LIBRO PARA EL MAESTRO

Matemáticas

Tercer grado

TELEsecundaria

Matemáticas
Libro para el maestro

TELEsecundaria

Telesecundaria

Tercer grado

Libro para el maestro. Matemáticas. Tercer grado. Telesecundaria fue elaborado y editado por la Dirección General de Materiales Educativos de la Secretaría de Educación Pública.

Secretaría de Educación Pública
Esteban Moctezuma Barragán

Subsecretaría de Educación Básica
Marcos Augusto Bucio Mújica

Dirección General de Materiales Educativos
Aurora Almudena Saavedra Solá

Coordinación de contenidos
María del Carmen Larios Lozano

Coordinación de autores
Olga Leticia López Escudero

Autores
Hugo Hipólito Balbuena Corro, Emilio Domínguez Bravo, Fortino Escareño Soberanes, Silvia García Peña, Olga Leticia López Escudero

Supervisión de contenidos
José Alfredo Rutz Machorro, Jessica Evelyn Caballero Valenzuela, Juanita Espinoza Estrada, Esperanza Issa González, Ana Paola Hernández González, Arturo López González, Gustavo Sánchez Arellano

Revisión técnico-pedagógica
Olimpia Figueras Mourut de Montppellier

Coordinación editorial
Raúl Godínez Cortés

Supervisión editorial
Jessica Mariana Ortega Rodríguez

Editora responsable
María Guadalupe Ambriz Rivera

Corrección de estilo
Fannie Emery Othón

Producción editorial
Martín Aguilar Gallegos

Preprensa
Citlali María del Socorro Rodríguez Merino

Iconografía
Diana Mayén Pérez, Irene León Coxtinica, María del Mar Molina Aja

Portada
Diseño: Martín Aguilar Gallegos
Iconografía: Irene León Coxtinica
Imagen: *El tianguis* (detalle), 1923-1924, Diego Rivera (1886-1957), fresco, 4.60 × 2.37 m (panel central), ubicado en el Patio las Fiestas, planta baja, D. R. © Secretaría de Educación Pública, Dirección General de Proyectos Editoriales y Culturales/ fotografía de Gerardo Landa Rojano; D.R. © 2021 Banco de México, Fiduciario en el Fideicomiso relativo a los Museos Diego Rivera y Frida Kahlo. Av. 5 de Mayo No. 2, col. Centro, Cuauhtémoc, C. P. 06059, Ciudad de México; reproducción autorizada por el Instituto Nacional de Bellas Artes y Literatura, 2021.

Servicios editoriales
Solar, Servicios Editoriales, S. A. de C. V.

Coordinación editorial
Xiluén Yanitze Zenker de la Concha, Elizabeth González González

Formación
Rosa Virginia Cruz Cruz, Roberto Ángel Flores Angulo, Xiluén Yanitze Zenker de la Concha

Diseño
Roberto Ángel Flores Angulo

Ilustración
María Itzel Alcántara Jurado, Roberto Ángel Flores Angulo, Carolina Tovar González

Primera edición, 2021 (ciclo escolar 2021-2022)

ISBN: 978-607-551-519-9

Impreso en México
DISTRIBUCIÓN GRATUITA-PROHIBIDA SU VENTA

Agradecimientos
La Secretaría de Educación Pública (SEP) agradece a la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO) por su participación en la elaboración de este libro.

En los materiales dirigidos a las alumnas y los alumnos de Telesecundaria, la SEP emplea los términos: alumno(s), maestro(s) y padres de familia aludiendo a ambos géneros, con la finalidad de facilitar la lectura. Sin embargo, este criterio editorial no demerita los compromisos que la SEP asume en cada una de las acciones encaminadas a consolidar la equidad de género.

Presentación

Este libro fue elaborado para cumplir con el anhelo compartido de que en el país se ofrezca una educación con equidad y excelencia, en la que todos los alumnos aprendan, sin importar su origen, su condición personal, económica o social, y en la que se promueva una formación centrada en la dignidad humana, la solidaridad, el amor a la patria, el respeto y cuidado de la salud, así como la preservación del medio ambiente.

El *Libro para el maestro* es una herramienta que permite articular coherentemente el plan de estudios y el libro de texto gratuito con los materiales audiovisuales y digitales propios del servicio de Telesecundaria. Además, es un referente útil al maestro para planear los procesos de enseñanza y aprendizaje, y así obtener el máximo beneficio de la propuesta didáctica del libro para los alumnos.

Este libro está organizado en dos apartados. El primero contiene orientaciones generales relativas a la enseñanza de la asignatura, al enfoque pedagógico y a la evaluación formativa. El segundo está integrado por sugerencias y recomendaciones didácticas específicas, cuyo propósito es ofrecer al maestro un conjunto de opciones para trabajar con las secuencias del libro de texto gratuito. Dichos apartados pueden leerse de manera independiente de acuerdo con las necesidades de los maestros e intereses de sus alumnos.

En su elaboración han participado maestras y maestros, autoridades escolares, padres de familia, investigadores y académicos; su participación hizo posible que este libro llegue a las manos de todos los maestros de Telesecundaria en el país. Con las opiniones y propuestas de mejora que surjan del uso de esta obra en el aula se enriquecerán sus contenidos, por lo mismo los invitamos a compartir sus observaciones y sugerencias a la Dirección General de Materiales Educativos de la Secretaría de Educación Pública y al correo electrónico: librosdetexto@nube.sep.gob.mx.

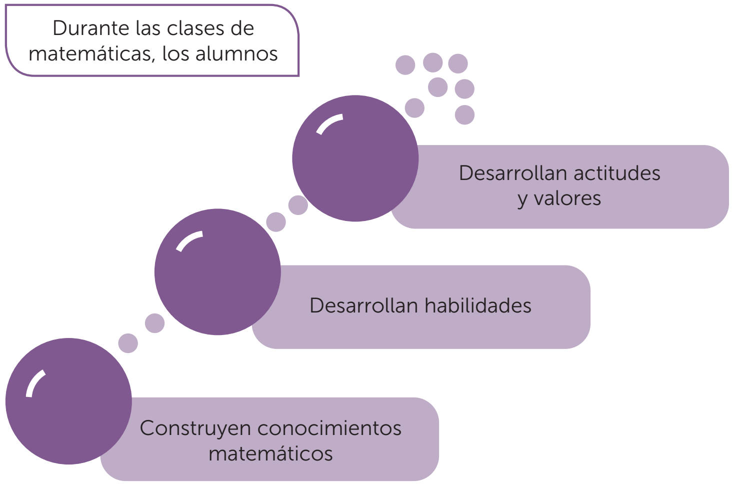
Índice

Bloque 2

Bloque 3

I. Orientaciones generales

1. El objeto de estudio de las matemáticas, su pertinencia y cómo se aprenden



El objeto de estudio de las matemáticas en el tercer grado de secundaria, y desde luego en telesecundaria, es la resolución de problemas que implican factorizar números y expresiones algebraicas cuadráticas; analizar y modelizar situaciones que corresponden a relaciones funcionales y a ecuaciones lineales y cuadráticas sencillas; determinar el área de polígonos; aplicar criterios de semejanza de triángulos, razones trigonométricas y el teorema de Pitágoras, así como calcular la probabilidad de eventos mutuamente excluyentes y comparar los valores de tendencia central, desviación media y rango de dos conjuntos de datos estadísticos.

Para aprender matemáticas, además de aplicar los conocimientos matemáticos al resolver problemas, también es importante propiciar el desarrollo de las habilidades de razonamiento, generalización y síntesis; promover actitudes y valores como la perseverancia para encontrar la solución a un problema; aprender a escuchar los procedimientos y resultados que otros proponen; desarrollar la tolerancia para comprender que hay diferentes procedimientos y maneras de pensar; y aceptar el error cuando, con argumentos válidos, un compañero demuestra que la forma en que se resolvió un problema es la mejor, bien sea porque hay estrategias más eficientes, porque el tipo de valores que se tomó produce respuestas numéricas diferentes, porque el procedimiento seguido es parcialmente correcto o porque la respuesta obtenida no es la acertada, entre otras situaciones que pueden presentarse.

Ésas son algunas de las razones que facilitan la comprensión de por qué las matemáticas forman parte de la educación básica; su alto valor informativo y formativo justifica la pertinencia de su inclusión en el plan y los programas de estudio.

Por otra parte, las herramientas matemáticas que adquirirán los alumnos les permitirán resolver problemas de la vida cotidiana en ámbitos sociales, científicos y tecnológicos. Ese conjunto de conocimientos, habilidades, actitudes y valores contribuye a desarrollar un pensamiento de alto nivel, como el razonamiento deductivo e inductivo mediante el estudio de la geometría; o el pensamiento numérico y algebraico, que ayuda a modelizar situaciones, simbolizarlas y manipularlas para obtener un resultado; o el razonamiento estocástico, que se fortalece con el estudio de la probabilidad y la estadística.

A lo anterior hay que agregar una razón más: las matemáticas constituyen una parte de la cultura que los jóvenes tienen derecho a conocer y que requieren para integrarse a la sociedad del conocimiento; además, les permite comprender y valorar que la educación puede ayudar a crear un mundo sostenible, equitativo y pacífico.[1]

De acuerdo con el enfoque de resolución de problemas, se aprende matemáticas al solucio-

[1] De acuerdo con la Agenda Mundial de Educación 2030 y tomando como referencia el documento de "Educación para los Objetivos de Desarrollo Sostenible. Objetivos de aprendizaje", publicado en 2017 por la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (Unesco).

Razones de la pertinencia de enseñar matemáticas

Con las herramientas matemáticas se resuelven problemas de la vida cotidiana y de ámbitos científicos, sociales y tecnológicos

El estudio de las matemáticas desarrolla el razonamiento de los alumnos

Es parte de la cultura a la que las nuevas generaciones tienen derecho

nar problemas que permitan usar conocimientos previos, pero que, a la vez, requieran un esfuezo cognitivo adicional que obligue a buscar nuevas estrategias de resolución y a construir nuevos conocimientos.

Por ejemplo, en la secuencia 5, "Funciones 1", particularmente en la sesión 1, para introducir el concepto de relación funcional se incluye una reflexión sobre las horas de luz solar en distintos lugares. El hecho corresponde a un fenómeno físico de nuestro planeta, el cual se puede analizar a partir de la observación, el registro, la organización y la comparación de los datos.

5. Funciones 1

Sesión 1

Para empezar

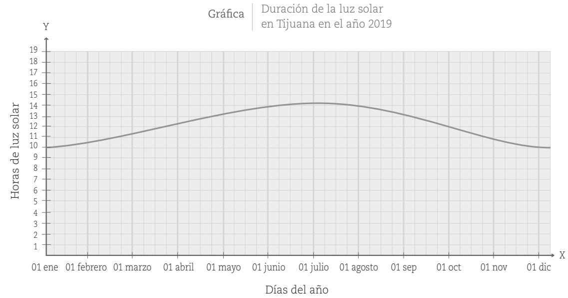
La duración del día, al igual que la de la noche, depende de la época del año y de la parte del mundo en la que nos encontremos. Esto se debe a que, como sabes, la Tierra efectúa un movimiento de traslación alrededor del Sol y otro de rotación sobre su propio eje, que tiene cierta inclinación respecto al Sol. ¿Qué tiene que ver esto con la duración de los días o la diferencia de estaciones a lo largo del año? Si se registrara durante un año la cantidad de horas de luz solar que hay diariamente y se graficaran los datos, ¿qué forma tendría la gráfica? ¿Sería una línea recta o una curva? En esta secuencia aprenderás a analizar casos de variación de manera cualitativa mediante la lectura e interpretación de gráficas o tablas que representan diferentes sucesos.

Manos a la obra

Horas de luz solar en distintos lugares de México y del mundo

1. Trabajen en pareja. Analicen la siguiente gráfica del registro de la cantidad de horas con luz solar diarias en la ciudad de Tijuana durante 2019. Después respondan lo que se pide.

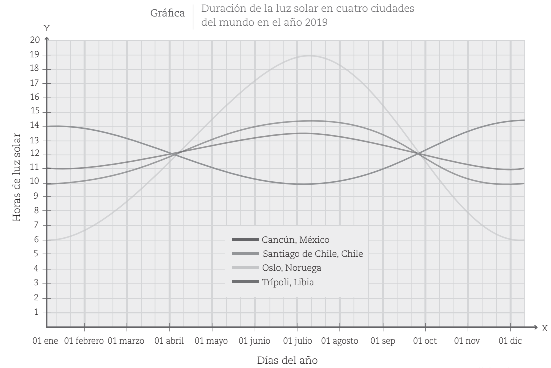
Gráfica | Duración de la luz solar en Tijuana en el año 2019



Fuente: https://bit.ly/2HZFOus

2. En la siguiente gráfica se muestra el flujo del cambio en las horas con luz solar durante los 365 días de 2019 en cuatro ciudades del mundo. Respondan las preguntas con base en los datos que aparecen en ella.

Gráfica | Duración de la luz solar en cuatro ciudades del mundo en el año 2019



Fuente: https://bit.ly/2HZFOus

En este caso, la primera actividad trata de la lectura e interpretación de una gráfica de línea que da lugar a la segunda actividad, en la que los alumnos deberán interpretar varias gráficas de línea que muestran los registros de otras ciudades.

Ambas actividades tienen la finalidad de que los alumnos analicen la relación entre dos aspectos de una situación que se observan para comprender las relaciones que hay en un conjunto y en la comparación entre los conjuntos de datos.

En la siguiente sesión, los alumnos deberán destacar que uno de los atributos de la relación entre los datos es la de dependencia, y que la lectura e interpretación de las representaciones gráficas y tabulares permiten identificarla. Este tipo de reflexiones quedan a cargo de los alumnos y deben ser promovidas por el docente.

Sesión 2

Día a día

1. Trabajen en pareja. Consideren las gráficas de la sesión anterior para completar la tabla de abajo. Anoten la duración aproximada del día en las fechas solicitadas para cada ciudad.

Ciudad	Enero 1	Febrero 1	Marzo 21	Junio 21	Agosto 1	Septiembre 21	Noviembre 1	Diciembre 21
Tijuana	10 h					12 h		
Cancún	11 h						11 h y 30 minutos	

a) ¿Qué duración tiene el día más largo en Tijuana? ____________ Y, ¿en Cancún? ____________ ¿Ocurre en la misma fecha para ambas ciudades? ____________

b) ¿A qué se deberá que las gráficas de Tijuana y Cancún, aun estando en México, no tengan el mismo comportamiento? ____________

Al trabajar en pareja o en equipo se promueve el trabajo colaborativo, momento en el que los alumnos tienen la primera oportunidad de expresar sus ideas y enriquecerlas con las opiniones de los demás. Este tipo de interacción les permite apoyarse mutuamente, pues es probable que algunos no hayan entendido el problema o no encuentren por sí solos el camino para llegar a una solución, y que se enriquezcan las formas de comprender e iniciar la resolución de un determinado problema. Es un momento en que el apoyo entre pares es de suma importancia, debido a que muchas veces el alumno comprende mejor cuando un compañero le explica.

Después de la resolución de algunas actividades, se sugiere hacer una puesta en común. Esta parte de la sesión es coordinada por usted y es fundamental para que los alumnos profundicen sus reflexiones, desarrollen habilidades de comunicación y fomenten actitudes y valores.

Como se puede observar, en el caso de las actividades 4 y 5 de la sesión 2, “Día a día”, de la secuencia 5, hay una pregunta y una formalización que centra la discusión.

4. En grupo, y con apoyo del maestro, comenten: ¿por qué a cada fecha y a cada ciudad sólo les corresponde un dato de duración de horas en la gráfica?

5. Junto con su maestro, lean y comenten lo siguiente.

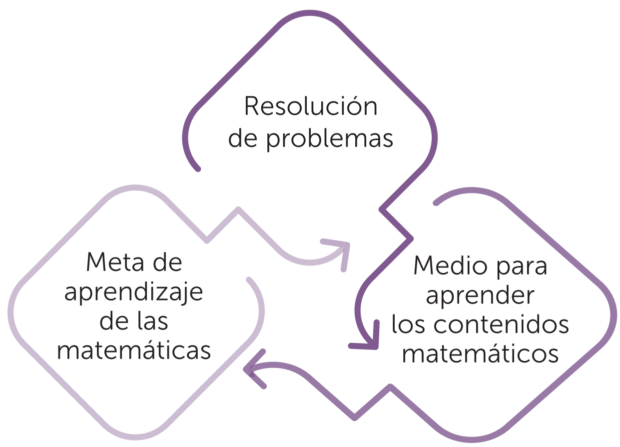
En las gráficas y en las tablas de valores suele presentarse una relación de dependencia entre dos variables.

En otras ocasiones podría ocurrir que, durante la puesta en común, los alumnos comparen sus resultados y los procedimientos que utilizaron para encontrarlos, e identifiquen que hay diferentes caminos para resolver un problema y que algunos son más directos que otros. La puesta en común es también el momento en que se identifican errores y se analiza de dónde pueden surgir: una operación mal efectuada, una lectura equivocada del problema o la aplicación de una técnica que no es adecuada para resolver el problema en cuestión. De esta manera, el error se convierte en una fuente de reflexión, análisis y aprendizaje.

2. Enfoque didáctico de Matemáticas

La resolución de problemas es una meta y, al mismo tiempo, el medio para aprender matemáticas. Es una meta porque se pretende que, al finalizar la educación básica, los alumnos sepan aplicar los conceptos, las técnicas y las habilidades matemáticas desarrolladas para resolver

Aspectos generales del enfoque de resolución de problemas y el libro de texto

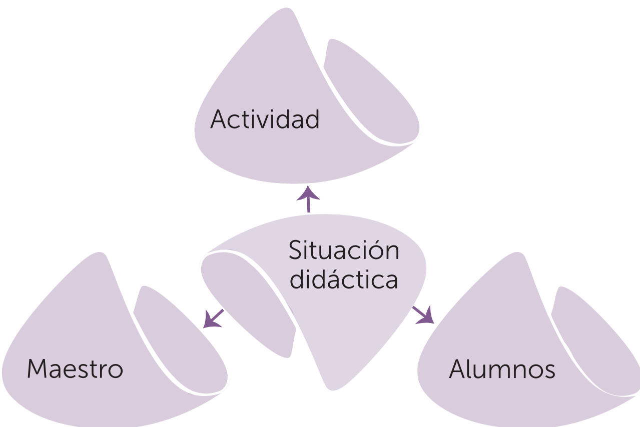


cualquier problema que lo requiera. La resolución de problemas es también un medio que les permite analizar, discutir y planear estrategias de resolución, lo cual les servirá para construir conocimientos y desarrollar habilidades.

2.1 Aspectos generales de la enseñanza de Matemáticas

a) *Cómo se construyen las situaciones didácticas de la asignatura*

Una situación didáctica abarca el escenario de la clase en su conjunto, incluida la actividad que sirve como medio para el estudio, el grupo de alumnos y el profesor.[2]



El punto de partida para que los alumnos estudien y aprendan matemáticas está en proponerles actividades que despierten su interés y favorezcan su reflexión. En el libro de texto, las actividades se diseñaron con base en los aprendizajes esperados señalado en el programa de estudios, y algunas de las actividades se sitúan en contextos de la vida real, es decir, se toman de diversas áreas en las que los conocimientos requeridos tienen alguna aplicación; sin embargo, otros se dan en el campo de la propia disciplina, en la que hay una gran variedad de problemas que resultan verdaderos desafíos para los alumnos.

Un ejemplo de un problema de la vida real está en la sesión 3, "Calentadores solares" de la secuencia 7, "Razones trigonométricas 1", en la que, para resolverlo, los alumnos deberán poner enjuego diversas estrategias que quizá ya conozcan, y que les brinda la oportunidad de aprender otras formas de llegar al resultado y elegir la que les resulte más accesible.

a) Para la Ciudad de México se recomienda que la altura a la que se coloque el calentador solar sea la mitad de la medida que tiene de largo. Con base en este dato, completen la siguiente tabla.

Dato interesante
Los calentadores solares son inocuos para el medio ambiente porque no emiten contaminantes, ¡y fueron inventados hace más de un siglo!

Largo del calentador solar (m)	Altura del calentador solar (m)
1.50	
	0.80
1.80	
2.3	
	1.45

b) El ángulo de inclinación de los calentadores solares indicados en la tabla, ¿es el mismo o varía? ______________ Argumenten su respuesta. ______________
____

Un ejemplo de problema puramente matemático son los que se plantean en la sesión 2 de la secuencia 1, "Múltiplos, divisores y números primos".

4. Trabajen en equipo. Completen la tabla y asegúrense de que no les falta ningún factor o divisor. Después contesten las preguntas.

Número	Conjunto de factores o divisores del número	¿Cuántos factores o divisores son en total?
40		
64		
23		
81		
67		
60		

Algunos números sólo tienen dos factores o divisores distintos: el 1 y él mismo. Estos números se conocen como *números primos*.

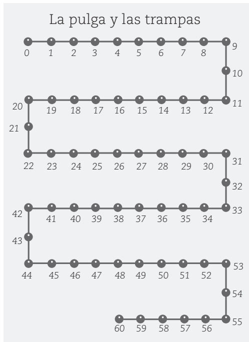
[2] En el marco de la teoría de las Situaciones Didácticas desarrollada por Guy Brousseau. http://www.udesantiagovirtual.cl/moodle2/pluginfile.php?file=%2F204043%2Fmod_resource%2Fcontent%2F2%2F287885313-Guy-Brousseau-Iniciacion-al-estudio-de-la-teoria-de-las-situaciones-didacticas-pdf.pdf.

Algunas actividades implican situaciones lúdicas, como ocurre en la sesión 1, "Divisores de un número". Los juegos tienen la ventaja del descubrimiento, en particular cuando son de estrategia. Para encontrar la opción ganadora, se deben comprender los componentes del juego, el tipo de movimientos o la forma de actuar, el objetivo y la manera de ganar. Para trazar un plan al buscar una estrategia hay que llevar a cabo una serie de pruebas. Luego se deben poner en práctica las estrategias, seleccionar las ganadoras y comprobar la validez de sus conjeturas.

■ **Manos a la obra**

Divisores de un número

1. Reúnete con tres compañeros para jugar a "La pulga y las trampas" hasta el número 54. Utilicen el tablero que aparece en el recortable 1 de la página 271.
   a) Elijan a un jugador que ponga una trampa sobre uno de los números de la línea del tablero; los demás harán saltar a la pulga.
   b) Antes de hacer saltar a su pulga, cada jugador debe decir la longitud que eligió para sus saltos: de dos en dos, de tres en tres, de cuatro en cuatro, de cinco en cinco o de seis en seis.
   c) Si la pulga es atrapada, se la queda quien puso la trampa. Si no cae, la conserva quien la hizo saltar.
   d) En la siguiente ronda, otro jugador pone la trampa. Y continúan así hasta que todos hayan colocado trampas. Gana quien obtiene más pulgas.



En "La pulga y las trampas", el jugador que pone las trampas debe pensar en qué números es conveniente colocarlas para que los otros jugadores caigan y no puedan avanzar. Por lo general, en un principio los alumnos seleccionan números pares pequeños, pero debe pedirles que piensen, por ejemplo, en bloquear el avance de quienes saltan de 7 en 7. En el caso de los otros jugadores, deben considerar el tamaño de los saltos, de manera que puedan librar las trampas. Estas reflexiones permitirán a los alumnos pensar en divisores y múltiplos.

Es importante destacar que las actividades de estudio conforman secuencias que aumentan gradualmente su nivel de dificultad. Mediante ellas, los alumnos van conociendo técnicas cada vez más potentes y conceptos que forman parte del lenguaje propio de la asignatura, lo que les permite avanzar en la construcción del conocimiento matemático, como se observa, por ejemplo, en las situaciones que se proponen en el trayecto formativo de las secuencias 7. "Razones trigonométricas 1", 16. "Razones trigonométricas 2" y 25. "Razones trigonométricas 3", respectivamente, en particular al dar seguimiento al contexto relacionado con las escaleras de mano. Así vemos que en la sesión 4 de la secuencia 7, los alumnos trabajan con una situación en la que una escalera está recargada en una pared y se representa mediante un triángulo rectángulo, para luego introducir implícitamente el coseno de un ángulo. Posteriormente, en el bloque 2, en la sesión 1 de la secuencia 16, se inicia el trabajo para establecer formalmente las razones trigonométricas: seno, coseno y tangente. Y, finalmente, en la actividad 3, inciso c), de la sesión 3 de la secuencia 25, los alumnos harán un proceso inverso: dado el valor de alguna de las razones trigonométricas, determinarán el ángulo de inclinación.

Sesión 4

Escaleras de mano

1. Trabajen en pareja. Observen la imagen de una escalera recargada en una pared.

El ángulo marcado con rojo es el ángulo de inclinación de la escalera.

   a) Imaginen que la escalera de la imagen se desliza hacia el frente; completen la tabla en función de lo que pasaría. Usen las siguientes etiquetas.

aumenta disminuye queda igual

La distancia de la escalera a la pared...	La altura que alcanza la escalera en la pared...	El ángulo de inclinación de la escalera...

■ Manos a la obra

¿Qué cambia y qué no cambia?

1. Trabajen en pareja. En la secuencia 7 se utilizó la imagen de una escalera recargada en una pared, la cual podía representarse mediante un triángulo rectángulo.

Sesión 3 ¿Cuánto mide el ángulo?

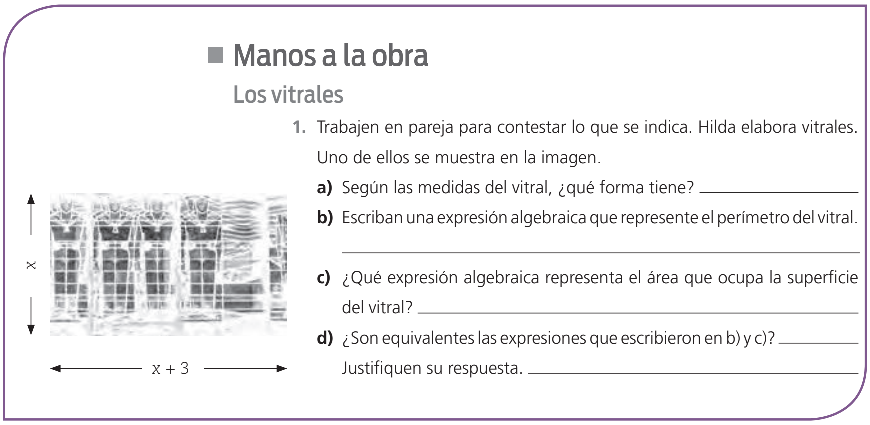
1. Trabajen en pareja. En la secuencia 7 se dijo que la inclinación a la que debe colocarse un calentador solar depende de la latitud del lugar y del largo del calentador. Recuerden que el colector es la parte de los tubos del calentador solar.

b) *El papel de los conocimientos previos*

Un criterio importante en la elaboración de las secuencias didácticas ha sido que los alumnos entiendan qué se busca con cada actividad y adónde se quiere llegar sin que se les diga cómo hacerlo. Esto último es su responsabilidad y, a la vez, su mérito cuando han logrado obtener un resultado, aunque no necesariamente sea el que se esperaba. Para ello deben apoyarse en lo que ya saben hacer, en los conocimientos previos que les permiten entender el problema y quizá vislumbrar alguna vía de resolución.

Muchas veces, sin embargo, esos conocimientos no son suficientes para llegar al resultado y, por tanto, será necesario que echen mano de algo más, quizá de la adaptación de una técnica conocida, o que busquen otra que responda a las nuevas condiciones, o que modifiquen o amplíen una idea que deja de ser cierta para todos los casos. Esto sucede en la mente de un alumno cuando se embarca en la resolución de un desafío, lo cual conforma el acto de aprender matemáticas y de aprender a aprender.

Se espera que así ocurra al resolver las actividades propuestas en la sesión 1 de la secuencia 3, "Figuras geométricas y equivalencia de expresiones de segundo grado 1", debido a que los alumnos deben encontrar primero expresiones algebraicas que corresponden al perímetro de los vitrales rectangulares, como lo estudiaron en los grados anteriores. En seguida, se les pide expresar el área de esos vitrales.



■ Manos a la obra

Los vitrales

1. Trabajen en pareja para contestar lo que se indica. Hilda elabora vitrales. Uno de ellos se muestra en la imagen.
   - **a)** Según las medidas del vitral, ¿qué forma tiene? ______
   - **b)** Escriban una expresión algebraica que represente el perímetro del vitral. ______
   - **c)** ¿Qué expresión algebraica representa el área que ocupa la superficie del vitral? ______
   - **d)** ¿Son equivalentes las expresiones que escribieron en b) y c)? ______ Justifiquen su respuesta. ______

Se espera que observen que las expresiones algebraicas equivalentes que representan el área de los vitrales implican el producto de la medida del largo del vitral por la medida del ancho. Y que no pueden corresponder a la suma de las medidas de los lados para obtener el perímetro, dado que el área considera dos dimensiones y el perímetro solamente una. Esa esencia debe quedar reflejada en la expresion algebraica. De ahí que, por ejemplo, en la actividad 1 de la sesion 1, al expresar el perímetro del vitral se tenga:

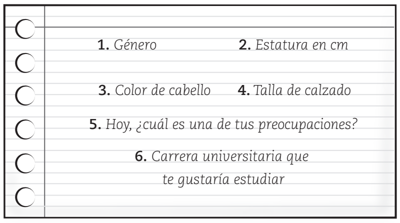
$[x + (x + 3)] + [x + (x + 3)] = 2[x + (x + 3)] = 2x + 2(x + 3) = 2x + 2x + 2(3) = 2x + 2x + 6 = 4x + 6$

Mientras que el área del vitral se expresa como:

$$x(x + 3) = x(x) + x(3) = x^2 + 3x$$

c) *El papel de los intereses de los alumnos para el aprendizaje de Matemáticas*

5. Trabajen en equipo. Preparen tarjetas iguales a la que se muestra a la izquierda para realizar una encuesta a sus compañeros de grupo o de la telesecundaria, según el número de estudiantes que haya.



Si lo consideran adecuado, incluyan alguna pregunta que les permita obtener datos sobre otro aspecto que les interese conocer relacionado con sus compañeros, grupo, escuela o comunidad.

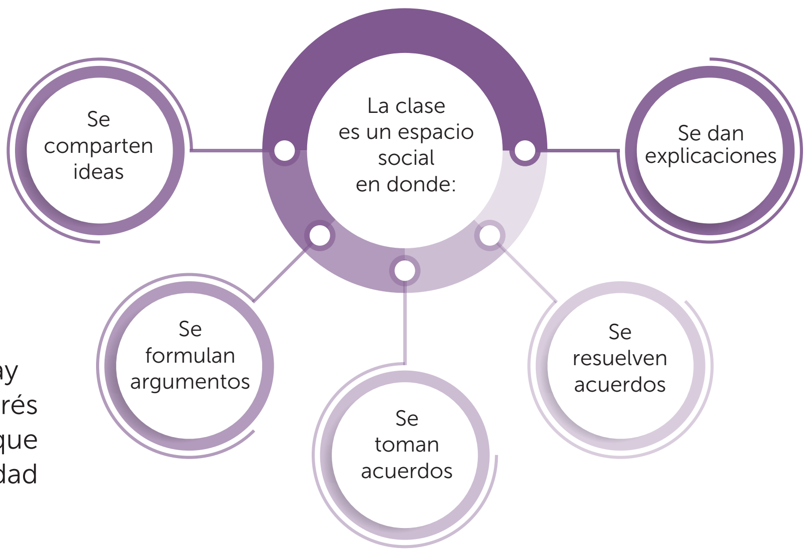
6. Entreguen una tarjeta a cada compañero para que la completen. Posteriormente, con las respuestas registradas, formen una base de datos. Pueden elaborarla en su cuaderno o en una computadora. Los datos que obtengan los usarán en la sesión 3.

La escuela y los docentes tienen la responsabilidad de que los intereses de los alumnos se enfoquen en las actividades de estudio que hacen cotidianamente. Es cierto que el ambiente familiar y el medio social en el que los alumnos conviven influyen en buena medida en el interés de aprender, y la escuela y el aula son lugares propicios para orientar los intereses hacia el trabajo intelectual. El gran reto para la escuela y los maestros es cambiar la clase magistral y el ejercicio memorístico por un espacio en el que los alumnos interactúen con el problema y se establezca entre ellos un ambiente de trabajo colaborativo, con la finalidad de encontrar procedimientos y resultados que pondrán a consideración de sus compañeros y analizarán con el apoyo del docente. Por ejemplo, en las actividades 5 y 6 de la sesión 1 de la secuencia 26, "Tendencia central y dispersión de dos conjuntos de datos 2", se espera que sea de interés de los alumnos señalar y registrar algunas de las situaciones que les preocupan y que las contrasten con lo que reportan los informes de las encuestas que han analizado en la sesión 3 de la misma secuencia.

Sin duda, en cualquier grupo de alumnos hay diferencias a las que hay que estar atento para evitar el desinterés y el rezago, pero eso no significa que cada alumno requiera de una actividad diferente.

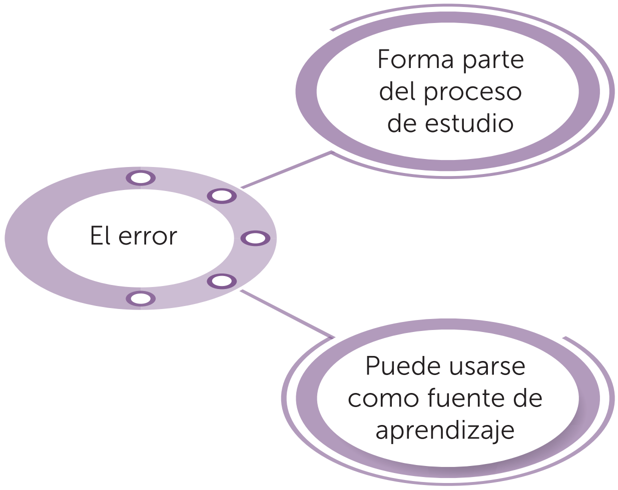
Las diferencias entre los alumnos surgirán; no obstante, se trata de que, ante un mismo problema, cada alumno o equipo de alumnos lo resuelva apoyándose en los conocimientos con que cuenta. En la puesta en común se discuten y analizan estos diferentes procedimientos.

Aunque cada alumno construye los conocimientos a su manera, la clase es un espacio social en el que las interacciones entre alumnos y maestro tienen un papel fundamental para compartir ideas, formular argumentos y explicaciones, tomar acuerdos y resolver desacuerdos, analizar, reflexionar y asimilar errores o conceptos equivocados; es el espacio idóneo para que los alumnos aprendan y se interesen por aprender cada vez más y desarrollen habilidades, actitudes y se apropien de valores, como el respeto a quien presenta puntos de vista diferentes.



d) *El error en el aprendizaje, los procesos de aprendizaje, el acercamiento al conocimiento convencional*

Cuando se piensa en un grupo de alumnos que interactúa con un problema para tratar de encontrar alguna vía de resolución y un resultado, es muy probable que se cometan errores. Éstos forman parte del proceso de estudio, y en vez de ocultarlos, dejarlos de lado o, peor aún, penalizarlos, deben plantearse al grupo para ser analizados y buscar entre todos el razonamiento que hubo detrás de ellos. Muchas veces se deben a una interpretación equivocada de lo que dice el problema; otras, a carencias de los alumnos. Lo importante es identificar las causas, en qué parte del proceso se originan y de qué manera se pueden superar.



No todos los errores merecen ser analizados y discutidos. Hay algunos casuales, como poner una cifra por otra cuando se escribe una cantidad, o dejar de lado una cantidad al sumar varias; basta con señalar esos errores en el momento.

Sin embargo, sí es importante que se analicen colectivamente los errores conceptuales o de procedimiento, poniendo en juego los argumentos de los propios alumnos y con las aclaraciones necesarias del docente, con el fin de que se conviertan en fuente de aprendizaje. Para lograrlo, se requiere crear en el aula un ambiente en el que los alumnos no se sientan incómodos ni se inhiban cuando cometen un error; esto es, que el error no sea visto como algo reprobable.

e) *Aprender a aprender en Matemáticas*

¿Qué significa aprender a aprender en general, y en particular en Matemáticas? En primer lugar, aceptar que para aprender es necesario estudiar, lo que implica pensar, observar, analizar, formular hipótesis, razonar, tomar decisiones. En suma, usar la inteligencia para conocer algo que no se sabe. Bajo esta premisa, es de esperarse que lo que se aprende se convierta en un saber funcional, con vida propia y que se pueda usar, incluso de manera automática, para conocer más y lograr otros saberes. Esto es lo que significa aprender a aprender.

En el caso particular del estudio de los temas del eje *Número, álgebra y variación,* las siguientes recomendaciones contribuirán seguramente a que los alumnos vean las matemáticas como una disciplina útil además de interesante; permitirán atender el enfoque integrador que se da en el libro al tratamiento de los temas, al conectarlos con los de los demás ejes de la asignatura y con otros campos del conocimiento, y facilitarán el avance en espiral de los contenidos matemáticos a lo largo del ciclo secundario.

Un ejemplo sencillo es el siguiente: si en un primer momento se pide a los alumnos que enumeren el cero y los primeros 10 números naturales que al dividirse entre 5 tengan 3 como residuo, sus respuestas serán: 3, 8, 13, 18, 23, 28, 33, 38, 43 y 48, y podrán enunciar la regularidad o patrón que se percibe en esta lista ordenada de números.

Más adelante se les puede pedir que representen de manera general esa lista de números y, entonces, será necesario reconocer el patrón, diferenciando entre lo que varía y lo que permanece constante. Simbolizarán con una literal lo que varía e indicarán su multiplicación por 5 para obtener, por ejemplo, $5n$, y la expresión general $5n + 3$. Y si la lista ordenada de números se alargara, la pregunta podría ser: ¿qué posición ocupa en esa lista el número 428? Ahora los alumnos se familiarizarán con una herramienta fundamental en la resolución de problemas algebraicos: la ecuación. En este caso, escribirán la ecuación $5n + 3 = 428$.

Esta última cuestión permite que los alumnos perciban una relación funcional entre los números de esa lista y la posición que ocupan en ella, relación que podrán expresar algebraicamente como $y = 5x + 3$, donde la literal y representa el número en cuestión y x la posición que ocupa en la lista. Un asunto en que se insiste en tercer grado es comprender la diferencia entre los dos conceptos anteriores: la ecuación y la función.

Si los alumnos pueden explicar lo que representan las literales en cada caso, comprenden esa diferencia: en las ecuaciones la literal (o incógnita) representa un número limitado de valores, uno en las ecuaciones lineales y dos en las cuadráticas. En la ecuación lineal anterior, $5n + 3 = 428$, la literal n representa el valor 85, que es la posición que ocupa el 428 en la lista de números ordenados.

En el caso de las funciones, a las literales se les llama variables, porque el valor de una de ellas depende de la regla de correspondencia que tiene con el valor de la otra. En la función lineal $y = 5n + 3$, el valor de la variable y depende del valor de la variable x (en cada posición x hay un número distinto y). Este hecho se percibe también en las gráficas de las funciones lineales y cuadráticas.

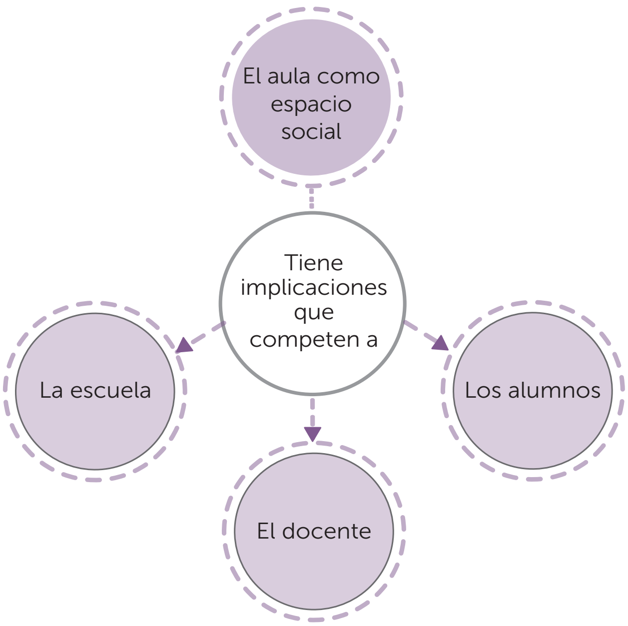
En esta sencilla actividad hemos visto que el álgebra desempeña un papel integrador dentro del eje *Número, álgebra y variación*.

Se recomienda, además, como lo sugiere el libro, utilizar en el aula los modelos geométricos, empezando con los rectangulares, para dar sentido a las expresiones algebraicas: polinomios si se trata de representar las medidas de los lados, perímetros, áreas o volúmenes; y ecuaciones, para calcular valores desconocidos del modelo geométrico si se conoce el valor del perímetro o del área o del volumen; y relaciones funcionales al dinamizar la situación cuando se explora lo que sucede al variar una de las medidas del modelo en función de otra.

Finalmente, se debe considerar que la resolución de un problema o una situación no termina cuando los alumnos dan la respuesta aritmética o algebraica, por citar dos tipos de respuestas. Conviene abrir un paréntesis en clase para provocar una discusión sobre las implicaciones de la situación o del problema, por ejemplo, si se trata de un contexto económico o ambiental, y sobre las medidas de prevención correspondientes, si se trata de un problema de salud, entre otros.

2.2 Condiciones en el aula para la enseñanza y el aprendizaje de Matemáticas

Concebir el aula como un espacio social en el que se construye conocimiento tiene varias implicaciones. Algunas son competencia de la escuela, otras del docente y otras de los alumnos. A la escuela le corresponde propiciar y organizar el intercambio de experiencias entre los maestros a través de la observación de la clase entre compañeros o el análisis de casos en las reuniones de Consejo Técnico Escolar. La enseñanza de las matemáticas con el enfoque de resolución de problemas debe ser un proyecto de escuela. Por lo tanto, es de vital importancia que haya continuidad de un grado a otro para que, cuando los alumnos pasen al siguiente grado escolar, no se pierda el trabajo desarrollado por un maestro que aplica este enfoque.



Asimismo, se requiere impulsar una cultura escolar en la que el tiempo destinado a la clase sea intocable, esto es, que se ocupe fundamentalmente en actividades de estudio. Tanto los alumnos como el docente deben estar concentrados en la tarea que hacen los alumnos al buscar alternativas para resolver el problema que se les planteó, mientras el docente observa lo que hacen y escucha lo que dicen, plantea preguntas o aclara dudas para que los alumnos avancen. Es recomendable que el maestro se mantenga en el aula durante las sesiones y no sea interrumpido por otro maestro, el director o algún padre de familia.

A los docentes les corresponde, sin duda, la responsabilidad mayor para que el aula sea un espacio social de construcción de conocimiento. En primer lugar, son los encargados de planear las actividades que se van a proponer a los alumnos. Aunque éstas se encuentran en el libro de texto, es necesario que el docente estudie y lea las sugerencias correspondientes en el libro para el maestro. Estas dos acciones le darán elementos para saber cuál es la intención didáctica de las actividades, las dificultades que pueden encontrar los alumnos, los posibles errores y, en general, la manera de hacer adecuaciones y guiar el proceso de estudio.

