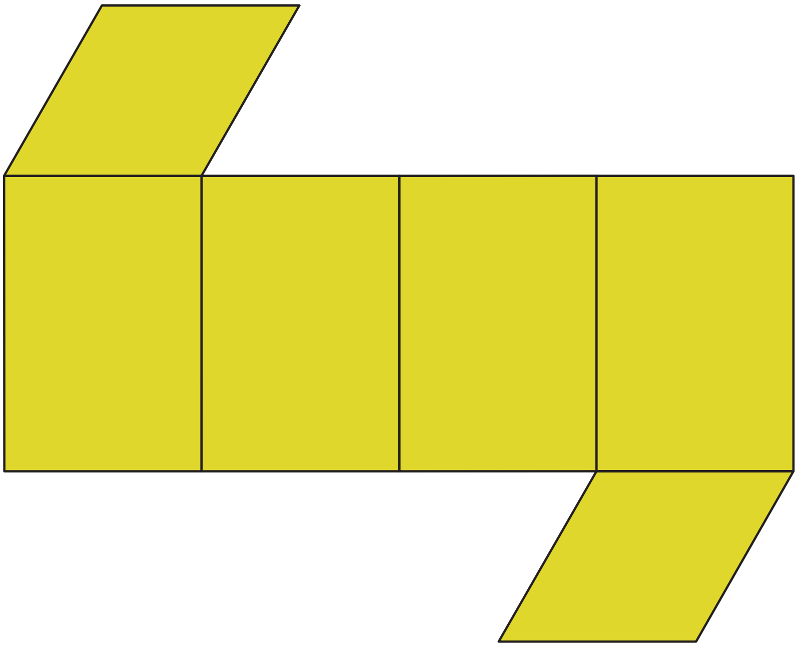
### Fotografía

**p. 12-13:** Huracán Sandy fuera de las Carolinas, NASA cortesía del Equipo de Respuesta Rápida de LANCE MODIS en la NASA GSFC; **p. 14:** puesto de frutas, Pixabay 932745; **p. 16:** fotografía de Ana Laura Delgado Rannauro/Archivo iconográfico DGME-SEB-SEP; **p. 22:** paisaje, Pixabay 1547302; **p. 38:** (arr.) Ilustración del mundo dentro de una pecera, © artvovielysa/Fotosearch LBRF/Photo Stock; (ab.) cartel #Un Mundo Más Sostenible, https://bit.ly/3bvg45u; **p. 40:** ruta de Tlaxcala a Salamanca, Guanajuato, Google Maps; **p. 60:** (arr.) cultivo de tulipanes, Holanda, © Rob3rt82/Fotosearch LBRF/Photo Stock; (centro) moneda de 50 pesos, 1990, reverso. Chile, © De Agostini/A. Dagli Orti/De Agostini Editore/Photo Stock; (ab.) tulipanes, Pexels 86754; **p. 66:** dinosaurio 3D, © Ceriy_Z/Shutterstock.com; **p. 74:** relámpago, Pexels 680940; **p. 75:** (de izq. a der. de arr. a ab.) guepardo, Sudáfrica, © jspix/imageBROKER/imageBROKER/Photo Stock; halcón peregrino, fotografía de Juan Lacruz, bajo licencia CC BY-SA 3.0; avestruz, fotografía de copper, bajo licencia CC BY-NC 4.0; pez espada, Freepng.es; liebre, fotografía de Donna Pomeroy, bajo licencia CC BY-NC 4.0; tiburón azul, fotografía de Mark Conlin/NMFS, bajo licencia CC0; purasangre, Pexels 1996333; Usain Bolt, fotografía de Fernando Frazão/Agencia Brasil, bajo licencia BR CC BY 3.0; caracol, fotografía de Annika Lindqvist, bajo licencia CC BY-NC 4.0; oso perezoso de dos dedos, fotografía de Gerald Carter, bajo licencia CC BY-NC-ND 4.0; koala, Pixabay 2914975; manatí, Pixabay 387195; lagarto de Gila, fotografía de lonnyholmes, bajo licencia CC BY-NC 4.0; estrella de mar, fotografía de anelslabbert, bajo licencia CC BY-NC 4.0; loris, fotografía de Stefan Greif, bajo licencia CC BY-NC 4.0; tortuga, Parque Nacional Galápagos, fotografía de Dr al dove, bajo licencia CC BY-NC 4.0; **p. 77:** ruta de El Paso a Chihuahua, Sinaloa a Mazatlán y Monterrey a Guadalajara, Google Maps; **p. 78:** (arr. izq.) Pico de Orizaba, Pixabay 4049768; (arr. der.) rapel descenso en la Sima de las Cotorras, Chiapas, niña Nairobi, guía Alejandro San Rimán, fotografía de Sam Exuwi Aax; (centro izq.) Sótano de las Golondrinas, San Luis Potosí, © jose luis/Adobe Stock; (centro der.) Sótano del Barro, Querétaro, bajo licencia CC BY-SA 4.0; (ab. izq.) Nevado de Toluca, en https://bit.ly/35WdPah; (ab. der.) ruta de Ciudad Valles, San Luis Potosí a Sótano de las Golondrinas, vista satelital, Google Maps; **p. 79:** (de izq. a der.) ranita monte Iberia, fotografía de jpgalvan, bajo licencia CC BY-NC 4.0; camaleón Brookesia Mínima de Madagascar, fotografía de Frank Glaw, Jörn Köhler, Ted M. Townsend, Miguel Vences, bajo licencia CC BY 4.0; murciélago abejorro o nariz de cerdo de Kitti, Curiosoando.com, bajo licencia CC BY-SA 4.0; Sphaerodactylus macrolepis, también conocido como gecko, Sara Lovotti, bajo licencia CC BY 4.0; colibrí abeja, Pixabay 2366009; **p. 80:** (de izq. a der.) boa constrictor, fotografía de John D Reynolds, bajo licencia CC BY-NC 4.0; caimán, fotografía de Claudia Rocha-Campos, bajo licencia CC BY-NC 4.0; iguana verde, fotografía de willieortiz, bajo licencia CC BY-NC 4.0; serpiente de cascabel, Jalisco, fotografía de alan_rockefeller, bajo licencia CC BY-NC 4.0; serpiente mamba negra, fotografía de Bill Love, bajo licencia CC BY-SA 3.0; **p. 81:** (de izq. a der.) planeta Venus, NASA/JPL; imagen del centro de vuelo espacial Goddard de la NASA por Reto Stöckli/MODIS; planeta Marte, NASA/JPL-Caltech/Universidad de Arizona; planeta Saturno, NASA/JPL-Caltech/Space Science Institute; planeta