Junto con la puesta en marcha de actividades de estudio, al docente le corresponde implementar y ser consecuente con las normas de carácter didáctico que los alumnos asumirán poco a poco para ser partícipes de un clima de confianza y respeto mutuo, pero también de ruptura con los cánones que se han establecido a través del tiempo en las sesiones de matemáticas.

Le recomendamos que convierta el aula en un espacio para dialogar, compartir ideas, discutir, analizar y establecer acuerdos sobre la tarea que se haga. A usted le corresponde provocar la interacción entre los alumnos al organizar las tareas en parejas o en equipos, permitiendo que compartan interpretaciones del problema planteado, estrategias de resolución y acuerdos para compartir y confrontar con los demás compañeros.

Una vez que la mayoría de los alumnos lleguen a ciertos resultados, usted será el responsable de organizar la interacción con el resto del grupo, a fin de que compartan ideas, analicen procedimientos diferentes, discutan la pertinencia de los resultados y lleguen a conclusiones que formarán parte de la memoria de la sesión; es decir, que se conviertan en conocimientos que tanto los alumnos como el maestro pueden traer a primer plano para que sean utilizados en otras tareas.

Igualmente, usted deberá estar al tanto de los progresos y rezagos de los alumnos y, en el segundo caso, buscará las estrategias necesarias para superar las dificultades y lograr avances. Es decir, deberá hacer ajustes a su planeación de acuerdo con las situaciones que se vayan presentando en el grupo, ya sea para retroalimentar, regresar o avanzar más en los conocimientos estudiados.

Ésta también es una forma de evaluación de la cual se hablará más adelante; sin embargo, es importante resaltar que no se limita a vigilar el desempeño de los alumnos, es necesario que reflexione acerca de las actividades que plantea al grupo y de su actuación como organizador de las tareas y el aprendizaje de sus alumnos. Por ejemplo, debe preguntarse y reflexionar en torno a si las actividades resultaron muy fáciles o muy difíciles, si lograron despertar el interés de los alumnos, o bien, si es necesario hacer algún cambio. La mejor manera de saber si una actividad es adecuada para el grupo y provoca la reflexión y el interés de los alumnos es llevándola al aula, lo cual permite hacer las adecuaciones pertinentes.

A los alumnos les corresponde pensar y producir ideas para solucionar los problemas que se les plantean; intercambiar sus ideas en equipo asumiendo una responsabilidad compartida; defender sus puntos de vista y aprender a escuchar y aceptar las ideas de sus compañeros; reconocer las dificultades que tienen y tratar de superarlas con ayuda de otros.

También sabrán que su responsabilidad no es sólo encontrar respuestas, sino verificar que sean correctas, esto es, deben comprobar que responde a lo que plantea el problema. De igual forma, aprenderán que algunos problemas no tienen solución y, por lo tanto, no se verán forzados a encontrarla. Sabrán que a veces faltan datos para contestar, o sobran datos y no necesariamente se tienen que usar todos, así como que podría haber varias respuestas plausibles.

En general, se espera que los alumnos asuman una actitud participativa en las sesiones, pensando, comentando con sus compañeros las ideas y estrategias que consideran les ayudarán a resolver el problema planteado y, por otra parte, exponiendo y explicando sus razonamientos al resto del grupo. También aprenderán a escuchar las ideas de los demás para enriquecer o cambiar las propias. Asimismo, sabrán que la interacción con sus compañeros y con usted se debe desarrollar en un marco de respeto y compromiso con la tarea que están llevando a cabo.

2.3 La evaluación

La evaluación está fuertemente vinculada al proceso de estudio y consiste en recabar información, de manera permanente y continua, sobre el desempeño de los alumnos y del propio docente, así como sobre la pertinencia de las actividades de estudio, con la finalidad de emitir juicios y hacer lo necesario para mejorar lo que se evalúa.

Como se plantea una forma diferente de acercar a los alumnos al conocimiento, se hace necesaria una manera distinta de evaluar. En este sentido, la evaluación deja de ser equivalente a la aplicación de uno o más exámenes para asignar una calificación que ineludiblemente lleva el sello personal de cada docente.

a) Evaluación inicial: *Punto de partida*

El libro de texto presenta una propuesta de evaluación denominada *Punto de partida,* la cual tiene la finalidad de que el docente cuente con un referente del conocimiento inicial de sus alumnos,para que identifique algunos de los contenidos que aún están en proceso o que representan mayor dificultad, y pueda buscar y ofrecer alternativas a los alumnos que les permitan avanzar.

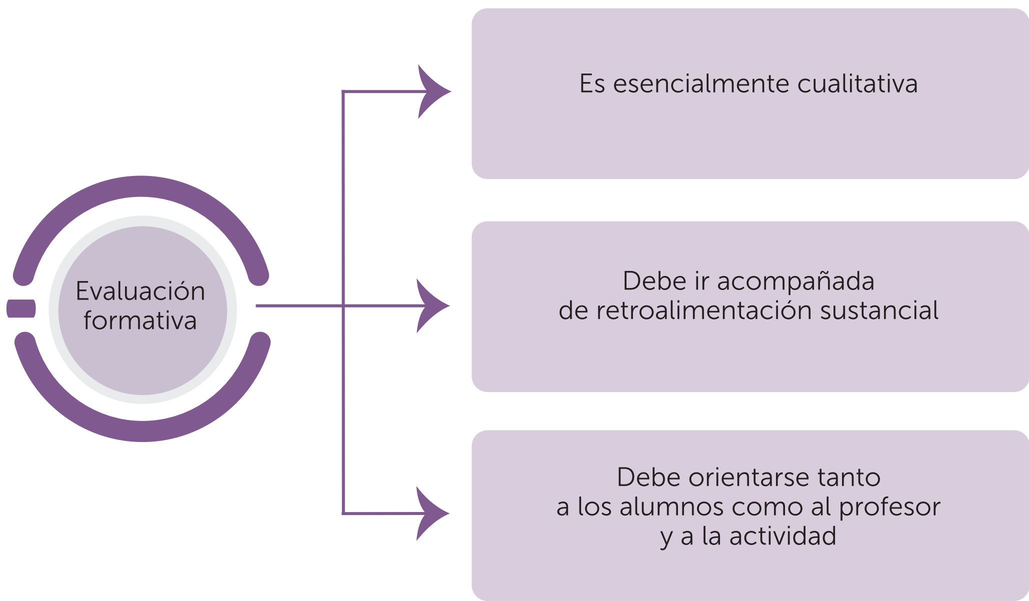
Si usted considera que el instrumento es insuficiente para las finalidades señaladas, elabore su propio instrumento. Para ello se hacen las siguientes recomendaciones generales:

- Incluir datos de identificación: nombre del alumno, del docente y fecha de realización.
- Indicar el tipo de evaluación.
- Utilizar instrucciones claras y explícitas.
- Incluir preguntas, situaciones o problemas en los que se consideren conocimientos y habilidades que el alumno debiera tener con base en los aprendizajes esperados para el grado anterior.
- Dar a conocer al alumno el resultado de la evaluación con *observaciones y recomendaciones puntuales.*

Es importante que el alumno se percate de su desempeño medido con este instrumento, con la finalidad de que conozca dónde se encuentra en ese momento y valore los avances que vaya teniendo a lo largo del curso.

b) *La evaluación formativa como parte del proceso de estudio*

La evaluación formativa se lleva a cabo mediante la observación y registro de notas durante el desarrollo de las actividades de estudio. En ella se involucran los alumnos y el docente. Su finalidad es promover la reflexión, tanto del maestro como de los alumnos, sobre los avances en el aprendizaje. Se parte de las intenciones didácticas, en las que se considera que sea utilizado determinado recurso al resolver un problema (concepto, procedimiento o técnica). Suele suceder que los alumnos no usen la herramienta matemática que se espera y esto es motivo de evaluación, tanto para la actividad como para los alumnos. ¿Qué ajustes necesita la actividad para que los alumnos se vean en la necesidad de usar tal o cual procedimiento? ¿Qué tipo de apoyos necesitan los alumnos para avanzar? Son dos preguntas que hay que tener presentes en todo momento para que el trabajo que los alumnos realizan, bajo la dirección del maestro, tenga una finalidad clara y puedan hacerse, a tiempo, los ajustes necesarios para que mejoren su aprendizaje.



De hecho, en el desarrollo de las secuencias se deben observar elementos que permitan analizar dónde se encuentra el alumno, qué herramientas usa y las que aún requiere para seguir avanzando en su aprendizaje.

Estas acciones proporcionan elementos al maestro para determinar si es necesario hacer adecuaciones a su planificación o simplemente necesita proponer una tarea diferenciada para algunos alumnos a fin de que avancen.

Entre las acciones que se requieren para que una evaluación sea considerada formativa está la *retroalimentación*, entendida como la oportunidad de analizar con mayor profundidad el trabajo realizado, planteando preguntas adicionales y dejando claramente identificados los errores cometidos.

La evaluación formativa es esencialmente cualitativa y le permite al maestro emitir juicios acerca de lo que sabe el alumno y las dificultades que debe superar, de manera que tenga elementos para informar a los padres de familia en caso de que el alumno requiera algún apoyo. La evaluación formativa permite recolectar información sobre la actividad planteada, por ejemplo, si resultó apropiada o hay que hacer ajustes o cambios. Por último, la evaluación formativa también permite al maestro darse cuenta de si es adecuado su actuar en el aula o debe cambiar la estrategia.

A continuación le proporcionamos unos ejemplos que le pueden sugerir formas de efectuar este tipo de evaluación.

	Aprendizaje esperado	Intenciones didácticas		Pautas para la evaluación formativa	Aspectos por considerar en el trabajo en clase
Número, álgebra y variación Tema: Número	AE1 Determina y usa criterios de divisibilidad y los números primos.	Secuencia 1 **Múltiplos, divisores y números primos** Que los alumnos distingan los conceptos: múltiplo, divisor, número primo y número compuesto, y usen divisiones sucesivas para determinar si un número es o no primo.	Sesión 1 **Divisores de un número** Determinar el conjunto de divisores de un número dado.	Distingue lo que es un múltiplo y lo que es un factor o divisor. Encuentra el conjunto de factores o divisores de un número.	- Puede leer y comprender instrucciones de un juego. - Sabe trabajar en equipo y seguir indicaciones. - Conoce el conjunto de un número dado. - Divide un número entre 2, entre 3, entre 4, y así sucesivamente hasta 10. - Identifica los números que tienen más divisores. - Hace divisiones mentalmente o por escrito. - Formula enunciados con los criterios de divisibilidad.
			Sesión 2 **Múltiplos y divisores de un número** Determinar el conjunto de factores de un número y analizar su equivalencia con el conjunto de divisores. Conocer el significado de número primo y múltiplo de un número.	Comprende el concepto factor. Reconoce que el conjunto de factores de un número también es el conjunto de divisores de dicho número.	- Sabe que el área es la medida de la superficie, mientras que el perímetro es la medida del contorno. - Distingue el área y el perímetro de una figura. - Analiza que el conjunto de factores es, a la vez, el conjunto de divisores de ese número. - Reconoce que el conjunto de divisores de un número ayuda a distinguirlos de los múltiplos, ya que el conjunto de divisores es finito. - Distingue dos tipos de números, los que tienen más de dos divisores y los que sólo tienen 2. - Analiza que el 1 es divisor de cualquier número natural y ellos mismos; y que a estos números se les conoce como primos.
			Sesión 3 **La criba de Eratóstenes** Conocer y usar la criba de Eratóstenes para seleccionar números primos. Conocer el significado de número compuesto.	Conoce el concepto de número primo. Reflexiona sobre algunas propiedades de los números primos y los números compuestos. Distingue un múltiplo de un divisor.	- Escribe y determina los números primos comprendidos entre 2 y 100. - Utiliza recursos propios para determinar si un número es primo o compuesto. - Utiliza los números primos al resolver problemas numéricos. - Hace cálculos mentalmente de números primos menores que 10.

<table>
<tr><th></th><th>Aprendizaje esperado</th><th colspan="2">Intenciones didácticas</th><th>Pautas para la evaluación formativa</th><th>Aspectos por considerar en el trabajo en clase</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Número, álgebra y variación
Tema: Número</td><td rowspan="2">AE1
Determina y usa criterios de divisibilidad y los números primos.</td><td rowspan="2">Secuencia 2
Criterios de divisibilidad
Que los alumnos resuelvan problemas que implican determinar si un número entero es o no divisible entre otro número entero menor o igual que 10.</td><td>Sesión 1
Divisibilidad entre 3
Usen el criterio de divisibilidad entre 3, al resolver problemas.</td><td>Usa los criterios de divisibilidad entre tres al resolver problemas.</td><td>- Sabe leer y comprender un problema.
- Plantea preguntas a partir de la información que se da en un problema.
- Sabe cuándo utilizar el algoritmo de la resta, suma, multiplicación y división.
- Comprende que ser divisible significa que el residuo de la división es cero.
- Sabe utilizar la divisibilidad entre 3 para hace referencia a la suma de las cifras de algún número en cuestión.
- Maneja indistintamente las expresiones “es divisible entre” o “es múltiplo”.
- Para la solución de problemas procede por ensayo y error.
- Aplica adecuadamente el criterio de divisibilidad entre 3.</td></tr>
<tr><td>Sesión 2
Divisibilidad entre 2 o entre 5
Apliquen los criterios de divisibilidad entre 2, 5, 3 y 10 al resolver problemas.</td><td>Emplea los criterios de divisibilidad entre 2, 3, 5 y 10 al resolver problemas.</td><td>- Identifica alguna característica común que tengan los múltiplos de 2.
- Identifica alguna característica común que tengan los múltiplos de 5.
- Puede formular una idea que defina los múltiplos de 2.
- Puede formular una idea que defina los múltiplos de 5.
- Sabe formular los criterios de divisibilidad entre 2 y 5.
- Resuelve ejercicios que implican la divisibilidad entre 2, 3 y 5.
- Comprende que son divisibles entre 2 todos los números que terminan en cifra par (0, 2, 4, 6 u 8).
- Sabe que son divisibles entre 5 todos los números que terminan en 0 o en 5.
- Comprende que son divisibles entre 10 todos los números que terminan en 0.
- Usa los criterios de divisibilidad para resolver cuestionamientos.
- Puede descomponer números en factores primos.</td></tr>
</table>

	Aprendizaje esperado	Intenciones didácticas		Pautas para la evaluación formativa	Aspectos por considerar en el trabajo en clase
Número, álgebra y variación Tema: Número			Sesión 3 Divisibilidad entre 4 y entre 6 Describan los criterios de divisibilidad entre 4 y entre 6 al resolver problemas.	Utiliza el criterio de divisibilidad entre 4 y 6 al resolver problemas.	- Reconoce que si un número es divisible entre 4 es porque hay que fijarse en el número formado por las dos últimas cifras y que todos los números de la derecha son divisibles entre 4, mientras que los de la izquierda no. - Reconoce que la divisibilidad entre 6 tiene algo que ver con la divisibilidad entre 2 y entre 3. - Identifica, sin hacer la división, los números que son divisibles entre 4. - Analiza que son divisibles entre 6 los números que terminan en cifra par, es decir, son divisibles entre 2. Y la suma de todas las cifras sea múltiplo de 3. - Reconoce que *son divisibles entre 4 todos los números naturales cuyas dos últimas cifras forman un número divisible entre 4.* Son divisibles entre 6 todos los números naturales cuya última cifra es par y la suma de sus cifras es múltiplo de tres. - Sabe cuándo un numero cumple con la condición de ser múltiplo común de 3, 5 y 6.
			Sesión 4 Algo más sobre los criterios de divisibilidad Usen los criterios de divisibilidad al resolver diversos problemas.	Resuelve diversos problemas con el uso de los criterios de divisibilidad.	- Sabe cuándo algunos números son divisibles entre 9 y los encierra en un óvalo. - Reconoce las características que tienen en común los números que son divisibles entre 9. - Comprende cuándo un número es divisible entre 2, 3, 5, 6, 9 y 10. - Puede resolver operaciones que implican la divisibilidad entre 2, 6 y 3. - Sabe identificar los números que cumplen con las condiciones de divisibilidad entre 2, 3, 5, 9 y 10. - Resuelve problemas que impliquen utilizar los criterios de divisibilidad.

Por otra parte, durante la puesta en común el maestro habrá de notar quiénes participan y quiénes no, con el objeto de animar a estos últimos a que lo hagan.

Suele suceder que alguien, que por lo general no participa, sugiere una buena idea para llegar a la solución. En estos casos conviene usar un anecdotario. Se requiere una libreta o un tarjetero y destinar una hoja o una tarjeta para cada uno de los alumnos. En el anecdotario se registran únicamente los hechos que se salen de lo común, con la idea de conservar algunas de las ideas o formas de actuar de los alumnos que permitan apreciar sus procesos de aprendizaje. A continuación, a manera de ejemplo, se muestra una nota que pudiera corresponder a un alumno.

Alumno *x*	Grado: 3º Sec.	Fecha: 9/09/20
Han pasado tres semanas de clases en las que *x* no había participado, pero ahora lo hizo con una explicación clara del procedimiento que utilizaron en su equipo para resolver un problema que implicaba el uso de ecuaciones cuadráticas. Es necesario animarlo para que siga participando.		

Además del anecdotario, hay otros recursos para recabar información sobre el desempeño de los alumnos. Por ejemplo: el libro de texto, el cuaderno de trabajo, la lista de registro de actividades, la carpeta de trabajos, rúbricas, listas de cotejo y los ejercicios que realizan de manera periódica. A continuación se proporciona un ejemplo de estos instrumentos.

Rúbrica			
Nombre del estudiante: Jazmín Tello	Grado: 3° Grupo: A	Bloque 1	Fecha: 29/09/20
Eje temático: Forma, espacio y medida Tema: Figuras y cuerpos geométricos	Secuencia: 6. Polígonos semejantes 1		

Aspectos observables	Hace lo esperado	En proceso	Enfrenta dificultades (no hace lo esperado)	Total
Razonamiento geométrico	Resuelve todo tipo de problemas que implica construir polígonos semejantes porque identifica cuáles son las características y propiedades que deben cumplir.	Soluciona algunos problemas que implican construir polígonos semejantes, ya que no considera todos los aspectos que debe cumplir un par de polígonos para ser semejantes.	En la construcción de polígonos semejantes se percibe que omite considerar la proporcionalidad de los lados y la igualdad de los ángulos.	
Ponderación	25%	20%	15%	
Estrategias y procedimientos	Reconoce figuras a escala como figuras semejantes y las traza correctamente.	Identifica algunas figuras a escala como figuras semejantes y sólo traza correctamente algunas.	No reconoce figuras a escala como figuras semejantes y no las traza correctamente porque no identifica el valor de la escala o la proporcionalidad entre los lados.	
Ponderación	25%	20%	15%	
Conceptos matemáticos	Puede describir que dos polígonos son semejantes si sus ángulos son iguales respectivamente, y sus lados correspondientes son proporcionales, esto es, que existe entre ellos la misma razón de proporcionalidad.	Identifica que dos polígonos son semejantes si sus ángulos son iguales respectivamente y sus lados correspondientes son proporcionales, esto es, que hay entre ellos la misma razón de proporcionalidad.	No sabe que dos polígonos son semejantes si sus ángulos son iguales respectivamente y sus lados correspondientes son proporcionales, esto es, que existe entre ellos la misma razón de proporcionalidad.	
Ponderación	25%	20%	15%	
Explicaciones	Expone de manera oral y escrita los conocimientos y procedimientos que utiliza para construir polígonos semejantes y utilizar criterios de semejanza de triángulos.	Presenta de manera oral los conocimientos y procedimientos que utiliza para construir polígonos semejantes y utiliza criterios de semejanza de triángulos.	No expresa de forma clara los conocimientos y procedimientos que utiliza para construir polígonos semejantes y utilizar criterios de semejanza de triángulos.	
Ponderación	25%	20%	15%	
Observaciones generales:				

Lista de cotejo			
Nombre del estudiante: Jazmín Tello	**Grado: 3°** **Grupo: A**	**Bloque: 1**	**Fecha: 29/10/20**
Eje temático: Número, álgebra y variación **Tema: Ecuaciones**	**Secuencia 4. Ecuaciones cuadráticas 1**		

Criterios de evaluación	Sí	No	Puntaje
Distingue la diferencia entre una ecuación de primer grado y una de segundo grado.			
Representa algebraicamente datos de un problema.			
Formula ecuaciones de primer grado y de segundo grado sencillas.			
Identifica las dos raíces de una ecuación de segundo grado a partir de su representación gráfica.			
Utiliza lenguaje algebraico para representar datos.			
Reconoce que una ecuación cuadrática o de segundo grado con una incógnita es una ecuación en la que el mayor exponente de la incógnita es 2.			
Sabe que las ecuaciones cuadráticas tienen una raíz o raíces dobles o dos raíces diferentes o no tiene raíces definidas en el conjunto de los números reales.			
Discrimina entre la solución de la ecuación y la solución del problema.			
Soluciona ecuaciones de una gráfica con la ecuación cuadrática.			
Sabe que las soluciones o raíces de una ecuación cuadrática se pueden observar al graficar la función con la que está asociada y corresponden a las abscisas de los puntos en los cuales la gráfica se interseca con el eje X; en estos casos, los valores de la ordenada son 0. También sabe que una ecuación cuadrática puede no tener raíces reales y, en consecuencia, la gráfica de la función no cruzará el eje de las abscisas.			
Plantea y resuelve, por ensayo y error, ecuaciones de segundo grado cuya relación con el problema le es clara.			
Observaciones del maestro:			

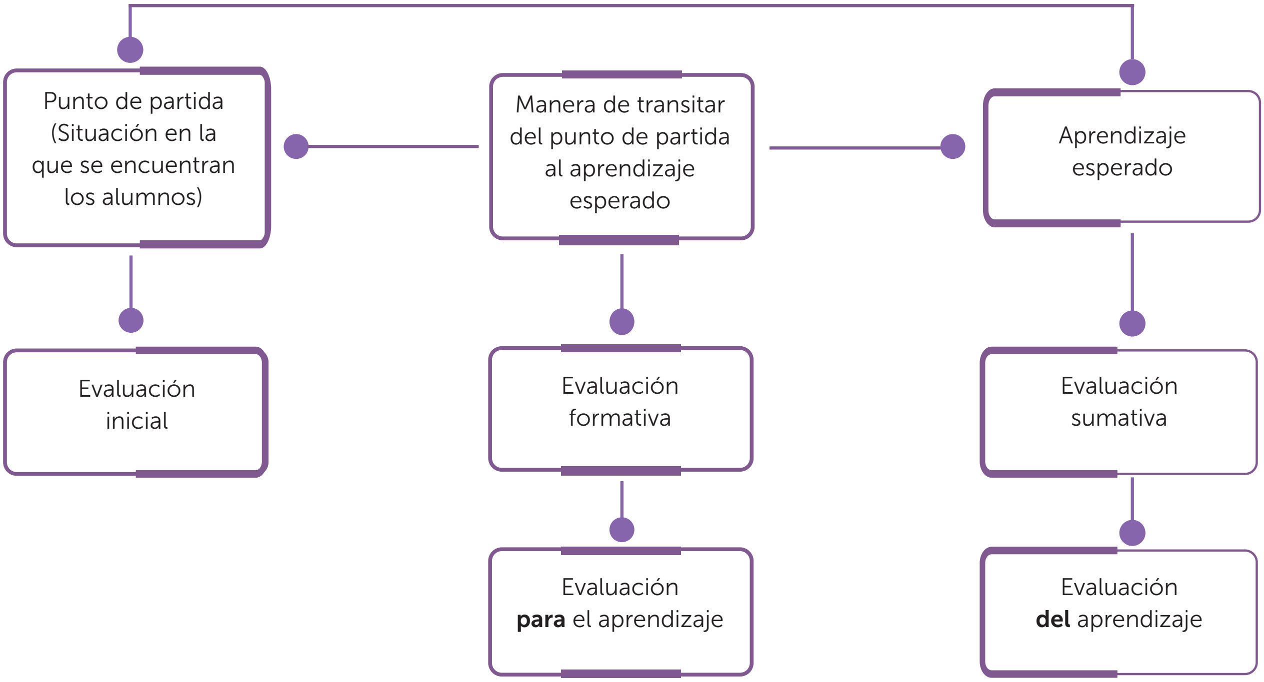
c) *La evaluación sumativa*

Este tipo de evaluación consiste en dar una calificación cuya escala es del 1 al 10. Debe reflejar lo que usted ha observado en las actuaciones de los alumnos desde que inició el proceso (Punto de partida) hasta el punto al que ha llegado en el momento de asentar dicha calificación.

Por otra parte, es importante que esta evaluación se acompañe de evidencias del trabajo que el alumno ha realizado, de los comentarios y sugerencias que usted le ha dado acerca de su desempeño y de las tareas adicionales que le ha propuesto para superar los obstáculos, o bien, para avanzar en la construcción de sus conocimientos.

La calificación parcial o final no puede ni debe ser resultado de una sola prueba. Si así fuera, la evaluación formativa no tendría ningún sentido. Afortunadamente, el maestro de telesecundaria trabaja con un solo grupo, conoce muy bien a sus alumnos y cuenta con información suficiente para emitir una calificación basada en criterios claros.

El diagrama de la siguiente página resume lo anterior:



Esta manera diferente de evaluar los logros alcanzados va de la mano con el proceso de estudio. Así, mientras los alumnos diseñan y prueban una estrategia para resolver un problema, usted observa lo que hacen y escucha cómo piensan, se da cuenta de qué alumnos tienen dificultades y toma nota de ello para tratar de apoyarlos en la superación de sus dificultades, así como para evaluar las actividades que el libro o usted plantean.

Hay una evaluación adicional que no refleja necesariamente el avance de los alumnos, pero que tiene una gran importancia.

Cuando se elige una actividad para plantear a un grupo de alumnos, no hay certeza sobre lo que va a suceder. ¿Les resultará interesante? ¿Muy fácil? ¿Muy difícil? ¿Tediosa? Es hasta el momento de aplicarla cuando se pueden responder estas preguntas y tomar las medidas necesarias. Si en el proceso de estudio intervienen el maestro, los alumnos y la actividad que se plantea, la evaluación debe aplicarse a los tres elementos.

d) *La autoevaluación docente*

Usted debe también analizar su propia actuación: ¿faltó dar una información que era importante? ¿Proporcionó alguna información que no debía haber dado? ¿Dejó demasiado tiempo para la actividad y ya no alcanzaron a realizar la puesta en común? ¿Hubiera sido mejor que organizara a los alumnos en equipos? Generalmente, estos y otros cuestionamientos surgen de manera natural como consecuencia de la manera de trabajar y abonan a su formación profesional docente.

Usted puede emitir juicios en relación con la actividad que planteó a partir de la reacción de los alumnos y, como se dijo, la forma en que gestionó la clase le permite darse cuenta de su propio desempeño.

Evaluarse a uno mismo no es tarea fácil. Se puede ser muy duro o excesivamente laxo; en ninguno de los casos se logra la mejor forma de acompañar a los alumnos en su proceso de aprendizaje. Por esto la observación entre pares es también una propuesta para mejorar y seguir aprendiendo sobre la tarea docente. Así, el intercambio de ideas, sugerencias y estrategias entre compañeros docentes se vuelve una necesidad si se quiere lograr un mejor desempeño.

3. La vinculación con otras asignaturas

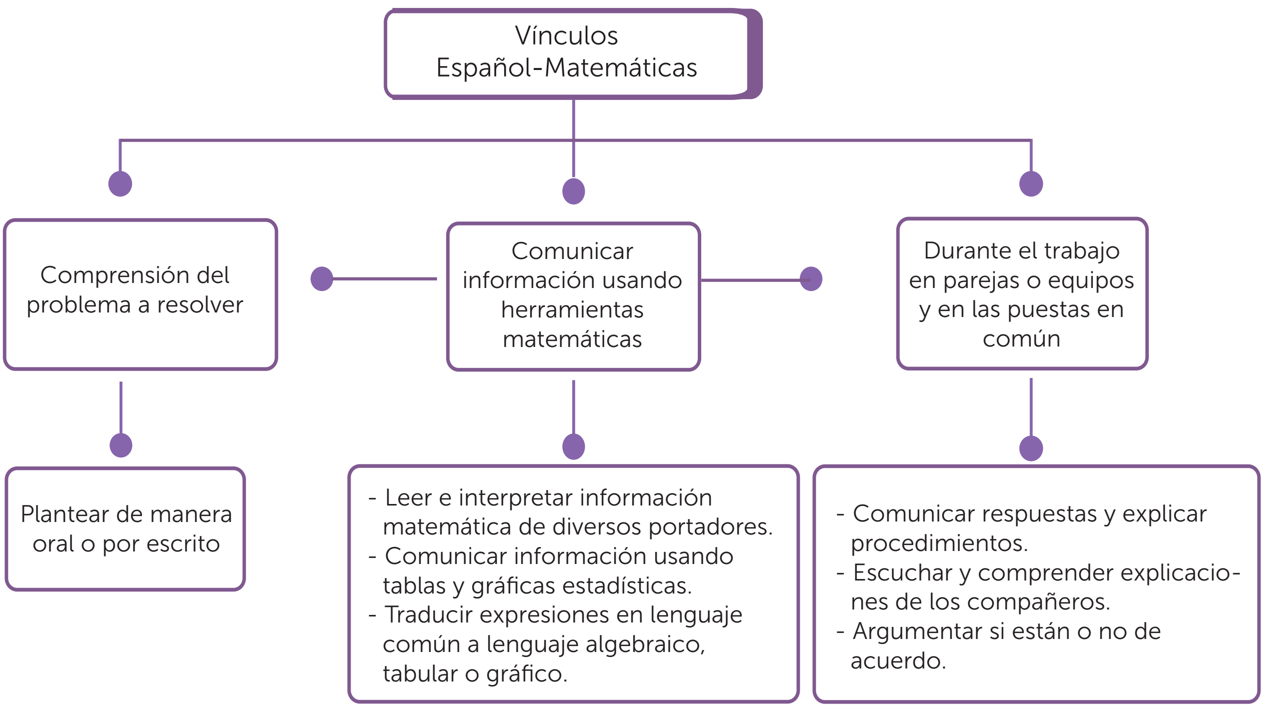
Todas las personas, desde el nacimiento, aprendemos de manera integral, por lo que es importante establecer en la educación formal la relación que tienen los aprendizajes en las diferentes asignaturas y la manera en que ese aprendizaje se convierte en cimiento sobre el cual se construyen nuevos conocimientos.

La vinculación de las matemáticas con otras asignaturas puede darse de manera inherente y estar presente de modo continuo en las sesiones de matemáticas, o bien a partir de los contextos seleccionados para plantear los problemas que se resolverán con herramientas matemáticas.

En el primer caso se tiene la vinculación de las matemáticas con la asignatura de español; un ejemplo clásico es la necesidad de que los alumnos comprendan el problema que se pide resolver, ya sea que usted lo plantee de manera oral o por escrito. Si se trata de un problema planteado por escrito (por ejemplo, las actividades del libro de texto), es importante la comprensión lectora.

Otra manera en que esta asignatura se emplea durante las clases de Matemáticas se refiere a los contenidos relacionados con la comunicación de la información a través de herramientas matemáticas, por ejemplo, cuando se traslada información numérica estadística a tablas o gráficas estadísticas, cuando se lee e interpreta información matemática de diversos portadores (diarios, revistas, internet, etcétera) o cuando se traducen expresiones que están en el lenguaje común al lenguaje algebraico, tabular o gráfico.

Cuando se hacen puestas en común, al ceñirse al enfoque de resolución de problemas también se establece un vínculo con la asignatura de español, ya que los alumnos tienen que comunicar sus respuestas y explicar los procedimientos que siguieron, así como escuchar los de sus compañeros o argumentar si están o no de acuerdo con lo que se está discutiendo.



Por otra parte, a partir del análisis del documento curricular se identificaron vínculos puntuales con otras asignaturas, mismos que están identificados como una sección flotante en las sesiones de las secuencias del libro de texto del alumno, y en el del maestro aparecen indicadas en la ficha descriptiva, al inicio de las recomendaciones para trabajar cada secuencia de las que aparecen en la segunda parte de esta guía.

Un ejemplo es el vínculo señalado en la sesión 1 de la secuencia *5*, "Funciones 1", entre la situación problemática que se presenta y el tema de Geografía en el que se mencionan diferentes mapamundis de la Tierra con la intención de que los alumnos los utilicen para localizar las ciudades a las que se hace referencia en la secuencia.

La importancia de señalar estas vinculaciones está en la idea de lograr que los alumnos vean sus aprendizajes como algo que les permite saber más no sólo acerca de una asignatura en particular, sino que estos aprendizajes les permiten comprender otros de diversa índole y las habilidades que se desarrollan en cierta área de estudio también apoyan y son útiles para la construcción de otros conocimientos.

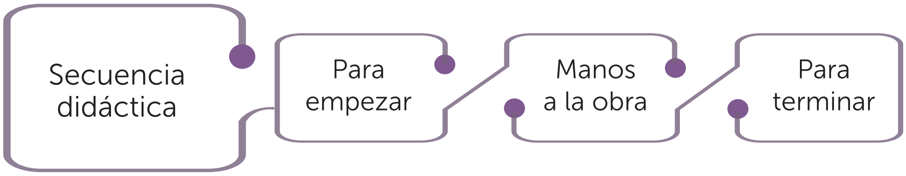
Vínculo con... Geografía
Revisa el libro de Geografía de primer grado para retomar algunos de sus mapamundis y resolver la actividad 3 de esta página. También puedes encontrarlo en internet en la liga bit.ly/2xhRaIR. Consulta las páginas 67 o 69.

4. El libro de texto de Matemáticas para el alumno

Cada uno de los aprendizajes esperados señalados en el plan y los programas de estudio se desglosaron en contenidos que se desarrollan mediante propuestas de aprendizaje en secuencias didácticas distribuidas en tres bloques. El libro de texto *Matemáticas. Tercer grado* de Telesecundaria está conformado por dos volúmenes, el primero contiene 9 secuencias que integran el bloque 1, mientras que en el volumen II se incluyen 18 secuencias que corresponden a los bloques 2 y 3 para obtener un total de 27 secuencias didácticas. Una secuencia didáctica puede abarcar de tres a cinco sesiones.

Bloque 1	Bloque 2	Bloque 3
1. Múltiplos, divisores y números primos	10. Mínimo común múltiplo y máximo común divisor 1	20. Mínimo común múltiplo y máximo común divisor 2
2. Criterios de divisibilidad	11. Figuras geométricas y equivalencia de expresiones de segundo grado 2	21. Figuras geométricas y equivalencia de expresiones de segundo grado 3
3. Figuras geométricas y equivalencia de expresiones de segundo grado 1	12. Funciones 2	22. Ecuaciones cuadráticas 3
4. Ecuaciones cuadráticas 1	13. Ecuaciones cuadráticas 2	23. Funciones 3
5. Funciones 1	14. ¿Ecuación o función?	24. Polígonos semejantes 3
6. Polígonos semejantes 1	15. Polígonos semejantes 2	25. Razones trigonométricas 3
7. Razones trigonométricas 1	16. Razones trigonométricas 2	26. Tendencia central y dispersión de dos conjuntos de datos 2
8. Teorema de Pitágoras 1	17. Teorema de Pitágoras 2	27. Eventos mutuamente excluyentes 3
9. Eventos mutuamente excluyentes 1	18. Tendencia central y dispersión de dos conjuntos de datos 1	
	19. Eventos mutuamente excluyentes 2	

Cada secuencia didáctica está conformada por tres componentes didácticos: *Para empezar* (inicio), *Manos a la obra* (desarrollo) y *Para terminar* (cierre).



Para empezar. Presenta un escrito breve que da un panorama sobre aspectos generales que refieren e introducen al tema de estudio.

En *Manos a la obra* se proponen actividades de estudio para lograr la intención didáctica de cada secuencia. Las actividades están conformadas por situaciones problemáticas que corresponden a la edad y características de los alumnos de este grado; además se pretende despierten el interés en los alumnos y que corresponden a conceptos, procedimientos y habilidades a desarrollar.

Para terminar. Esta sección está integrada con actividades en las que los alumnos concretan lo aprendido durante la secuencia a través de la resolución de situaciones o problemas, de tal manera que puedan evidenciar el nivel de logro alcanzado.

5. Materiales de apoyo para la enseñanza y el aprendizaje

La propuesta educativa del libro de texto se complementa con recursos audiovisuales e informáticos que apoyarán a los alumnos en su aprendizaje. Los programas audiovisuales están diseñados en función del tratamiento de los contenidos desarrollados en el libro de texto; en ellos se conjuga la imagen, el movimiento y el sonido para motivar, ejemplificar, profundizar o consolidar lo estudiado en la secuencia. En cada secuencia se integran uno o dos audiovisuales, identificados por el nombre correspondiente y un ícono.

5. Observen el recurso audiovisual *Ecuaciones cuadráticas 1* para analizar las características de las ecuaciones de segundo grado.

Los recursos informáticos están diseñados para que los alumnos tengan oportunidad de aplicar, practicar y fortalecer los contenidos o procedimientos principales de cada secuencia. Al igual que los audiovisuales, en cada secuencia se integra un recurso informático que se identifica por el nombre que le corresponde y un ícono.

6. Utilicen el recurso informático *Análisis de ecuaciones cuadráticas* para continuar analizando gráficas y expresar algebraicamente ecuaciones lineales y cuadráticas.

Tanto los recursos audiovisuales como los informáticos estarán disponibles en un repositorio especial para Telesecundaria, con el fin de que se puedan utilizar tantas veces como sean necesarias.

6. Alternativas para seguir aprendiendo como maestros

El trabajo docente, tal como se plantea en párrafos anteriores, es una tarea compleja que implica un alto nivel de profesionalización. No es nada fácil conducir debates entre los alumnos, apoyarlos para que logren comunicar sus ideas de manera clara y obtener algunas conclusiones como resultado de la puesta en común, usar el error como fuente de aprendizaje o poner contra ejemplos cuando un alumno ha construido concepciones no apropiadas. Para ello se necesita un conocimiento sólido de la disciplina, altas expectativas sobre los alumnos, una gran apertura para dar entrada a diferentes formas de pensar y una gran calidad humana para brindar apoyo y seguridad a los alumnos que se rezagan.

Los docentes de Telesecundaria afrontan una complejidad mayor por el hecho de atender todas las asignaturas. En este servicio educativo, la condición de tener un dominio sólido en las disciplinas pasa a un segundo plano a cambio de contar con materiales que guíen puntualmente los procesos de estudio y de asumir la responsabilidad de leerlos y utilizarlos, al mismo tiempo que tales materiales deben brindar libertad para hacer las adecuaciones que consideren necesarias en función del contexto social y las características de los alumnos que integran el grupo.

Ningún maestro se puede mostrar arrogante al pensar que lo sabe todo, ya que puede darse el caso de que los alumnos propongan algún procedimiento que el maestro no conocía, o hagan alguna pregunta para la cual no se tiene una respuesta. Es válido decir "no sé", o "no lo había pensado de esa manera", lo cual debería ser algo normal para los alumnos, siempre y cuando el ambiente que se experimente en el aula sea la búsqueda de alternativas de solución. Se debe tener en cuenta que el maestro es la persona con más experiencia, pero no por eso está obligado a tener siempre todas las respuestas.

La profesionalización del docente, mencionada al inicio de este punto, se logra en el día a día, con los aciertos y los errores, mediante el intercambio de experiencias con otros maestros, en la medida en que en el centro de trabajo se hable de la práctica docente y se emprendan acciones conjuntas para mejorar.

En la propuesta que ponemos a consideración de los maestros de Telesecundaria se cuenta con audiovisuales dirigidos a la práctica docente, algunos se refieren a la profundización del contenido matemático y otros a la didáctica de dichos contenidos. En las sugerencias para el trabajo con los diferentes contenidos encontrará la guía de los audiovisuales que se elaboraron para apoyar la labor docente.

7. Mapa curricular

En la siguiente página se presenta la manera en que se plantea lograr los aprendizajes esperados del grado con el desarrollo de las secuencias para apoyarlo a usted en su planeación anual.

Eje	Tema	Aprendizajes esperados	Bloque 1	Bloque 2	Bloque 3
			Nombre de las sesiones		
Número, álgebra y variación	Número	AE1 Determina y usa criterios de divisibilidad y los números primos.	1. Múltiplos, divisores y números primos		
			2. Criterios de divisibilidad		
		AE2 Usa técnicas para determinar el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor.		10. Mínimo común múltiplo y máximo común divisor 1	20. Mínimo común múltiplo y máximo común divisor 2
	Patrones, figuras geométricas y expresiones equivalentes	AE5 Formula expresiones de segundo grado para representar propiedades del área de figuras geométricas y verifica equivalencia de expresiones, tanto algebraica, como geométricamente.	3. Figuras geométricas y equivalencia de expresiones de segundo grado 1	11. Figuras geométricas y equivalencia de expresiones de segundo grado 2	21. Figuras geométricas y equivalencia de expresiones de segundo grado 3
	Ecuaciones	AE3 Resuelve problemas mediante la formulación y la solución algebraica de ecuaciones cuadráticas.	4. Ecuaciones cuadráticas 1	13. Ecuaciones cuadráticas 2	22. Ecuaciones cuadráticas 3
	Funciones	AE4 Analiza y compara diversos tipos de variación a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica, que resultan de modelar situaciones y fenómenos de la física y de otros contextos.	5. Funciones 1	12. Funciones 2	23. Funciones 3
	Patrones, figuras geométricas y expresiones equivalentes	AE6 Diferencia las expresiones algebraicas de las funciones y de las ecuaciones.		14. ¿Ecuación o función?	
Forma, espacio y medida	Figuras y cuerpos geométricos	AE7 Construye polígonos semejantes. Determina y usa criterios de semejanza de triángulos.	6. Polígonos semejantes 1	15. Polígonos semejantes 2	24. Polígonos semejantes 3
		AE8 Resuelve problemas utilizando las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.	7. Razones trigonométricas 1	16. Razones trigonométricas 2	25. Razones trigonométricas 3
	Magnitudes y medidas	AE9 Formula, justifica y usa el teorema de Pitágoras.	8. Teorema de Pitágoras 1	17. Teorema de Pitágoras 2	
Analisis de datos	Estadística	AE10 Compara la tendencia central (media, mediana y moda) y dispersión (rango y desviación media) de dos conjuntos de datos.		18. Tendencia central y dispersión de dos conjuntos de datos 1	26. Tendencia central y dispersión de dos conjuntos de datos 2
	Probabilidad	AE11 Calcula la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes.	9. Eventos mutuamente excluyentes 1	19. Eventos mutuamente excluyentes 2	27. Eventos mutuamente excluyentes 3

II. Sugerencias didácticas específicas

Punto de partida

La siguiente batería de 17 reactivos es una propuesta elaborada con el fin de proporcionarle elementos para valorar algunos de los aprendizajes esperados que los alumnos lograron en segundo grado de secundaria, y como un punto de partida para dar seguimiento al avance que presenten durante este grado, así como para orientar sus estrategias de enseñanza.

Reactivo 1

Con las expresiones que presenten los alumnos podrá verificarse el conocimiento en el manejo de la equivalencia de *expresiones algebraicas equivalentes de primer grado*.

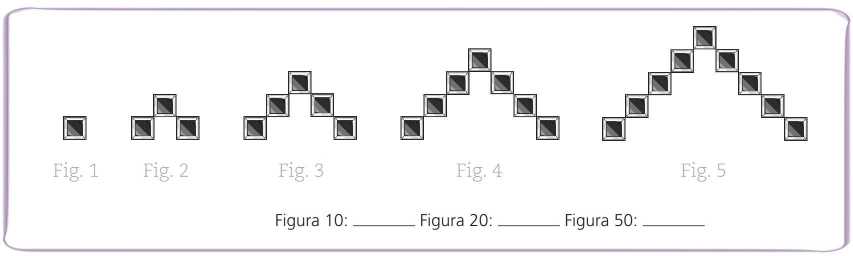
a) $12m$; $m + m + m + m + m + m + m + m + m + m + m + m$; $3m + 3m + 3m + 3m$; $4(3m)$

b) $3m + 3m + 3m + 3m$; $m + m + m + m + m + m + m + m + m + m + m + m$; $12m$; $4\,(3m)$

Reactivo 2

Con las respuestas de este reactivo podrá constatar los conocimientos que tienen los alumnos acerca de las *sucesiones*.

Figura 10: 19; figura 20: 39; figura 50: 99.



Reactivo 3

Este reactivo le permite valorar los conocimientos que tienen los alumnos sobre el manejo de la representación gráfica de situaciones de *variación lineal y proporcionalidad inversa*.

a) Variación lineal (Gráfica 2)

b) Variación inversamente proporcional (Gráfica 3)

c) Variación de proporcionalidad directa (Gráfica 1)

Reactivo 4

Con este reactivo podrá observar si los alumnos utilizan estrategias para resolver problemas. Se trata de una *relación de proporcionalidad directa*: cuantos más marcadores se compren, mayor es el precio total.

Si se denomina con x al número de marcadores que se quiere comprar y se desconoce:

Marcadores	13	x
Precio	\$148.50	\$299.00

Como es proporcionalidad directa, se tiene:

$$\frac{13}{148.50} = \frac{x}{299}$$

Al despejar la x:

$$x = \frac{(299)(13)}{148.50} = 26.175$$

Por lo tanto, se pueden comprar 26 marcadores; sí sobra algo, el precio de 26 marcadores es \$297.00 y sobran \$2.00.

Reactivo 5

Este reactivo, le dará elementos para valorar el manejo del cálculo de la *probabilidad* que tienen los alumnos.

Probabilidad de que sea hombre: $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$; probabilidad de que sea mujer: $\frac{10}{15} = \frac{2}{3}$

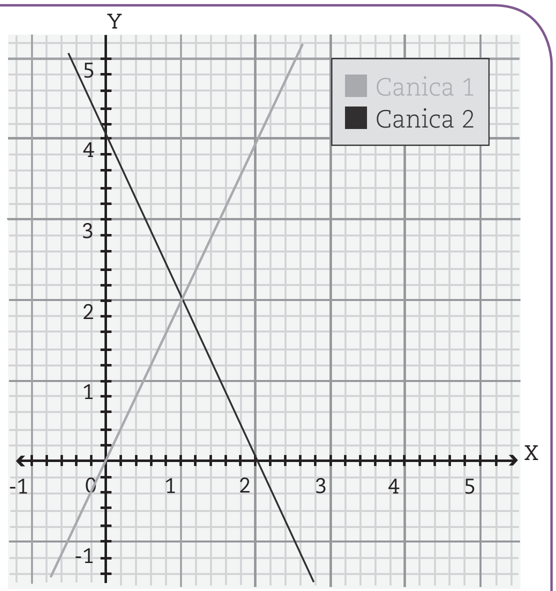
Reactivo 6

Con este reactivo, los alumnos mostrarán sus habilidades y conocimientos en el manejo de los sistemas de *ecuaciones de primer grado con dos incógnitas y su solución gráfica*.

Las canicas se cruzan en el punto (1, 2).

6. El movimiento de dos canicas sobre un plano cartesiano se describe por las dos rectas de la derecha, cuyas ecuaciones son **y – 2x = 0** y **2y + 4x = 8**, respectivamente.

¿En qué punto del plano cartesiano se van a cruzar ambas canicas? ____________________



Reactivo 7

Este reactivo dará a los alumnos la oportunidad de mostrar sus conocimientos del manejo que tienen de la solución algebraica de *sistemas de ecuaciones lineales* con dos incógnitas.

a) $10 - 2x = 60 + 18x$

b) $20x = 10 - 60$

c) $10y = 50$

d) La solución del sistema de ecuaciones: $x = -\frac{5}{2}$; $y = 5$

Reactivo 8

Con este reactivo podrá darse cuenta del manejo que tienen los alumnos del cálculo de *perímetros y áreas* de polígonos regulares y del círculo.

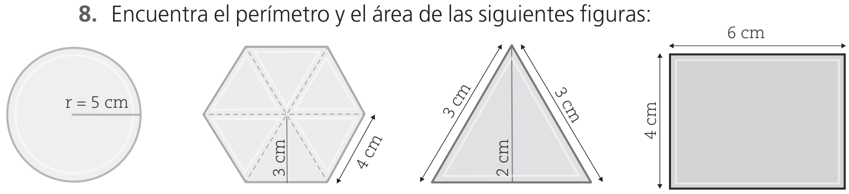
Círculo: P = 31.41 cm; A = 78.54 cm^2

Hexágono: P = 24 cm; A = 36 cm^2

Triángulo: P = 9 cm; A = 3 cm^2

Rectángulo: P = 20 cm; A = 24 cm^2

8. Encuentra el perímetro y el área de las siguientes figuras:



P: ________ A: ________

P: ________ A: ________

P: ________ A: ________

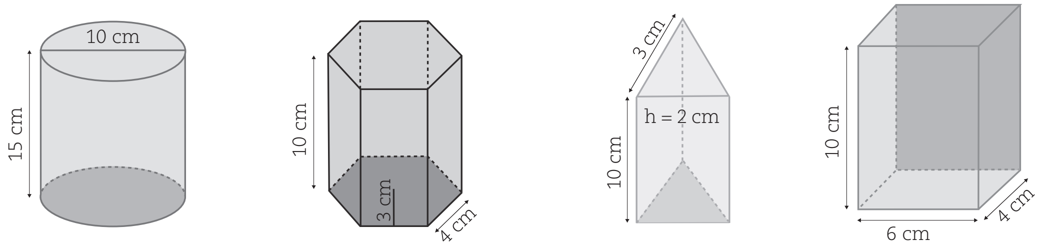
P: ________ A: ________

Reactivo 9

Las respuestas que den los alumnos a este reactivo pondrán en evidencia los conocimientos que tienen en el cálculo del *volumen de prismas y cilindros rectos*.

Cilindro: V = 1178.1 cm^3
Prisma hexagonal: V = 360 cm^3
Prisma triangular: V = 30 cm^3
Prisma cuadrangular: V = 240 cm^3

9. Encuentra el volumen de las siguientes figuras:



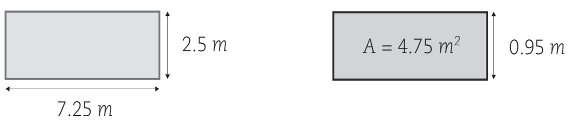
V: ________ V: ________ V: ________ V: ________

Reactivo 10

Con este reactivo usted podrá determinar cómo manejan los alumnos el *cálculo del área* del *rectángulo* con los datos que se le proporcionan en la resolución de problemas.
a) A = 18.125 m^2
b) x = 5 m

10. Resuelve los siguientes problemas.

a) Calcula el área del rectángulo. **b)** Calcula la medida que falta en el rectángulo.



A = ____________ x = ____________

Reactivo 11

Con la resolución del problema que se presenta en este reactivo, los alumnos mostrarán sus conocimientos de *multiplicación y división de fracciones y decimales*.

Juanita: 800 m; Esperanza: 1350 m; Evelyn: $2\frac{3}{4}$ vueltas

Reactivo 12

Con la resolución de las operaciones que se plantean en este reactivo, los alumnos mostrarán sus conocimientos y habilidades acerca de la *multiplicación y división de números enteros, fracciones y decimales positivos y negativos*.

a) −48 b) $\frac{5}{16}$

c) 0.255 d) 10

e) −114.75 f) −2.708

g) $-\frac{6}{11}$ h) 5

i) $-\frac{2}{5}$

Reactivo 13

Con este problema, los alumnos se enfrentan a la necesidad de manejar *potencias* con exponente entero.

El tiempo que le tomará al pueblo enterarse de la noticia son 5 horas, pues iniciaron 5 personas (5^1); en la primera hora, éstas informaron cada una a 5, es decir 5^2 = 25; en la segunda hora, ésas 25 informaron cada una a 5 personas, que corresponde a $5^3 = 125$, así hasta llegar a la quinta hora donde se informa a $5^6 = 15625$ personas, y al sumarle la cantidad de personas que se enteraron en las horas anteriores, que son 3935, resultan 19560.

Reactivo 14

Al resolver este problema, los alumnos tendrán que conocer la *aproximación de la raíz cuadrada*.

Para calcular el área de un cuadrado se multiplica la medida del lado por sí misma, esto es $(x)(x) = 20\ m^2$; para obtener la medida del lado se extrae la raíz cuadrada del área, es decir $\sqrt{20}$ que tiene un valor aproximado de 4.47, por lo que el valor del lado del cuadrado es de aproximadamente 4.47 m.

Reactivo 15

La situación que se plantea en este problema permitirá evidenciar el dominio de los alumnos respecto al manejo de las *expresiones algebraicas* para despejar los elementos requeridos.

a) 53.558 cm b) 49.072 cm

Reactivo 16

Con las respuestas que den los alumnos a la situación planteada podrá darse cuenta del manejo de las *medidas de tendencia central* al analizar los datos proporcionados.

Rango: 99; Media: 60.36; Mediana: 70; Moda: 85.

Reactivo 17

Con las respuestas que proporcione el alumno en este reactivo podrá determinar el dominio que tiene de la *lectura de gráficas*.

a) Número de aciertos obtenidos por los alumnos en una evaluación
b) Número de alumnos en el eje vertical y número de aciertos en el eje horizontal
c) De barras
d) 20
e) Los puntos medios de cada intervalo
f) 24
g) 80-100; 0-20

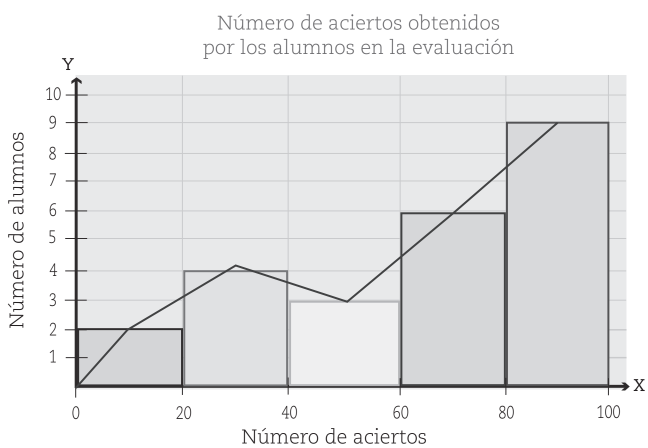
a) ¿Qué información presenta la gráfica? ______

______

b) ¿Qué representa cada número del eje vertical?

______

Y, ¿del eje horizontal? ______



c) ¿Qué tipo de gráfica es? ______

d) ¿Qué rango tienen sus intervalos? ______

e) ¿Qué representan los puntos medios de cada barra? ______

______

f) ¿Cuántos alumnos presentaron la evaluación? ______

______

g) ¿Qué intervalo tiene la mayor frecuencia? ______

______

¿Y la menor? ______

______

______

Bloque 1

Secuencia 1 Múltiplos, divisores y números primos

(LT, Vol. I, págs. 16-21)

Tiempo de realización	3 sesiones
Eje temático	Número, álgebra y variación
Tema	Número
Aprendizaje esperado	Identifica los múltiplos y los divisores de un número, así como los números primos.
Materiales impresos u objetuales para el alumno	Para elaborar el tablero del juego se requiere: cartulina u hojas blancas.
Intención didáctica	Que los alumnos distingan los conceptos: múltiplo, divisor, número primo y número compuesto; también que usen divisiones sucesivas para determinar si un número es o no primo.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisual** • *Múltiplos, divisores, números primos y compuestos* **Informático** • *Algunos múltiplos, todos los divisores*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recurso audiovisual** • *Aspectos de la aritmética entera*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Determinen el conjunto de divisores de un número dado.
- Sesión 2. Determinen el conjunto de factores de un número y analicen su equivalencia con el conjunto de divisores. Conozcan el significado de *número primo* y *múltiplo* de un número.
- Sesión 3. Conozcan y usen la criba de Eratóstenes para seleccionar números primos. Conozcan el significado de un número compuesto.

Acerca de...

Para analizar los conceptos *divisor* y *conjunto* de divisores de un número, se sugiere realizar, en la primera sesión de la secuencia, el juego

Criba de Eratóstenes

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
141	142	143	144	145	146	147	148	149	150
151	152	153	154	155	156	157	158	159	160
161	162	163	164	165	166	167	168	169	170
171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190
191	192	193	194	195	196	197	198	199	200

conocido como “La pulga y las trampas”.[3] Ante el reto de atrapar más pulgas, el alumno que pone las trampas se ve en la necesidad de elegir números que tengan más divisores, mientras que quienes hacen saltar las pulgas piensan en números que no sean divisores de otro donde hay trampa.

En el juego se plantean dos niveles de dificultad, uno en el que se pone sólo una trampa y otro en el que se colocan tres, para que los alumnos piensen si son suficientes para atrapar todas las pulgas, desde las que saltan de dos en dos, hasta las que lo hacen de diez en diez.

En la segunda sesión, se introduce el concepto *factor* al requerir encontrar las dimensiones enteras de todos los rectángulos diferentes que se pueden trazar con un área dada. Por ejemplo, para un área de 12 cm^2, los rectángulos que se pueden trazar son: 12×1; 6×2; 4×3. Los factores que se usan son {1, 2, 3, 4, 6 y 12}. Éste es el conjunto de divisores del número 12. En esta sesión se hace explícito que el conjunto de factores de un número también es el conjunto de divisores del mismo; en lo subsecuente, conviene usar indistintamente ambos términos. Como corolario, se concluye que 12 es múltiplo de cada uno de estos divisores.

El concepto de *número primo* se introduce también en esta sesión, y en la tercera se usa la criba de Eratóstenes para encontrar los números primos menores que 100; también se reflexiona acerca de algunas propiedades de estos números, así como de los números compuestos. Por ejemplo, se pide mostrar con un ejemplo la falsedad de enunciados del tipo: *La suma de dos números primos siempre es un número primo*.

Los conceptos *factor* o *divisor*, *múltiplo*, *número primo* y *número compuesto* son fundamentales para el estudio de la divisibilidad, tema importante de la aritmética que no se agota en esta secuencia.

Sobre las ideas de los alumnos

Los términos *múltiplo*, *divisor* y *factor* no son nuevos para los alumnos. El primero ha sido utilizado para designar, por ejemplo, las unidades de medida que son mayores que el metro (dam, hm, km); el segundo se ha usado para designar a uno de los términos de la división y, el tercero, para designar a los números en una multiplicación. Ahora, *múltiplo*, *divisor* y *factor* se usan como características de los números enteros (en particular los positivos y el 0 que se manejan en la secuencia). Se dice, por ejemplo, “un número entero a es múltiplo de otro número entero b, si existe c, tal que $b \times c = a$”. En sentido opuesto, si a es múltiplo de b y c, entonces b y c son factores o divisores de a. Estas características o propiedades de los números enteros, que parecen triviales, suelen confundir a los alumnos, incluso algunos no logran distinguir un múltiplo de un divisor.

A propósito de las propiedades de los números, es necesario que los alumnos se familiaricen con la idea de que, en matemáticas, para demostrar que un enunciado es falso, basta con un ejemplo que lo muestre, mientras que, para demostrar que es verdadero, no son suficientes los ejemplos y se requieren argumentos. Por esta razón, en la actividad 5 de la sesión 3 se pide que muestren con un ejemplo cuando consideren que el enunciado es falso.

Algunos alumnos se preguntan si el 1 es o no número primo, puesto que se puede dividir entre 1 y entre sí mismo. Un argumento que puede convencerlos de que no es primo consiste en plantear que los números primos tienen dos divisores distintos, mientras que el 1 sólo tiene uno.

¿Cómo guío el proceso?

Lea junto con los alumnos la sección “Para empezar” y pregunte si conocen el juego “La pulga y las trampas”. A quienes lo conozcan, pídales que jueguen en diferentes equipos para aprovechar su experiencia. Ayúdelos a organizarse en equipos de cuatro integrantes y lea junto con ellos las reglas del juego. Si lo considera necesario, juegue con un equipo y que los demás observen. Una vez que las reglas estén claras, déjelos jugar unos 30 minutos y en seguida pasen a la actividad 2 para que contesten las preguntas que ahí se plantean.

Todas las preguntas de la actividad 2 se relacionan con los divisores de un número, pero es muy

[3] Fuenlabrada I., *et al.* (1991). *Juega y aprende matemáticas.* México, SEP.

probable que esta palabra no se mencione. No es necesario introducirla en este momento. Permita que intenten contestar solos y, si no pueden, trate de ayudar con ejemplos comunes para ellos, como ver si es posible dividir un número entre 2, entre 3, entre 4, y así sucesivamente hasta 10. Si queda poco tiempo, deje para la siguiente sesión la actividad 3, porque es necesario que jueguen con nuevas reglas. La pregunta 3, inciso b), da por hecho que con tres trampas es posible atrapar todas las pulgas. Es probable que algunos alumnos lo hayan logrado al jugar, pero, si no ocurrió, es importante resaltarlo. Hay varias respuestas correctas, por ejemplo, al poner una trampa en el 36, se atrapan los saltos 2, 3, 4, 6 y 9; faltarían 5, 7, 8 y 10. Si se pone otra en el 40, se atrapan el 5, el 8 y el 10. Con la tercera trampa se atrapa el 7. Otra posibilidad es poner las trampas en los números 9, 56 y 60.

En la pregunta 3c) también es probable que los alumnos se convenzan, mediante el juego, de que no es posible atrapar todos los saltos con dos trampas. Puede apoyarlos para que identifiquen los números que tienen más divisores, de esta manera se darán cuenta de que siempre hará falta una tercera trampa.

La puesta en común se realiza en la actividad 4, es aquí donde hay que hablar ampliamente sobre los divisores de un número. Es importante incentivar en los alumnos el uso de expresiones como: *Los números en que conviene poner las trampas son aquellos que tienen más divisores*, "conviene elegir saltos que no sean divisores de números donde haya trampas" o "el número 40 tiene más divisores que el 12". Se sugiere iniciar la puesta en común comparando las respuestas de la actividad 2.

Es importante que los alumnos comenten, después de leer la información, cómo determinaron la longitud de los saltos para no caer en una trampa. Es probable que hayan hecho divisiones, mentalmente o por escrito. Más adelante verán que los criterios de divisibilidad les servirán para realizar estas operaciones de manera más sencilla.

En la actividad 1 de la sesión 2, observe si los alumnos distinguen el área y el perímetro de una figura. Si lo considera necesario, aclare que el área es la medida de la superficie, mientras que el perímetro es la medida del contorno. Confirme también que tengan claro que dos o más rectángulos con las mismas dimensiones son iguales, aun cuando estén en posiciones diferentes.

En la actividad 2, incisos c), d), e), f) observe si los alumnos logran trazar todos los rectángulos de área 36 cm^2. Pídales que anoten las medidas de cada uno, así podrán tener a la vista todos los factores de 36.

A diferencia del juego "La pulga y las trampas", realizado en la sesión anterior, con esta actividad se favorece el análisis de los factores de un número y que los alumnos se den cuenta de que el conjunto de factores es, a la vez, el conjunto de divisores de ese número. Este hecho se hace explícito en el recuadro de información y se usa al resolver la actividad 4. Insistir sobre el conjunto de divisores de un número ayuda a distinguirlos de los múltiplos; el conjunto de divisores es finito (se pueden contar), mientras que el conjunto de múltiplos es infinito. En lo subsecuente conviene usar indistintamente ambos términos. Adicionalmente, todos los divisores de un número son menores o iguales que éste, mientras que sus múltiplos son mayores o iguales.

En la misma tabla de la actividad 4 aparecen dos números que son primos, el 23 y el 67. Aquí se pretende que distingan dos tipos de números: los que tienen más de dos divisores y los que sólo tienen dos: el 1, que es divisor de cualquier número natural y ellos mismos; a estos números se les conoce como *primos*.

Las preguntas 4, incisos c) y d), ayudan a enfatizar la idea de múltiplo de un número y a distinguirla de un factor o divisor. Al llegar a la pregunta 4e), que se refiere al mayor divisor de cualquier número, sugiera a los alumnos que revisen la tabla y encuentren que este número es él mismo, y el menor divisor es el 1, mientras que en la pregunta 4, inciso f), que se refiere al número que es múltiplo de sí mismo, pídales que revisen de nuevo la tabla e indúzcalos a encontrar que la respuesta es que todo número es múltiplo de sí mismo.

En la actividad 1 de la sesión 3, permita que los alumnos lean las indicaciones y lleven a cabo todo el proceso para determinar los números primos comprendidos entre 2 y 100. En la actividad 2 se verá si lograron seleccionar los 25 números primos que son menores que 100.

Las actividades 2c) y 2d) tienen la finalidad de que los alumnos usen lo que saben para determinar si un número es primo o compuesto. No les diga cómo hacerlo, se espera que por sí solos traten de encontrar un divisor distinto de 1 y el mismo número, dividiendo entre 2, entre 3, y así sucesivamente. Por ejemplo, al dividir 183 entre 2 se obtiene un cociente decimal, pero al dividirlo entre 3, el cociente es entero, lo que indica que 3 es divisor de 183 y, por lo tanto, es compuesto. No es necesario que encuentren todos los divisores, basta con que puedan mostrar que tiene más de dos. Es muy importante comentar las explicaciones que logren formular.

La actividad 4 tiene la finalidad de que los alumnos piensen y usen los números primos al resolver problemas numéricos. Los problemas 4, incisos a) y b), implican números primos menores que 10, de manera que los cálculos se pueden hacer mentalmente. En caso necesario, aclare en el problema 4, inciso b), que los cuatro divisores incluyen el 1 y el mismo número.

En el problema 4, inciso c), corrobore si los alumnos prueban con todos los números, o bien descartan aquellos cuya cifra de las unidades no es número primo. Si hacen esto último, sólo les quedarán cuatro números: 171, 173, 175 y 177. A partir de aquí podrían empezar a dividir entre los primeros números primos. Es probable que "a ojo" se den cuenta de que ninguno de los cuatro es divisible entre 2, porque no tienen mitad entera. Al dividir entre 3, descartarán el 171 y el 177; al dividir entre 5, descartarán el 175 y les quedará el 173. En el libro del alumno, con el fin de favorecer la práctica de la división, no se dice que pueden usar calculadora. Usted valore si conviene que la usen.

El problema 4, inciso d), es similar al anterior, con la diferencia de que entre 500 y 510 hay dos números primos, el 503 y el 509. Además, los que se descartan son aquellos cuya cifra de las unidades no es un número compuesto, entre ellos el 503.

La actividad 5 incluye afirmaciones sobre números primos y compuestos. En la puesta en común, apóyelos en el análisis de cada enunciado y deténganse el tiempo necesario cuando no se pongan de acuerdo en la veracidad o falsedad del mismo. Es muy importante recalcar a los alumnos que, para mostrar la falsedad de un enunciado, es suficiente con dar un ejemplo que lo contradiga. Sin embargo, para mostrar que es verdadero, ni siquiera muchos ejemplos son suficientes; es necesario utilizar otro tipo de argumentos. Por ejemplo, en el enunciado 5b), con base en los ejemplos podrían argumentar que el producto de dos números primos tiene, al menos, cuatro divisores que son: el 1, el producto y los dos números primos que se multiplican; por lo tanto, siempre es número compuesto.

El caso del enunciado 5, inciso d), que también es verdadero, implica una demostración que está fuera del alcance de los alumnos de este grado, pero puede pedirles que traten de justificar por qué es verdadero más allá de los ejemplos.

Pautas para la evaluación formativa

Con la finalidad de verificar en qué medida se da el logro de la intención didáctica que aparece en la ficha descriptiva, es necesario hacer un registro para cerciorarse de que los alumnos realizan lo siguiente:

- Distinguen claramente lo que es un múltiplo y lo que es un factor o divisor.
- Encuentran el conjunto de factores o divisores de un número.
- Identifican los *primos* en un conjunto de números primos y compuestos.

¿Cómo apoyar?

En el desarrollo de esta secuencia se utiliza mucho el cálculo mental, por ejemplo, para determinar si un número contiene o está contenido en otro. ¿18 es múltiplo de 4?, ¿4 es divisor de 18? Ante estas preguntas no se espera que los alumnos escriban la división o usen la calculadora, sino que usen el cálculo mental para determinar que no. Aunque el cálculo mental debiera ser una práctica permanente en la escuela, es probable que a algunos alumnos se les dificulte. Habrá que apoyarlos mediante la práctica diaria para que logren avanzar.

¿Cómo extender?

A los alumnos que tienen facilidad para el cálculo mental hay que proponerles ejercicios con números de mayor valor, por ejemplo, los factores de 512.

Secuencia 2 Criterios de divisibilidad

(LT, Vol. I, págs. 22-29)

Tiempo de realización	4 sesiones
Eje temático	Número, álgebra y variación
Tema	Número
Aprendizaje esperado	Determina y usa los criterios de divisibilidad y los números primos.
Materiales impresos u objetuales para el alumno	Calculadora para verificar la actividad 1 de la sesión 3.
Intención didáctica	Que los alumnos resuelvan problemas que implican determinar si un número entero es o no divisible entre otro número entero menor o igual que diez.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisual** • *Criterios de divisibilidad* **Informático** • *Criterios de divisibilidad*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recurso audiovisual** • *Aspectos de la aritmética entera* **Bibliografía** • Herrero, Mariano (2011). "Criterio de divisibilidad por 11", en *EcoRibera*. Disponible en https://bit.ly/378rl4g (Consultado el 9 de marzo de 2020). • Tahan, Malba (2005). *El hombre que calculaba* [1932], Basilio Lozada (trad.), México, SEP/Limusa (Libros del Rincón).

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Usen el criterio de divisibilidad entre 3 al resolver problemas.
- Sesión 2. Apliquen los criterios de divisibilidad entre 2, entre 5, entre 3 o entre 10, al resolver problemas.
- Sesión 3. Describan los criterios de divisibilidad entre 4 y entre 6 al resolver problemas.
- Sesión 4. Usen los criterios de divisibilidad al resolver diversos problemas.

Acerca de...

La manera en que se abordan los criterios de divisibilidad en esta secuencia no es en el orden secuencial de los números, sino con base en la similitud de dichos criterios. Primero se habla de la divisibilidad entre 3, que hace referencia a la suma de las cifras del número en cuestión. Este asunto se desarrolla a partir de un problema que resultará interesante para los alumnos, de entre varios que podrán resolver del libro *El hombre que calculaba*, cuya lectura se recomienda ampliamente para este grado.

Enseguida se analizan los criterios de divisibilidad entre 2 y 5, se comenta sobre la diferencia respecto al criterio de divisibilidad entre 3 y, por analogía, se agrega el criterio entre 10.

Finalmente se estudian los criterios de divisibilidad entre 4 y 6; el primero se apoya en el número formado por las dos últimas cifras, y el segundo se da cuando se cumplen dos de los criterios ya estudiados: entre 2 y 3.

Sobre las ideas de los alumnos

Es probable que algunos alumnos no tengan clara la diferencia entre *cifra* y *número*. Una cifra es un símbolo que sirve para representar un número. Por ejemplo, las cifras 5, V, y ━ representan el número cinco en diferentes sistemas de numeración: el decimal, el romano y el maya, respectivamente; mientras que un número puede estar formado por una o varias cifras. Por otra parte, es importante que los alumnos aprendan a usar indistintamente las expresiones “es divisible entre” o “es múltiplo de”; por ejemplo, es lo mismo decir “846 es divisible entre 2” que “846 es múltiplo de 2”, aunque la naturaleza de los términos sea diferente, ya que *divisible* viene de dividir, mientras que *múltiplo* viene de multiplicar. De igual manera, las expresiones “846 es divisible entre 2 y entre 3” y “846 es múltiplo común de 2 y 3” también significan lo mismo.

Los criterios de divisibilidad, en sí mismos, no tendrán mucho sentido para los alumnos; es el uso que hagan de ellos, sobre todo al descomponer números en factores primos, lo que permitirá que los tengan presentes.

¿Cómo guío el proceso?

Lea junto con los alumnos la sección “Para empezar” y comenten el problema que se plantea. Pídales que piensen qué preguntas se podrían formular a partir de la información que se da; esto les permitirá entender mejor el problema. Anime a los jóvenes a leer el libro que se menciona, ahora de manera individual.

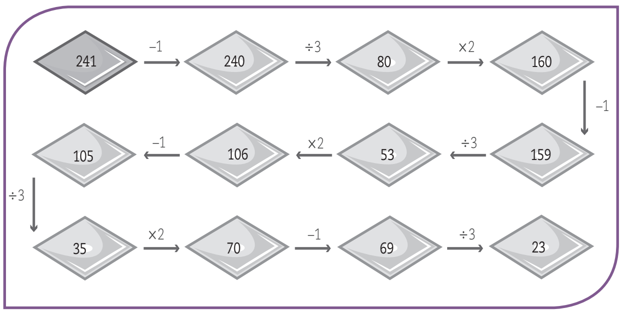
En la actividad 1 de la sesión 1 hay dos preguntas que tienen la intención de que los alumnos vayan precisando sus ideas. La primera pregunta centra la atención en una cantidad dada (230) con el fin de que los alumnos piensen si es o no posible que esa sea la cantidad que buscan y por qué; quizá algunos digan que no, porque, al dividirse entre 3, no sobra 1, lo cual es un avance que puede llevarlos a buscar números de la forma $3n + 1$.

La segunda pregunta ofrece un reto mayor, pues se espera que discutan que el número debe ser de la forma $3n + 1$ y que este número no puede ser, debido a que su residuo es 2.

En la tercera pregunta es deseable que mencionen más de una característica, debido a que no es suficiente que digan que no es múltiplo de 3. Es muy probable que en esta actividad haya soluciones diferentes y que sean incorrectas. Por ahora sólo es necesario que atiendan a la primera condición: que la cantidad de barras de oro sea mayor que 230 y menor que 250.

Ayúdelos a entender la información que hay en la actividad 2, en la que se introduce el criterio de divisibilidad entre 3, y observe que lo apliquen adecuadamente en la actividad 3, tachando los números que son divisibles entre 3. Al realizar esta actividad tendrán a la vista varios números que pueden ser la cantidad buscada (que en este caso serán todos los sucesores de los múltiplos de 3), puesto que al hacer el primer reparto de las barras entre 3, sobró 1. Por ejemplo, algunos de los números podrían ser 232, 235, 238, etcétera; esto es, todos los números enteros de la forma $3n + 1$ mayores que 230 y menores que 250.

La actividad 4 es el punto medular de esta sesión, por ello es muy importante que sean los propios alumnos quienes la resuelvan. Para encontrar los números que completan el esquema es probable que algunos comiencen con la solución que encontraron en la actividad 1, lo que les servirá para comprobar si es correcta; mientras que otros dejarán de lado dicha solución y procederán por ensayo y error. Observe si intentan con los sucesores de los números que tacharon en la actividad 3, por ejemplo, con el 232, el 235, el 238, y así sucesivamente; es necesario probar con estos números porque hay que restar uno y luego dividir entre tres.



Una vez que el esquema esté completo, es necesario analizar el significado de cada número, comenzando por la casilla azul (241), que es la cantidad original de barras de oro. El siguiente número (240) es la cantidad que queda después de deshacerse de una barra. El 80 es lo que corresponde a cada una de las tres partes iguales en las que se dividió la cantidad anterior (240), esto es, la cantidad tomada por el soldado A. La siguiente cantidad es lo restante después de que el soldado A tomó una parte. De esta manera hay que continuar hasta la última casilla.

Al terminar de analizar el esquema, los alumnos podrán identificar la cantidad de barras que tomó cada soldado; sugiérales que a un lado de esas casillas escriban las letras A, B y C. En la última casilla debe estar el número 23, que corresponde a la cantidad de barras de cada una de las tres partes iguales que se obtuvieron al final, de las cuales se le dio una parte a cada soldado, además de las barras que ya tenía. Para saber cuánto le correspondió a cada soldado, habrá que sumar lo que hay en la última casilla a lo que ya tenían A, B, y C, respectivamente. Tenga en cuenta que el resultado debe ser 103, 76 y 58 barras de oro, además de tres barras de las que se deshicieron y una que tomó el coronel; esto da un total de 241.

Es probable que el problema resulte complejo para los alumnos por la cadena de operaciones necesarias para llegar al final. Sin embargo, no pierda de vista que dicho problema sólo es un medio para usar la divisibilidad entre 3. En este caso, no se pretende que los alumnos resuelvan el problema por sí solos, aunque, por supuesto, se pide que lo intenten. Después de esto se les apoya con el esquema, a fin de que encuentren el resultado.

En la sesión 2, observe que los alumnos realicen la actividad 1 de acuerdo con las indicaciones que se dan. Insista en que traten de identificar alguna característica común de los múltiplos de 2, y que la comparen con otros equipos para ver si observan lo mismo. Haga algo similar con los múltiplos de 5. Una vez que haya algún acuerdo, pídales que pasen a la actividad 2, en la que escribirán las ideas que formularon. Recuérdeles que la divisibilidad entre 3 fue estudiada en la sesión anterior.

En la actividad 3 puede haber soluciones diferentes que sean correctas. Por ejemplo, para que el número 34☐ 2☐ sea divisible entre 2, en la última casilla se puede escribir cualquier cifra par, sin importar la cifra que se escriba en la otra casilla. Procure no dar esta información a los alumnos antes de que lo resuelvan, pero sí es importante hacerlo notar en la puesta en común. Ayúdelos a describir los criterios de divisibilidad de acuerdo con la actividad 4, y pregúnteles cómo llegaron a esas soluciones.

Guíelos a analizar con cuidado la información que hay en la actividad 5, donde se incluye el criterio de divisibilidad entre 10, que es similar a 2 y 5.

Aunque no está sugerida en el libro del alumno, es conveniente hacer una puesta en común al término de la actividad 6.

Los criterios de divisibilidad entre 4 y 6 son menos claros que entre 2 o entre 5; sin embargo, se espera que la actividad 1 de la sesión 3 lleve a los alumnos a concluir que, para saber si un número es divisible entre 4, hay que fijarse en el número formado por las dos últimas cifras. Si éste es divisible entre 4, entonces el número con todas sus cifras también lo es.

Observe que en la actividad 1c) de esta sesión no hagan la división al identificar los números. En todo caso, pueden usar la calculadora para comprobar si subrayaron adecuadamente.

En la actividad 3 es probable que algunos alumnos prueben cifras al azar. Otros tal vez logren pensar que 6 es el producto de 2 × 3 y, por lo tanto, la divisibilidad entre 6 tiene algo que ver con la divisibilidad entre 2 y entre 3. Cualquiera que sea el razonamiento que hagan, una vez que tengan todos los números, apreciarán claramente que los números que son divisibles entre 6 terminan en cifra par, es decir, son divisibles entre 2.

Ya que esté fijada la condición anterior, pregunte: ¿la otra cifra puede ser cualquiera? Se habrán dado cuenta de que no, la otra cifra debe ser tal que la suma de todas las cifras sea múltiplo de 3.

En el caso de los que no son divisibles entre 6, es muy probable que sea necesario su apoyo para que los alumnos vean con claridad que es suficiente con que no se cumpla una de las dos condiciones. Esto se entenderá mejor en la actividad 3c). Por ejemplo, el segundo número (54392) termina en cifra par; sin embargo, no es divisible entre 6 porque no cumple con la segunda condición: la suma de sus cifras no es múltiplo de 3. Dicho de otra manera, es divisible entre 2, pero no es divisible entre 3.

La actividad 5 es una recapitulación de los criterios estudiados. Al hacer la puesta en común, destaque que en algunos casos sólo importa la cifra de las unidades; mientras que en otros, es indispensable considerar dos cifras.

En la sesión 4, ayude a los alumnos a analizar con cuidado la actividad 2. Cuando encuentren un ejemplo que muestre la falsedad de un enunciado, pregunte si pueden hallar al menos otros dos ejemplos.

Observe si los alumnos colocan de forma adecuada los números en la actividad 3, cuya finalidad es mostrar gráficamente que los múltiplos de 6 están en la intersección de los múltiplos de 2 y los múltiplos de 3, puesto que cumplen con ambas condiciones.

Las actividades 4 y 5 son, sin hacerlo explícito, un adelanto a la idea de múltiplo común. En el primer caso, la solución es un número que cumple con la condición de ser múltiplo común de 3, 5 y 6, más 1. En el segundo caso se piden números que son múltiplos comunes de dos o más números. Por ahora no es necesario que se introduzca este concepto, se estudiará después.

Finalmente, haga todo lo posible para que los alumnos observen y analicen el material audiovisual e interactúen con el material informático.

Pautas para la evaluación formativa

Con la finalidad de verificar en qué medida se logra la intención didáctica que aparece en la ficha descriptiva, es necesario hacer un registro para cerciorarse de que los alumnos realizan lo siguiente:

- Usan los criterios de divisibilidad entre 5 y 10 al resolver problemas.
- Emplean los criterios de divisibilidad entre 2, 3 y 6 al resolver problemas.
- Utilizan el criterio de divisibilidad entre 4 al resolver problemas.

¿Cómo apoyar?

Es probable que los alumnos necesiten ayuda al redactar los criterios de divisibilidad, o al tratar de entender en qué consiste el criterio de divisibilidad entre 6; puede aprovechar esto para proponer ejercicios adicionales.

¿Cómo extender?

Pídales que averigüen el criterio de divisibildad entre 11[4] y que expliquen en qué se parece al de 3 y al de 9.

Solicite también que indaguen el criterio de divisibilidad entre 7 y entre 8.

Pídales que piensen en la siguiente situación: ¿será cierto que la suma de tres números consecutivos siempre es divisible entre 3? Para orientarlos, considere que:

$$n + (n + 1) + (n + 1 + 1) = 3n + 3 = 3(n + 1)$$

donde se aprecia que la suma de los tres números consecutivos es múltiplo de 3.

3. Anoten las cifras que consideren convenientes en cada cuadro para cumplir con las condiciones que se indican. Después, contesten las preguntas.

Son divisibles entre 6	No son divisibles entre 6
□4□	□4□
□53□	□53□
6□43□	6□43□
□8513□	□8513□

[4] Véase la referencia completa en la tabla de inicio de esta secuencia.

Secuencia 3 Figuras geométricas y equivalencia de expresiones de segundo grado 1

(LT, Vol. I, págs. 30-37)

Tiempo de realización	4 sesiones
Eje temático	Número, álgebra y variación
Tema	Patrones, figuras geométricas y expresiones equivalentes
Aprendizaje esperado	Formula expresiones de segundo grado para representar propiedades del área de figuras geométricas y verifica equivalencia de expresiones, tanto algebraica como geométricamente.
Intención didáctica	Que los alumnos desarrollen habilidad para identificar y obtener expresiones equivalentes que representen sucesiones o áreas de polígonos.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisual** • *Expresiones cuadráticas equivalentes 1* **Informático** • *Expresiones cuadráticas equivalentes 1*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recursos audiovisuales** • *Expresiones equivalentes y no equivalentes* • *Factorización de expresiones algebraicas de segundo grado*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Analicen y comprueben que hay diferentes formas de expresar el perímetro y el área de polígonos, a las cuales se les denomina expresiones equivalentes. Que conozcan el nombre de las expresiones algebraicas por el número de términos que tienen.
- Sesión 2. Usen expresiones algebraicas de segundo grado para representar el área de figuras geométricas, así como de sucesiones cuadráticas. Que apliquen las propiedades de la multiplicación para obtener expresiones equivalentes.
- Sesión 3. Verifiquen la equivalencia en expresiones algebraicas de segundo grado al sustituir la variable por valores numéricos.
- Sesión 4. Apliquen su conocimiento sobre las propiedades de la igualdad para comprobar que dos expresiones algebraicas de segundo grado son equivalentes.

Acerca de...

Esta secuencia es continuación de las que los alumnos trabajaron en segundo grado acerca de las expresiones algebraicas equivalentes lineales.

En esta secuencia se estudian como contexto algunas sucesiones de figuras cuya regularidad se representa mediante una expresión de segundo grado. Los alumnos deberán utilizar y reconocer expresiones que aparentemente son de primer grado, pero que son equivalentes a expresiones cuadráticas, pues están expresadas en forma de multiplicación, como es el caso de $\frac{n(n+1)}{2}$ y $\frac{n^2+n}{2}$. De igual manera, los alumnos expresan áreas de polígonos y del círculo como contexto de donde se obtienen diversas expresiones cuadráticas.

También se nombran las expresiones de acuerdo con el número de términos que las forman: *monomios, binomios, trinomios, polinomios*, pues será un lenguaje que se usará en el estudio de temas algebraicos, como en las ecuaciones de segundo grado.

Sobre las ideas de los alumnos

Los alumnos han trabajado antes con sucesiones para identificar el patrón que permite encontrar cualquier elemento de la sucesión. Sin embargo, transformar esa regularidad que observan en una expresión algebraica que la represente puede no resultar sencillo, por lo que será necesario acompañarlos en su obtención y, si es necesario, retomar algunos ejemplos del grado anterior.

Por otra parte, los alumnos han identificado las expresiones de segundo grado como aquellas donde el 2 es el mayor exponente de una misma variable; sin embargo, es importante que aprendan que cuando se tiene expresada una multiplicación, ésta puede equivaler a una expresión de segundo grado, como sucede en el ejemplo antes citado.

¿Cómo guío el proceso?

En la primera sesión se puede platicar con los alumnos acerca de cómo las diferentes áreas de conocimiento se entremezclan, como es el caso de los vitrales, donde se observa la presencia de la geometría y la química, entre otras disciplinas, para lograr un producto artístico de gran valor. En caso de que haya tiempo y conexión a internet, se sugiere visitar la página http://vitralescorona.com.mx/, donde conocerán más acerca de la historia y elaboración de los vitrales.

Este contexto sirve para asociar las imágenes con diversas figuras geométricas que ya conocen y obtener una expresión que represente el perímetro y el área correspondientes. En la pregunta 1d) de esta sesión se espera que los alumnos refuercen el conocimiento acerca de que sumar expresiones no es lo mismo que multiplicarlas, pues el perímetro se obtiene con la expresión $(x + 3) + x + (x + 3) + x = 4x + 6$, en cambio, su área es $x (x + 3) = x^2 + 3x$ y $4x + 6 \neq x^2 + 3x$. Esto lo podrán comprobar sustituyendo x por algún valor en ambas expresiones, recurso que ya han usado anteriormente. Asimismo, hágalos reflexionar acerca de que la posición del vitral no determina las medidas del largo y el ancho y, por ende, no cambia su perímetro ni su área.

Es importante que los alumnos también tengan claridad acerca de las características de los términos y sepan que cuando se separan por un signo "más" (+) o "menos" (–) dan origen a los binomios, trinomios, etcétera.