Júpiter, NASA/JPL-Caltech/SwRI/MSSS/Kevin M. Gill; **p. 82:** kiosco, Italia, © Ana del Castillo/agefotostock/Photo Stock; **p. 88:** kiosco de Chignahuapan, Puebla, © fernando blancas santos/Shutterestock.com; **p. 90:** Torre Arcos Bosques, Teodoro Gonzalez de León, Santa Fé, Ciudad de México, fotografía de Omar Bárcena, bajo licencia CC BY-NC 2.0; **p. 91:** Rectoría, UNAM, fotografía de Daniel Case, bajo licencia CC BY-SA 3.0; **p. 98:** dados, Pixabay 25637; **p. 102:** Pierre-Simon, Marqués de Laplace, 1838, Jean-Baptiste Paulin Guérin (1783-1855), óleo sobre tela, 1.46 × 1.13 cm, Versalles, Castillos de Versalles y Trianon, © De Agostini/G. Dagl/De Agostini Editore/Photo Stock; **pp. 108-109:** composición fotográfica: Irene León Coxtinica, Ernesto García Barajas, Emmanuel Adamez Téllez; **p. 110:** mujer tirando dados, © JGI/Jamie Grill/Blend Images/Photo Stock; **p. 138:** billetes de lotería, en www.lotenal.gob.mx (Consultado el 14 de junio de 2019); **p. 144:** adornos geométricos estilo boho, © amirage/Fotosearch LBRF/Photo Stock; **p. 162:** (arr.) alpinista asciende a la cima de una montaña nevada, © David J. Spurdens/Extreme Sports Photo RF/Photo Stock; (ab.) cajas de madera con verduras y frutas, © Nataliia Pyzhova/Shutterstock.com; **p. 175:** fotografía de Martín Córdova Salinas/Archivo iconográfico DGME-SEB-SEP; **p. 178:** bebé recién nacido en báscula, © McPHOTO/BLWS/Insadco/Photo Stock; **p. 180:** alimento lácteo para bebé, © Melodia plus photos/Shutterstock.com; **p. 183:** (izq.) bolsa de cemento, © AlexLMX/Shutterstock.com; (der. arr.) estructura de casa en construcción, © Suti Stock Photo/Shutterstock.com; (der. ab.) lata de pintura, © MrGarry/Shutterstock.com; **p. 189:** Plaza de la Reina, Palma de Mallorca, España, 2019, © Artesia Wells/Shutterstock.com; **p. 190:** gráfica de Visor dinámico de bienestar, Inegi, en https://bit.ly/2ILuRgg (Consultado el 2 de julio de 2019); **pp. 212-213:** Futbolistas, 1981, Pedro Friedeberg (1936), serigrafía sobre papel algodón, 55 × 55 cm; **p. 214:** ilustración de Albert Einstein con sus ecuaciones, © Science Photo Library/Photo Stock; **p. 224:** barril, Freepng.es; **p. 228:** grupo de estudiantes, © Syda Productions/Shutterstock.com; **p. 240:** mosaico oriental en Marruecos, África, © Philip Lange/Shutterstock.com; **p. 246:** ilustración de mariposas, estilo Escher, © Martin Janecek/Shutterstock.com; **p. 248:** barco petrolero, Pixabay 1242111; **p. 249:** jugadores de futbol americano, Pixabay 107387; **p. 250:** balón de futbol americano, Pixabay 1666277; **p. 253:** (arr.) ballenas azules, © MIRO3D/Fotosearch LBRF/Photo Stock; (ab.) elefante marino del norte, fotografía de BJ Smit, bajo licencia CC BY-NC-SA 4.0; **p. 254:** latas, © Laurentiu Timplaru/Shutterstock.com; **p. 258:** tinaco, Freepng.es; **p. 260:** John Graunt, Natural and Political Observations Mentioned in a following Index, and made upon the Bills of Mortality, Oxford, William Hall, John Martyn y James Allestry, 1665; **p. 268:** partido de basquetbol, Olimpiada Nacional y Nacional Juvenil 2019, en https://bit.ly/2xr0TsA (Consultado el 28 de junio de 2019); **p. 272:** Telesecundaria Alfonso Reyes Ochoa, Benito Juárez, Tlaxcala, en https://bit.ly/2XobtuQ (Consultado el 28 de junio de 2019); **p. 273:** "Clausuran gasolineras por despachar menos", miércoles 22 de julio del 2015, El Siglo de Torreón, en https://bit.ly/2xyQtai (Consultado el 2 de julio de 2019); **p. 274**: niño gritón, Lotería Nacional, en https://bit.ly/2FQBlcV (Consultado el 28 de junio de 2019); **p. 281:** dado poliédrico, © timquo/Shutterstock.com.

# Recortables 1







# Recortables 2