En la sesión 2 se sigue trabajando con la búsqueda de expresiones equivalentes, pero, a diferencia de la primera sesión, donde se espera que surjan diferentes expresiones entre los alumnos, aquí se pide explícitamente que busquen dos formas diferentes para expresar lo mismo.

En la actividad 4 se presentan dos expresiones equivalentes, una escrita como multiplicación y la otra como expresión de segundo grado. Es necesario insistir a los alumnos en que siempre que encuentren una operación la resuelvan y la reduzcan para saber de qué tipo de expresión se trata. Por ejemplo, en la expresión $3x + 5x^2 - 2x^2 + x - 3x^2$ diríamos que es de segundo grado hasta que realizamos las operaciones correspondientes y se observa que se reduce a una expresión de primer grado:

$$3x + \cancel{5x^2} - \cancel{2x^2} + x - \cancel{3x^2} = 4x$$

Lo mismo sucede en el caso contrario, donde pareciera que se tiene una expresión de primer grado, pero al realizar las operaciones, en realidad se observa que es de segundo grado:

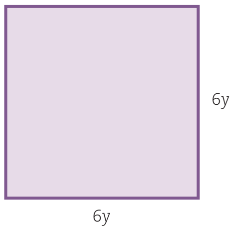
$$y (4 + 3x - 2y) = 4y + 3xy - 2y^2$$

En la tercera sesión se plantean problemas donde observarán cómo obtener una expresión algebraica a partir de un dibujo.

La sesión 4 propicia el manejo de los conocimientos algebraicos estudiados hasta este momento para comprobar si dos expresiones que se presuponen iguales, lo son al hacer las operaciones necesarias. La comprobación se hará dando valores a las incógnitas.

Finalmente, se pone en juego la reversibilidad del pensamiento al pedir que tracen una figura que represente una expresión dada. Es necesario apoyar a los alumnos para que comprendan que estas expresiones algebraicas son una especie de fórmula que está representando la manera de obtener el área de alguna figura geométrica. Si lo considera necesario, pídales que mencionen la forma "común" en que representan el área de un rectángulo ($A = bh$), o bien la del cuadrado ($A = l^2$). Así, posiblemente, encontrarán una relación más inmediata con las expresiones que se pide representen con una figura geométrica.

Para la actividad 3, inciso a), podría ser:



O bien, rectángulos con medidas: $(4y)(9y)$, $(12y)(3y)$, $(36y)(y)$, $(18y)(2y)$.

En el caso de la actividad 3, inciso b), no es igual colocar indistintamente las expresiones dadas $(2a + 2)(2a + 3)$, ya que al representarlas en la figura $(2a)(2a)$ se indican dos lados iguales (cuadrado), en tanto que +3 y +2 describen un aumento, situación que debe ser representada correctamente.

Pautas para la evaluación formativa

Con la finalidad de verificar en qué medida se logra la intención didáctica que aparece en la ficha descriptiva, es necesario hacer un registro para cerciorarse de que los alumnos realizan lo siguiente:

- Diferencian los términos en una expresión algebraica lineal y cuadrática.
- Identifican los términos semejantes y saben reducirlos.
- Aplican la jerarquía de las operaciones.
- Usan correctamente la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición y la sustracción.
- Emplean correctamente la trasposición de términos en una igualdad.

¿Cómo apoyar?

Si los alumnos suman o restan literales iguales con diferente exponente, recuérdeles que se consideran términos semejantes sólo aquellos que tienen la misma parte literal elevada a la misma potencia. Por ejemplo, en la expresión: $-3a^2 + a + 5a + 2a^2$, se pueden reducir, por una parte $-3a^2 + 2a^2 = -a^2$, y por otra, $a - 5a = -4a$, pero a esta última no se le puede sumar $-4a^2$ y $-a$, pues aunque tienen la misma literal, no tienen el mismo exponente.

También es posible que aún enfrenten problemas al hacer la trasposición de términos en una igualdad, por lo que se recomienda proponerles que recurran a la estrategia de la balanza para las ecuaciones, donde lo que se hace de un lado de la igualdad, también debe hacerse en el otro:

$$3x - 8 = -5x - 2$$

$$3x - 8 + 8 = -5x - 2 + 8$$

$$3x = -5x + 6$$

$$3x + 5x = -5x + 5x + 6$$

$$8x = 6$$

$$\frac{8x}{8} = \frac{6}{8}$$

$$x = \frac{3}{4}$$

¿Cómo extender?

La fórmula para calcular el área de los vitrales de la sesión 2 puede servir para que los alumnos analicen la implicación de un cociente en una expresión, lo cual enriquece el análisis sobre expresiones equivalentes. Puede utilizar un ejemplo como el siguiente para que analicen qué expresión no es equivalente a las demás, en cada grupo.

$$A = \frac{5m(m)}{2},\ A = \left(\frac{m}{2}\right)\left(\frac{5m}{2}\right),\ A = m\left(\frac{5m}{2}\right),$$

$$A = (5m)\,\frac{m}{2}$$

$$A = \frac{x(x+4)}{2},\ A = \frac{x}{2}\,(x+4),\ A = \frac{(x+4)}{2}(x)$$

$$A = \frac{(2a+6)(a)}{2},\ A = (a)\left(\frac{2a+6}{2}\right),$$

$$A = \left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{2a+6}{2}\right)$$

Secuencia 4 Ecuaciones cuadráticas 1

(LT, Vol. I, págs. 38-45)

Tiempo de realización	3 sesiones
Eje temático	Número, álgebra y variación
Tema	Ecuaciones
Aprendizaje esperado	Resuelve problemas mediante la formulación y solución algebraica de ecuaciones cuadráticas.
Intención didáctica	Que los alumnos reconozcan la representación gráfica de una ecuación cuadrática e identifiquen la(s) solución(es). Que usen el ensayo y error al plantear y resolver ecuaciones cuadráticas.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisual** • *Ecuaciones cuadráticas 1* **Informático** • *Análisis de ecuaciones cuadráticas*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recursos audiovisuales** • *Recomendaciones iniciales para el estudio de ecuaciones cuadráticas* • *Aspectos a considerar para resolver ecuaciones cuadráticas incompletas*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Conozcan las características de una ecuación de segundo grado, en contraste con las de primer grado, así como algunos problemas que se pueden resolver con ellas.
- Sesión 2. Analicen el proceso para la formulación de una ecuación de segundo grado, su solución por ensayo y error, y el hecho de que tiene dos soluciones.
- Sesión 3. Conozcan la representación gráfica de una ecuación de segundo grado e identifiquen los puntos de corte con el eje X como soluciones de la ecuación. Analicen la pertinencia de las soluciones en relación con el problema de que se trata.

Acerca de...

La presente secuencia introduce al estudio de las ecuaciones de segundo grado. Se apoya en lo que los alumnos saben de las ecuaciones de primer grado, tanto para contrastar sus características, como para aprovechar dichos conocimientos en la comprensión y el uso de una nueva herramienta.

En la sección "Para empezar" se eligió el contexto histórico relacionado con la vida de Diofanto por dos razones: una, porque se trata de un personaje importante para el desarrollo del álgebra; y otra, porque da pie a la formulación de

a) El epitafio habla de tres etapas de su vida; represéntenlas algebraicamente.

Niñez	Etapa en que aparece el bozo en su mejilla	Etapa entre el primer bozo y antes de casarse
$\frac{x}{6}$	$\frac{x}{12}$	$\frac{x}{7}$

d) Con base en la situación anterior, completen la siguiente tabla.

	En tu equipo	En tu grupo	En el grupo de la situación planteada
Número total de alumnos (incógnita)			x
Número de mensajes enviados por cada alumno			$x(x-1)$
Número total de mensajes enviados			650

una expresión algebraica de primer grado, con la idea de partir de lo que los alumnos saben hacer.

Varios de los aspectos que se abordan en esta secuencia no se agotan, se continuará profundizando su estudio en los siguientes bloques, en la medida en que los alumnos se familiaricen con la manipulación algebraica. Por ejemplo, el asunto de las raíces de una ecuación de segundo grado se apoya, en esta secuencia, en el cálculo mental, el ensayo y error y en la representación gráfica, porque la parte visual ayuda a la comprensión, pero más adelante, además de estos recursos, podrán usar alguno de los métodos que se conocen para resolver ecuaciones.

El ensayo y error se apoya en una idea que los alumnos ya manejan: la de encontrar un número que satisfaga la ecuación. Se analiza, además, que no necesariamente las dos raíces de una ecuación cuadrática son soluciones del problema en cuestión. Por ejemplo, un número negativo no puede ser la medida de una superficie.

Es notorio que en esta secuencia se pone énfasis en la representación algebraica de los datos del problema y de la ecuación que permite resolverlo, con la finalidad de que los alumnos se acostumbren a sistematizar los procesos de solución, desde el inicio hasta la verificación de que el resultado obtenido es correcto.

Sobre las ideas de los alumnos

Los alumnos suelen pensar que así como hay problemas de suma, de resta y de multiplicación, también hay problemas de ecuaciones. Con frecuencia, las prácticas de enseñanza ponen los problemas al servicio de las operaciones y no las operaciones o las ecuaciones al servicio de los problemas, como debería ser. Para contrarrestar estas ideas, es necesario estar abiertos a que los alumnos usen lo que saben hacer y, a partir de ahí, favorecer que adquieran los nuevos conocimientos.

Las ecuaciones son una herramienta potente para resolver problemas y, por esta razón, es importante que los alumnos las conozcan y las sepan usar cuando les resulten necesarias. Se sabe que una de las grandes dificultades es la representación algebraica de los datos de un problema y el establecimiento de la relación entre éstos para formular la ecuación; luego vienen otras dificultades que no corresponden a esta secuencia, como el uso de técnicas más eficientes para resolver la ecuación.

El despeje de la incógnita elevada al cuadrado puede confundirse con la multiplicación por dos. Hay que estar atentos a este posible error y enfatizar el uso de la propiedad de la igualdad, mediante la cual se puede efectuar la misma operación en ambos miembros de la ecuación.

Los alumnos estudiaron la raíz cuadrada en segundo grado, pero es hasta este momento cuando se usa para resolver ecuaciones y se resalta el doble signo de la raíz, entre otras razones porque se pone en evidencia cuando la ecuación se representa gráficamente.

¿Cómo guío el proceso?

Lea junto con los alumnos la sección “Para empezar” y plantee algunas preguntas para aclarar lo que dice. Por ejemplo: “¿Cuántos años han pasado desde 1600 a. n. e. hasta la fecha actual?”; “¿En qué parte del mundo se ubicaba Babilonia?”; “¿Cómo se llama actualmente?”; “¿Tienen idea de qué hacer para saber cuántos años vivió Diofanto?”. No es necesario que en este momento den la respuesta correcta a esta pregunta, porque en seguida se desarrolla un proceso para encontrar la respuesta.

c) Continúen este razonamiento hasta encontrar las edades de ambos. Verifiquen que el producto es 315. Anoten aquí los resultados.

Hermana de Raúl	Raúl
15 Años	21 Años

2. El proceso que realizaron en la actividad anterior también se puede hacer utilizando el lenguaje algebraico. Anoten las expresiones algebraicas que se piden.

La edad de la hermana de Raúl	La edad de Raúl	El producto de las dos edades	El producto conocido de las dos edades
x	x + 6	x(x + 6)	315

En la actividad 1 de la sesión 1, los incisos a) y b) dan la pauta para saber a qué edad murió Diofanto. Al expresar algebraicamente las tres etapas que se mencionan en el epitafio y después de efectuar la suma, $\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7}$, se obtiene $\frac{33}{84}x$, es decir, estas tres etapas abarcan $\frac{33}{84}$ del total de años que vivió, de donde se deduce que vivió 84 años. A partir de esta información se pueden plantear y responder otras preguntas, anime a los alumnos a que piensen algunas; esto es parte de la puesta en común que se sugiere en la actividad 2. Es muy probable que surja algo como lo siguiente:

- ¿A qué edad se casó Diofanto?
- ¿Cuántos años tenía Diofanto cuando nació su hijo?
- ¿Cuántos años vivió su hijo?

El problema de la actividad 3 se desarrolla en tres etapas, las dos primeras en el plano de lo concreto, primero en equipo y luego en el grupo. Este desarrollo tiene dos finalidades importantes. La primera es que los alumnos entiendan el problema, y la segunda, de carácter más general, es usar la estrategia de reducir las cantidades con el fin de encontrar un camino que lleve a la solución de un problema. En la tercera etapa se busca generalizar el procedimiento encontrado en las dos etapas anteriores.

La generalización queda resumida en la tabla del inciso d) y la formulación de la ecuación de segundo grado se hace explícita en el inciso e). Es muy importante dejar claro a los alumnos que lo que permite formular la ecuación es tener dos valores iguales, uno de ellos expresado algebraicamente, $x(x - 1)$; y el otro mediante un número, 650. Ambas expresiones representan la cantidad total de mensajes enviados, por lo tanto, se pueden relacionar mediante el signo igual.

Al hacer la puesta en común, seguramente los alumnos dirán que para resolver la ecuación probaron con distintos números hasta que encontraron el que satisface la ecuación. En ese momento no se espera que usen otro procedimiento.

En la sesión 2, en las actividades 1 y 2, se desarrolla el proceso para resolver un problema que intenta averiguar edades. La lógica es diferente a la del problema 3 de la sesión anterior, donde envían mensajes. En la actividad 1 de esta segunda sesión, los alumnos usan ensayo y error para encontrar la solución; en la actividad 2 usan el álgebra nuevamente con la idea de mostrar que se tienen dos valores iguales (el producto de las edades) y que se pueden relacionar con el signo igual para obtener una ecuación. La solución encontrada anteriormente se usa para verificar que la ecuación se satisface.

En la actividad 3 es importante recalcar que hay ecuaciones que no parecen ser de segundo grado y lo son, como es el caso de $x(x + 5) = 6$, pues al efectuar la multiplicación indicada con el paréntesis resulta $x^2 + 5x = 6$. Contrariamente, hay ecuaciones que parecen ser de segundo grado y no lo son. Por ejemplo, $x^2 + 2x - 3 = x^2 - x + 9$, pues, al simplificar la ecuación, se eliminan los términos cuadráticos y resulta $3x = 12$, que es una ecuación de primer grado.

En las actividades 4 y 5 se contrasta que una ecuación de primer grado con una incógnita tiene una solución, mientras que una de segundo grado con una incógnita tiene dos soluciones. A partir del trabajo realizado es muy probable que los alumnos, por ensayo y error, encuentren la solución positiva del enunciado B. Los incisos c) y d) los llevarán a encontrar la solución negativa.

La última pregunta de la actividad 6, con la que termina la sesión, merece especial atención porque algunos alumnos podrían pensar que las dos soluciones son 14 y 15, la solución positiva, y −15 y −14 , la solución negativa. Efectivamente, ambas parejas corresponden a números consecutivos, su producto es 210 y son solución del problema; sin embargo, las dos raíces, o la solución de la ecuación, es 14 y −15. Se puede verificar que éstos son los únicos números que satisfacen la ecuación.

La reflexión anterior se confirmará al realizar las actividades 1 y 2 de la sesión 3. En las gráficas de la actividad 1 se muestran las soluciones, tanto de la ecuación que corresponde al enunciado A, como la que corresponde al enunciado B. Es muy importante que al hacer la puesta en común, en la actividad 2, apoye a los alumnos para que les quede claro que las soluciones, tanto de la ecuación de primer grado, como de la de segundo grado, están en el cruce de la recta y de la curva, respectivamente, con el eje X del plano cartesiano.

Los alumnos saben que cualquier punto del plano cartesiano se representa con una pareja ordenada de números (x, y), que se llaman coordenadas del punto. El primero es la abscisa (el valor de x) y el segundo es la ordenada (el valor de y). La solución de la ecuación, entonces, es el valor de la abscisa cuando el valor de la ordenada es cero. Esto se dice en el recuadro de formalización.

En la actividad 3 se desarrolla un proceso para resolver un problema de áreas. Observe si los alumnos van aprendiendo a expresar algebraicamente los datos del problema y si identifican las dos expresiones que representan el mismo valor del área, una expresión algebraica y otra numérica, mismas que se relacionan con el signo igual para formar la ecuación.

La gráfica del inciso d) muestra las dos soluciones de la ecuación, los alumnos pueden verificar que −4 también es solución de la ecuación; sin embargo, lo que hay que destacar es que −4 no es solución del problema, pues si el valor del área es cero, no existe tal superficie y un valor menor que cero no tiene sentido.

Pautas para la evaluación formativa

Con la finalidad de verificar en qué medida se logra la intención didáctica que aparece en la ficha descriptiva, es necesario hacer un registro para cerciorarse de que los alumnos realizan lo siguiente:

- Distinguen claramente la diferencia entre una ecuación de primer grado y una de segundo grado.
- Identifican las dos raíces de una ecuación de segundo grado a partir de su representación gráfica.
- Discriminan entre la solución de la ecuación y la solución del problema.
- Plantean y resuelven por ensayo y error, ecuaciones de segundo grado cuya relación con el problema es clara.

¿Cómo apoyar?

Proponga, si lo considera necesario, ejercicios adicionales para que los alumnos expresen algebraicamente enunciados verbales. Por ejemplo: *el doble de un número*, *si la suma de dos números es 25 y uno de ellos es x, ¿cuál es el otro?*, *si mi edad actual es x, ¿cuántos años tendré dentro de cinco años?*, *¿cuál era mi edad hace cinco años?*

¿Cómo extender?

Si observa que los alumnos resuelven fácilmente algún problema, pídales que inventen uno para que todo el grupo lo resuelva.

4. Trabajen en equipo y completen la siguiente tabla con las expresiones algebraicas que se piden.

De un número cualquiera	Del sucesor de un número cualquiera	De la suma de dos números consecutivos cualesquiera	Del producto de dos números consecutivos cualesquiera
x	X + 1	x + (x + 1)	x(x +1)

Secuencia 5 Funciones 1

(LT, Vol. I, págs. 46-55)

Tiempo de realización	4 sesiones
Eje temático	Número, álgebra y variación
Tema	Funciones
Aprendizaje esperado	Analiza y compara diversos tipos de variación a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica, que resultan de modelar situaciones y fenómenos de la física y de otros contextos.
Material	Mapamundi con líneas terrestres.
Intención didáctica	Que los alumnos analicen y comparen de manera cualitativa diferentes formas de variación a partir de sus representaciones gráficas en contextos que resulten familiares o significativos para los alumnos.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisual** • *Llenado de recipientes* **Informático** • *Análisis cualitativo de gráficas de relaciones de variación*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recursos audiovisuales** • *Interpretación de gráficas con secciones curvas* • *Relaciones funcionales con variación cuadrática*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Analicen, por medio de la gráfica, diferente información de la situación como los valores máximos y mínimos, así como la variación de las horas de luz y los intervalos de crecimiento y decrecimiento en diferentes épocas del año.
- Sesión 2. Analicen la información de las funciones ya graficadas, que hagan interpolaciones para estimar valores a partir de datos conocidos y usen la información que conocen para construir otras gráficas.
- Sesión 3. Comparen las representaciones gráficas y las diversas relaciones funcionales no lineales para entender la relación de dependencia y la variación entre dos cantidades.
- Sesión 4. Relacionen el contexto con el tipo de representación para profundizar en las nociones de dependencia y razón de cambio.

Acerca de...

Las gráficas de funciones sirven, entre otras cosas, para analizar las relaciones de dependencia entre dos conjuntos de cantidades y el tipo de variación que existe entre éstas.

Desde la educación primaria, los alumnos han trabajado con la relación que hay entre dos conjuntos de cantidades, y en la secundaria han profundizado en el estudio de las relaciones como procesos de variación. En particular, se ha hecho hincapié en los procesos de variación funcional con situaciones lineales y de proporcionalidad directa e inversa. Además, el estudio de los fenómenos de variación se ha hecho mediante diferentes representaciones matemáticas. Dicha experiencia les permitirá hacer un análisis de otro tipo de relaciones funcionales tomando en cuenta aspectos cualitativos de la variación a partir de las gráficas para derivar en soluciones cuantitativas u otro tipo de representación (tabular o algebraica).

Sobre las ideas de los alumnos

En esta secuencia se debe aprovechar lo estudiado en los grados anteriores. Los alumnos, al tener experiencia en identificar las variables de un fenómeno que se puede modelar mediante una gráfica, tienen las nociones que les permiten identificar y analizar las relaciones de dependencia y variación. Sin embargo, es probable que las nociones no estén afianzadas del todo, por lo que es necesario detectar que aún les falta construir e identificar las concepciones erróneas para formalizar lo aprendido a partir de situaciones lineales.

¿Cómo guío el proceso?

Lea y comente con los alumnos la sección "Para empezar". Ponga atención en las nociones que tienen respecto al fenómeno y al tipo de respuestas que dan sus alumnos; esto le permitirá resolver dificultades que se presenten a lo largo de la secuencia, derivadas de lo que saben o desconocen respecto al tema y a la duración del día y la noche. No olvide volver a estas preguntas al finalizar la secuencia para que los alumnos contrasten lo que sabían al inicio con lo que aprendieron.

A lo largo de la secuencia se pretende que los alumnos describan el comportamiento de la gráfica con sus propias palabras y que, además, vinculen esta información con el fenómeno o la situación que representa; es decir, que también describan el fenómeno o comportamiento modelado.

En la actividad 1 de la sesión 1, observe si los alumnos asocian los días más largos o más cortos con ciertas épocas del año o ciertos meses. Detecte qué uso le dan a la gráfica para determinar la duración del día en función de la fecha que se les pregunta. Tome en cuenta que las respuestas deben ser: a) entre diciembre y enero; b) junio, diciembre; c) 14 h y 30 min; d) 10 h, 12 h 30 min y 11 h.

Puede complementar la actividad con preguntas sobre el cambio de dirección de la gráfica, es decir: ¿a partir de cuándo aumenta la cantidad de luz solar? O bien, ¿a partir de qué fecha decrece la cantidad de luz solar en Tijuana?, ¿durante qué meses el número de horas de luz solar en Tijuana es mayor de 13 y menor de 9 horas?, ¿cuál es la variación del número de horas de luz solar entre el 15 de octubre y el 21 de noviembre? Observe con cuidado que los alumnos hagan correctamente la partición de los meses sobre el eje horizontal, dependiendo de lo que estén graficando. Además, pídales que encuentren dos fechas en las cuales la duración de la luz solar sea de 12 horas y 15 minutos, y revise que partan adecuadamente el segmento de una hora sobre el eje vertical.

En la actividad 2, además de trabajar los mismos aspectos que en la 1, se pretende que el análisis del contexto sea clave para entender por qué la diferencia de las gráficas centra la atención en el crecimiento y el decrecimiento de éstas (cómo crece o decrece la cantidad de horas de luz solar, en qué puntos alcanza el valor máximo y en cuál el mínimo); verifique que sus alumnos entiendan el comportamiento de la gráfica relacionándolo con el fenómeno que representa. Si nota que algunos alumnos tienen dificultades para responder las preguntas, regrese a éstas después del llenado de la tabla de la actividad 1 de la siguiente sesión. Tome en cuenta que las respuestas para la actividad 2 de la sesión 1, deben ser: a) Oslo, Santiago, porque es invierno para ellos; b) Santiago, Oslo; c) 15 de junio, 21 de marzo y 21 de septiembre; d) 21 de marzo y 21 de septiembre.

En la sesión 2, comenzarán con el uso de tablas como apoyo para determinar puntos especiales sobre las gráficas usando su conocimiento previo y la estimación de puntos en la gráfica a partir de datos conocidos para contestar las preguntas de la actividad 1.

Ciudad	Enero 1	Febrero 1	Marzo 21	Junio 21	Agosto 1	Septiembre 21	Noviembre 1	Diciembre 21
Tijuana	10 h	10 h y 30 min	12 h y 12 min	13 h	13 h y 48 min	12 h	11 h	10 h
Cancún	11 h	11 h	12 h	13 h y 30 min	13 h	12 h	11 h y 30 min	11 h

El proceso que encontrarán en esta sesión involucra graficar, lo que les permitirá movilizar el conocimiento matemático para describir de mejor manera la situación a la que se enfrentan y, asimismo, comprender el fenómeno de la vida real que se les presenta. Tome en cuenta que las respuestas para la actividad 1 son: a) 14 h 15 min y 13 h 30 min, sí; b) Se debe a que las ciudades están a diferentes latitudes.

Las actividades 2 y 3 están estrechamente relacionadas con la actividad anterior. Entender las gráficas les ayudará a comprender mejor la situación en las diferentes ciudades aunque no sepan mucho del tema tratado. Conviene destacar que en las gráficas vemos que la cantidad de horas de luz varía según pasa el tiempo; es decir, depende de éste. Además, para cada día del año hay un único valor de horas de luz. Conviene que reflexionen en torno a esto. Si observa que hay dificultades para responder las preguntas, en particular los cuestionamientos de los incisos b) y c), puede ver con los alumnos el siguiente video, o bien, pedirles que lo vean previamente en casa para auxiliarles a profundizar acerca de los movimientos de la Tierra: https://www.youtube.com/watch?v=xPF6V7Iisas&ab_channel=BetzabethjMayorga

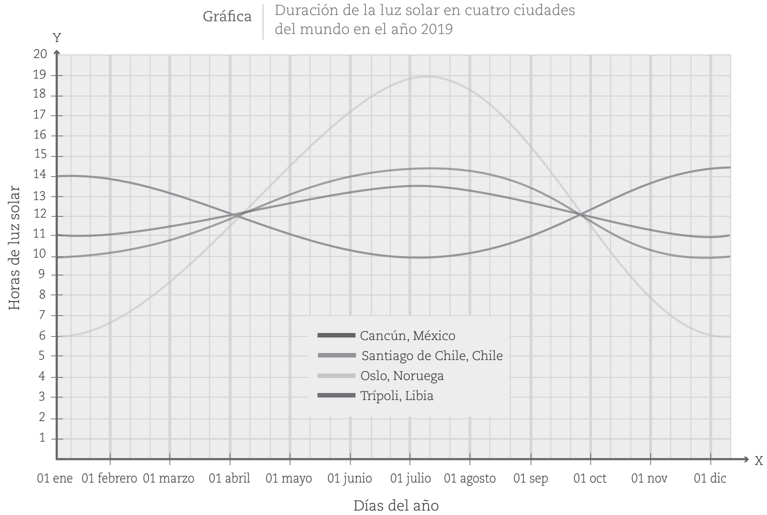
El uso de un mapamundi resulta fundamental para lograr una mejor comprensión del fenómeno y visualizar de otra manera por qué la variación entre fechas del año y las ciudades se da de esa manera. Puede trabajar también en algún momento de la sesión, o dejarlo de tarea, el estudio de los equinoccios. Analizar a fondo las gráficas de las ciudades de Oslo y Santiago de Chile le permitirá profundizar, si así lo desea, en el estudio del contexto, los movimientos de la Tierra, su inclinación respecto al Sol, etcétera.

En la actividad 6 se espera que el alumno use la información recabada junto a lo que sabe respecto a la duración de un día (24 horas). Si observa que tienen dificultades para responder y las preguntas de la actividad no son suficientes para detonar lo que saben, pregunte respecto a la información de la tabla de la actividad 1 de esta misma sesión. Por ejemplo, si en Tijuana la luz solar estuvo presente durante 12 horas el día 21 de septiembre de 2019, ¿cuántas horas habrá durado la noche? O bien, ¿cuántas horas no hubo luz solar? Además, si observa que aún tienen dificultades para comprender a cabalidad la gráfica, puede cuestionar a sus alumnos de tal forma que fijen su atención en que la noche más corta coincide con el día más largo y viceversa, de tal manera que reflexionen y conjeturen sobre cómo se comportará la gráfica que tienen que trazar. Si tienen previamente nociones al respecto, puede pedirles que esbocen la gráfica sin dar valores y la comparen con la final.

Otra actividad que puede trabajar con el grupo para que observen las características de estas gráficas complementarias, es dibujar en una página aparte una reproducción —lo más grande posible— de las gráficas de las cuatro ciudades (p. 47). En esa reproducción, los alumnos pueden trazar las gráficas de la duración de la noche y observar las simetrías que hay entre las gráficas del día y las de la noche. De esta manera, aprovechan la oportunidad de observar lo complementario de los fenómenos que se están estudiando.

Al final de la sesión, algo que tiene que quedar claro es por qué no puede haber más de un valor para cada fecha que se tome, es decir, la duración del día (o la noche) depende de la fecha en que se esté. Además, para cada fecha y cada ciudad se registra sólo una cantidad de horas de luz solar, pues en un mismo día y fecha, la duración del día no puede tener diferentes valores.

Gráfica Duración de la luz solar en cuatro ciudades del mundo en el año 2019



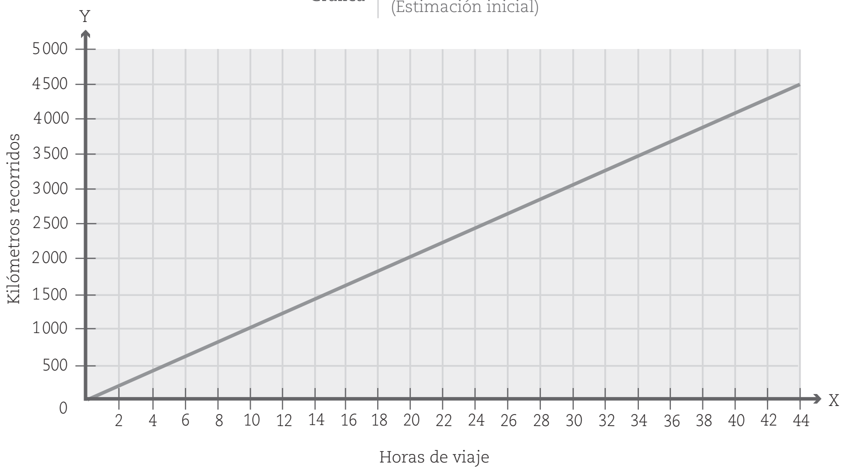
Fuente: https://bit.ly/2HZFOus

Sesión 3

De Tijuana a Cancún

1. Trabajen en pareja las actividades de esta sesión. Amalia y su madre se mudan de Tijuana a Cancún. Para ello, consultan la página de la Secretaría de Comunicaciones y Transportes y encuentran una ruta que implica recorrer 4 350 km. Trazan la gráfica que ves aquí y que representa el kilometraje que recorrerán por cada hora de viaje si mantienen una velocidad constante. Con base en ella, respondan las preguntas que aparecen enseguida.

Gráfica | Viaje de Tijuana a Cancún (Estimación inicial)



La sesión 3 se debe trabajar retomando lo que los alumnos ya conocen (la representación gráfica de una función lineal) con algo relativamente nuevo. Las preguntas están enfocadas a centrar también el análisis de la variación en aspectos cuantitativos, sobre todo en la noción de razón de cambio. Comparar dos situaciones que modelan el mismo viaje puede ser útil para aproximarse a un modelo de la realidad. En primer lugar, se presenta un viaje en condiciones ideales donde la velocidad constante es de 96.66 km/h, después se presenta otro viaje en condiciones un poco más reales. Centre la atención en los segmentos donde varió la velocidad respecto a un segmento anterior, por ejemplo, pueden analizar y determinar a qué velocidad iban durante las primeras cinco horas de viaje y compararla con la velocidad promedio que alcanzaron entre las horas 25 y 29 de viaje.

Además, comente que el tiempo que estuvo detenido el auto se muestra en las partes paralelas al eje X y son, aproximadamente, 26 horas. Preste especial atención al inciso c), ya que usted debe ayudar a los alumnos a comprender que en los segmentos planos lo que avanza es el tiempo y no la distancia, lo que significa que el coche estuvo detenido.

Asimismo, centre la atención en la parte curva de la gráfica y pregunte: ¿se puede hablar de una velocidad promedio en esta gráfica? Comente que ésta es la sección con mayor velocidad, lo cual se puede saber debido a su forma curva. Pregunte, además: ¿qué significa hablar de velocidad promedio?, y ¿cómo se representa gráficamente la aceleración o la desaceleración del vehículo?

Si los alumnos aún tienen dificultades con esto, refuerce la idea de razón de cambio y crecimiento con las actividades de la sesión 4 y el llenado de albercas. Ahí encontrarán también problemas que les permitirán centrar el análisis de la variación en aspectos cuantitativos para los cuales pondrán en juego las nociones de dependencia y de razón de cambio.

Complemente las preguntas planteadas con otro tipo de situaciones y modificando la forma de la alberca; por ejemplo, si fuera un prisma rectangular recto, ¿cómo se vería su gráfica?, ¿cómo sería si tuviera una forma cilíndrica?, ¿qué parte de la forma de la alberca provoca la mayor variación?

Pautas para la evaluación formativa

Con la finalidad de verificar en qué medida se logra la intención didáctica que aparece en la ficha descriptiva, es necesario hacer un registro para cerciorarse de que los alumnos realizan lo siguiente:

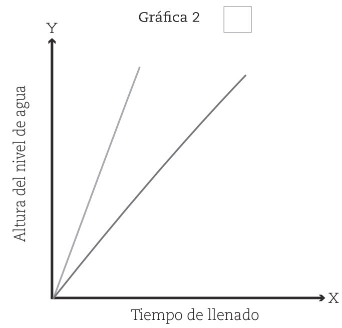
- Distinguen claramente qué es una función y la relación de dependencia que hay entre dos variables.
- Grafican la duración de las noches para cada ciudad usando la información que tenían de las gráficas y respuestas anteriores.
- Vinculan o explican los fenómenos a partir de una representación gráfica.
- Ante las relaciones funcionales que se presentan, ¿determinan qué variable es la dependiente y cuál es la independiente.

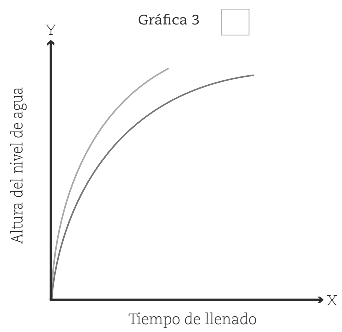
¿Cómo apoyar?

Un aspecto importante por considerar en las funciones es la lectura de las gráficas a que dan lugar. Insista a los alumnos acerca de la estrecha relación entre los valores que se obtienen en las tablas al marcar algunos puntos de la gráfica y la elaboración de las gráficas donde deben apreciarse los puntos correspondientes.

¿Cómo extender?

Si observa que los alumnos han comprendido el concepto de función y no tiene problemas para el llenado de tablas y la construcción de gráficas, pida que extrapolen sus datos para calcular el valor de un punto que no esté en las gráficas mostradas. Por ejemplo, para el caso de las gráficas de la luz solar de alguna ciudad, podría pedir que tracen la gráfica del año siguiente, o bien, del anterior. Sugiera que vean el siguiente video o recomiende otros que considere pertinentes para profundizar respecto al tema de los movimientos de la Tierra y las líneas de referencia que se tienen: https://www.youtube.com/watch?v=Oy1b5RZ44CY,https://www.youtube.com/watch?v=xPF6V7Iisas





Alberca 1 ■ Alberca 2 ■

a) Indiquen con una ✓ cuál es la gráfica que representa el comportamiento del llenado de las dos albercas. Justifiquen su elección.

____

____

b) ¿En cuál de las dos albercas se tiene que cortar primero el flujo de agua para evitar que se desborde. ______________________________

Secuencia 6 Polígonos semejantes 1

(LT, Vol. I, págs. 56-65)

Tiempo de realización	5 sesiones
Eje temático	Forma, espacio y medida
Tema	Figuras y cuerpos geométricos
Aprendizaje esperado	Construye polígonos semejantes. Determina y usa criterios de semejanza de triángulos.
Material	Juego de geometría, tijeras, cartulina.
Intención didáctica	Que los alumnos identifiquen y construyan polígonos semejantes.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisuales** • *Construcciones de polígonos semejantes* • *Aplicaciones en situaciones reales de la semejanza* **Informático** • *Razón de semejanza*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recursos audiovisuales** • *Aspectos didácticos de la enseñanza de los polígonos semejantes* • *Acerca de los criterios de semejanza*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Identifiquen figuras trazadas a escala como figuras semejantes.
- Sesión 2. Determinen la razón de semejanza de dos polígonos semejantes.
- Sesión 3. Construyan polígonos semejantes.
- Sesión 4. Identifiquen que los polígonos semejantes son aquellos que tienen sus ángulos respectivamente iguales y cuyos lados correspondientes son proporcionales.
- Sesión 5. Exploren las relaciones entre la congruencia y la semejanza de polígonos.

Acerca de...

Los alumnos han estado en contacto con el pensamiento proporcional desde primaria y en los dos años que llevan de estudio en secundaria. Ya se enfrentaron a problemas de figuras a escala al estudiar las magnitudes proporcionales; por esta razón, y considerando la escala como un saber previo, esta secuencia inicia el estudio de los polígonos semejantes a partir de las figuras a escala.

Con el estudio de los polígonos semejantes, los alumnos profundizarán sus conocimientos de proporcionalidad, realizarán construcciones geométricas y revisarán ángulos y su medida, así como la congruencia de los mismos.

Sobre las ideas de los alumnos

En la vida cotidiana, los alumnos usan la palabra semejante como sinónimo de parecido; en matemáticas, decir que un polígono es semejante a otro no se refiere a que es "parecido", tiene un significado específico. Por ejemplo, los alumnos podrían pensar que todos los rectángulos son parecidos entre sí, pero en esta secuencia aprenderán que no todos los rectángulos son semejantes.

Un error común entre los alumnos al resolver problemas de proporcionalidad es concebirlos como problemas de suma o resta, cuando en realidad la proporcionalidad pertenece al campo conceptual de la multiplicación y la división. Por ejemplo, en la sesión 3, actividad 4, se pide que construyan una ampliación de las figuras que conforman un rompecabezas. Considerando que el lado que mide 4 cm, en la ampliación mida 5 cm, es común que piensen que deben sumar 1 a todos los lados de las figuras (razonamiento aditivo) en lugar de multiplicar por $\frac{5}{4}$ (razonamiento multiplicativo) para obtener lados proporcionales.

Los alumnos estudiaron en primer grado la congruencia de polígonos; es importante que al terminar de trabajar esta secuencia, construyan la idea de que la congruencia es un caso particular de la semejanza, donde la razón de semejanza es $\frac{1}{1} = 1$.

¿Qué material se necesita?

En esta secuencia los alumnos ocuparán su juego de geometría, tijeras y, de ser posible, cartulina para la sesión 3. En esta sesión utilizarán el recortable 2 de la página 101.

¿Cómo guío el proceso?

Se sugiere iniciar platicando con los alumnos acerca de los ejemplos que conoce de figuras a escala para después leer y comentar lo enunciado en "Para empezar". Al finalizar, puede comentar que en matemáticas la palabra semejanza tiene un significado más específico que el que tiene en la vida cotidiana.

En el desarrollo de la secuencia, continuamente se solicita a los alumnos que argumenten sus respuestas a los problemas. Es importante que en las puestas en común que realice no sólo se comparen las respuestas, sino que también se comenten y discutan los argumentos.

Al trazar las figuras a escala que se piden en la actividad 3 de la sesión 1, de manera implícita los alumnos harán uso de la proporcionalidad de los lados; verifique que realmente lo hayan hecho en su cuaderno.

Determinar la escala o razón de semejanza entre dos polígonos no es fácil para algunos alumnos. Muchas veces invierten el orden en que deben realizar el cociente que determina la razón; por ejemplo, determinan que es 2 en lugar de $\frac{1}{2}$. Puede apoyarlos haciéndoles reflexionar sobre la idea de que si el polígono trazado es menor que el original, entonces la razón de semejanza debe ser una fracción menor que uno y, por lo tanto, corresponde a una reducción; en cambio, si el polígono trazado es mayor que el original, entonces la razón de semejanza es mayor que uno y, por tanto, es una ampliación. Como ejemplo de lo anterior, observen la escala de algunos mapas de localidades: siempre será una fracción menor que la unidad ($\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$, etcétera).

Respecto a construir el Sistema Solar a escala, se recomienda que reflexione con los alumnos que, por ejemplo, la distancia de Mercurio al Sol es de aproximadamente 58 millones de kilómetros.[5] Si se usara una escala para representar cada millón de kilómetros con un centímetro, Mercurio quedaría a 58 centímetros del Sol, mientras que Plutón (cuya distancia es aproximadamente 6 000 millones de kilómetros, quedaría a 6 000 centímetros, es decir a 60 metros. Otro reto será representar el diámetro del Sol, 1 392 000 km, por lo que su Sol tendrá que medir aproximadamente 1.4 cm de diámetro. Júpiter, por su parte, que es el planeta mayor (diámetro 142 984 km) tendría que quedar de 1.4 mm de diámetro, lo que hace casi imposible dibujar los demás planetas, dado el tamaño que deberían de tener.

Se espera que los alumnos se den cuenta de que la razón de semejanza de un polígono respecto a otro se obtiene dividiendo la medida de algún lado de un polígono entre la medida del lado correspondiente en el otro polígono. Así, la razón de semejanza del polígono A respecto al polígono B es:

$$\textit{Razón de semejanza} = \frac{\textit{lado del polígono A}}{\textit{lado correspondiente del polígono B}}$$

Una de las actividades que hará que los alumnos abandonen concepciones erróneas —como el pensamiento aditivo— acerca de la construcción de figuras semejantes es el armado de los rompecabezas geométricos propuestos en la sesión 3; es muy importante utilizarlos tal como se indica en las instrucciones. Cada rompecabezas debe tener las piezas indicadas; es necesario que se repartan las piezas por equipo; si no hay suficientes alumnos de tercer grado, se recomienda formar equipos con los alumnos de segundo e incluso con los de primero.

Se espera que no tengan problema en construir las piezas del primer rompecabezas porque los lados son perpendiculares. De ser necesario, recuerde a los alumnos cómo trazar rectas perpendiculares usando

[5] Fuente: https://www.nocreasnada.com/la-distancia-de-los-planetas-al-sol/

las escuadras. El primer rompecabezas tiene el propósito de que centren su atención en la proporcionalidad de los lados. Es probable que, como se pide que el lado que mide 4 cm deba medir 3 cm, piensen que deben restar 1 cm a cada lado de las piezas que están construyendo. Al tratar de armar la reducción del rompecabezas, los alumnos se darán cuenta de que esta idea es errónea. La razón de proporcionalidad de la figura que van a construir respecto al original es $\frac{3}{4}$, por lo que deberán obtener $\frac{3}{4}$ de la medida de cada lado de la pieza que están construyendo, esto equivale a multiplicar por $\frac{3}{4}$. Será una oportunidad para repasar cómo obtener $\frac{3}{4}$ de una cantidad o, bien, cómo multiplicar por $\frac{3}{4}$.

Como aparece en la sesión, se sugiere una puesta en común después de trabajar el primer rompecabezas. El propósito es reflexionar sobre la proporcionalidad de los lados y cómo obtener lados proporcionales antes de continuar.

El segundo rompecabezas presenta una dificultad adicional: en dos piezas hay ángulos que no son rectos. La dinámica será la misma y el propósito ahora es que se den cuenta de que no es suficiente la proporcionalidad de los lados correspondientes, sino que, además, hay que fijarse en la igualdad de los ángulos.

En la sesión 4 se pretende reafirmar las dos condiciones que se requieren para que dos figuras sean semejantes (igualdad de ángulos y proporcionalidad de lados correspondientes). Se espera que en los argumentos que se piden en la tabla de la actividad 1, los alumnos enuncien estas características.

En la actividad 2, directamente, se plantea al alumno la cuestión de que no es suficiente la igualdad de ángulos, debido a que todos los rectángulos tienen sus ángulos iguales, pero no todos son semejantes entre sí. Y en la actividad 3 se trabaja el caso de que pueden tener los lados correspondientes proporcionales; sin embargo, si los ángulos correspondientes no son iguales, entonces los polígonos no son semejantes.

Para terminar la secuencia, en la sesión 5 los alumnos retomarán sus conocimientos de congruencia para considerarla un caso especial de semejanza, donde la razón de semejanza es 1. Es muy probable que los alumnos no registren que las figuras 3 y 5 son figuras semejantes a la figura A y sólo las consideren congruentes. Es importante que en la puesta en común se discuta si una figura congruente con otra también es semejante a aquélla, y que se llegue a la conclusión de que sí lo es.

Pautas para la evaluación formativa

Con la finalidad de verificar en qué medida se logra la intención didáctica que aparece en la ficha descriptiva, es necesario hacer un registro para cerciorarse de que los alumnos realizan lo siguiente:

- Identifican dos figuras que están construidas a escala.
- Trazan correctamente figuras a escala con ayuda de una cuadrícula.
- Establecen correctamente la razón de semejanza entre dos polígonos.
- Determinan que en una reducción la razón de semejanza es menor que 1 y que en una ampliación es mayor a 1.
- Calculan correctamente la medida de los lados de polígonos semejantes.
- Construyen correctamente polígonos semejantes a otros.
- Identifican la congruencia como un caso particular de semejanza donde la razón de semejanza es 1.

¿Cómo apoyar?

Si observa que se les dificulta la construcción de figuras, repase con ellos el uso de instrumentos geométricos para trazar polígonos (triángulos, cuadrados, rectángulos).

En caso de que tengan dificultades para calcular la medida de los lados cuando la razón es una fracción, repase con ellos la multiplicación de fracciones o la manera de usar la fracción como operador (por ejemplo, calcular $\frac{3}{4}$ de 10).

¿Cómo extender?

Puede plantear preguntas de reflexión como las siguientes, siempre pidiendo que argumenten su respuesta:

- ¿Todos los cuadrados son semejantes entre sí?
- ¿Todos los rombos son semejantes entre sí?
- ¿Todos los pentágonos regulares son semejantes entre sí?
- ¿Todos los pentágonos son semejantes entre sí?
- ¿Todos los círculos son semejantes entre sí?
- El circulo A tiene un radio de 5 cm, el círculo B tiene un radio de 2 cm, ¿cuál es la razón de semejanza del círculo B respecto al círculo A?

Secuencia 7 Razones trigonométricas 1

(LT, Vol. I, págs. 66-75)

Tiempo de realización	5 sesiones
Eje temático	Forma, espacio y medida
Tema	Figuras y cuerpos geométricos
Aprendizaje esperado	Resuelven problemas utilizando las razones trigonométricas: seno, coseno y tangente.
Intención didáctica	Que los alumnos resuelvan problemas que impliquen razones entre dos lados de un triángulo rectángulo, usando procedimientos informales.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisuales** • *Construcción de rampas de acceso y carreteras* • *Aplicaciones de la trigonometría* **Informático** • *¿Cuál tiene mayor pendiente?*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recurso audiovisual** • *Aspectos didácticos de la enseñanza de la trigonometría*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Resuelvan problemas que impliquen determinar la razón entre el cateto opuesto y el cateto adyacente a un ángulo de un triángulo rectángulo, mediante procedimientos informales.
- Sesión 2. Establezcan la razón entre el cateto opuesto a un ángulo y la hipotenusa de un triángulo rectángulo, utilizando estrategias personales.
- Sesión 3. Calculen la razón entre el cateto adyacente a un ángulo y la hipotenusa de un triángulo rectángulo para resolver problemas.
- Sesión 4. Resuelvan problemas que impliquen determinar las razones entre los lados de triángulos rectángulos.
- Sesión 5. Establezcan y comparen la razón, expresada en decimales, entre dos lados de un triángulo rectángulo.

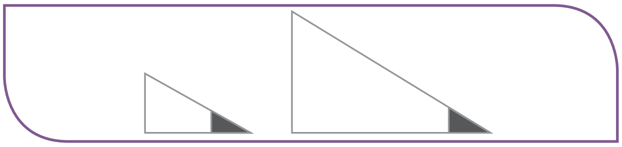
Acerca de...

El estudio de la trigonometría involucra varios conceptos matemáticos: ángulos, ángulo recto, triángulos rectángulos, proporcionalidad, entre otros.

Esta secuencia es la primera referida al estudio de la trigonometría y representa el primer acercamiento a la noción de razón trigonométrica como la comparación entre la longitud de dos lados del triángulo rectángulo. En esta secuencia no se definen ni se nombran las razones, se trata de que los alumnos conciban la idea de que en algunas situaciones interviene la comparación por cociente de dos cantidades, idea que se retoma y profundiza más adelante en el bloque 2, donde los alumnos conocerán tanto los nombres como la definición de seno, coseno y tangente.

Sobre las ideas de los alumnos

Algunos alumnos suelen pensar, erróneamente, que si los lados que forman un ángulo se prolongan, su medida aumenta. Por ejemplo, que el ángulo marcado en el triángulo de la izquierda es menor que el de la derecha.



Con el estudio de la secuencia 6, "Polígonos semejantes 1", los alumnos aprendieron que cuando los polígonos son semejantes, se mantiene la proporcionalidad entre las medidas de los lados y la igualdad en las medidas de los ángulos, esto lo reafirmarán con el estudio de las razones trigonométricas.

Al resolver esta secuencia, los alumnos tendrán que hacer cálculos continuamente. Es importante mencionar que se debe poner énfasis en los conceptos y procesos más que en los cálculos, incluso, de ser posible, permita el uso de la calculadora.

¿Cómo guío el proceso?

Como se mencionó anteriormente, al resolver los problemas de esta secuencia, los alumnos tratarán con las razones seno, coseno y tangente de un ángulo; sin embargo, no es el propósito en estos momentos que se les nombre ni que se definan, esto se hará en la siguiente secuencia, llamada "Razones trigonométricas 2". Permita que los alumnos usen sus saberes previos y que utilicen procedimientos informales para resolver las actividades sin necesidad de mencionarles que las razones que están considerando son trigonométricas y que tienen nombres especiales. No obstante, si algún alumno las nombra porque las conoce, acepte el comentario y mencione que estos nombres los retomarán en el bloque 2.

En las sesiones 1 y 2, emplearán de manera implícita la tangente de un ángulo. Puede iniciar la sesión 1 platicando con los alumnos acerca de las rampas para que las personas que usan sillas de ruedas puedan acceder a distintos lugares. Es probable que algunos piensen que la pendiente de la rampa sólo está determinada por su altura; no obstante, se espera que al analizar la rampa, se percaten de que depende tanto de la altura como de la distancia horizontal y que también puedan determinar que el porcentaje de la pendiente de una rampa se calcula dividiendo la medida de su altura entre la distancia horizontal y luego se multiplica por 100. Si los dos ejemplos que vienen en el libro son insuficientes, puede plantear otros (como los que se presentan en la siguiente tabla) para que los analicen y determinen cómo se calculan estos porcentajes.

Altura de la rampa	Distancia horizontal	Pendiente
15 cm	100 cm	15%
30 cm	60 cm	50%
10 cm	40 cm	25%
12 cm	80 cm	15%
9 cm	75 cm	12%

Entre las estrategias que surjan, posiblemente esté la de sumar, restar, multiplicar o dividir las medidas de los lados que forman la rampa. Si esto sucede, recuérdeles que cuando se habla de razón entre números, equivale a realizar una división entre ellos que se representa como $\frac{a}{b}$. Para obtener el porcentaje al que equivale esta razón, el decimal obtenido se multiplica por 100, como se estudió en grados anteriores. El uso de fracciones y su expresión como decimal o porcentaje, así como la equivalencia de estas expresiones, estará presente en la secuencia. Si lo considera necesario, haga un repaso de este contenido.

Es importante que en el cierre de la sesión se enfatice que la pendiente de una rampa no sólo depende de su altura o de su distancia horizontal, sino también de la razón entre ambas (tal como se menciona en la actividad 5); ésta es la idea principal que los alumnos deben construir.

En la sesión 2, los alumnos explorarán dos ideas importantes. La primera es la igualdad de razones para conservar la misma pendiente o inclinación (actividades 1 y 2). Se espera que los alumnos determinen que diferentes medidas pueden dar la misma pendiente si la razón entre ellas se conserva. Para la actividad 1, calcularán diversas medidas que den una pendiente de 10%. Verifique los argumentos que los alumnos dan en la actividad 2. Podrían anotar: "Si asciende 90 metros en kilómetro y medio, es lo mismo que si asciende 60 metros en un kilómetro", aunque se esperan argumentos que den cuenta de que manejan las razones entre las medidas. Por ejemplo: "en ambas carreteras se asciende 30 metros por cada medio kilómetro", o bien: "ambas tienen una pendiente de 6%, y también: da el mismo resultado si se divide 90/1500 que si se divide 60/1000". Si estos argumentos no surgen en el grupo, puede mencionarlos después de escuchar los que los alumnos propongan.

La otra idea importante de esta sesión es que los alumnos estudiarán que la pendiente se relaciona con el ángulo de inclinación (actividad 3). Con apoyo de un diagrama, esta idea se profundizará en el bloque 2, donde los alumnos calcularán la pendiente (tangente) de ángulos.

En la sesión 3 se trabaja de manera implícita con la idea del seno de un ángulo. Los alumnos explorarán la razón entre la altura a la que se coloca el colector (cateto opuesto del ángulo de inclinación) y el largo del colector (hipotenusa). Al resolver la actividad 1, los alumnos explorarán que el ángulo de inclinación no varía si la razón entre la altura y el largo del colector es la misma. Ponga especial atención en los argumentos que dan en las actividades 1 y 2. Las tablas de estas actividades son de proporcionalidad; retome esta idea preguntando a los alumnos: "Si dividen la altura entre el largo, ¿da siempre la misma cantidad?". Y, al igual que en las sesiones anteriores, una idea importante que los alumnos deben construir en esta sesión es que el ángulo de inclinación no depende sólo de la altura o sólo del largo del colector, sino que depende de la razón entre ambas.

En la misma línea que las anteriores, en la sesión 4 se trabaja implícitamente con el coseno de un ángulo. El contexto son las escaleras de mano, donde está contenida la razón entre la distancia de la escalera a la pared (cateto adyacente) y la longitud de la escalera (hipotenusa).

Para terminar, en la sesión 5 se retoman los contextos trabajados en las cuatro sesiones anteriores para resolver problemas diversos que implican usar las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.

Pautas para la evaluación formativa

Con la finalidad de verificar en qué medida se logra la intención didáctica que aparece en la ficha descriptiva, es necesario hacer un registro para cerciorarse de que los alumnos realizan lo siguiente:

- Consideran que el valor de las pendientes o de los ángulos de inclinación no sólo depende de la medida de un lado, sino de la razón entre dos de ellos.
- Comparan y ordenan correctamente las razones implicadas en los problemas de la secuencia.
- Determinan y calculan la razón entre dos cantidades, ya sea expresada como fracción, decimal o porcentaje.

¿Cómo apoyar?

Si nota que en las sesiones donde se manejan porcentajes se les dificulta a los alumnos calcularlos, se sugiere que haga un repaso breve del tema. En particular, que recuerden cómo determinar qué tanto por ciento es una cantidad de otra:

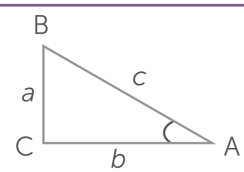
- ¿Qué tanto por ciento es 18 de 36?
- ¿Qué tanto por ciento es 24 de 40?

Apóyese en el cálculo de porcentajes más accesibles, como 10%, 5%, 1%.

¿Cómo extender?

Plantee problemas geométricos como los siguientes:

Considera triángulos rectángulos ABC cuyos lados se han nombrado como *a, b* y *c*.



Considera el ángulo A (marcado en la figura). Anota 1 al triángulo cuya pendiente es mayor, 2 al que le sigue, y así sucesivamente. Si dos triángulos tienen la misma pendiente, anota el mismo número.

Lado b (cm)	Lado a (cm)	Orden según la medida del ángulo A
3	4	
2	10	
3	10	
9	18	
6	8	

Secuencia 8 Teorema de Pitágoras 1

(LT, Vol. I, págs. 76-83)

Tiempo de realización	4 sesiones
Eje temático	Forma, espacio y medida
Tema	Medida
Aprendizaje esperado	Formula, justifica y usa el teorema de Pitágoras.
Intención didáctica	Que los alumnos formulen y justifiquen geométrica y algebraicamente el teorema de Pitágoras.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisuales** • *Pruebas geométricas del teorema de Pitágoras* • *Historia del teorema de Pitágoras* **Informático** • *Otras pruebas algebraicas del teorema de Pitágoras*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recursos audiovisuales** • *Aspectos didácticos del teorema de Pitágoras* • *Usos y aplicaciones del teorema de Pitágoras*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Repasen la manera de trazar un triángulo dadas las medidas de sus tres lados, y exploren otras medidas que generan triángulos rectángulos.
- Sesión 2. Exploren el teorema de Pitágoras a partir de casos particulares y del cálculo de áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo.
- Sesión 3. Prueben geométricamente el teorema de Pitágoras.
- Sesión 4. Prueben algebraicamente el teorema de Pitágoras.

Acerca de...

El estudio del teorema de Pitágoras es de una gran riqueza didáctica porque permite conectar con otros contenidos matemáticos y desarrollar el razonamiento deductivo de los alumnos. Al estudiarlo, repasarán diversos trazos geométricos, propiedades de los triángulos, perpendicularidad y paralelismo, el área de los cuadrados, el cálculo de la raíz cuadrada y el uso y la equivalencia de expresiones algebraicas, entre otros.

Uno de los propósitos generales de la enseñanza de las matemáticas en la escuela es que los alumnos las conciban como una construcción social en la que se formulan y argumentan hechos y procedimientos matemáticos, y uno de los propósitos de la enseñanza de la geometría es razonar deductivamente al identificar y usar las propiedades de triángulos, cuadriláteros, polígonos regulares y del círculo. Sin duda, el estudio del teorema de Pitágoras contribuye a ambos propósitos. El antecedente de este contenido es la secuencia 3, "Figuras geométricas y equivalencia de expresiones de segundo grado 1".

Sobre las ideas de los alumnos

Algunos alumnos pueden no tener los saberes previos de los contenidos mencionados. Por ejemplo, pueden presentar dificultades para trazar un triángulo, y aunque está relacionado con el teorema de Pitágoras, no hay que verlo como un obstáculo para abordarlo. Por el contrario, debe considerarse como una oportunidad para repasar y reafirmar, y también para que se formen una idea más integral de las matemáticas.

Aunque en primer grado estudiaron la propiedad de desigualdad de los triángulos, es común que los alumnos sigan pensando que cualquier terna de medidas de longitud de los segmentos pueden ser los lados de un triángulo; en la sesión 1 se explora esta idea.

Algo que ocuparán en la sesión 4 es el manejo de expresiones algebraicas, en particular el cuadrado de un binomio. Un error común entre los alumnos, al trabajar con expresiones algebraicas, es que consideran que $(a + b)^2 = a^2 + b^2$. Es importante que se trabaje al respecto, por lo que se recomienda que cada vez que sea necesario se consulte la secuencia 3 "Figuras geométricas y equivalencia de expresiones de segundo grado 1", para revisar cómo se multiplica un binomio al cuadrado. Aunque aún no hayan estudiando el caso en que ambos términos son literales, pueden apoyarse en los ejercicios que ahí se proponen.

¿Qué material se necesita?

En esta secuencia, los alumnos ocuparán su juego de geometría, tijeras, pegamento y los recortables 3 y 4 propuestos en la página 103 para realizar las actividades de la sesión 3 “Armemos rompecabezas”.

¿Cómo guío el proceso?

Lea y comente con los alumnos la sección “Para empezar”. Ahí se sugiere que consigan un cordel y reproduzcan la cuerda de los 12 nudos y formen con ella el triángulo rectángulo de lados 3, 4 y 5. Pregunte a los alumnos: “¿Cómo podemos verificar que el ángulo formado por los lados de 3 y 4 unidades es recto?”. Es probable que surjan pruebas empíricas. Por ejemplo, usar el ángulo recto de alguna de las escuadras o de una hoja rectangular, o bien medirlo directamente con un transportador. También puede pedir que, usando la cuerda de 12 nudos, verifiquen que las esquinas del salón estén a escuadra. Permita que los alumnos respondan a la pregunta sobre cómo marcan en su comunidad los linderos. Probablemente no lo sepan, así que puede dejar de tarea que lo investiguen con las personas adultas de su comunidad.

Se espera que los alumnos respondan las dos preguntas planteadas al inicio de “Manos a la obra” de la sesión 1 a partir de sus conocimientos previos. Es probable que para la primera pregunta, “¿Con tres medidas cualesquiera es siempre posible construir un triángulo?”, algunos alumnos recuerden lo estudiado en primer grado y respondan inmediatamente, pero que otros lo hayan olvidado. En la segunda pregunta: “¿Qué características deben cumplir las medidas de los lados de un triángulo para que sea rectángulo?”, aun cuando es el contenido esencial de esta secuencia, lo más probable es que los alumnos no sepan con certeza la respuesta. No es necesario que usted explique o aclare nada al respecto. Permita que ellos hagan sus hipótesis y construyan sus respuestas. Durante el trabajo con la secuencia pueden regresar a estas preguntas para ratificarlas o rectificarlas.

Es importante que tracen en su cuaderno los triángulos pedidos en la sesión 1; verifique que lo hagan. Apoye a quienes tengan dificultad en seguir las instrucciones o en el manejo de los instrumentos geométricos. En la puesta en común, puede comentar el caso en que los arcos no se cortan y, por lo tanto, no se forma un triángulo (por ejemplo, con la terna 1, 3, 10). Plantee preguntas como: "¿Cuáles de los triángulos que trazaron son rectángulos?; "¿Cómo saben que lo son?; ¿Cómo verifican que un ángulo del triángulo es recto?".

Si bien algunos alumnos propondrán pruebas empíricas para comprobar que un triángulo es rectángulo, después de estudiar el teorema de Pitágoras podrán dar un argumento diferente; esto último lo estudiarán en el bloque 2, cuando estudien el recíproco de dicho teorema. Al completar la tabla de la actividad 3, los alumnos habrán encontrado tres ternas de valores para las medidas de los lados de triángulos rectángulos, las cuales se retoman en la sesión 2 para trabajar con ellas.

En la sesión 2 se da un primer acercamiento al teorema de Pitágoras, basado en casos particulares y en el cálculo de áreas, dadas las medidas de los lados. Aunque los cuadrados construidos sobre los lados de los triángulos rectángulos están cuadriculados, se espera que los alumnos calculen el área usando la fórmula; el cuadriculado está como apoyo para aquellos que aún no tienen afianzado el concepto de área. Una primera formulación del teorema la encontrarán en la actividad 2. Si nota que algunos subrayan una formulación errónea, no es necesario que los corrija directamente, en la puesta en común de la sesión podrán corregir si es necesario. También es importante enfatizar en la expresión *Si fuera cierto...* (actividad 3), pues los alumnos **no** deben formarse la idea de que por cumplirse en tres casos se cumplirá en otros.

En la sesión 3 se da un paso más hacia la generalización del teorema. En este caso, mediante pruebas geométricas se espera que los alumnos observen que, en efecto, las piezas de los cuadrados de los catetos cubren el cuadrado de la hipotenusa.

No obstante, puede cuestionar a los alumnos acerca de que, al menos para esos otros dos triángulos (cuyas medidas de lados no se conocen), también se cumple el teorema. Pregunte: "¿Qué pasará con otros triángulos rectángulos?, ¿también se cumplirá?". Se sugiere que en la actividad 2 enfatice que ellos van a construir un triángulo rectángulo cualquiera, pida que sea diferente a todos los que han trabajado en la secuencia. De ser necesario, en esta actividad repase con ellos cómo trazar los cuadrados, las paralelas y perpendiculares que se requieren. Se espera que al término de esta actividad, los alumnos observen y comprendan que el teorema de Pitágoras se cumple para todos los tríangulos rectángulos. Pida que continúen con la sesión 4, donde todos trabajarán otras comprobaciones, ahora usando el álgebra.

Si es necesario, para la sesión 4 repase con los alumnos cómo calcular el área de un triángulo, un cuadrado y un trapecio con expresiones algebraicas, así como la manipulación de las expresiones algebraicas que se requieren, en particular el cuadrado de un binomio.

Pautas para la evaluación formativa

Con la finalidad de verificar en qué medida se logra la intención didáctica que aparece en la ficha descriptiva, es necesario hacer un registro para cerciorarse de que los alumnos realizan lo siguiente:

- Saben usar los instrumentos de geometría y seguir instrucciones al realizar una construcción geométrica.
- Saben trazar triángulos, cuadrados, paralelas, perpendiculares.
- Saben calcular el área de triángulos y cuadrados.
- Saben manipular expresiones algebraicas
- Aceptan que no se puede generalizar un hecho geométrico a partir de casos particulares.
- Aceptan las pruebas algebraicas como generalizaciones del teorema.

¿Cómo apoyar?

Recuerde a los alumnos cómo se usan la regla, las escuadras y el compás.

Repase las construcciones geométricas que se requieren, indique cómo se trazan paralelas, perpendiculares, triángulos y cuadrados.

Si tienen problemas con las manipulaciones algebraicas, invítelos a que repasen la secuencia 3 "Figuras geométricas y equivalencia de expresiones de segundo grado 1" de su libro de texto.

¿Cómo extender?

Puede proponer que:

- Analicen y reproduzcan con otros triángulos diferentes las construcciones de los dos rompecabezas de la sesión 3.
- Analicen, reproduzcan y etiqueten con otras literales las figuras de la sesión 4 y, a partir de ellas, comprueben el teorema de Pitágoras.
- Pida que tracen un triángulo obtusángulo (son los que tienen un ángulo mayor a 90°), que construyan los cuadrados construidos sobre los lados y exploren: ¿se cumple el teorema de Pitágoras?, ¿qué observan?

Secuencia 9 Eventos mutuamente excluyentes 1

(LT, Vol. I, págs. 84-91)

Tiempo de realización	3 sesiones
Eje temático	Análisis de datos
Tema	Probabilidad
Aprendizaje esperado	Calcula la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes.
Intención didáctica	Distinguir cuándo un evento es sencillo, compuesto, o dos eventos son mutuamente excluyentes.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisual** • *Eventos simples, compuestos y mutuamente excluyentes* **Informático** • *Eventos simples, compuestos y mutuamente excluyentes*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recurso audiovisual** • *Aspectos didácticos de la enseñanza de la probabilidad*

¿Qué busco?

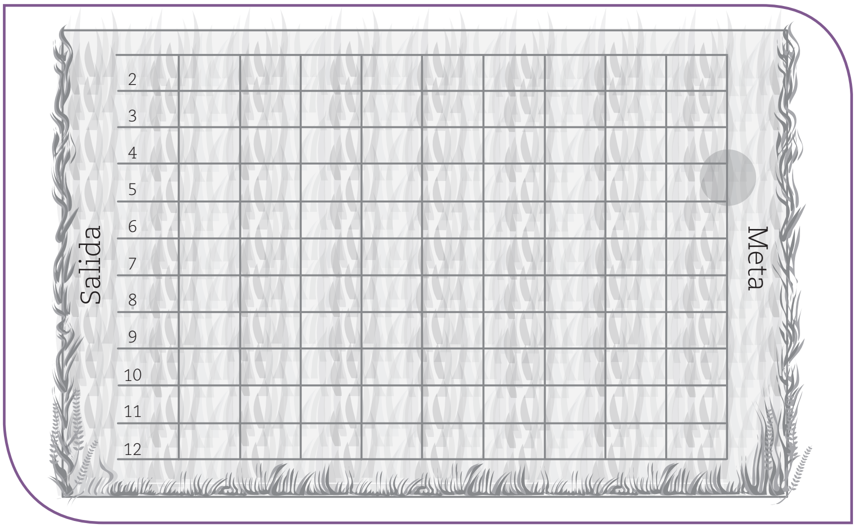
Que los alumnos:

- Sesión 1. Distingan los eventos simples de los compuestos al realizar un experimento aleatorio.
- Sesión 2. Reflexionen sobre las características que hacen que dos eventos sean mutuamente excluyentes al realizar un experimento aleatorio.
- Sesión 3. Determinen con el cálculo de la probabilidad clásica si los eventos son simples, compuestos o mutuamente excluyentes.

Acerca de...

La enseñanza de la probabilidad en la educación secundaria consiste en propiciar la intuición de los alumnos respecto a los conceptos de probabilidad a partir de experiencias variadas, de tal manera que comprendan que en las situaciones de azar no hay resultados milagrosos ni caprichosos.

Esta secuencia didáctica es la primera de tres que se proponen en este grado, relacionadas con la probabilidad. Con su estudio se pretende que los alumnos distingan cuáles son los eventos simples, compuestos y mutuamente exclu-



yentes, mediante la realización de un juego de azar y el análisis de la frecuencia con que ocurren, así como a partir de su espacio muestral.

La secuencia se basa en el juego de azar que corresponde al lanzamiento de dos dados no trucados y observar los números de las caras superiores para sumarlos en un contexto de carrera de caballos. Algunas de las razones por las cuales se propone iniciar con esta situación son:

- Históricamente, los juegos de azar representan uno de los aspectos básicos que contribuyen al surgimiento y desarrollo de la teoría de la probabilidad. Al realizar este tipo de juegos surgen ideas fundamentales, como variabilidad (por ejemplo, la variación de los resultados en un experimento), aleatoriedad (asociado con impredictibilidad de los resultados y con la regularidad estadística que presentan) e independencia (el resultado de un evento no altera las probabilidades de otros eventos que pueden ser previos, simultáneos o futuros).
- En general, los juegos de estrategia detonan la curiosidad de los alumnos hacia los procedimientos y la búsqueda de estrategias ganadoras, que deben ser aprovechadas para propiciar que lleven a cabo procesos matemáticos y los utilicen casi sin darse cuenta para que los disponga a continuar su trabajo matemático.
- Es posible que la mayoría de los alumnos ya haya realizado juegos que se generan a partir del lanzamiento de dos dados; sin embargo, se ha considerado su versatilidad, pues al usar los mismos dados y el mismo tablero, pero cambiando las reglas o los eventos a observar, se puede generar una gama amplia de juegos.
- La importancia social que tienen los juegos, en particular los de azar.

Sobre las ideas de los alumnos

En el caso del juego de "Carrera de caballos", algunos alumnos podrían pensar, erróneamente, que en 10 ensayos se termina el juego. Es importante que registren el número de veces que tiraron los dados como un aspecto más que permite apreciar la variabilidad que se tiene cada vez que se realiza el juego.

Como se señaló, en la educación secundaria se pretende que la enseñanza de la probabilidad permita el desarrollo de la intuición de las ideas fundamentales para comprender sus conceptos.

Así, por ejemplo, para hacer evolucionar la idea de variabilidad construida hasta este momento por los alumnos, sería conveniente que, de ser posible, realicen varias veces el juego (hagan varios ensayos) y analicen los registros que hacen, de manera semejante a las actividades 2 y 3 propuestas en la sesión 1, y el inciso a), de la actividad 4. El análisis de esos resultados abona a la comprensión de la variabilidad de los resultados cada vez que se juega, preparando a los alumnos para entender que una muestra pequeña de 10 resultados tendrá mayor variabilidad de ocurrencia que una muestra con muchos más resultados. Esto es, que entre más resultados se puedan analizar, se comprende mejor la tendencia de la probabilidad frecuencial a la teórica. Cabe señalar que, por cuestiones didácticas, se

Ensayo	1	2	3	4	5	6
Evento / Resultado	(5, 2)	(3, 4)	(4, 6)	(2, 5)	(1, 1)	(1, 1)
A: Avanza el caballo 2	No ocurrió	No ocurrió	No ocurrió	No ocurrió	Ocurrió	Ocurrió
B: Avanza el caballo 7	Ocurrió	Ocurrió	No ocurrió	Ocurrió	No ocurrió	No ocurrió
P′ (*A*): Probabilidad frecuencial del evento *A*	$\frac{0}{1}$	$\frac{0}{2}$			$\frac{1}{5}$	
P′ (*B*): Probabilidad frecuencial del evento *B*	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{3}$			

trabaja con una cantidad pequeña de resultados (muestra) que permite distinguir las características de los eventos simples, compuestos y mutuamente excluyentes, pero no es razón para limitar a los alumnos. Pueden seguir experimentando para desarrollar estas ideas; por esto, se recomienda que realicen varias veces el juego. Un evento sencillo (o simple o singular) sólo tiene un resultado favorable posible, mientras que un evento compuesto implica más de un resultado favorable. Para determinar cuándo se tienen eventos mutuamente excluyentes, es necesario comparar los resultados favorables de cada uno de ellos. Si no hay ningún resultado favorable en común, entonces son ajenos o mutuamente excluyentes o incompatibles.

Dado 2						
6						
5		5, 2				
4						
3						
2						
1						
	1	2	3	4	5	6
	Dado 1					

¿Qué material se necesita?

Dos dados por equipo.

¿Cómo guío el proceso?

Inicie con la reflexión de las respuestas a las preguntas de la sección “Para empezar”. Es importante conocer cuáles son las experiencias de los alumnos al respecto y, específicamente, los juegos de azar que les son familiares. Esto permite, por una parte, introducir a los alumnos en el contenido de la secuencia y, por otra, obtener información acerca de las ideas y los conocimientos que tienen sobre azar y probabilidad. Si alguno de los alumnos dice que ha jugado con dados, pida que explique de qué manera y plantee una pregunta equivalente a la del inciso a) de la actividad 1, en el sentido de saber si cuando inicia el juego pueden anticipar un ganador y si, al finalizar el juego, su predicción es correcta. También puede plantear la pregunta del inciso b) de la actividad 4, una vez que expliquen cuál ha sido su experiencia de juego.

En las dos primeras sesiones, los alumnos trabajarán con la frecuencia de ocurrencia de los eventos, lo cual corresponde a la probabilidad frecuencial que vienen estudiando desde primer grado. Si algunos no lo recuerdan, señale que la frecuencia de ocurrencia es la frecuencia relativa, que también es la probabilidad frecuencial, y que la han aprendido a expresar como P´(E).

En la actividad 4 inciso b), pídales que utilicen una tabla semejante a las presentadas en las actividades 2 y 3 para analizar en detalle los resultados obtenidos por equipo y los del grupo.

En la sesión 2, los alumnos deben darse cuenta de que, al comparar los resultados favorables de dos eventos, puede suceder que:

- Todos los resultados sean comunes, con lo cual los eventos son equivalentes. Por ejemplo, el evento D: la suma de los números en los dos dados es menor que 6, podría ser equivalente a un nuevo evento H: la suma de los números en los dos dados es igual o menor que 5.
- Algunos de los resultados que obtendrán serán comunes. Por ejemplo, de acuerdo con los resultados registrados en la tabla 1, el evento D: la suma de los números en los dos dados es menor que 6, y G: la suma de los números en los dos dados es un número par, tienen en común el resultado (1, 1), que genera la suma: 1 + 1 = 2. También este par de eventos tiene en común el resultado (2, 2), aunque en los 10 ensayos no se presentó. Así, los dos eventos anteriores son equivalentes al evento (G y D) en el cual las condiciones de aquellos eventos deben ocurrir al mismo tiempo (o simultáneamente) en éste.
- No hay resultados en común que sean mutuamente excluyentes. Una de sus principales características es que, al definir el evento en el cual ambos eventos deben ocurrir simultáneamente, éste es imposible debido a que su frecuencia de ocurrencia es 0 y se expresa, por ejemplo, en el caso del evento (D y F) de la tabla 4, como P´(D y F) = 0.

En la sesión 3 se emplea la probabilidad clásica o teórica que se expresa como P(E) para distinguirla de la frecuencial, como ya lo estudiaron en segundo grado. Si los alumnos no lo recuerdan o le preguntan por qué se expresa sin apóstrofo, puede solicitar que revisen el libro de segundo grado.

Es importante que los alumnos comprendan que el espacio muestral para el experimento de lanzar dos dados y observar los números de las caras superiores es de 36 resultados posibles, y cuando el experimento implica lanzar dos dados y observar la suma de los números de la caras superiores, es de 11: {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}.

En el primero, todos los resultados son equiprobables; en el segundo, son no equiprobables; en el juego de las carreras de caballo se utiliza el segundo. Así, los eventos: "La suma de los dos números es 12" y "La suma de los dos números es 2", son eventos simples.

Finalice revisando cuáles son los juegos de azar que se juegan más o son más conocidos en la comunidad.

Pautas para la evaluación formativa

Con la finalidad de verificar en qué medida se logra la intención didáctica que aparece en la ficha descriptiva, es necesario hacer un registro para cerciorarse de que los alumnos realizan lo siguiente:

- Completan las tablas de las actividades de las sesiones, no tienen problema en determinar si ocurre o no un evento dado.
- Completan las tablas de las actividades, no tienen problema en señalar la frecuencia de ocurrencia que equivale a la probabilidad frecuencial del evento indicado.
- Reconocen cuáles son los valores mínimos y máximos de la frecuencia de ocurrencia de un evento.

¿Cómo apoyar?

Si observa que los alumnos aún tienen dificultades para comprender cuáles son los eventos simples, puede proponer observar los siguientes eventos:

Evento T: La suma de los dos números es menor que 3;

Evento R: El producto de los dos números es 1;

Evento V: La suma de los dos números es mayor que 11;

Evento U: El producto de los dos números es mayor que 30;

Evento L: La suma de los dos números es múltiplo de 2, 3 y 4.

También puede incluir algunos de los eventos anteriores y compararlos con los que se proponen en la sesión 2 para determinar si son mutuamente excluyentes.

Otra opción que tiene para trabajar con los eventos anteriores es utlizarlos en la sesión 3 e identificar los resultados favorables que les corresponden en el espacio muestral de resultados. De este modo, los alumnos pueden determinar que hay eventos equivalentes, como el T y el R.

¿Cómo extender?

Use la misma mecánica del juego "Carrera de caballos", pero en lugar de sumar los números de las caras superiores que caen al lanzar ambos dados, ahora se restan y los números del tablero cambian de 0 a 5.

Al realizar un experimento aleatorio y observar dos eventos simultáneos elegidos puede suceder cualquiera de las situaciones siguientes:

a) Todos los resultados favorables de uno de los dos eventos son los mismos que todos los resultados favorables del otro evento.

b) Algunos resultados favorables de uno de los dos eventos son los mismos que algunos resultados favorables del otro evento.

c) No existen resultados favorables en común para los dos eventos. Esto significa que ambos eventos no pueden ocurrir al mismo tiempo, es decir, la frecuencia relativa de ambos es cero. A estos eventos se les llama mutuamente excluyentes o ajenos. Cuando se dan los casos señalados en a) y b) el valor de la probabilidad frecuencial es mayor que 0 y menor que 1.

Evaluación. Bloque 1

(LT, Vol. I. págs. 106–107)

Reactivos 1 y 2. *Múltiplos, divisores y números primos*. El número 48 tiene 10 divisores: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24 y 48. Los números 41 y 61 son primos, ya que sólo son divisibles entre ellos mismos y 1.

Reactivo 3. *Criterios de divisibilidad.* 213, pues al dividirlo entre 5, el residuo es 3.

Reactivos 4 y 5. *Figuras geométricas y equivalencia de expresiones de segundo grado.* La expresión algebraica $\frac{n(3n-1)}{2}$ es equivalente a las expresiones:

$$\frac{3n^2 - n}{2} = \frac{3}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$$

El número de jugadores del torneo de ajedrez se obtiene mediante la expresión:

$$\frac{n(n-1)}{2} = 45$$

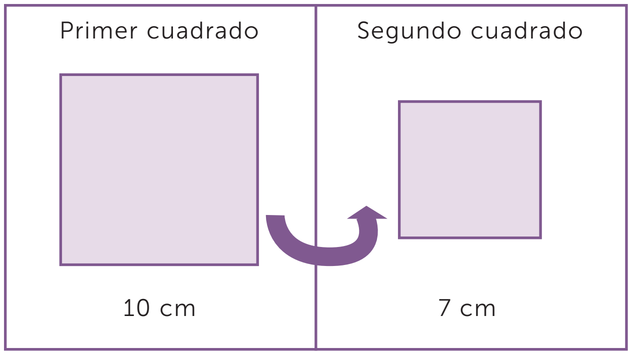
Reactivo 6. *Ecuaciones cuadráticas.* Los valores de la solución de la ecuación $2x^2 - 72 = 0$ son $x_1 = 6$; $x_2 = -6$, porque $2(-6)^2 - 72 = (2 \times 36) - 72 = 72 - 72 = 0$ y $2(6)^2 - 72 = (2 \times 36) - 72 = 72 - 72 = 0$.

Reactivo 7. *Funciones.* El máximo nivel de glucosa en la sangre de Ramón lo obtiene 105 minutos después de ingerir alimentos.

Entre 90 y 125 minutos es el intervalo de tiempo en que Ramón se encuentra fuera del rango óptimo de insulina. La siguiente tabla muestra la relación entre los niveles de azúcar de acuerdo con el tiempo.

Tiempo (min)	5	120	300
Nivel de azúcar (mg/dL)	80	145	80

Reactivos 8 y 9. *Polígonos semejantes.* En el reactivo 8, el alumno debe identificar el cociente que corresponde a la razón de semejanza del segundo cuadrado con respecto al primero, que es: $\frac{7}{10}$. Lo cual no es fácil para muchos alumnos, debido a que algunos de ellos invierten el orden en que deben realizar el cociente que determina la razón, poniendo que es $\frac{10}{7}$ en lugar de $\frac{7}{10}$. Para comprenderlo, puede pedir que dibujen el primer cuadrado que mide 10 cm de lado y, luego, se transforma en el segundo que mide 7 cm por lado.

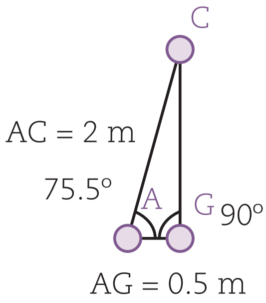


La razón de semejanza se plantea como:

$$\frac{\textit{Segundo cuadrado (transformación)}}{\textit{Primer cuadrado (original)}}$$

En el reactivo 9, con respecto a la semejanza de figuras geométricas, los alumnos deben reconocer que todos los triángulos equiláteros son semejantes entre sí porque la medida de sus tres ángulos es igual, 60° cada uno, eso no cambia entre un triángulo equilátero y otro, sin importar la medida de sus tres lados. En este caso, puede utilizar el juego de geometría para trazar triángulos equiláteros de diferente tamaño y observar que la medida de los ángulos es la misma por construcción. También pueden proponer utilizar *software* como GeoGebra o Cabri para construir una familia de triángulos equiláteros y determinar la razón de semejanza entre ellos.

Reactivos 10 y 11. *Razones trigonométricas.* En el reactivo 10, el alumno debe identificar la pareja de valores que, dada la longitud de la escalera y de la distancia de la pared a la que se coloca, forme el ángulo con mayor medida entre las parejas de valores propuestas en las cuatro opciones de respuesta.

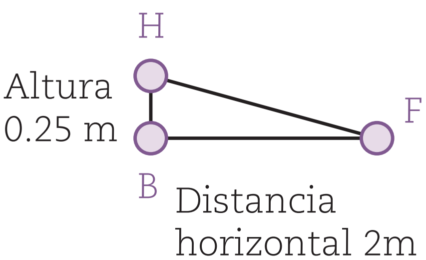


La pareja de valores correcta es 2 m y 0.5 m, lo que significa que la escalera tiene 2 m de longitud a una distancia de 0.5 m de la pared, formando un ángulo de 75.5°.

En el reactivo 11 se pregunta por la distancia horizontal y la altura de una rampa que debe tener la misma pendiente que la presentada en la imagen, los alumnos deben identificar cuáles son los valores y, para ello, deben recordar que una característica de esos valores es que deben ser proporcionales a los que se indican implícitamente en la imagen. La razón entre la altura y la distancia horizontal es $\frac{1}{8}$ y la respuesta correcta es B.

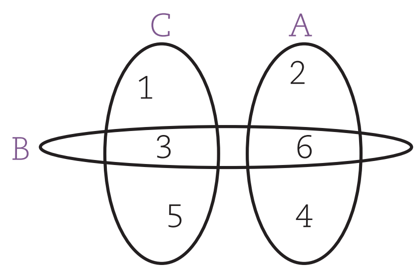
Rampa A

Rampa B



Reactivos 12 y 13. *Teorema de Pitágoras.* En el caso del reactivo 12, los alumnos deben reconocer que es en los triángulos rectángulos donde se cumple el teorema de Pitágoras. En el reactivo 13 se cuestiona sobre la manera en que se determina el área del cuadrado construido en el cateto desconocido, una vez que se conoce el área del cuadrado de la hipotenusa y el área del cuadrado del otro cateto que forman el triángulo rectángulo. Solamente se requiere calcular la diferencia de áreas conocidas, 10 cm^2 – 3 cm^2.

Reactivo 14. *Eventos mutuamente excluyentes.* Se pide al alumno distinguir cuáles son los eventos mutuamente excluyentes o ajenos. Una manera de identificar de entre los tres eventos definidos para la situación aleatoria de lanzar un dado y observar el número de puntos de la cara superior al caer, es representarlos en diagramas de Venn, de esa forma se observa con claridad que los eventos A y C son ajenos, es decir, no tienen resultados en común.



La segunda parte de la evaluación contiene cinco actividades. La primera actividad está vinculada con *criterios de divisibilidad* y para cada condición que indica se tiene más de una respuesta correcta. Una estrategia para determinar las respuestas correctas es hacer una lista de números del 4380 al 4389 y señalar con cuáles criterios de divisibilidad cumple cada uno de éstos.

Divisible entre:	4380	4381	4382	4383	4384	4385	4386	4387	4388	4389
2	✓		✓		✓		✓		✓	
3	✓			✓			✓			✓
5	✓					✓				
6	✓						✓			

Entonces, un alumno podría anotar las cifras 2, 3, 5 y 6 para formar 4382, 4383, 4385 y 4386, respectivamente. Un alumno que anota cero en los cuatro números demuestra que reconoce que 4380 cumple con los cuatro criterios de divisibilidad.

En la segunda actividad, el alumno debe escribir expresiones algebraicas equivalentes que representen el área del rectángulo dibujado con líneas negras.

Expresión algebraica 1
$(a)(a + a + 5)$

Expresión algebraica 2
$(a)(2a + 5)$

Expresión algebraica 3
$2a^2 + 5a$

Un error que puede cometer un alumno es sumar las dos dimensiones del rectángulo, $(a) + (a + a + 5)$ o sumar todos los valores que aparecen en el rectángulo, $a + (a + a + 5) + a + 2a + 5$.

En la actividad 3, el alumno debe construir un rectángulo que mida 3 cm de lado considerando que el lado correspondiente en el primer rectángulo es 2 cm, por lo tanto, implica aplicar la razón de $\frac{3}{2}$ para determinar la medida del otro lado del rectángulo. En este caso, la actividad se refiere al contenido de *polígonos semejantes*. La actividad 4 se relaciona con *razones trigonométricas 1.* Se solicita determinar la altura en que se debe colocar un calentador de 2 m de longitud considerando la razón de $\frac{2}{5}$, se determina la altura: $h = 2 \times \left(\frac{2}{5}\right) = \frac{4}{5} = 0.8$ m.

La quinta y última actividad de evaluación corresponde al tema *probabilidad*. El alumno debe determinar la probabilidad clásica del evento "ganar la rifa", dado que se compraron 25 boletos. La probabilidad es $\frac{25}{400} = \frac{1}{16}$

Bloque 2

Secuencia 10 Mínimo común múltiplo y máximo común divisor 1 (LT, Vol. II, págs. 12-21)

Tiempo de realización	5 sesiones
Eje temático	Número, álgebra y variación
Tema	Número
Aprendizaje esperado	Usa técnicas para determinar el mcm y el MCD.
Intención didáctica	Que los alumnos usen el mcm o el MCD de dos o más números al resolver problemas.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisuales** • *Descomposición en factores primos* • *Problemas que se resuelven con el mcm o con el MCD* **Informático** • *Factorización en números primos*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recurso audiovisual** • *Descomposición en factores primos, MCD y mcm*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Expresen un número compuesto como producto de factores primos. Distingan entre conjunto de divisores de un número, factores primos de un número y expresión como potencias de los factores primos de un número.
- Sesión 2. Identifiquen la relación entre los factores primos de un número y el valor de dicho número. Por ejemplo, que un factor 2 duplica el número y un factor 3 lo triplica. Usen la técnica de sacar mitad, tercera, etcétera, para encontrar los factores primos de un número.
- Sesión 3. Obtengan el máximo común divisor de dos o más números, y lo usen al resolver problemas.
- Sesión 4. Obtengan el mínimo común múltiplo de dos o más números y lo usen al resolver problemas.
- Sesión 5. Usen el mcm o el MCD de dos o más números al resolver problemas.

Acerca de...

La secuencia se inicia con el planteamiento de un problema en el que se trata de identificar, entre cuatro autos que corren alrededor de una pista, cuáles son los dos primeros que pasan juntos por la línea de salida. En ese momento no se espera que los alumnos resuelvan el problema, aunque sí pueden hacer algunas conjeturas. Por ejemplo, pueden pensar que son los automóviles A y B, porque van más rápido. En la sesión 4 se retoma este problema, cuando los alumnos tienen elementos suficientes para encontrar y justificar la solución.

De manera general, las dos primeras sesiones se enfocan en que los alumnos se familiaricen y logren distinguir con claridad cuál es el conjunto de divisores y de factores primos de un número. Que vean que el conjunto de divisores puede obtenerse al multiplicar dos o más factores primos. Que sepan usar la técnica para descomponer cualquier número en el producto de sus factores primos y que lo puedan expresar usando potencias.

Posteriormente, hay una sesión dedicada al máximo común divisor (MCD) y otra al mínimo común múltiplo (mcm), para culminar con el estudio simultáneo de ambos conceptos con la finalidad de analizar algunas diferencias y similitudes entre ellos.

Sobre las ideas de los alumnos

Algunos alumnos no logran identificar con suficiente claridad que las técnicas de factorización implican las mismas operaciones y, por lo tanto, conducen al mismo resultado, es decir, son expresiones equivalentes de un número. Por ejemplo, al factorizar el número 420, cualquiera de los procedimientos que se muestran a continuación es válido.

$$420 \div 2 = 210$$
$$210 \div 2 = 105$$
$$105 \div 3 = 35$$
$$35 \div 5 = 7$$
$$7 \div 7 = 1$$

420	2
210	2
105	3
35	5
7	7
1	

420

42   10

42   2 x 5

6 x 7   2 x 5

2 x 3 x 7   2 x 5

En los dos primeros procedimientos se hacen divisiones sucesivas hasta que el cociente es uno. La diferencia es que en el primero se dice: "420 entre 2", mientras que en el segundo, que es el usual, suele decirse: "Mitad de 420". No sobra recordar a los alumnos que dividir entre dos y obtener la mitad son operaciones equivalentes, pues en ambos procedimientos se van obteniendo directamente los factores primos.

En el tercer procedimiento se van haciendo descomposiciones "a modo" hasta que sólo hay factores primos. En los tres casos, los criterios de divisibilidad permiten agilizar la descomposición.

Muchos alumnos suelen confundir el mcm y MCD de dos o más números, probablemente porque sólo centran la atención en la primera palabra de cada expresión: mínimo, que los lleva a pensar en un número menor, y máximo, que los conduce a pensar en un número mayor. Es importante insistir en que consideren el sentido de los tres términos que forman cada expresión. Mínimo, el menor; común, que corresponde a varios números; múltiplo, que contiene a dichos números, por lo que debe ser igual o mayor que ellos. Un análisis similar y persistente es necesario para distinguir el MCD. Es importante que de esas reflexiones concluyan que en relación con el mcm siempre hay un múltiplo que es mayor que el mcm, mientras que respecto al MCD, no existe un divisor que sea mayor que el MCD.

Cuando se usan potencias para expresar el producto de factores primos de un número, por ejemplo, $300 = 2^2 \times 3 \times 5^2$, es importante aclarar a los alumnos que los factores primos son 2, 3 y 5, si bien el 2 y el 5 se repiten dos veces cada uno. El número $2^2 = 4$ no es número primo, por lo tanto no puede ser factor primo. Cuando se trata de dos o más números, por ejemplo,

$$300 = 2^2 \times 3 \times 5^2$$
$$504 = 2^3 \times 3^2 \times 7,$$

los factores primos comunes son 2 y 3, mientras que los no comunes son 5 y 7. En el caso del factor común 2, el de menor exponente es 2^2 y el de mayor exponente es 2^3, una comparación similar puede hacerse con el factor común 3.

¿Cómo guío el proceso?

Lea con los alumnos la sección "Para empezar" y, si es necesario, ayúdelos a entender el problema que se plantea. Pregúnteles, por ejemplo, "¿Cuál es el auto más rápido?"; "¿Cuál es el menos rápido?"; "En 54 segundos, ¿cuántas vueltas da a la pista el auto más rápido?"; "¿Cuál de los cuatro autos da tres vueltas a la pista en un minuto?". Pídales que hagan predicciones: "¿Cuáles son los primeros autos que pasarán juntos por la línea de salida después de que salen?". Coménteles que en la sesión 4 se verá quiénes acertaron.

Antes de resolver la tabla de la actividad 1 de la sesión 1, se sugiere hacer un ejercicio de manera grupal, para que los alumnos vean cómo se puede resolver la actividad. Uno de los alumnos dice un número cualquiera; otro dice el mismo número, pero como producto de dos factores; otro alumno menciona el mismo número, pero como producto de tres factores; y así continúan hasta que sólo quedan factores primos. Después de esta actividad, se espera que los alumnos no tengan problemas para completar la tabla.

La actividad 5 apunta a que los alumnos vean que el conjunto de divisores de un número y la factorización en primos de éstos, no son lo mismo. Por ejemplo:

- El conjunto de divisores de 300 es {1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 25, 30, 50, 60, 75, 100, 150, 300}.
- El conjunto de factores primos de 300 es {2 × 2 × 3 × 5 × 5}.

Comente que los factores primos de un número pertenecen al conjunto de divisores de ese número y que todos los demás divisores son el producto de dos o más factores primos. Es importante que, a partir de la factorización en primos de un número, los alumnos sean capaces de encontrar el conjunto de divisores. Por ejemplo, 30 = 2 × 3 × 5; 75 = 3 × 5 × 5.

En la actividad 1 de la sesión 2, observe si los alumnos se dan cuenta de que los factores primos de un número tienen relación con el valor del número. Por ejemplo, si se agrega un factor 2, el número se duplica; si se quita un factor 2, el número disminuye a la mitad. Si se agrega un factor 3, el número se triplica; si se quita un factor 3, el número se reduce a la tercera parte. Con estos ejercicios puede hacerles saber a los alumnos que existen otras formas de referirse a los múltiplos de los números de manera diferente: el cuádruple, el quíntuple... el nónuplo, el undécuplo... el céntuplo, etcétera.

Además de realizar las actividades 3 y 4 de esta misma sesión, procure que los alumnos practiquen las técnicas de factorización hasta familiarzarse con ellas. Es importante enfatizar la idea de que, por ejemplo, $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$, $24 = 2^3 \times 3$, $24 = 4 \times 6$ son algunas de las diferentes maneras de expresar el mismo número. Hay que centrar la atención en que tanto el 24 como las expresiones de productos de primos son diferentes formas de escribir los números, y que hacerlo de un modo o de otro depende de las estrategias necesarias para hacer un cálculo o resolver un problema.

En la sesión 3, lea con los alumnos el problema de la actividad 1 y ayúdelos a entenderlo. No se pretende que en este momento encuentren la solución, pero pueden sugerir alguna y ver si funciona. Por ejemplo, pueden ver que a lo largo de la tira de madera caben 18 cuadrados de 10 cm por lado, pero ¿caben también a lo ancho sin que sobre ni falte? Esta forma de acercarse a la solución les ayuda a entender el problema y les hace ver que es necesario hacer ajustes.

Después de algunas reflexiones en la actividad 1, sugiérales que pasen a la actividad 2. Observe si empiezan a darse cuenta de que la factorización en primos de 180 y 108 y el uso de los factores comunes es el camino indicado para llegar a la solución del problema. La tabla de factorización en números primos queda así:

Medidas del rectángulo	Factorización en números primos
Ancho = 108	2 × 2 × 3 × 3 × 3
Largo = 180	2 × 2 × 3 × 3 × 5

La intención de la actividad 2, inciso a), es que puedan ver lo siguiente:

$$\cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{3} \times \cancel{3} \times 3$$
$$\cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{3} \times \cancel{3} \times 5$$

Sólo se marcan los factores que se repiten en el otro número, y queda sin tachar un 3 porque, aunque es factor común, no se repite en el otro número. El producto de los factores tachados es 36, que es el MCD de 108 y 180 y corresponde a la mayor medida que pueden tener los cuadrados. Caben 5 a lo largo y 3 a lo ancho, 15 cuadrados en total de 36 cm de lado.

En la tercera columna de la tabla de la actividad 4 puede haber confusión. El encabezado dice: "Factores primos comunes de *a*, *b* y *c*", considerando que:

$$a = 588 = 2 \times 2 \times 3 \times 7 \times 7$$
$$b = 180 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$$
$$c = 700 = 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 7$$

Con base en lo anterior, los alumnos pueden pensar que el único factor primo común es 2, y tienen razón, pero dicho factor aparece dos veces en los tres números, de manera que los factores primos comunes son 2 y 2.

En la tabla de la actividad 5 se les piden los "Factores que producen el MCD"; aquí los alumnos se darán cuenta de que el resultado obtenido es el mismo que el de la columna 3 de la actividad 4. Es necesario que los alumnos hagan la relación entre los factores primos de *a*, *b* y *c* y los factores que producen el MCD, y que se den cuenta de que son los mismos valores.

En la actividad 6 es importante no decir a los alumnos que la solución del problema es el MCD de la longitud de los muros. Sólo hay que observar lo que hacen y orientarlos durante el ejercicio. En la actividad 7, es sustancial que haga preguntas que ayuden a los alumnos a reflexionar sobre los procedimientos que siguieron para encontrar los resultados.

En la sesión 4 se retoman las preguntas con las que se inició la secuencia, por lo que en la puesta en común deberá preguntar cuáles fueron las respuestas, para después contrastarlas con los resultados que obtengan.

En la actividad 1, inciso a), deben realizar el llenado de la tabla; si lo desean, pueden agilizar la tarea usando la calculadora. Al contestar la pregunta 1, inciso b), verán en la tabla que el menor tiempo en que dos autos coinciden es 72 segundos y corresponde a los autos A y C.

Este problema tiene una relación directa con el mcm de dos números, y es hasta la actividad 4 cuando se hace evidente. Mientras tanto, en las actividades 2 y 3 los alumnos podrán analizar con detalle el significado de este concepto.

Es muy probable que en la actividad 2, inciso a), haya respuestas diferentes. Se sugiere aprovechar esta cualidad de la pregunta para que los alumnos busquen criterios generales para responder. Pregunte: "¿Cuántos múltiplos comunes hay de 3 y 8?". Las respuestas pueden ser: "Muchos", "No se puede saber", "Infinidad", entre otras. Las preguntas: "¿Es 486 múltiplo común de 3 y 8?", "¿podrían encontrar un número de cuatro cifras que sea múltiplo común de 3 y 8?", pueden llevar a los alumnos a pensar que cualquier número que sea múltiplo de 24, que es el mcm de 3 y 8, es múltiplo común de 3 y 8.

Lo anterior se vincula con las preguntas 2, incisos e) y f), en las que se espera que los alumnos concluyan que expresiones como $2n$, $3n$, $4n$ son múltiplos de 2, 3 y 4, respectivamente, para cualquier valor entero de n.

Como se señaló anteriormente, en la actividad 4 de esta sesión se hace evidente que la solución del problema de los autos puede encontrarse al comparar el mcm de todas las parejas de números que se pueden formar con los que representan los tiempos: 18 y 20; 18 y 24; 18 y 28; 20 y 24; 20 y 28; 24 y 28. Al comparar el mcm de cada pareja de números, se ve que el menor es el que corresponde a 18 y 24, que es 72, mientras que el mayor corresponde a 18 y 28, que es 252.

En la actividad 1 de la sesión 5, si observa que los alumnos ya no tienen dificultad para calcular el mcm y el MCD de dos o más números mediante la descomposición de cada número en factores primos, puede mostrarles el procedimiento abreviado para calcular el mcm que, para el caso de 48, 56 y 64, consiste en lo siguiente:

$$\text{mcm} = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 7 = 2^6 \times 3 \times 7 = 1344$$

48	56	64	2
24	28	32	2
12	14	16	2
6	7	8	2
3	7	4	2
3	7	2	2
3	7	1	3
1	7	1	7
1	1	1	

mcm = $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 7 = 2^6 \times 3 \times 7 = 1344$

La simplificación consiste en obtener cada factor primo de los tres números al mismo tiempo, siempre que esto sea posible; cuando no, simplemente se baja el número, como en el caso del 7, que no tiene mitad. Con esta técnica no hay necesidad de seleccionar factores, todos forman parte del mcm.

En caso de que se muestre este procedimiento en la actividad 1, en la actividad 2 tendrán la oportunidad de usarlo, o seguir usando la descomposición de cada número. También puede sugerirles a los alumnos que usen uno de los dos procedimientos y, en seguida, comprueben con el otro.

Los 4 enunciados de la actividad 3 se prestan para que los alumnos discutan, sobre todo si algunos piensan que es verdadero y otros que es falso, sólo hay que animarlos a que digan el porqué de sus respuestas y a que den ejemplos que logren convencer a los que piensan diferente.

Observe lo que hacen en el problema 5, inciso a). Es probable que muchos obtengan el mcm de 21 y 35, que es 105. Este número no es la solución porque tiene tres cifras y la condición es que tenga cuatro. ¿El número que se busca tendría que ser múltiplo de 105? Ésta es la pregunta clave que probablemente algunos alumnos se plantearán, misma que los llevará a la solución al multiplicar 105×2, 105×3, 105×4, hasta que encuentren un número de cuatro cifras. Este número es 1050, que se obtiene al multiplicar 105×10, lo que significa que a la factorización del mcm = $105 = 3 \times 5 \times 7$, es necesario agregarle dos factores más, un 2 y un 5 para encontrar el número perdido.

Pautas para la evaluación formativa

Con la finalidad de verificar en qué medida se logra la intención didáctica que aparece en la ficha descriptiva, es necesario hacer un registro para cerciorarse de que los alumnos realizan lo siguiente:

- Expresan un número compuesto como producto de sus factores primos.
- Calculan el MCD de dos o más números.
- Calculan el mcm de dos o más números.
- Usan correctamente el MCD de dos o más números al resolver problemas.
- Utilizan correctamente el mcm de dos o más números al resolver problemas.

¿Cómo apoyar?

Con los alumnos que enfrenten dificultades al factorizar números, calcular el MCD o el mcm. Inténtelo con números de menor valor, con los cuales puedan hacer el cálculo mentalmente. Esto les ayudará a encontrar sentido a lo que buscan y al uso de operaciones escritas cuando el caso lo requiera. Es importante vincular los aprendizajes de la secuencia 1, "Múltiplos, divisores y números primos", y de la secuencia 2, "Criterios de divisibilidad", para que los alumnos relacionen lo que en ellas se estudió con lo que se estudia en esta secuencia.

¿Cómo extender?

Organice al grupo en equipos y pídales que cada equipo formule una pregunta relacionada con la factorización de números con el MCD o con el mcm o que inventen problemas que se resuelvan usando el mcm, o bien el MCD.

$$1\,890 = \underbrace{2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7}_{\text{Descomposición en factores con números primos}} = \overbrace{2 \times 3^3 \times 5 \times 7}^{\text{Descomposición usando potencias}}$$

Secuencia 11

Figuras geométricas y equivalencia de expresiones de segundo grado 2

(LT, Vol. II, págs. 22-29)

Tiempo de realización	4 sesiones
Eje temático	Número, álgebra y variación
Tema	Patrones, figuras geométricas y expresiones equivalentes
Aprendizaje esperado	Formula expresiones de segundo grado para representar propiedades del área de figuras geométricas y verifica equivalencia de expresiones, tanto algebraica como geométricamente.
Intención didáctica	Que los alumnos establezcan la equivalencia de expresiones algebraicas de segundo grado para representar el área de figuras geométricas y para obtener valores desconocidos y que factoricen expresiones algebraicas.
Vínculos con otras asignaturas	*Historia,* segundo grado, secuencia 12: "El poderío mexica". *Ciencia y Tecnología. Biología*, secuencia 1: "La biodiversidad mexicana"; secuencia 6: "El cuidado de la biodiversidad e identidad mexicanas".
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	Audiovisual • *Factores de una expresión algebraica de segundo grado* Informático • *Factorización de expresiones cuadráticas*
Materiales de apoyo para el maestro	Recursos audiovisuales • *Factorización de expresiones algebraicas de segundo grado* • *Expresiones equivalentes y no equivalentes*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

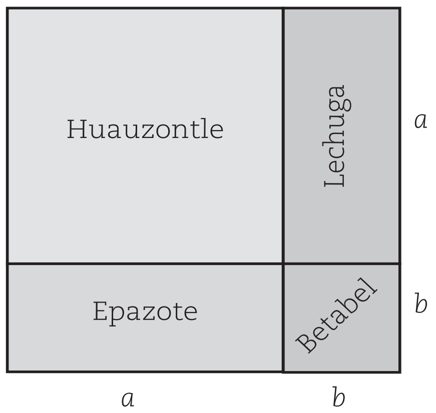
- Sesión 1. Usen expresiones algebraicas equivalentes para expresar áreas.
- Sesión 2. Expresen algebraicamente composiciones de áreas que representan binomios al cuadrado y binomios con un término común, y determinen la equivalencia de las expresiones encontradas.
- Sesión 3. Usen expresiones algebraicas para representar diversas configuraciones geométricas. Factoricen la expresión algebraica que representa el área de una configuración geométrica.
- Sesión 4. Comprueben la equivalencia de expresiones algebraicas que representan el área de figuras geométricas.

Acerca de...

Esta secuencia forma parte del trabajo que los alumnos han realizado desde el bloque 1 acerca de la equivalencia de expresiones algebraicas de segundo grado (también llamadas cuadráticas) a partir de las transformaciones algebraicas correspondientes o la sustitución de las literales iguales por un mismo valor.

Dado que la forma usual de las chinampas es rectangular, a partir del contexto, basado en lo que se cultiva en ellas y la gran biodiversidad de nuestro país, se plantean problemas para expresar áreas de terrenos de cultivo mediante expresiones algebraicas que sean equivalentes, esto es, que los alumnos encuentren diversas maneras de expresar, en estos casos, una misma área.

Entre los problemas que aquí se plantean, se recurre a la representación geométrica del trinomio cuadrado perfecto y del trinomio de la forma $x^2 + (a + b)x + ab$, a partir del producto de dos binomios. Estos conceptos serán de gran utilidad en las secuencias donde se resuelven ecuaciones cuadráticas.



En general, las secuencias que forman parte de este aprendizaje esperado se basan en la manipulación algebraica de los términos, esto es, en las operaciones algebraicas que hasta ahora se han estudiado, destacando principalmente la factorización de expresiones; también se relaciona con los contenidos estudiados en el tema de número, como la jerarquía de las operaciones y los conceptos de múltiplo y factor, así como con el cálculo de áreas de figuras geométricas.

Sobre las ideas de los alumnos

La descomposición en factores (factorización) se ha estudiado anteriormente en aritmética al encontrar las diferentes formas de expresar cualquier número como un producto de dos o más números. Ahora, los alumnos deberán recordar esas formas de expresar los números, además de las operaciones con potencias de la misma base y, en general, el uso de la jerarquía de las operaciones.

Tenga en cuenta que los alumnos pueden confundirse respecto a que, al estar representadas por literales, las medidas de los lados de las figuras que tienen los terrenos, en lugar de multiplicar, sumen para determinar su área. De ahí que el modelo de áreas de figuras sea el apoyo visual para que los alumnos comprendan que al multiplicar dos literales distintas, o incluso la misma, están considerando dos dimensiones (largo y ancho o base y altura).

¿Cómo guío el proceso?

Con la finalidad de que los alumnos encuentren relaciones entre los contenidos que estudian a lo largo de su preparación escolar, al realizar la lectura introductoria de la secuencia puede preguntarles si recuerdan la secuencia de Historia de segundo grado, donde se habla de las chinampas como una forma de agricultura de la cultura mexica; así como de lo visto en las secuencias de Biología de primer grado, donde estudiaron la biodiversidad en nuestro país, y de los cultivos y alimentos característicos de cada región.

En seguida se pide que los alumnos trabajen individualmente con el fin de analizar, tanto ellos como usted, los aspectos que aún puedan representar un obstáculo para avanzar en el estudio de este contenido. Puede suceder que los alumnos sumen exponentes de las literales iguales en un polinomio, por ejemplo en la actividad 1, inciso c), donde una expresión para representar el perímetro de la chinampa es: $(5x + 3x + x + 3x + x + 2x + 3x)$, y que ellos consideren que es equivalente a $18x^6$; o bien, en la actividad 1, inciso d), donde el resultado final sería $18x^2$, los alum-nos anoten $18x^4$, también porque sumaron los exponentes.

En la sesión 2, el problema 1 difiere de las representaciones que venían trabajando en la secuencia anterior, donde las áreas eran externas y colindantes. Ahora se trata de un área dentro de otra, elemento que será importante revisar con los alumnos en la respuesta del inciso c), pues puede suceder que obtengan el área de todo el cuadrado de lado *d* y la sumen con el área del cuadrado pequeño, sin darse cuenta de que si obtienen el área del cuadrado con lado *d*, ya están incluyendo el área verde. Así, las expresiones que pueden obtener en este inciso serían d^2, $e^2 + e(d - e) + d(d - e)$ o bien, $e^2 + d^2 - e^2$, si es que suman las respuestas a los dos incisos anteriores. En esta última expresión habrá que hacerlos reflexionar que e^2 se elimina, ya que aparece sumando y después restando, de ahí que sólo queda d^2.

El problema de la actividad 2 los llevará a una representación geométrica de lo que es el trinomio cuadrado perfecto y la posibilidad de escribirlo algebraicamente de diferente forma, lo que ayudará posteriormente a comprender su factorización:

$$\boxed{\begin{aligned}&(a+b)^2 = (a+b)(a+b)\\ &= a^2 + ab + ab + b^2\\ &= a^2 + 2ab + b^2\end{aligned}}$$

La misma situación surge con el problema de la actividad 3, donde seguramente las expresiones que muchos obtendrán para el área de toda la chinampa resulten de la suma de las cuatro áreas en que está dividida:

$$x^2 + ax + bx + ab = x^2 + (a+b)x + ab$$

Otros posiblemente digan que para obtener el área de todo el rectángulo basta con multiplicar $(x+a)(x+b)$, lo que ayudará posteriormente a comprender la factorización.

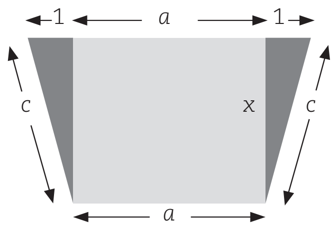
Lo anterior justifica la necesidad de que los alumnos comprueben siempre que las expresiones que obtienen son equivalentes, ya sea con la sustitución de las literales por valores numéricos, o bien mediante la transformación de una expresión en la otra.

En las actividades 1 y 2 de la sesión 3 se pide que los alumnos encuentren los factores (medidas de los lados) que permiten expresar el área de las figuras dadas, así como representar geométricamente el área de figuras, dadas las expresiones que representan su área, con el fin de que pongan en juego, de diferente forma, lo estudiado en las dos sesiones anteriores.

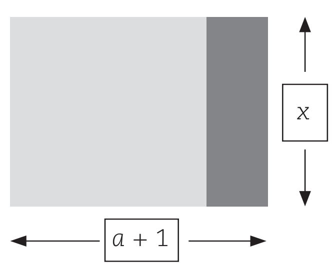
La actividad 3 se centra en la búsqueda de los factores que permiten obtener los trinomios dados, pero ahora ya no tienen el apoyo de la representación geométrica. Se trata ya de un trabajo meramente algebraico, por lo que es importante que usted les insista en que realicen los productos que obtengan para verificar que son equivalentes a las expresiones dadas. El recuadro incluido en la actividad 6 muestra la relación entre estos dos elementos.

Al final de esta sesión, se pide a los alumnos que investiguen acerca de los cultivos que se pueden tener en casa, tanto en zonas rurales, donde esta actividad se facilita, como en zonas urbanas, donde se ha promovido lo que se conoce como *azotea verde*, que consiste en tener diversos cultivos para el autoconsumo en la azotea de una vivienda o en un espacio que pueda ser destinado a ello. La finalidad de este punto es que apoye a los alumnos en la reflexión acerca de cómo contribuir, aunque sea en pequeña medida, a evitar los problemas que ocasiona la agricultura intensiva en la actualidad.

En la sesión 4, actividad 1, se plantea la transformación de algunas figuras geométricas en otras, a fin de que los alumnos relacionen primero las longitudes de los lados cuando las figuras se transforman, y después, que establezcan la equivalencia entre las expresiones algebraicas usadas para calcular sus áreas más fácilmente. Por ejemplo, en el caso del trapecio isósceles



que se transforma en un rectángulo, los alumnos deberán observar que los dos triángulos que forman parte de la base mayor son congruentes y que, acomodados a la derecha del rectángulo obtenido a partir de la base menor, forman un rectángulo cuya área es la misma que la del trapecio; también se puede ver que la altura del rectángulo es la distancia entre la base menor y la base mayor; por lo tanto, las longitudes buscadas son:



Y ellos partirán de aquí para establecer que las dos expresiones que anoten son equivalentes. Entre las que pueden surgir de ambas figuras, están:

$$\frac{(a + 2) + a}{2}x = (a + 1)x$$

Se podría solicitar a los alumnos que igualen las expresiones y realicen las operaciones necesarias para demostrar que ambas expresiones son equivalentes, ya que la forma más fácil, y a la cual seguramente recurrirán, será sustituir las literales por algún valor; sin embargo, los alumnos deben ejercitar la operatividad con expresiones algebraicas.

Pautas para la evaluación formativa

Con el fin de analizar qué conocimientos les quedan claros a los alumnos o en cuáles tienen dificultades, es importante observar los siguientes aspectos:

- Identifican los términos de cualquier expresión algebraica.
- Distinguen las operaciones que están indicadas en una expresión algebraica.
- Identifican algunas propiedades de las igualdades, por ejemplo: si dos términos son iguales a otro término, entonces los dos primeros son iguales entre sí; o que es posible cambiar el orden de los miembros sin que la igualdad se altere.
- Aplican correctamente las operaciones con exponentes.
- Utilizan la trasposición de términos en una igualdad.
- Escriben e identifcan las expresiones algebraicas equivalentes para expresar áreas y perímetros.

¿Cómo apoyar?

Un error muy frecuente de los alumnos es el manejo de exponentes. En general, confunden la suma de términos semejantes con el producto. Si observa que esto ocurre, será necesario volver a trabajar con ellos las secuencias relativas a las operaciones con exponentes de la misma base, a fin de que recuerden que cuando dos o más términos tienen la misma literal, pero se están sumando o restando, sólo se opera con los coeficientes y la literal se queda igual. Puede recurrir también a lo que ellos saben acerca de cómo comprobar la igualdad de expresiones, dando un mismo valor a las literales que son iguales. Por ejemplo, si escriben esto:

$$(5x + 3x + x + 3x + x + 2x + 3x) = 18x^6,$$

dígales que sustituyan la literal por 2, por ejemplo, y al realizar las operaciones, del lado izquierdo obtendrán 36, mientras que del lado derecho será 1152.

En caso de que les falle la trasposición de términos, recurra a la balanza como estrategia didáctica para que comprendan que lo que hagan de un lado de la igualdad, deberán hacerlo también del otro para mantener el equilibrio (la igualdad). Una vez que comprendan y practiquen esta estrategia, les será más fácil entender las recetas: "Si está sumando, pasa restando", "Si está multiplicando, pasa dividiendo", etcétera.

¿Cómo extender?

La factorización de expresiones algebraicas no es un tema sencillo, por lo que se sugiere que proponga ejercicios de factorización como los siguientes:

$$4x^4 + 6x^2 + 10 =$$

$$9a^3 + 3a^2 =$$

$$12y - 4y^4 + 6y^2 + 16 =$$

$$2x^2 + 100 =$$

$$16a^4 - 20a^2b + 20a^2b - 25b^2 =$$

$$25y^2 - 30y =$$

$$36y^2 - 48yz + 48yz - 64z^2 =$$

$$x^2 + 2x + 4 + 2x =$$

Se recomienda hacer una puesta en común que permita analizar las expresiones anotadas por los alumnos, que pueden ser diversas, y comprobar si son equivalentes. Si no lo son, analicen si el error es trivial o si es reflejo de algún concepto que no ha quedado claro.

Secuencia 12 Funciones 2

(LT, Vol. II, págs. 30-39)

Tiempo de realización	5 sesiones
Eje temático	Número, álgebra y variación
Tema	Funciones
Aprendizaje esperado	Analiza y compara diversos tipos de variación a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica, que resultan de modelar situaciones y fenómenos de la física y de otros contextos.
Intención didáctica	Que los alumnos analicen las relaciones funcionales con variación cuadrática para conocer sus propiedades y características, poder resolver problemas y obtener la expresión algebraica de ese tipo de relación funcional.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisual** • *Distancia de seguridad* **Informático** • *Análisis de gráficas y expresiones algebraicas de funciones cuadráticas*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recursos audiovisuales** • *Relaciones funcionales con variación cuadrática* • *Interpretación de gráficas con secciones curvas*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Analicen la representación tabular de una variación cuadrática para determinar la representación gráfica que corresponde al crecimiento observado.
- Sesión 2. Comparen modelos de crecimiento cuadrático a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica, que resultan de modelar situaciones de la vida real.
- Sesión 3. Verifiquen que la representación algebraica de un fenómeno de la física corresponde a la situación que representa, así como a los datos de su tabla y de su representación gráfica.
- Sesión 4. Profundicen en las nociones de dependencia y razón de cambio como características de una relación de variación funcional.
- Sesión 5. Analicen cómo cambian la representación algebraica y gráfica cuando varía una de las condiciones, e identifiquen qué representa cada término de dicha expresión.

Acerca de...

Las gráficas de funciones sirven, entre otras cosas, para analizar cualitativa y cuantitativamente las relaciones de dependencia entre dos conjuntos de cantidades y el tipo de variación que existe entre éstas. Asimismo, al ser la representación de un modelo, un problema o fenómeno cercano o significativo para los alumnos, su análisis puede comenzar por aspectos cualitativos de la variación y derivar en soluciones cuantitativas o de otro tipo de representación (tabular o algebraica).

Desde la primaria, los alumnos han estudiado la relación que hay entre dos conjuntos de cantidades; en la secundaria han profundizado en el estudio de las relaciones como procesos de variación, y en particular se ha hecho hincapié en los procesos de variación funcional con situaciones lineales y de proporcionalidad directa e inversa. Además, el estudio de los fenómenos de variación se ha hecho con diferentes representaciones matemáticas.

En la secuencia 5 se analizaron situaciones que permiten identificar si la relación entre las cantidades corresponde a una variación funcional y si es lineal o cuadrática, a partir de la lectura, la interpretación, la elaboración y el análisis de gráficas y tablas. Es el antecedente directo del estudio que se va a desarrollar en esta secuencia. Asimismo, los conceptos y procedimientos estudiados en las secuencias de figuras geométricas y de equivalencia de expresiones algebraicas, así como las secuencias sobre ecuaciones, son antecedentes relevantes para aprender lo que se propone en esta secuencia.

Sobre las ideas de los alumnos

Los alumnos saben que, cuando hay dos conjuntos de valores y se comparan los elementos de uno con respecto al otro, puede ocurrir que tengan una relación de dependencia lineal, o bien directa o inversa, en la que es posible identificar una constante. También puede suceder que no tengan relación alguna.

En la secuencia 5 conocieron algunas situaciones que cumplen con una relación de variación que aumenta de manera diferente a la lineal. Tal vez, algunos alumnos, al no encontrar un valor constante entre cada par de valores, consideren que no hay una relación de variación funcional, pero justamente las situaciones que se presentan en esta secuencia tratan, particularmente, de dos casos de relación funcional cuadrática con la intención de que los alumnos se concentren en identificar y analizar las características de este tipo de variación, en las cuales no se puede identificar una constante.

Un aspecto importante es que los alumnos comprendan los conceptos de función y ecuación, así como sus diferencias, lo cual se desarrolla en las secuencias referentes a funciones, ecuaciones y expresiones algebraicas equivalentes.

¿Cómo guío el proceso?

Lea y comente con los alumnos la sección "Para empezar" con el fin de identificar la familiaridad y las ideas que tienen los alumnos respecto al contexto de la secuencia. Las preguntas son sobre todo para entender el fenómeno y hacer conciencia de la utilidad de los teléfonos celulares, pero también para alertar sobre la importancia de no distraerse con estos aparatos al conducir.

A lo largo de la secuencia se pretende que los alumnos relacionen las distintas representaciones de las funciones con las situaciones y los fenómenos descritos en ella.

La actividad 1 de la sesión 1 centra el trabajo en el análisis del aumento del número de celulares que se ha dado en los últimos años por cada 100 habitantes. Se pretende que, a partir de observar este crecimiento, los alumnos puedan determinar o aproximar los valores de los años que no aparecen en la tabla a partir de la información dada. Los primeros dos incisos están enfocados en que comparen el crecimiento que hubo de un año a otro. Observe qué razonamientos usan para encontrar los valores que se piden en el inciso c). Vale la pena analizar en un primer momento qué significa que haya *n* celulares por cada 100 habitantes para contestar el resto de los incisos de esta actividad. En las actividades 2 y 3 conviene que no sólo comparen los valores de la tabla con los de la gráfica, sino también que, una vez que los alumnos hayan dado sus razones, propicie la discusión con preguntas como: "¿Por qué no es posible que la gráfica esté compuesta por dos segmentos de recta?"; "¿El comportamiento del primer año al quinto es lineal?"; "¿Cómo podemos mostrar que no hay un crecimiento lineal?". Aclarar lo anterior les permitirá afrontar de lleno las actividades de la sesión 2.

Pregúnteles si recuerdan cómo se comporta una variación lineal y cómo se diferencia del

Cartel de una campaña vial que busca evitar accidentes.

comportamiento de una variación cuadrática; pídales que escriban este análisis de las gráficas en su cuaderno.

La actividad 1 de la sesión 2 comienza con la intención de reforzar la comprensión de la relación funcional que se presenta y cómo se habla no del total de celulares, sino de cuántos hay por cada 100 habitantes. Por otro lado, se solicita que identifiquen la expresión algebraica que modela el fenómeno en estudio. Para esto, los alumnos pueden elegir varias estrategias. Si observa que afrontan dificultades para hacerlo o lo hacen de manera azarosa, sugiera que examinen los valores que conocen, por ejemplo, ¿qué pasa en cada expresión cuando sustituyen algún valor de la tabla?, ¿qué resultado obtienen?, ¿esto cómo les ayuda a desechar o elegir las expresiones? Otra opción es que grafiquen cada una de las expresiones y la comparen con la gráfica de la sesión 1 para seleccionar la representación algebraica correspondiente a la tabla y la gráfica vistas anteriormente. En la actividad 2 se espera que, a partir de la expresión algebraica elegida en la actividad anterior, completen la tabla haciendo una proyección de los resultados del estudio anterior. Cuando los alumnos encuentren los resultados, comente con ellos lo que significa que a partir del año 2019 haya más de 100 teléfonos celulares por cada 100 habitantes y por qué eso tiene un sentido lógico en la realidad; además, pregunten por qué es importante analizar esto desde el punto de vista de la ecología y del cuidado del medio ambiente. En la actividad 3 deberán trazar la gráfica correspondiente. En realidad, ya cuentan con todos los elementos para hacerla, pues tienen la información de la sesión 1 (incluso la gráfica) y la tabla que acaban de elaborar. Para la actividad 4, promueva una puesta en común centrada en hacer una conexión entre las tres representaciones: los datos que aparecen en las tablas, las gráficas y la expresión algebraica. Para ello puede preguntar: "¿Con cuál representación es más fácil ver cómo se comporta el fenómeno?"; "¿Cuál representación te ayuda a obtener cualquier valor en el tiempo?"; "¿Cuál les permite hacer una mejor proyección a futuro?”. Comente que la gráfica representa los valores de la tabla y que éstos están dados por la expresión algebraica. También conviene que analicen el fenómeno en sí. Para eso, puede plantear preguntas del tipo: ¿por qué creen que el crecimiento se comporta de esa manera?, ¿este crecimiento acabará en algún momento?, ¿creen que siempre habrá crecimiento?

La actividad 5 tiene como propósito analizar otra gráfica que representa el mismo fenómeno, pero en Europa. El alumno debe completar, a partir de la gráfica, una tabla de un conjunto de datos y responder preguntas comparando ambos estudios. Considere que los resultados pueden ser variables por la manera en que cada uno lee la gráfica. Conviene que ayude a los alumnos a dar significado a los resultados numéricos que se obtienen. Por ejemplo, en el inciso e); la respuesta es 163.7 teléfonos celulares por cada 100 habitantes en 2025. Es importante que el alumno dé un significado a esta respuesta con preguntas como: "¿Qué quiere decir ese número?"; "¿Tiene sentido ese resultado en la realidad?"; "¿Por qué es decimal y no un entero positivo?".

La sesión 3 se compone de cinco actividades. En la primera se debe entender el fenómeno de la distancia óptima para evitar accidentes. Para lograrlo; se proporciona información sobre la distancia de seguridad al conducir automóviles y se formulan cuestionamientos sobre la relación entre la velocidad del vehículo y la distancia de seguridad al frenar el automóvil. En la segunda actividad se incluye información sobre cómo calcular la distancia de seguridad para evitar accidentes tomando en cuenta el espacio que se necesita, el tiempo para reaccionar y la velocidad del automóvil.

Con la “regla de oro” que se proporciona en la campaña vial para evitar accidentes, se pide en la actividad 3 que se complete una tabla para distintas velocidades y la distancia de seguridad asociada a ellas. Con esos datos se intenta que los alumnos comprendan cómo se obtiene una expresión algebraica que representa la situación que relaciona la velocidad del automóvil con la distancia de frenado. Para ello se muestran tres formas de representar algebraicamente la situación descrita. Conviene que analice con sus alumnos cada una de las expresiones, y que vean las similitudes y diferencias.

Observe con ellos qué significa algebraicamente “quitarle el cero” a los números que tienen que multiplicar entre sí.

Considere que la respuesta correcta al inciso c) es $\left(\frac{x}{10}\right)^2 = \left(\frac{x^2}{100}\right)$, por lo que los alumnos tienen que determinar en el inciso d) que las expresiones de Ramón y Sofía son las correctas y además son equivalentes.

La gráfica de la actividad 5 les permite apreciar cómo a mayor velocidad se necesita más distancia para frenar sin provocar un accidente.

En la primera actividad de la sesión 4 se introduce una función cuadrática con coeficientes decimales, y por medio de ésta se relaciona la velocidad de un automóvil con la distancia de seguridad. Conviene que se tenga en cuenta en todo momento que se trata del mismo fenómeno, pero usando otro modelo. El primero se utilizó para una campaña de concientización, así que debía ofrecer una manera sencilla de calcular la distancia en función de la velocidad, para usarla cotidianamente. Al emplear la expresión algebraica de esta sesión, se quiere tener más precisión entre el fenómeno físico y el modelo matemático que lo representa. Para graficar, se solicita al alumno que complete antes los datos de la tabla correspondiente. Es importante que comente a los alumnos que las 2 expresiones representan lo mismo, pero que están descritas con diferentes literales. Esto significa que uno puede nombrar las variables como guste, siempre y cuando se sepa que representan lo mismo.

En la actividad 2, los alumnos deben graficar la función de la distancia de seguridad respecto a la velocidad usando la expresión funcional y los datos obtenidos en la actividad anterior.

La actividad 3 se orienta hacia la comparación de las dos gráficas anteriores, donde podrán apreciar su semejanza y observar que, a pesar de la sencillez de la primera, cumple el cometido de determinar la distancia de frenado seguro.

La primera actividad de la sesión 5 tiene como propósito que los alumnos identifiquen los términos de la expresión funcional con la distancia de frenado, y ahora con el agregado de la distancia de reacción dando la función:

$D(v) = 0.007v^2 + 0.2v$, es decir, se establece la relación entre la distancia de frenado y el uso del teléfono celular mientras se maneja. Conviene que verifique con los alumnos qué significa reaccionar tres y seis veces más tarde, dado que se les pide escribir las expresiones algebraicas de las dos situaciones descritas. En el inciso b), cuando grafiquen las tres situaciones, compare y analice con los alumnos las implicaciones de estar distraído cuando se maneja, sobre todo a altas velocidades.

Es conveniente que en la puesta en común de la actividad 2 comenten cómo, al variar los factores, cambian las gráficas. Vean qué es lo que se modifica, así cómo la manera en que varía la distancia de frenado en función de la velocidad. Por ejemplo, puede ver cómo se modifica la distancia según la distracción que se presenta a la misma velocidad. Es importante reflexionar que no sólo por reducir la velocidad se reduce el riesgo, sino que también hay que reducir las distracciones.

Pautas para la evaluación formativa

Con la finalidad de verificar en qué medida se va logrando la intención didáctica que aparece en la ficha descriptiva, se requiere hacer un registro para cerciorarse de que los alumnos realizan lo siguiente:

- Distinguen claramente cuál representación gráfica se corresponde mejor con el crecimiento observado.
- Logran hacer la conexión que hay entre las representaciones tabular, gráfica y algebraica, que resultan de modelar situaciones de crecimiento cuadrático.
- Logran vincular o explicar el fenómeno a partir de las distintas representaciones.
- Ante las relaciones funcionales que se presentan, determinan cuál variable es la independiente y cuál es la dependiente.

¿Cómo apoyar?

Si observa que algunos alumnos tienen dificultades para seleccionar la gráfica que corresponde a los datos de la tabla de la actividad 2 de la sesión 1, puede sugerir que identifiquen cada par ordenado de la tabla en ambas gráficas; en aquella en la que ubiquen todos los puntos determinados por los pares ordenados será la que le corresponde.

Esta sugerencia también la puede hacer si observa que tienen dificultad para trazar la gráfica de la actividad 3 de la sesión 2. De esta manera, puede ayudar a los alumnos a reconocer algunas de las características de la relación funcional, por ejemplo, si se tienen dos conjuntos de valores, uno de ellos puede ser el de los valores independientes, ubicados por lo general en el eje X, y los otros, los dependientes, ubicados en el eje Y.

¿Cómo extender?

Si tiene acceso a una computadora con internet, puede conectarse con alguno de los graficadores en línea gratuitos, por ejemplo Geogebra y Wolfram Alpha, que le permitirá hacer ampliaciones de las gráficas y modificar los parámetros para ver las implicaciones de los cambios. Asimismo, revise algunos recursos en internet o simulaciones para explicar o comprender mejor el fenómeno. Por ejemplo, puede ver el video que se encuentra en https://www.youtube.com/watch?v=fB9_id8BhU0

Secuencia 13 Ecuaciones cuadráticas 2

(LT, Vol. II, págs. 40-49)

Tiempo de realización	5 sesiones
Eje temático	Número, álgebra y variación
Tema	Ecuaciones
Aprendizaje esperado	Resuelve problemas mediante la formulación y solución algebraica de ecuaciones cuadráticas.
Intención didáctica	Que los alumnos usen ecuaciones cuadráticas al resolver problemas por el método de factorización.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisuales** • *Ecuaciones cuadráticas incompletas* • *Ecuaciones cuadráticas por factorización* **Informáticos** • *Factorización de ecuaciones cuadráticas incompletas* • *Ecuaciones cuadráticas por factorización*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recursos audiovisuales** • *Aspectos a considerar para resolver ecuaciones cuadráticas incompletas* • *Recomendaciones iniciales para el estudio de ecuaciones cuadráticas*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Resuelvan ecuaciones cuadráticas de la forma $ax^2 + c = 0$, para solucionar problemas.
- Sesión 2. Usen ecuaciones de la forma $ax^2 + bx = 0$ para resolver problemas.
- Sesión 3. Utilicen el método de factorización para resolver ecuaciones de la forma $x^2 + bx + c = 0$ al solucionar problemas.
- Sesión 4. Identifiquen las raíces de una ecuación de segundo grado cuando ésta se expresa de la forma $(x + p)(x + q) = 0$ y sepan formular una ecuación de segundo grado dadas las dos raíces.
- Sesión 5. Identifiquen las dos raíces de una ecuación de segundo grado en la representación gráfica de la función de la cuál se obtiene y formulen la ecuación correspondiente.

Acerca de...

En la secuencia 4, los alumnos comenzaron a formular ecuaciones de segundo grado para resolver ciertos problemas y usaron métodos intuitivos para llegar a la solución. Esta secuencia se desarrolla al considerar la complejidad de las ecuaciones y, paralelamente, los métodos que suelen utilizarse para resolverlas. Se inicia con las ecuaciones incompletas, de la forma $ax^2 + c = 0$ y, $ax^2 + bx = 0$, y culmina con las ecuaciones completas, de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, cuya resolución se lleva a cabo por el método de factorización y por la propiedad del producto cero.

4. Anoten lo que falta en la tabla.

Ecuación factorizada	Ecuación desarrollada	Raíces	
$(x - 1)(x + 2) = 0$			
	$x^2 - x - 2 = 0$		
		$x_1 = 4$	$x_2 = 3$
	$x^2 - 6x = 0$		
$(x - 3)(x + 4) = 0$			
	$x^2 + 5x - 14 = 0$		
		$x_1 = 7$	$x_2 = -2$

Otro aspecto que se destaca en la secuencia es el significado de las raíces, tanto en el contexto de los problemas como en el algebraico. En el primer caso se cuestiona que, en ciertos problemas sobre números, las dos raíces de la ecuación sean solución del problema, mientras que en otros, por ejemplo los relacionados con edades o con medidas, sólo una de las raíces es solución del problema.

En el segundo caso, el significado de las raíces se asocia a la representación gráfica de la ecuación, específicamente con las abscisas de los puntos donde la curva corta al eje X.

Sobre las ideas de los alumnos

Algunas de las nociones que los alumnos han construido y sirven de sustento para el estudio de esta secuencia, son las siguientes:

- Una ecuación se puede simplificar al aplicar la misma operación en los dos miembros de la ecuación, como se ilustra en la siguiente tabla.

Ecuación inicial	Qué se hace	Ecuación final
$2x^2 - 50 = 0$	Se suma 50 en ambos miembros de la ecuación.	$2x^2 = 50$
$2x^2 = 50$	Ambos miembros se dividen entre 2.	$x^2 = 25$
$x^2 = 25$	Se extrae la raíz cuadrada en ambos miembros.	$x_1 = 5$ $x_2 = -5$

- Un número es factor común de dos o más números si los divide exactamente. Por ejemplo, 3 es factor común de los números 6, 12 y 18. Adicionalmente, el mayor factor común o máximo común divisor de 6, 12 y 18, es 6. Esta misma idea es válida para las expresiones algebraicas. Por ejemplo, $2x$ es factor común de $4x$ y de $8x^2$, porque divide a ambos en forma exacta: $\frac{4x}{2x} = 2$, $\frac{8x^2}{2x} = 4x$. El mayor factor común o máximo común divisor de $4x$ y $8x^2$, es $4x$. Una idea previa que entra en juego en esta parte es la de cociente de potencias de la misma base que se estudió en segundo grado.
- La propiedad del producto cero es fundamental en el desarrollo de esta secuencia y para muchos alumnos no es trivial. Dada la ecuación

$$(x - 3)(x + 5) = 0,$$

en la que hay una multiplicación de dos factores cuyo resultado es cero, necesariamente $x - 3 = 0$, o bien, $x + 5 = 0$, de donde resulta que si $x - 3 = 0$, entonces $x = 3$. Si $x + 5 = 0$, entonces $x = -5$; por lo que las raíces de la ecuación son 3 y -5.
- Cuando en una ecuación como

$$x^2 - 3x - 180 = 0$$

se requiere encontrar dos números que sumados den -3 y multiplicados den -180, los alumnos pueden echar mano de la factorización en primos de $180 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$. Si se agrupan convenientemente estos factores, por un lado $2 \times 2 \times 3$, y por otro 3×5, en tales productos (12 y 15) hay una diferencia de 3, que es la que se requiere. Lo que resta es asignar los signos adecuados, -15 y 12, para que la suma sea -3 y el producto -180.

¿Cómo guío el proceso?

Se sugiere leer con los alumnos la sección "Para empezar", que aporta algunos datos sobre el desarrollo del lenguaje algebraico. Puede preguntarles cuántos años pasaron desde la época en que vivió Diofanto hasta la época de Francisco Vieta, para que tengan una idea acerca de la lentitud de los avances matemáticos. En estos casos, también sirve ubicar en un mapamundi los lugares donde vivieron Diofanto, Al Juarismi y Vieta.

En la sesión 1, es probable que en el inciso a) los alumnos usen literales distintas para representar un número cualquiera. Aproveche esto en el inciso c) para enfatizar la idea de que, efectivamente, es válido usar cualquier literal, aunque se acostumbra usar las últimas letras del alfabeto para representar números desconocidos o incógnitas.

Al comparar las ecuaciones del inciso c), es muy importante que a los alumnos les quede claro que toda ecuación relaciona dos expresiones cuyo valor es el mismo, en este caso $3x^2$ y 108; ambas valen 108, y por ello se pueden relacionar con el signo *igual*. Se seguirá insistiendo sobre esta idea más adelante.

Observe lo que hacen en el inciso d). Es probable que algunos sigan usando el procedimiento de ensayo y error, pero también se espera que intenten simplificar la ecuación al efectuar las mismas operaciones en ambos miembros, como lo hicieron con las ecuaciones lineales. Lo nuevo en este caso es el uso de la raíz cuadrada como operación inversa de elevar al cuadrado. No se los diga, pueden seguir usando el ensayo y error; al final de la sesión podrán ver la explicación. Es necesario que verifiquen que en este caso las dos raíces de la ecuación son solución del problema porque $3(6)^2 = 108$ y $3(-6)^2 = 108$.

En el inciso a) de la actividad 2, observe si los alumnos identifican las dos expresiones que representan el área del círculo. Una de ellas es la fórmula: πr^2, que en este caso puede escribirse: $3.14r^2$, la otra es el área conocida, 153.86 cm^2, de manera que la ecuación es $3.14r^2 = 153.86$.

En contraste con el problema de la actividad 1, se pretende que los alumnos puedan determinar por sí mismos que, en éste, sólo la raíz positiva es solución del problema, puesto que se trata de una medida de longitud.

En la actividad 1 de la sesión 2, nuevamente se retoma la idea de relacionar dos expresiones que tienen el mismo valor para formular la ecuación. En este caso, uno de los valores es la suma de las áreas de los dos cuadrados ($2x^2$), y el otro es el área del rectángulo ($6x$). Conviene hacer notar que en este caso ambos valores se desconocen porque no se sabe el valor de x.

En el inciso d) de la actividad 1, se espera que por ensayo y error encuentren el número que satisface la ecuación. En seguida, en el inciso e), verifiquen si el número encontrado cumple con las condiciones del problema.

La actividad 2 contiene dos aspectos que son fundamentales en lo que resta de la secuencia. El primero se refiere a la factorización de expresiones algebraicas, en este caso la factorización del primer miembro de la ecuación $2x^2 - 6x = 0$. Se trata de encontrar un término que sea factor común de $2x^2$ y de $6x$, usando la misma idea que los alumnos ya tienen de factor común: esto es, el número que divide exactamente a dos o más números y, en este caso, se trata de buscar la expresión que divide exactamente a dos o más expresiones algebraicas. ¿Qué expresión divide exactamente a $2x^2$ y a $6x$? La respuesta podría ser 2, porque $\frac{2x^2}{2} = x^2$ y $\frac{6x}{2} = 3x$. También podría ser x, porque $\frac{2x^2}{x} = 2x$ y $\frac{6x}{x} = 6$. También podría ser $2x$, porque $\frac{2x^2}{2x} = x$, y $\frac{6x}{2x} = 3$, ¿cuál de los tres factores conviene tomar? El que permite simplificar más la expresión, lo que los alumnos conocen como mayor factor común o máximo común divisor (MCD). De manera que la mejor forma de factorizar la ecuación es $2x(x - 3) = 0$. El primer factor ($2x$) es el mayor factor común, y el segundo factor ($x - 3$) es el binomio formado por los cocientes de dividir cada término entre el mayor factor común.

El segundo aspecto se refiere a la propiedad del producto cero, según la cual, si el producto de los dos factores es cero, por lo menos uno de ellos debe ser igual a cero. Esta propiedad es la que permite resolver ecuaciones de este tipo una vez que están factorizadas. Si suponemos que el primer factor es igual a cero, obtenemos la ecuación $2x = 0$, en la que el valor de x es 0 y ésta es la primera raíz de la ecuación cuadrática. Si suponemos que el segundo factor es igual a cero, obtenemos la ecuación $x - 3 = 0$, por lo que $x = 3$ y ésta es la segunda raíz de la ecuación cuadrática.

En el inciso c) de la actividad 4 es posible que surjan ecuaciones equivalentes. Por ejemplo, $x(x - 5) = 0$ y $2x(x - 5) = 0$. Ambas ecuaciones tienen como raíces 0 y 5, por lo que son ecuaciones equivalentes.

En la actividad 1 de la sesión 3, se espera que los alumnos logren formular la ecuación $x(x + 1) = 182$. Esta ecuación les permitirá encontrar, por ensayo y error, dos números consecutivos positivos que multiplicados dan 182. Sin embargo, hay otros dos números consecutivos negativos cuyo producto es 182. Para que los alumnos sepan cómo encontrarlos, en la actividad 2 se desarrolla y explica el procedimiento para resolver, por el método de factorización, la ecuación, $x^2 + x - 182 = 0$, que es equivalente a la que se formula en la actividad 1.

Es probable que, además de la explicación que hay en el libro del alumno, en las actividades 2 y 3 sea necesario agregar otros ejemplos para resolver las dudas que surjan. Por ejemplo, les puede proponer $x(x + 7) = -12$ cuyas raíces son -4 y -3.

Analice con los alumnos la actividad 4 y ayúdelos a entender que los dos números buscados pueden ser: dos positivos, dos negativos, o uno positivo y otro negativo, en función de los signos que tengan los términos de la ecuación.

Si algunos alumnos tienen dificultad para resolver las ecuaciones y no se les ocurre hacer las multiplicaciones de la segunda columna para encontrar a qué expresión son equivalentes, sugiéralo usted.

Uno de los propósitos de la actividad 1 de la sesión 4 es mostrar a los alumnos que una misma ecuación, en este caso $x(x + 7) = 294$ o bien $x(x - 7) = 294$, puede servir para resolver diferentes problemas, además de fortalecer las ideas que se han venido trabajando en las sesiones anteriores, como que, en ciertos casos, sólo una de las raíces es solución del problema.

Con base en lo que se ha estudiado, observe, en la actividad 3, si los alumnos son capaces de identificar las raíces de la ecuación en la forma factorizada, y de expresar ésta en la forma canónica $x^2 + 6x + 9 = 0$. En el inciso d) de la actividad 3 se pretende que los alumnos puedan explicar que las raíces de una ecuación cuadrática, cuando se presenta factorizada, son los opuestos de los términos no comunes de los factores. En la tabla de la actividad 4 se verá si los alumnos son capaces de transitar de la ecuación cuadrática en su forma canónica, $x^2 + bx + c = 0$, a las raíces de la ecuación, pasando por la forma factorizada, así como de recorrer el camino inverso, ir de las raíces a la forma canónica, pasando por la forma factorizada.

En la actividad 5 se analiza el caso especial del trinomio cuadrado perfecto, cuya factorización es un binomio elevado al cuadrado, y la solución una raíz doble o dos raíces iguales, aunque suele decirse que tienen una solución doble. Al pasar de la forma factorizada a la canónica, es conveniente que los alumnos efectúen el producto en vez de memorizar la regla que fácilmente se olvida.

En el inciso b) de la actividad 7 observe si los alumnos logran pensar que si la condición es que la ecuación tenga una solución, debe ser un trinomio cuadrado perfecto, y para que lo sea, k debe valer el doble de la raíz cuadrada de 16 multiplicada por 1, es decir, $2 \times 4 \times 1 = 8$. Para el inciso c), probando con algunos casos particulares, algunos alumnos encontrarán, por ejemplo, que k debe valer 10, pues dos números que sumados dan 10, y multiplicados dan 16, son 8 y 2, y las raíces serían -8 y -2. Es poco probable, pero podría suceder, que algunos alumnos dieran una respuesta más general: "El valor de k debe ser mayor que 8". De aquí podrían concluir que en el inciso d) el valor de k debe ser menor que 8. En la siguiente secuencia sobre ecuaciones cuadráticas podrán justificar estas respuestas con ayuda del discriminante.

Al estudiar las ecuaciones de primer grado, los alumnos observaron que la solución de una ecuación se puede ver en la gráfica de la función de la que se obtiene, como la abscisa del punto donde la recta corta al eje X. Dicho de otra manera, es la abscisa del punto en el que la ordenada vale cero.

La actividad 1 de la sesión 5 retoma estas ideas para las ecuaciones cuadráticas. En este caso, se tiene una curva (parábola) en vez de una recta, y la gráfica corresponde a una función cuadrática. Las raíces de la ecuación cuadrática asociada a la función son las abscisas de los puntos donde la curva corta al eje X, es decir, las abscisas de los puntos donde la ordenada vale cero. Una vez que los alumnos logren identificar las raíces, lo demás es algo ya hecho en otras actividades de esta secuencia.

Observe si logran apreciar en la actividad 2 que todas las gráficas tienen una raíz igual a cero y otra distinta de cero, esto puede llevarlos a pensar que se trata de ecuaciones incompletas de la forma $ax^2 + bx = 0$. Es interesante ver cómo los alumnos resuelven la tabla de la actividad 3, donde se espera que comiencen por identificar las raíces y, con base en éstas, completen lo demás. Sólo hay una gráfica que no corta al eje X, por lo tanto no tiene raíces en los números en-

2. Con base en la gráfica que se muestra, completen la tabla.

Color	Raíces	Ecuación factorizada	Ecuación desarrollada
Azul			
	$x_1 = 0; x_2 = -\frac{1}{2}$		
		$x(x - 3) = 0$	
			$x^2 + 2x = 0$

teros o racionales. Si lo cree conveniente, puede decirles que la ecuación es $x^2 + 8 = 0$, que es una ecuación incompleta de la forma $ax^2 + c = 0$, que no tiene solución.

Para responder la actividad 3, inciso b), observen que la gráfica q sólo toca al eje X en un punto, lo que significa que sólo tiene una raíz, o bien, una raíz doble.

Pautas para la evaluación formativa

Con la finalidad de verificar en qué medida se va logrando la intención didáctica que aparece en la ficha descriptiva, es necesario hacer un registro para cerciorarse de que los alumnos realizan lo siguiente:

- Resolver ecuaciones de la forma $ax^2 + c = 0$, y de utilizarlas al resolver problemas.
- Resolver ecuaciones de la forma $ax^2 + bx = 0$, y de utilizarlas al resolver problemas.
- Resolver problemas que implican usar ecuaciones de la forma $ax^2 + bx + c = 0$.
- Formular ecuaciones cuadráticas a partir de sus raíces.
- Formular ecuaciones cuadráticas a partir de su representación gráfica.

¿Cómo apoyar?

Deténgase el tiempo que sea necesario en el estudio de las ecuaciones incompletas, con el fin de que los alumnos vayan comprendiendo lo que hacen; esto les dará confianza para avanzar. Por ejemplo, puede proponer el siguiente problema, que se modela con una ecuación cuadrática: "Se tienen dos cuadrados iguales, de área x^2 cada uno. La suma de las áreas de estos dos cuadrados es igual a un rectángulo de área $6x$. ¿Cuánto mide el lado del cuadrado?".

A fin de lograr una mayor comprensión, puede proponerles que dibujen y recorten las figuras para sobreponer los dos cuadrados iguales sobre el rectángulo. Los alumnos deberán encontrar que los dos cuadrados iguales cubren exactamente el rectángulo, con lo que podrán observar que la medida del lado de cada cuadrado debe ser igual que la medida de la altura del rectángulo, y que los datos conocidos corresponden al área de las tres figuras. Entonces se puede comprender mejor por qué la ecuación que modela la situación es $x^2 + x^2 = 6x$. De este modo, puede proponer a los alumnos que, aún cuando tengan dificultades, representen la situación de la actividad 3 de la sesión 2, ya que decir: "Cuatro veces el cuadrado de un número es igual a ocho veces el mismo número. ¿De qué número se trata?", es equivalente a: "Cuatro cuadrados iguales de área x^2 cada uno y la suma de las áreas de esos cuadrados es igual a un rectángulo de área $8x$. ¿Cuánto mide el lado del cuadrado?". La representación gráfica es:

La ecuación cuadrática que modela la situación es: $x^2 + x^2 + x^2 + x^2 = 8x$.

Simplificando:

$$4x^2 - 8x = 0$$
$$4x(x - 2) = 0$$

Luego, si $4x = 0$, se tiene que $x = 0$, si $(x - 2) = 0$ entonces $x = 2$.

¿Cómo extender?

Si los alumnos resuelven un problema sin dificultad, pídales que formulen un problema similar para que todo el grupo lo resuelva. Un ejemplo es la manera como se propone en la sección "¿Cómo apoyar?" para transformar un problema en otro equivalente. Es importante que no sólo en esta secuencia y este tema se proponga este tipo de actividades, porque son acciones que promueven que los alumnos desarrollen habilidades para plantear y resolver problemas.

Secuencia 14 ¿Ecuación o función?

(LT, Vol. II, págs. 50-59)

Tiempo de realización	4 sesiones
Eje temático	Número, álgebra y variación
Tema	Patrones, figuras geométricas y expresiones equivalentes
Aprendizaje esperado	Diferencia las expresiones algebraicas de las funciones y de las ecuaciones.
Intención didáctica	Que los alumnos resuelvan problemas que impliquen el uso de funciones cuadráticas y las ecuaciones asociadas a ellas para distinguirlas y diferenciarlas.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisual** • *¿Función o ecuación?* **Informático** • *¿Función o ecuación?*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recurso audiovisual** • *Diferencias entre función y ecuación*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Reconozcan la solución de una ecuación lineal y las soluciones de una ecuación cuadrática como el valor de la abscisa del punto donde la gráfica correspondiente a la relación lineal o cuadrática interseca al eje X.
- Sesión 2. Comparen el comportamiento de las gráficas de funciones lineales y cuadráticas.
- Sesión 3. Analicen el comportamiento de las gráficas de las funciones $y = x^2$ y $y = x^2 + c$ y determinen la manera en que a cada una de estas funciones se le asocia una ecuación.
- Sesión 4. Reconozcan las soluciones de las ecuaciones cuadráticas asociadas a funciones de la forma $y = ax^2 + bx$ y las resuelvan algebraicamente.

Acerca de...

En la secuencia 4 la atención se centra en el uso de procedimientos de ensayo y error; en la 13, en procedimientos algebraicos para encontrar las raíces de ecuaciones lineales y cuadráticas, mientras que en esta secuencia se analiza la relación entre el concepto de ecuación y el de funciones lineales y cuadráticas (secuencias 5 y 13), sin dejar de lado el uso de los procedimientos algebraicos estudiados en las secuencias 3 y 11. Este análisis ofrece a los alumnos un referente visual sobre la naturaleza y el número de soluciones de dichas ecuaciones.

Para facilitar la comprensión de las relaciones entre los conceptos de *función* y *ecuación* se eligieron contextos de medición como perímetro y área de superficies cuadradas, rectangulares y circulares, y volúmenes de prismas rectangulares. En cada caso, los alumnos deben analizar con cuidado la situación que se plantea. Por ejemplo, para representar algebraicamente el área de una chinampa rectangular, además de entender el significado y uso de la variable x, deben considerar el conjunto de valores que ésta puede tener para que tanto la medida del ancho de la chinampa como su área resulten valores positivos.

En esta secuencia, los alumnos contrastan la forma en que crecen las funciones lineales y cuadráticas, hecho que pueden visualizar en las gráficas correspondientes; además, revisan la noción de expresiones algebraicas equivalentes tanto en expresiones que representan funciones como en las que son ecuaciones, por ejemplo, la función $y = x^2 - 5x$ es equivalente a $y = x(x - 5)$.

En general, en esta secuencia se analizan funciones de la forma $y = x^2$, $y = x^2 + c$ y $y = ax^2 + bx$, a las cuales se asocian las ecuaciones cuadráticas incompletas $x^2 = 0$, $x^2 + c = 0$, y $ax^2 + bx = 0$, respectivamente. Las soluciones de las ecuaciones de esta forma se encuentran algebraicamente y se visualizan en las gráficas de las funciones correspondientes.

Sobre las ideas de los alumnos

Para los alumnos, ¿qué representan las literales en las siguientes expresiones?

$$x^2 - 16x$$
$$x^2 + 16x = 0$$
$$x^2 + 16x = y$$

Muchos alumnos pueden interpretar la primera expresión como una ecuación mal planteada y, por lo tanto, no se puede resolver. Esto muestra que, por un lado, tienen dificultad para interpretar la literal involucrada como un número general y, por otro, una tendencia a ver la literal como incógnita, como un único valor que hay que determinar.

En cuanto a la segunda expresión, lo que muchos hacen para resolverla es proceder por ensayo y error y, en ocasiones, al resolver un problema asignan a la misma literal distintos valores, de modo que la suma del lado izquierdo dé como resultado el número de la derecha. Esto muestra una confusión muy común entre los alumnos, quizá porque se les ha enseñado que en álgebra las letras representan números, pero no se ha enfatizado que, cuando se define una literal para representar una medida o cualquier otro valor, ya no se puede utilizar esa literal en ese problema para representar otra medida u otro valor distinto.

En cuanto a la tercera expresión, muchos alumnos comentan: "No se puede resolver porque no tiene un resultado numérico" o "Es el resultado de una suma, pero no sabemos de qué suma se trata".

En cursos anteriores, los alumnos manipularon ecuaciones con incógnitas en los dos miembros, como $3x + 12 = 2x + 3$, y las resolvieron con procedimientos basados en las propiedades de la igualdad. Entre las ecuaciones que ahora se les presentan, la más parecida a las conocidas en cuanto a procedimientos de resolución es del tipo $x^2 - 9 = 0$ que se puede resolver con el uso de las propiedades de la igualdad: $x^2 = 9$, $x = \pm\sqrt{9}$, $x = \pm 3$. La transición al estudio de las ecuaciones cuadráticas que generalmente se igualan a cero, y que esas ecuaciones tengan dos soluciones, no deja de ser extraño para los alumnos.

Ocurre con frecuencia que el signo $\pm$ aparece como por arte de magia sin tener idea de dónde surge. Esto provoca en muchos alumnos la falsa idea de que las matemáticas se comportan de modo raro y que es difícil comprender ese comportamiento. Ante ello, es necesario recordar lo estudiado en segundo grado acerca de que una raíz cuadrada tiene dos resultados, uno positivo y uno negativo, pues al elevarlos al cuadrado se obtiene el radicando:

$$\sqrt{16} = \pm 4, \text{ ya que, } (4)(4) = 16 \text{ y } (-4)(-4) = 16$$

¿Cómo guío el proceso?

Con el objetivo de ubicar a los alumnos en el tema de la variación, lea con ellos la sección "Para empezar" y pregunte qué tipo de relación se puede establecer entre las variables dadas por el número de hojas de un libro y su número de páginas, o entre el número de kilogramos de un producto y su precio. Enseguida, haga que examinen la variación que se manifiesta en el área de una chinampa cuadrada al asignar diversos valores a la variable. Trate de que su intervención lleve a los alumnos a enumerar algunas características que diferencian a estos tipos de variación. Por ejemplo, en las primeras, los cambios de las variables se dan en intervalos iguales; se trata de un caso particular de variación lineal, son relaciones de proporcionalidad directa. En contraste, en la segunda situación, a intervalos iguales de la variable independiente no corresponden intervalos iguales en la variable dependiente; se trata de una relación funcional de tipo cuadrático cuyo análisis se realiza en la actividad 1 de la sección “Manos a la obra”.

Para una mejor comprensión de la situación que se propone en la actividad 1, conviene reproducir en el pizarrón la imagen de la chinampa de modo que se distinga la parte cultivable y las medidas de sus lados: x y $x - 2$. Por la fórmula del área del rectángulo, se tiene que la expresión algebraica del área es $y = x(x - 2)$, o bien, $y = x^2 - 2x$. La tabla de valores que representa la variación del área es:

Lado	x	-1	0	1	2	2.5	3	$\frac{11}{3}$
Área cultivada	$y = x^2 - 2x$	3	0	-1	0	1.25	3	$\frac{55}{9}$

Al trazar la gráfica correspondiente a esta función, explique a los alumnos que la parte positiva del eje X representa las diversas medidas del lado de la parte cultivada de la chinampa, y la parte positiva del eje Y representa el área correspondiente. Por lo tanto, la parte de la parábola que tiene sentido para la situación que se analiza es la que se halla en el primer cuadrante, sin considerar el origen, ya que ni los lados ni el área del rectángulo pueden tener valores negativos o cero. Consecuentemente, el punto más bajo de la parábola (el vértice) de coordenadas (1, −1) no tiene sentido para la situación porque el valor −1 para el área es negativo.

En cuanto a la situación que plantea la actividad 2, oriente la reflexión de los alumnos hacia el hecho de que las magnitudes que varían en este caso son la altura o el nivel que alcanza el agua en la alberca (x) y, consecuentemente, el volumen del agua (y). Se trata aquí de una función de proporcionalidad directa, puesto que, por cada unidad de medida de la altura, el volumen en que aumenta el agua es el mismo. La expresión algebraica de esta función es, por tanto, de primer grado, es una función lineal $y = 25x$ y la ecuación asociada es $25x = 0$.

En la sesión 2 se proponen actividades similares a las de la sesión 1, pero ahora referidas al círculo y a la circunferencia. La tabla de la actividad 5 puede aprovecharla para que los alumnos observen algunas diferencias entre las funciones lineales y las cuadráticas, y también respecto a las ecuaciones asociadas a ellas.

Tabla de valores de la circunferencia y área del círculo en función del radio						
Círculo	A	B	C	D	E	F
r en cm	1	2	3	4	5	6
$C(r)$ en cm	6.2832	12.5664	18.8496	25.1328	31.416	37.6992
$A(r)$ en cm^2	3.1416	12.5664	28.2744	50.2656	78.54	113.0971

Por ejemplo, la función cuadrática $A(r) = \pi r^2$ crece más rápidamente que la lineal o de proporcionalidad directa $C(r) = 2\pi r$; en la última, por cada centímetro que aumenta el radio, la circunferencia aumenta 6.2832 cm, es decir, el aumento es constante debido al factor 2π en la función. Esta diferencia en el crecimiento se refleja en las gráficas correspondientes. Es importante destacar que esta diferencia no se observa en las gráficas que presenta el libro de texto porque los valores que se asignan al radio son menores de 5 cm, por lo tanto, conviene verificar esto trazando las gráficas para radios mayores de 5 cm.

La actividad 6, inciso f), se responde al resolver una ecuación cuadrática: “¿Existe un círculo que tenga un área de 5 cm^2?”; “¿A qué punto o puntos de la parábola corresponden?”. Puesto que las variables involucradas son la medida del radio y el área, y esta última ya se conoce (5 cm^2), con la ecuación $3.1416\ r^2 = 5$ se puede calcular la medida del radio: 1.26 cm. Así pues, el punto de la parábola pedido tiene por coordenadas (1.26, 5), punto que puede ubicarse visualmente en la gráfica que se presenta en el libro.

En el inciso g) es importante que comente a los alumnos que no se espera que obtengan los resultados directamente por medio de operaciones en la calculadora, sino que aprecien que las dos expresiones escogidas como respuesta son equivalentes debido a la propiedad asociativa y conmutativa de la multiplicación.

En la actividad 8 se espera que puedan darse cuenta de que la gráfica del área de la parábola se corresponde con los valores de la tabla; asimismo, que encuentren el valor del vértice de la misma forma en que lo hicieron en el inciso f). En la actividad 9, en cambio, se busca que puedan establecer la relación entre el comportamiento del área y la circunferencia conforme crece el radio.

En la sesión 3 se analiza el comportamiento de las gráficas de las funciones de la forma $y = x^2$ y $y = x^2 + c$ y la manera en que a cada una de estas funciones cuadráticas se le asocia una ecuación. Un punto importante sobre el comportamiento de estas gráficas es que son exactamente iguales, y lo único que cambia es su ubicación en el plano cartesiano. Por ejemplo, el vértice de la parábola $y = x^2$ está en el origen del plano y abre hacia arriba; si esta parábola se desplaza 5 unidades hacia arriba, su expresión algebraica es $y = x^2 + 5$, pero si lo hace 5 unidades hacia abajo, su expresión algebraica es $y = x^2 - 5$. Las ecuaciones asociadas son $x^2 = 0$, $x^2 + 5 = 0$, y $x^2 - 5 = 0$, respectivamente. La solución de la primera ecuación es $x = 0$ porque la parábola $y = x^2$ toca al eje X en el punto en que la abscisa es 0; la segunda no tiene solución en los números racionales o irracionales, pues la parábola $y = x^2 - 2x$ no corta en ningún punto al eje X; por último, la tercera tiene dos soluciones, ya que la parábola $y = x^2 - 5$ corta al eje X en dos puntos, cuyas abscisas son $\sqrt{5}$ y $-\sqrt{5}$, y estos valores son las soluciones de esa ecuación.

En la sesión 4 se analiza el comportamiento de las gráficas de funciones cuadráticas de la forma $y = ax^2 + bx$ y la manera en que a esta función se le asocia una ecuación. Un punto importante sobre el comportamiento de estas gráficas es que cortan al eje X en el origen del plano cartesiano. La razón es que al factorizar la expresión $ax^2 + bx$ e igualarla a cero se obtiene la ecuación asociada $x(ax + b) = 0$. Se sabe que si el producto de dos factores es cero, al menos uno de ellos tiene que ser cero. De modo que, si el factor x es cero, la gráfica debe cortar al eje X en el origen del plano cartesiano. El otro punto en que la gráfica corta al eje X se obtiene despejando x de la ecuación $ax + b = 0$. Por ejemplo, la ecuación asociada a la función $y = x^2 + 2x$ es $x^2 + 2x = 0$, que es equivalente a $x(x + 2) = 0$. Al igualar a cero el primer factor, se obtiene la primera solución $x_1 = 0$; y al igualar a cero el segundo factor, se obtiene $x + 2 = 0$, por lo tanto, la segunda solución es $x_2 = -2$. Esto significa que la gráfica de la función corta al eje X en dos puntos cuyas abscisas son 0 y -2.

Una manera en que puede conducir la reflexión y la realización de la actividad 3 en el grupo consiste en presentar la tabla como ahora se indica. De esta manera, los alumnos asociarán cada gráfica con la función correspondiente a partir de los puntos en que ésta corta al eje X.

2. Hagan la gráfica de $y = x^2 - 4$ en el plano cartesiano en el que ya está dibujada la gráfica de $y = x^2$ y describan en qué se parecen y en qué son diferentes. ______

______

a) Completen la tabla de las funciones descritas en las actividades 1 y 2.

Tabla de valores de las funciones $y = x^2$ y $y = x^2 - 4$							
x	-3	$-\frac{5}{2}$	-1	0	1	$\frac{5}{2}$	3
$y = x^2$	9	$\frac{25}{4}$	1	0	1	$\frac{25}{4}$	9
$y = x^2 - 4$	5	$\frac{9}{4}$	-3	-4	-3	$\frac{9}{4}$	5

Función	Función equivalente	Ecuación asociada	Soluciones
$y = x^2 - 3x$	$y = x(x - 3)$	$x(x - 3) = 0$	$x_1 = 0, \quad x = 3$
$y = 2x^2 + x$	$y = x(2x + 1)$	$x(2x + 1) = 0$	$x_1 = 0, \quad x = -\frac{1}{2}$
$y = x^2 + 2x$	$y = x(x + 2)$	$x(x + 2) = 0$	$x_1 = 0, \quad x = -2$
$y = x^2 - 2x$	$y = x(x - 2)$	$x(x - 2) = 0$	$x_1 = 0, \quad x_2 = 2$

Pautas para la evaluación

Con el fin de verificar en qué medida se logra la intención didáctica que aparece en la ficha descriptiva, es necesario hacer un registro para cerciorarse de que los alumnos realizan lo siguiente:

- Distinguen claramente entre una función y una ecuación.
- Reconocen el significado de las literales involucradas en una ecuación y en una función.
- Resuelven algebraicamente ecuaciones cuadráticas incompletas.
- Representan gráficamente situaciones que implican funciones lineales y cuadráticas.
- Identifican las soluciones de ecuaciones cuadráticas a partir de la representación gráfica de la función de la que se obtienen.
- Diferencian la solución de la ecuación de la solución del problema.

¿Cómo apoyar?

Proponga, si es necesario, situaciones problemáticas adicionales que impliquen la representación algebraica de funciones cuadráticas. Por ejemplo: "Traza la gráfica de la función

$$y = x^2 + 2x - 15".$$

a) ¿En qué puntos corta la gráfica de esta función al eje X?

b) ¿Cómo identificas las soluciones de la ecuación asociada a esa función en la gráfica correspondiente?

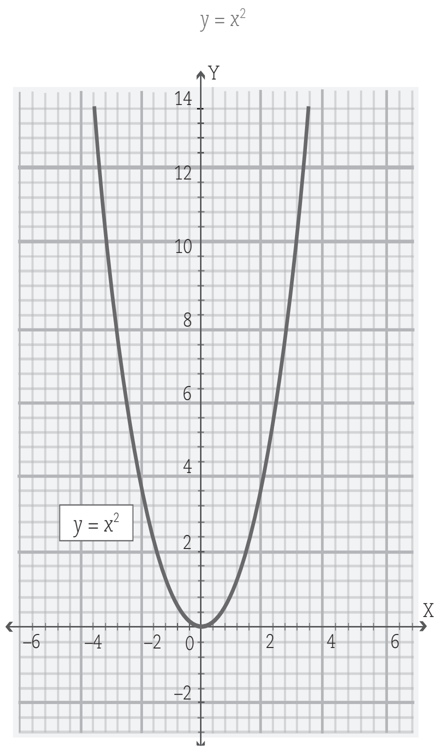
¿Cómo extender?

Si observa que los alumnos resuelven con facilidad algún problema, pídales que ellos inventen uno nuevo para que todo el grupo lo resuelva.

Si los alumnos no tienen dificultades para realizar la actividad 2 de la sesión 3, que consiste en hacer la gráfica de $y = x^2 - 4$ en el plano cartesiano en el que ya está dibujada la gráfica de $y = x^2$, pida entonces que elaboren las gráficas de las funciones $y = x^2 + 4$; $y = x^2 - 2$ y $y = x^2 + 2$, para que describan lo que ocurre tanto en las gráficas de las funciones como en los puntos donde cortan al eje X en cada caso.

Análisis gráfico de $y = x^2$ y $y = x^2 + c$

1. Trabajen en equipo. Contesten las preguntas que se les plantean. La parábola que se muestra es la representación gráfica de la función $y = x^2$.



Secuencia 15 Polígonos semejantes 2

(LT, Vol. II, págs. 60-69)

Tiempo de realización	5 sesiones
Eje temático	Forma, espacio y medida
Tema	Figuras y cuerpos geométricos
Aprendizaje esperado	Construye polígonos semejantes. Determina y usa criterios de semejanza de triángulos.
Intención didáctica	Que los alumnos analicen y comparen los triángulos para construir los criterios de semejanza.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisuales** • *Lados y ángulos correspondientes* • *Criterios de semejanza* **Informático** • *Criterios de semejanza*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recursos audiovisuales** • *Acerca de los criterios de semejanza* • *Aspectos didácticos de la enseñanza de los polígonos semejantes*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Construyan triángulos semejantes dada una razón de semejanza. Además, identifiquen los lados y ángulos correspondientes para determinar la razón de semejanza entre dos o más triángulos.
- Sesión 2. Analicen las condiciones que son necesarias para establecer que dos triángulos son semejantes por el criterio ángulo, ángulo (AA).
- Sesión 3. Analicen y comparen triángulos para determinar el criterio de semejanza lado, lado, lado (LLL).
- Sesión 4. Identifiquen las características que tienen en común los triángulos para determinar su semejanza por el criterio lado, ángulo, lado (LAL).
- Sesión 5. Resuelvan problemas que implican la aplicación de alguno de los criterios de semejanza de triángulos y la noción de razón de semejanza.

Acerca de...

La semejanza de triángulos permite usar conocimientos estudiados en grados anteriores acerca de la proporcionalidad y el concepto de constante de proporcionalidad que les ayudará a comprender la razón de semejanza, así como a valorar la precisión y destreza al medir y trazar figuras geométricas. También favorece la formulación de conjeturas y argumentos, así como el uso de procedimientos novedosos. Por otro lado, la determinación y el estudio de los criterios de semejanza brindarán a los alumnos herramientas poderosas para resolver problemas de medición y justificar sus resultados.

Esta secuencia se vincula directamente con la secuencia 16, “Razones trigonométricas 2”, y con la secuencia 17, “Teorema de Pitágoras 2”, y se apoya en lo aprendido en la secuencia 6, “Polígonos semejantes 1”, del bloque 1. Otras herramientas que les dan más elementos para argumentar y justificar alguno de los criterios de semejanza son los criterios de existencia y unicidad en la construcción de triángulos, y que la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo siempre es 180°.

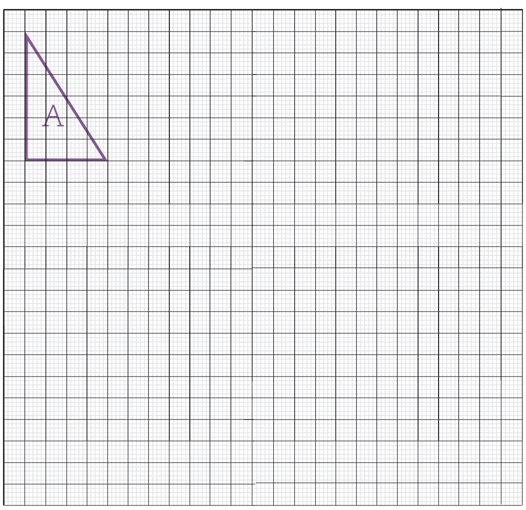
Sobre las ideas de los alumnos

Entre las ideas y los problemas que los alumnos tienen con el estudio de la semejanza es que no la identifican cuando la medida de los lados de una figura no es múltiplo de la otra, o bien, porque en lugar de usar una relación de tipo multiplicativo se utiliza una de tipo aditivo.

Otra dificultad radica en formular y comunicar argumentos basados en los conocimientos matemáticos que ya tienen. Algunos alumnos utilizan como justificación decir que dos triángulos son semejantes porque así lo parecen. En caso de identificar esta situación u otra similar, debe apoyarlos para que apliquen la definición de lo que estudiaron acerca de dos polígonos semejantes —lo son cuando sus lados correspondientes son proporcionales y sus ángulos correspondientes son iguales—, y aprovechar para vincularlo a lo que saben de proporcionalidad.

¿Qué material se necesita?

Para apoyar a los alumnos en la comprensión de algunos problemas en las actividades de esta secuencia, se pueden usar pliegos de papel bond cuadriculado. También es necesario contar con un juego de geometría y tijeras. Prevea varios juegos de tangram para hacer algunas actividades que se sugieren en la sección "Cómo extender".



¿Cómo guío el proceso?

Lea y comente con los alumnos la sección "Para empezar". Ponga atención a las nociones que tienen de la semejanza de polígonos y la razón de semejanza (o escala). Analicen la imagen para identificar primero los triángulos que la conforman, luego exploren y conjeturen cuáles son semejantes (o congruentes), y al final justifiquen por qué lo afirman. Esto le permitirá detectar nociones que los alumnos no tengan claras sobre la semejanza de polígonos, las propiedades de los triángulos o la formalidad con que los alumnos justifican sus conjeturas. No olvide volver a esta imagen al finalizar la secuencia, para que los alumnos contrasten lo que sabían con lo que lograron aprender.

En el desarrollo de la secuencia se proponen actividades para que los alumnos tracen triángulos y exploren y comparen sus elementos, características y propiedades, ya sea como consecuencia de la información que se proporciona o porque ellos encuentren nuevos elementos, características y propiedades que tengan en común los triángulos semejantes, a fin de determinar y usar los tres criterios de semejanza. Además, deben saber usar la razón de semejanza para construir o comparar los triángulos. Considere que la razón de semejanza será el elemento principal para verificar si dos triángulos son semejantes o no, mientras no se establezcan los criterios de semejanza.

En la actividad 1 de la sesión 1, observe si los alumnos usan como unidad de medida uno de los cuadritos de la retícula y si también lo usan para trazar las figuras. Es importante que quede clara la noción de razón de semejanza. Si lo considera necesario, después de que las parejas discutan y hagan sus primeros intentos, proponga una discusión plenaria o con los equipos que tengan problemas para comprender que la razón de semejanza 3 a 1 con respecto a otro es equivalente a decir que los lados de la segunda figura miden el triple que los de la primera; o bien, que está en escala 3 a 1. Asimismo, discutan qué significa que la razón de semejanza sea $\frac{1}{2}$ o la mitad. Puede responder algunas preguntas de la actividad 2 junto con el grupo y luego pedir que regresen al trabajo en parejas.

Triángulo	Azul	Rojo	Verde
Azul	$\frac{2.5}{2.5}=\frac{6}{6}=\frac{4}{4}=1$	$\frac{2.5}{3.75}=\frac{6}{9}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$	$\frac{2.5}{5}=\frac{6}{12}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$
Rojo	$\frac{3.75}{2.5}=\frac{9}{6}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$	$\frac{3.75}{3.75}=\frac{9}{9}=\frac{6}{6}=1$	$\frac{3.75}{5}=\frac{9}{12}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$
Verde	$\frac{5}{2.5}=\frac{12}{6}=\frac{8}{4}=2$	$\frac{5}{3.75}=\frac{12}{9}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$	$\frac{5}{5}=\frac{12}{12}=\frac{8}{8}=1$

En la actividad 3 los alumnos no tienen que medir lados ni ángulos; se trata de comparar los triángulos y establecer la relación de correspondencia entre los lados y ángulos. Las tablas se pueden, y deben, llenar con la información que tienen los triángulos, pues todas las medidas de los lados están indicadas en la imagen. Para el caso de los ángulos, los datos necesarios aparecen en el inciso b). Aquí sólo usarán las razones de semejanza e identificarán las parejas de lados y ángulos correspondientes. Para el inciso c) propicie una lluvia de ideas acerca de la interpretación de los valores de las razones obtenidas, así como de por qué algunas son recíprocas o inversas y por qué otras son iguales a 1; para esto es necesario expresar las razones en su mínima expresión, como se muestra en la tabla adjunta.

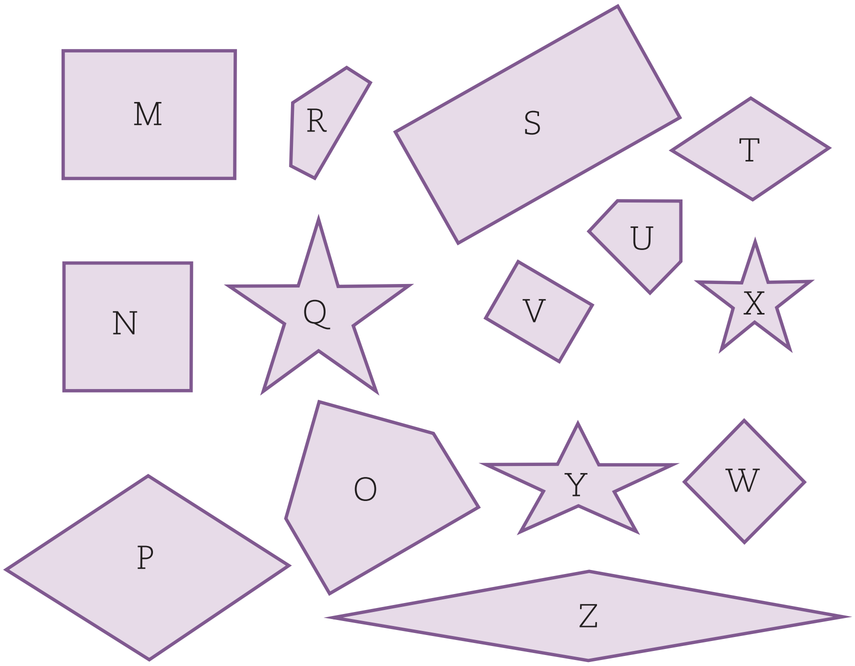
Para obtener el criterio de semejanza AA en las actividades 1, 2 y 3 de la sesión 2, se pretende que, al trazar los triángulos, ya sean los rectángulos isósceles de la actividad 1 o los escalenos de la actividad 2 con las mismas medidas de los ángulos correspondientes y sin importar la medida de los lados homólogos correspondientes, se obtengan triángulos semejantes. Es importante considerar que debido a los trazos (grosor de la punta del compás o lápiz) y a la imprecisión de los instrumentos de medición, puede haber diferencias en las medidas obtenidas y que, al comparar, no se consigan valores exactamente iguales. Si lo considera conveniente, puede hacer una reflexión con los alumnos acerca de cómo se toman previsiones en otras situaciones (industria, tecnología, construcción), dados los posibles errores en las mediciones. A fin de obtener mayor información consulte: https://www.uaeh.edu.mx/scige/boletin/prepa3/n7/m4.html

Considere los márgenes de error cuando los alumnos den sus respuestas. Al final de la actividad 3 es necesario recapitular para que recuerden que fue suficiente que la medida de los ángulos fuese igual para trazar triángulos semejantes. Compare este resultado con lo que sabían de los polígonos (caso del rectángulo y el cuadrado).

La tabla de la actividad 3d) es también una oportunidad para comparar las razones de semejanza entre dos triángulos (la razón vista del primero respecto al segundo, y del segundo respecto al primero), con lo que verán también que las razones son inversas o recíprocas.

Si no surge como parte de la argumentación de los alumnos la propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo (180°), es conveniente que usted les ayude a recordarlo, ya sea al final de la sesión, o bien, en la actividad 5.

En la sesión 3 los alumnos deberán concluir que si dos triángulos tienen los lados correspondientes proporcionales, entonces los ángulos correspondientes son iguales. Recuerde a los alumnos que esto no sucedía con los polígonos de más de 3 lados, por ejemplo en la sesión 4 de la secuencia 6, con el caso del cuadrado y un rombo con ángulos no rectos.



La actividad 3 contiene una hipótesis acerca de sólo considerar la medida de dos de los lados para determinar si los triángulos son semejantes. Los alumnos tienen que responder si están o no de acuerdo con la afirmación. Es importante que les recuerde que no se trata sólo de aventurar una respuesta afirmativa o negativa, sino de pensar en los argumentos que respaldan la respuesta. Sería conveniente que antes de seguir con la actividad 4, les propusiera hacer un intercambio de ideas acerca de esa hipótesis. Además, en el desarrollo de la actividad 4 puede ver con sus alumnos la relevancia de los contraejemplos en las matemáticas para desechar ciertas conjeturas. Esto es, si se muestra un caso en que la afirmación no se cumple, entonces no es verdadera la conjetura y tampoco se puede generalizar. En la sesión 4 se analiza el tercer criterio de semejanza (LAL), donde el énfasis está en la necesidad de dar la medida del ángulo formado por dos lados para saber si se cumple o no la semejanza entre triángulos. Es probable que algún alumno desde la sesión 3 se haya percatado de esto; si así fue, es conveniente recuperarlo para validarlo con las actividades propuestas en esta sesión. El envío de mensajes de la actividad 3 es una buena oportunidad para identificar la información necesaria y relevante para reconocer la condición que permite obtener triángulos semejantes. En la actividad 4 se propone una puesta en común para formalizar el criterio lado, ángulo, lado (LAL). En esta sesión puede recordar los criterios de unicidad en la construcción de triángulos y asociarlo a este resultado. Si tienen sólo la pareja de lados, aunque sean proporcionales a los de otro triángulo, se pueden construir muchos triángulos con diferentes medidas de ángulos y, por lo tanto, no serán semejantes al original.

Las actividades de la sesión 5 permiten que los alumnos pongan en práctica lo aprendido y utilicen alguno de los criterios de semejanza para justificar sus afirmaciones o resultados.

Pautas para la evaluación formativa

Con la finalidad de verificar en qué medida se logra la intención didáctica de esta secuencia, observe si los alumnos:

- Distinguen claramente cuáles son los lados y ángulos correspondientes entre dos triángulos dados.
- Calculan la razón de semejanza entre los lados de dos triángulos semejantes.

- Comprenden y utilizan el criterio de semejanza AA y entienden por qué no es necesario recurrir al tercer ángulo para determinar que dos triángulos son semejantes.
- Comprenden y utilizan el criterio de semejanza LLL y entienden por qué es suficiente que se dé esta condición para determinar que dos triángulos son semejantes.
- Formalizan el criterio de semejanza LAL y son capaces de explicar por qué esta información es suficiente para señalar que dos triángulos son semejantes.

¿Cómo apoyar?

Si observa que en la actividad 3 de la sesión 1 los alumnos tienen dificultades para determinar los lados y ángulos correspondientes entre dos triángulos, pida que los calquen o copien y recorten para sobreponerlos y poder identificarlos. Esto puede sugerirlo también en la actividad 2 de la sesión 5.

También pida que entre los equipos o las parejas comparen sus triángulos y obtengan las razones de semejanza.

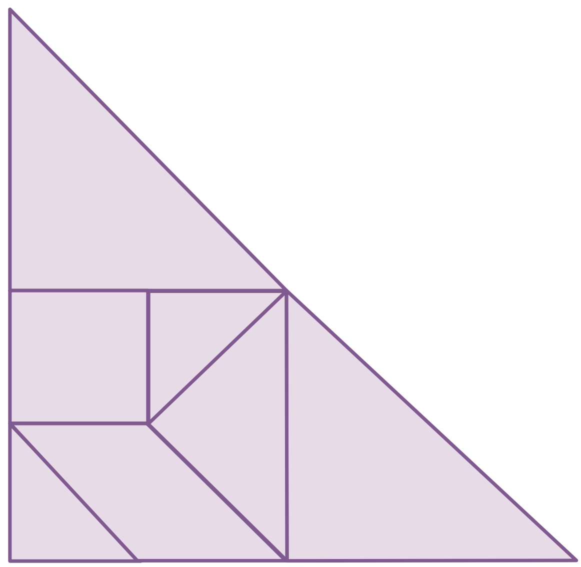
En el caso de errores en la medición, puede recordar a sus alumnos que, en primer grado, en la secuencia 36 de medidas de tendencia central, estudiaron el caso del peso de un producto enlatado del que se registraban las variaciones al pesarlo para establecer el margen de aceptación de un error. De este modo, sensibiliza a los alumnos acerca de que las matemáticas las construyen los seres humanos y no son algo estático y establecido rígidamente.

¿Cómo extender?

Pregunte a sus alumnos si se puede afirmar que dos triángulos son semejantes si tienen un lado y un ángulo correspondiente iguales. Solicíte que justifiquen sus respuestas y den argumentos o contraejemplos.

Una actividad que puede proponer implica usar el tangram compuesto de 7 figuras (5 triángulos, 1 cuadrado y 1 romboide). Si no cuenta con el recurso en la escuela, se pueden imprimir varios juegos desde la siguiente dirección electrónica: https://www.edufichas.com/wp-content/uploads/2019/03/tangram-imprimir-PDF.pdf

Se pueden llevar a cabo varias actividades relacionadas con la semejanza de polígonos y, en particular, con la de triángulos. Por ejemplo, pedir a los alumnos que justifiquen por qué los cinco triángulos son semejantes entre sí y que determinen en qué basan su afirmación. También puede solicitar que encuentren la razón de semejanza de uno de los triángulos de menor área respecto al resto. Después organice un concurso entre equipos. Puede hacerse por etapas: primero muestre uno de los triángulos del tangram y pida que encuentren un triángulo semejante entre las piezas restantes; luego pida que formen otro triángulo semejante con dos piezas, con tres y después con cuatro. Puede dar un punto a cada equipo que lo logre en un tiempo dado. Al final, pida que construyan un triángulo semejante con todas las piezas. Si tiene poco tiempo, reduzca el juego y establezca que gana el equipo que construya el triángulo semejante con el mayor número de piezas y justifique por qué es semejante al que se indicó. Pregunte: "¿Será posible construir triángulos semejantes al original con cinco y seis piezas?". Si nadie logra hacer el triángulo con siete piezas, muéstreles al final la solución.



Si cuenta con los recursos adecuados, lleve a cabo con los alumnos las actividades sugeridas en los sitios de internet relacionadas con estos contenidos.

Secuencia 16 Razones trigonométricas 2
(LT, Vol. II, págs. 70-77)

Tiempo de realización	5 sesiones
Eje temático	Forma, espacio y medida
Tema	Figuras y cuerpos geométricos
Aprendizaje esperado	Resuelve problemas utilizando las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.
Intención didáctica	Que los alumnos construyan los conceptos de seno, coseno y tangente de un ángulo y calculen el valor de estas razones a partir de las medidas de los lados de triángulos rectángulos.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	Audiovisual • *A veces Pitágoras no es suficiente* Informático • *Cálculo de razones trigonométricas a partir de triángulos rectángulos*
Materiales de apoyo para el maestro	Recurso audiovisual • *Aspectos didácticos de la enseñanza de la trigonometría*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Analicen los valores de las razones que se dan entre los lados de un triángulo rectángulo y los comparen con los valores correspondientes de otros triángulos rectángulos semejantes.
- Sesión 2. Identifiquen los elementos que conforman un triángulo rectángulo para establecer las razones entre sus lados, comparen estos cocientes con los de otros triángulos semejantes e identifiquen los valores constantes.
- Sesión 3. Establezcan y calculen las razones seno, coseno y tangente de un ángulo agudo a partir de las medidas de los lados de un triángulo rectángulo.
- Sesión 4. Analicen que el valor de las razones seno, coseno y tangente depende de las medidas del ángulo al que se refieren y no de la medida de los lados que lo forman.
- Sesión 5. Calculen el valor de las razones seno, coseno y tangente de algunos ángulos e inicien la resolución de problemas que implican el uso de razones trigonométricas.

Acerca de...

Si bien los alumnos iniciaron el estudio de la trigonometría en la secuencia 7, "Razones trigonométricas 1", del bloque 1, es importante recordar que en aquella secuencia conocieron situaciones que se modelan con un triángulo rectángulo y que los ángulos agudos representaban la inclinación de una escalera o la elevación de un tanque y las resolvieron de manera informal, sin establecer formalmente las razones trigonométricas: seno, coseno y tangente.

En esta secuencia los alumnos formalizarán los nombres y las definiciones de esas razones. Para conseguirlo, se proponen actividades en las que exploran algunas nociones importantes, como los valores constantes de algunos cocientes debido a la relación de semejanza que hay entre las figuras, aunque los valores de las medidas de los lados que forman los ángulos o triángulos involucrados cambien. Para que obtengan esta noción, en la sesión 1 se inicia el estudio con un contexto real basado en el ángulo de inclinación que debe tener una escalera al recargarse en una pared.

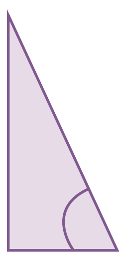
A partir de la sesión 2 se hace la abstracción de esto para trabajar en contextos puramente matemáticos (triángulos rectángulos). Este tránsito entre lo concreto y lo abstracto se realizar gracias a los conocimientos adquiridos en las secuencias 6 y 15 sobre polígonos semejantes, donde determinaron la razón de semejanza entre triángulos.

La noción de que el valor de las razones trigonométricas depende del valor del ángulo y no de las medidas de los lados del triángulo donde se ubica es muy importante para establecer generalizaciones. Por ejemplo, el valor del coseno de 45° siempre será 0.7071, aproximadamente, sin importar la longitud de los lados que lo forman.

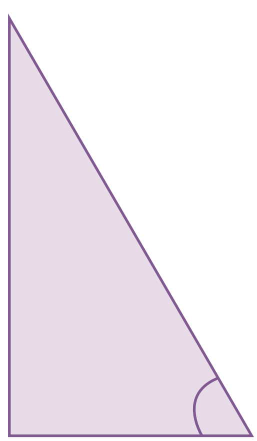
En las sesiones 4 y 5 se estudia esto con el fin de que lo comprendan y aprendan.

Sobre las ideas de los alumnos

Como ya se dijo, es común que los alumnos consideren que los valores de las tres razones trigonométricas que aquí se estudian (seno, coseno y tangente) dependen de las medidas de los lados del triángulo, y que en un triángulo semejante a otro, pero con lados de longitudes mayores, encontrarán valores mayores para las razones trigonométricas; por ejemplo, pueden creer que el valor del seno del ángulo marcado en el triángulo 1 es menor que el del seno del ángulo marcado en el triángulo 2.



Triángulo 1



Triángulo 2

Es importante que los alumnos desechen esta idea. Para lograrlo ayudarán las actividades que realicen en esta secuencia y el concepto de semejanza de triángulos.

¿Cómo guío el proceso?

La sesión 1 vincula la presente secuencia con lo aprendido en la 7, "Razones trigonométricas 1". Se trata de considerar un contexto real y modelarlo con un objeto geométrico: un triángulo rectángulo.

Para la actividad 1 de la sesión 1, los alumnos tendrán que argumentar si los triángulos son semejantes. Se espera que usen argumentos geométricos. Si un alumno menciona que son semejantes "porque se ve", es importante que lo invite a dar argumentos basados en propiedades geométricas y, de ser necesario, que consulte los criterios de semejanza que estudiaron en la secuencia 15. En este caso, un argumento válido es: "Los triángulos son semejantes porque tienen dos lados correspondientes proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos es igual"; otro argumento geométrico es: "Al ser triángulos rectángulos con un ángulo agudo igual, se deduce que el otro ángulo mide lo mismo en ambos triángulos y, por lo tanto, son semejantes". Para encontrar los valores de las longitudes que no se conocen, los alumnos deben calcular la razón de semejanza que debiera existir entre el triángulo A y los demás triángulos, para lo cual ayuda referirse al contexto que están modelando esos triángulos.

Por ejemplo, para encontrar la medida de la altura que alcanza la escalera D en la pared al quedar las zancas a una distancia de 1.96 m, se plantea la razón de semejanza que hay con la correspondiente distancia a la que se encuentran la escalera A de la pared, 1.12 m, y se obtiene:

$$\frac{1.96}{1.12} = \frac{x}{1.66}$$

$$1.75 = \frac{x}{1.66}$$

$$x = 1.75 \times 1.66 = 2.905 \text{ m}$$

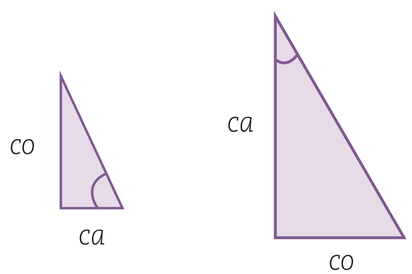
Una vez calculada la razón de semejanza que hay entre los triángulos A y D (1.75), es posible obtener la medida de la longitud de la escalera D, 3.5 m (porque $\frac{1.96}{1.12} = \frac{x}{2}$, de donde $x = 1.75 \times 2 = 3.5$ m).

Y de manera similar se obtienen las medidas de las otras longitudes.

La parte medular de la sesión se encuentra en los cocientes que los alumnos anotarán en la tabla. Calcularán el seno, coseno y tangente del ángulo de 56°, aunque aún no se introducen sus nombres. En la puesta en común enfatice que los cocientes que calcularon son constantes porque siempre se tienen los mismos valores, a pesar de que se calculan en triángulos con diferentes medidas. Esta idea se reforzará continuamente y se formalizará en la sesión 4. Vea la siguiente tabla donde se aprecia lo señalado.

	Situación			
	A	B	C	D
Longitud de la escalera (en m)	2	2.5	3	3.5
Distancia de la escalera a la pared (en m)	1.12	1.4	1.68	1.96
Altura que alcanza la escalera en la pared (en m)	1.66	2.075	2.49	2.905
Ángulo que la escalera forma con el piso	56°	56°	56°	56°
$C_1 = \frac{\text{altura que alcanza en la pared}}{\text{longitud de la escalera}}$	$\frac{1.66}{2} = 0.83$	$\frac{2.075}{2.5} = 0.83$	$\frac{2.49}{3} = 0.83$	$\frac{2.905}{3.5} = 0.83$
$C_2 = \frac{\text{distancia de la escalera a la pared}}{\text{longitud de la escalera}}$	$\frac{1.12}{2} = 0.56$	$\frac{1.4}{2.5} = 0.56$	$\frac{1.68}{3} = 0.56$	$\frac{1.96}{3.5} = 0.56$
$C_3 = \frac{\text{altura que alcanza en la pared}}{\text{distancia de la escalera a la pared}}$	$\frac{1.66}{1.12} = 1.4821$	$\frac{2.075}{1.4} = 1.4821$	$\frac{2.49}{1.68} = 1.4821$	$\frac{2.905}{1.96} = 1.4821$

En la secuencia 8, "Teorema de Pitágoras 1", los alumnos aprendieron que los lados que forman el ángulo recto en un triángulo rectángulo reciben el nombre de catetos; en esta sesión aprenderán a identificarlos como el cateto adyacente y el cateto opuesto a un ángulo no recto del triángulo rectángulo.



Permita que sean los alumnos quienes construyan la definición a partir de observar y analizar los catetos en relación con los ángulos marcados, de donde se espera que observen que el cateto adyacente a un ángulo es el que, junto con la hipotenusa, forma parte del ángulo agudo, mientras que el cateto opuesto es aquel que no forma parte del ángulo. Saber identificar el cateto opuesto y el adyacente a un ángulo es esencial para el trabajo con razones trigonométricas.

En la actividad 4 se pide a los alumnos completar la tabla, parte medular de la sesión 2, ya que se usan las definiciones de las razones trigonométricas:

$$\frac{\textit{cateto opuesto}}{\textit{hipotenusa}}; \frac{\textit{cateto adyacente}}{\textit{hipotenusa}}; \frac{\textit{cateto opuesto}}{\textit{cateto adyacente}}$$

No es necesario que mencione cómo se llaman esos cocientes, esto se hará en la siguiente sesión. La idea es que los calculen a partir de tomar las medidas necesarias. Es muy probable que, cuando haga la puesta en común, algunos de estos cocientes no sean exactamente iguales. Puede deberse a la imprecisión en las medidas; comente con ellos la dificultad de tomar medidas exactas, pues es un tema de gran valor formativo. Independientemente de que las diferencias sean significativas o no, invítelos a que analicen si se debieron a errores al hacer los cálculos o al elegir los valores de los catetos opuestos o adyacentes. En la siguiente tabla se presentan los resultados que pudieran obtener los alumnos.

	co	ca	h	$\frac{co}{h}$	$\frac{ca}{h}$	$\frac{co}{ca}$
A	3	4	5	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$
B	1.5	2	2.5	$\frac{1.5}{2.5}$	$\frac{2}{2.5}$	$\frac{1.5}{2}$
C	2.25	3	4	$\frac{2.25}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2.25}{3}$
D	0.8	1	1.28	$\frac{0.8}{1.28}$	$\frac{1}{1.28}$	$\frac{0.8}{1}$
E	3.75	5	6.25	$\frac{3.75}{6.25}$	$\frac{5}{6.25}$	$\frac{3.75}{5}$

Puesto que en la secuencia "Razones trigonométricas 1" y en las sesiones 1 y 2 de la presente secuencia se han introducido las nociones sobre razones trigonométricas, se justifica que la sesión 3 se inicie con la definición formal de las razones trigonométricas: seno, coseno y tangente de un ángulo.

Los alumnos se han acercado al concepto y ahora se formaliza la definición, esto es, el nombre que reciben los cocientes que han obtenido y la manera en que se simbolizan.

Es probable que en la actividad 3 los alumnos piensen que la hipotenusa mide 5 cm dado que

$$\textit{seno } M = \frac{\textit{cateto opuesto}}{\textit{hipotenusa}} \text{ y el } \textit{sen } M = \frac{3}{5}$$

Es importante que les haga notar que el segmento NP mide 6 cm, y que es el cateto opuesto del ángulo M. Se espera, entonces, que reconozcan que la hipotenusa tiene que medir 10 cm y que el $\textit{sen } M = \frac{6}{10}$, es equivalente a $\textit{sen } M = \frac{3}{5}$, una vez que se reduce la fracción. Si lo considera conveniente, pregunte cómo calcularían la medida del segmento MP.

En la sesión 4, los alumnos continúan usando las razones trigonométricas y reafirman varias ideas importantes. Una de ellas es que, cuando se hacen mediciones, pueden surgir diferencias debidas a la imprecisión de los instrumentos (como se comentó en la secuencia 15); la otra es que el valor de las razones depende de la medida del ángulo y no del tamaño del triángulo al que pertenece el ángulo. Permita que sean los alumnos quienes midan y hagan los cálculos necesarios, incluso si cometen errores al medir o al calcular, ya que al hacerlo obtienen un mayor valor formativo que si se les dan directamente las medidas. En la actividad 3, invítelos a que argumenten usando hechos geométricos, por ejemplo: "Todos los triángulos rectángulos que tienen un ángulo agudo correspondiente igual son semejantes, y al ser semejantes, tienen sus lados proporcionales, por lo que los valores de las razones $\frac{co}{h}$, $\frac{ca}{h}$, $\frac{co}{ca}$ son los mismos para cualquiera de esos triángulos".

Con las actividades realizadas en la secuencia, los alumnos están preparados para construir tablas de valores de las razones seno, coseno y tangente de un ángulo. Esto lo harán en la sesión 5 para los ángulos de 10°, 20°, 30°, 45° y 50°. Es importante que elaboren esta tabla porque les permitirá comprender de dónde surgen los valores de las razones para los diferentes ángulos cuando consultan una tabla de razones trigonométricas o cuando usan la calculadora para indagar algún valor en particular.

La actividad 2 corresponde a la resolución de una situación que implica determinar la medida del cateto opuesto en un triángulo rectángulo; es importante que les proporcione tiempo suficiente para que discutan y averigüen cómo calcular el cateto opuesto al ángulo de 70° y la hipotenusa. Se espera que los alumnos noten que para calcular uno de los valores requieren de alguna razón trigonométrica, ya que para usar el teorema de Pitágoras necesitan las medidas de dos lados y, en este caso, sólo tienen la medida de un lado y un ángulo. No obstante, una vez que hayan calculado ya sea el cateto opuesto o la hipotenusa, tendrán oportunidad de decidir si usan otra razón trigonométrica o el teorema de Pitágoras. Si en la puesta en común sólo surge uno de los dos procedimientos, usted puede motivarlos preguntándoles si habrá otra manera de hacerlo.

Pautas para la evaluación formativa

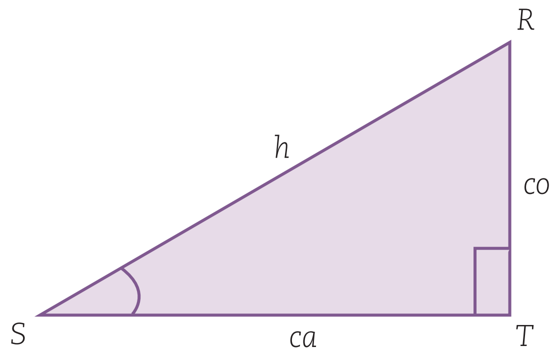
Observe si los alumnos:

- Identifican correctamente la hipotenusa, el cateto opuesto y el cateto adyacente al ángulo agudo indicados en un triángulo rectángulo.
- Calculan correctamente los valores de los cocientes: $\frac{co}{h}$, $\frac{ca}{h}$, $\frac{co}{ca}$.
- Reconocen estos cocientes con los nombres de seno, coseno y tangente de un ángulo, respectivamente.
- Reconocen que el valor de las razones trigonométricas depende de la medida del ángulo.
- Calculan el valor del seno, el coseno y la tangente de un ángulo agudo a partir de las medidas de los lados de un triángulo rectángulo.

¿Cómo apoyar?

Es muy probable que los alumnos tengan problemas para dar los argumentos geométricos necesarios en esta secuencia porque no tienen afianzados los conocimientos sobre semejanza de triángulos. De ser necesario, pida que revisen las secuencias donde estudiaron los criterios de semejanza de triángulos, en particular la secuencia 15.

Si observa que los alumnos tienen dificultades para contestar la actividad 2 de la sesión 3, sugiérales que identifiquen los elementos de cada triángulo rectángulo, como lo hicieron en la actividad 3 de la sesión 2, y luego planteen las razones para obtener las medidas que se requieren. Por ejemplo:



$$sen\ S = \frac{co}{h} = \frac{RT}{RS} = \frac{\square}{\square}$$

$$cos\ S = \frac{ca}{h} = \frac{ST}{SR} = \frac{\square}{\square}$$

$$tan\ S = \frac{co}{ca} = \frac{RT}{ST} = \frac{\square}{\square}$$

¿Cómo extender?

Puede pedir que calculen las razones trigonométricas de ángulos diversos, por ejemplo, de 34°, 62°, 73°, 85°, etc., luego de que tracen, en su cuaderno, cualquier triángulo rectángulo que tenga el ángulo de la medida elegida. Indique que tomen las medidas de los catetos y la hipotenusa para que luego calculen el seno, el coseno y la tangente del ángulo. Después pueden comprobar usando en la calculadora las teclas de las razones trigonométricas, y si llegaron a un resultado diferente, analicen a qué se debió.

También puede solicitar que calculen los valores de las razones trigonométricas para los ángulos que no han sido indicados en las actividades de las sesiones, por ejemplo, el caso de los ángulos B, E y R de los triángulos de la actividad 2 de la sesión 3.

Secuencia 17 Teorema de Pitágoras 2

(LT, Vol. II, págs. 78-85)

Tiempo de realización	4 sesiones
Eje temático	Forma, espacio y medida
Tema	Medida
Aprendizaje esperado	Formula, justifica y usa el teorema de Pitágoras.
Intención didáctica	Que los alumnos apliquen el teorema de Pitágoras en la resolución de problemas con contextos reales o puramente matemáticos.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisual** • *Aplicaciones del teorema de Pitágoras* **Informático** • *Uso del teorema de Pitágoras en las figuras geométricas*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recursos audiovisuales** • *Usos y aplicaciones del teorema de Pitágoras* • *Aspectos didácticos del teorema de Pitágoras*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Apliquen el teorema de Pitágoras en la resolución de problemas en un contexto real.
- Sesión 2. Usen el teorema de Pitágoras para calcular perímetros de figuras geométricas.
- Sesión 3. Utilicen el teorema de Pitágoras en el cálculo de áreas de figuras geométricas.
- Sesión 4. Resuelvan problemas que implican aplicar el teorema de Pitágoras.

Acerca de...

En la secuencia 8, "Teorema de Pitágoras 1", los alumnos exploraron y justificaron de diferentes maneras el teorema de Pitágoras. En esta secuencia tendrán la oportunidad de conocer diversas aplicaciones de este teorema, tanto en contextos reales como en situaciones puramente geométricas y de medición de perímetros y áreas de polígonos.

Para resolver estos problemas, necesitarán recordar que el perímetro es la medida del contorno de una figura y que se calcula sumando la medida de todos sus lados. También habrá que repasar que el área de una figura es la medida de su superficie y que, dependiendo de la figura, se requieren diversos datos: lados, altura, base, base mayor, base menor, diagonal mayor, diagonal menor o apotema. Deben recordar, además, que para obtener estos datos cuando no se conocen explícitamente, hay que recurrir a las propiedades geométricas de las figuras, en particular las de los polígonos que han estudiado tanto en este grado como en los grados anteriores, por ejemplo, el método de triángulación para obtener el área de un polígono o de una figura irregular.

En el desarrollo de las actividades de esta secuencia, los alumnos se enfrentarán constantemente al cálculo de las raíces cuadradas, en algunos casos exactas y en otras no. Las raíces que no son exactas son números irracionales, es decir, son números que tienen una parte decimal infinita y no periódica, por lo que en ocasiones conviene mantenerlos expresados como raíz, entre otras razones, porque da cuenta de dónde surge el valor, porque es más preciso y reduce el error de cálculo. Para realizar los cálculos necesarios, solicite que utilicen sólo dos decimales, lo cual les permitirá sumarlos (por ejemplo, para el cálculo de perímetros). No olvide siempre mencionar que en estos casos el resultado que encuentran es aproximado. Si quisieran que el resultado fuera exacto, tendrían que dejar las raíces indicadas. Por ejemplo, el valor de un perímetro podría ser $P = 7 + \sqrt{5}$.

Esto es válido aunque los alumnos no estén familiarizados con este tipo de expresiones, pero representan una oportunidad para que le den significado a este tipo de números y no se limiten a dar por correcto o incorrecto un resultado.

Sobre las ideas de los alumnos

No obstante que los alumnos estudian el perímetro y el área desde su educación primaria, es probable que aún en tercer grado de secundaria algunos no tengan claros estos conceptos ni las unidades de medida con las que se expresa cada una de estas magnitudes, ya que un error común es expresar el área en unidades lineales o el perímetro en unidades cuadradas, por lo que es importante que preste especial atención a estos detalles.

¿Cómo guío el proceso?

Se sugiere que antes de que indique a los alumnos que abran su libro, plantee el problema de la sección "Para empezar". Permita que por equipos discutan y lo resuelvan. Luego haga una puesta en común para comparar las respuestas y los procedimientos de los equipos.

La sugerencia de que plantee el problema antes de que los alumnos abran su libro obedece a que la secuencia lleva en el título "teorema de Pitágoras", lo que seguramente influirá en que utilicen dicho teorema. Al evitar ver el libro, los alumnos podrán reflexionar y explorar métodos para encontrar la solución.

Se espera que en la puesta en común algunos equipos propongan el teorema de Pitágoras para resolver el problema; si no lo hacen, usted puede preguntarles: "¿Será útil el teorema de Pitágoras? Si es así, ¿cómo podríamos usarlo?".

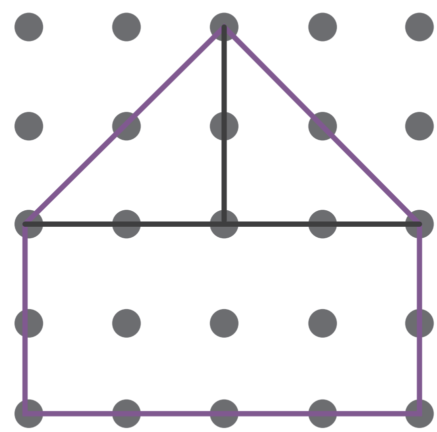
Ahora podrán comenzar la actividad 1 de la sesión 1, donde tendrán que reafirmar el cálculo de la hipotenusa, dadas las medidas de los catetos (como lo hicieron en el problema inicial), obteniendo como resultados:

- Sí, porque $c = \sqrt{(9 + 2.25)} = \sqrt{11.25} = 3.3541$;
- Sí, porque $c = \sqrt{5} = 2.2361$;
- Sí, porque $c = \sqrt{6.8} = 2.6076$;
- Sí, porque $c = \sqrt{13} = 3.6055$.

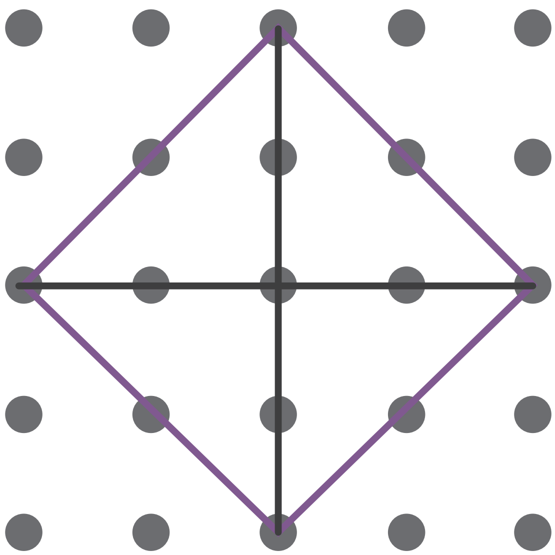
Aunque matemáticamente es posible pasar el espejo por la puerta en cada caso, será importante que comenten los riesgos que implica manipular materiales frágiles al pasarlos por un espacio tan justo.

La actividad 2 ofrece un reto diferente: calcular la medida de un cateto cuando se conocen las medidas del otro cateto y la hipotenusa. Por ejemplo, para el caso de la primera puerta se representa como $5^2 = 3.5^2 + b^2$, y queda como $b = \sqrt{25 - 12.25} = \sqrt{12.75} = 3.5707$.

Para la sesión 2, solicite a cada pareja que resuelva la actividad 1, y que si bien en el libro sólo deben poner el resultado, noten que se les pide que describan la manera en que calcularon cada perímetro. Por ejemplo, en el caso del pentágono, se puede descomponer en dos triángulos rectángulos iguales y un rectángulo.

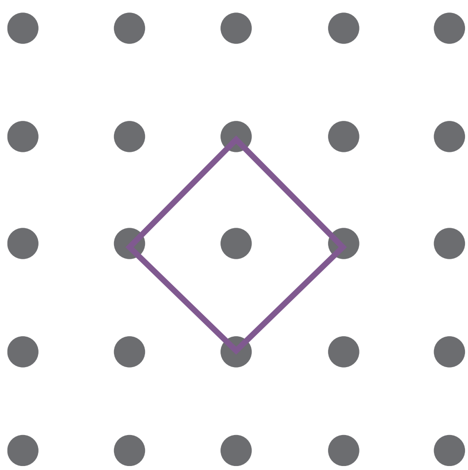


En el caso del cuadrado, a partir de sus diagonales (que son perpendiculares) se obtienen cuatro triángulos rectángulos iguales (que también son iguales a los del pentágono).

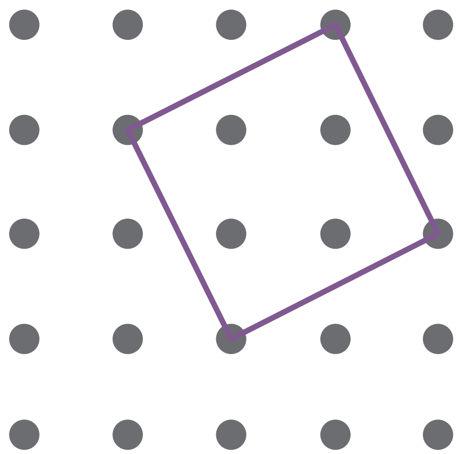


La medida de la hipotenusa de cada triángulo rectángulo es $\sqrt{2^2 + 2^2}$, de donde la hipotenusa es igual a $\sqrt{8} = 2\sqrt{2} = 2.82$, por lo que el perímetro del cuadrado es $4\sqrt{8}$.

En la actividad 2 seguramente tendrán dificultad con los cuadrados de áreas de dos unidades cuadradas y de cinco unidades cuadradas. Lo anterior se debe a que los alumnos tienen una imagen estereotipada de los cuadrados, y suelen construirlos con los lados paralelos a los bordes de la página (lados horizontales y verticales), mientras que en este caso tendrán que construirlos con los lados inclinados.



Si nota que se les dificulta mucho resolver la actividad, puede apoyarlos sugiriendo: "¿Y si pones los lados inclinados?, ¿se podrá?".



Estos cuadrados miden por lado $\sqrt{2}$ y $\sqrt{5}$; redondeando a dos decimales sus valores son, respectivamente, 1.41 y 2.23. Para que los alumnos vean la diferencia entre ambas expresiones, puede pedir que calculen el área del cuadrado con la raíz indicada o con decimales y noten que, al usar estos últimos, se obtiene un número muy cercano a la medida del área. Por ejemplo, para el primer cuadrado se tiene:

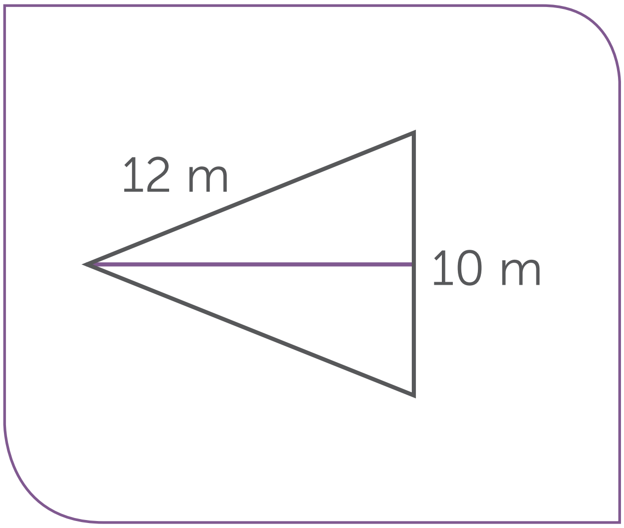
$$\textit{Área} = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$$
$$\textit{Área} = 1.41 \times 1.41 = 1.9881$$

En el caso de la actividad 3, se requiere dibujar una figura que tenga un perímetro mayor que $4 + 2\sqrt{17} + 2\sqrt{5} = 16.71$.

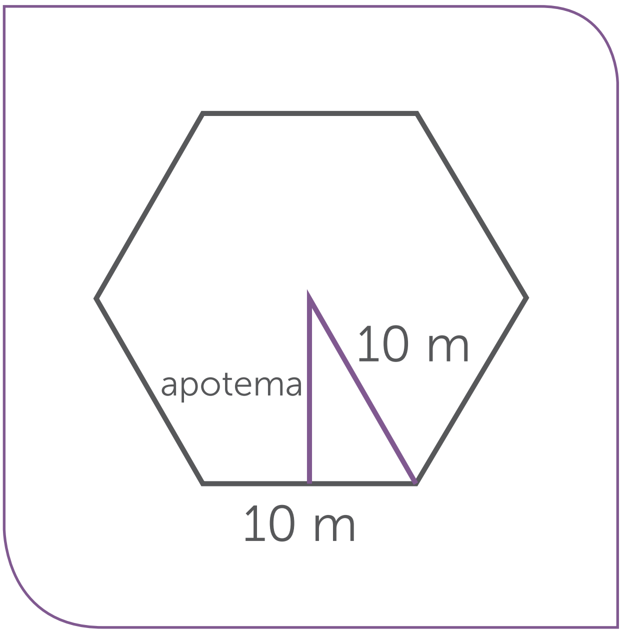
El trabajo en la sesión 3 es una buena oportunidad para repasar con los alumnos lo que es el área y cómo calcularla en diferentes figuras geométricas. Como ya se mencionó, no es necesario memorizar las fórmulas; por esta razón, aparecen indicadas en la tabla.

Al llegar al triángulo, se darán cuenta de que falta la altura; es probable que intuyan que, para calcularla, tendrán que usar el teorema de Pitágoras, así como para calcular la altura del trapecio isósceles y la del triángulo isósceles.

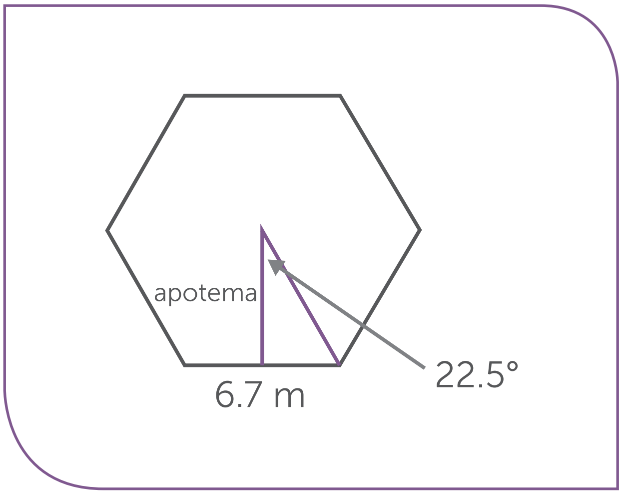
En el caso del triángulo isósceles conviene trazar la altura correspondiente al lado de 10 cm y usar el teorema de Pitágoras para calcular su medida.



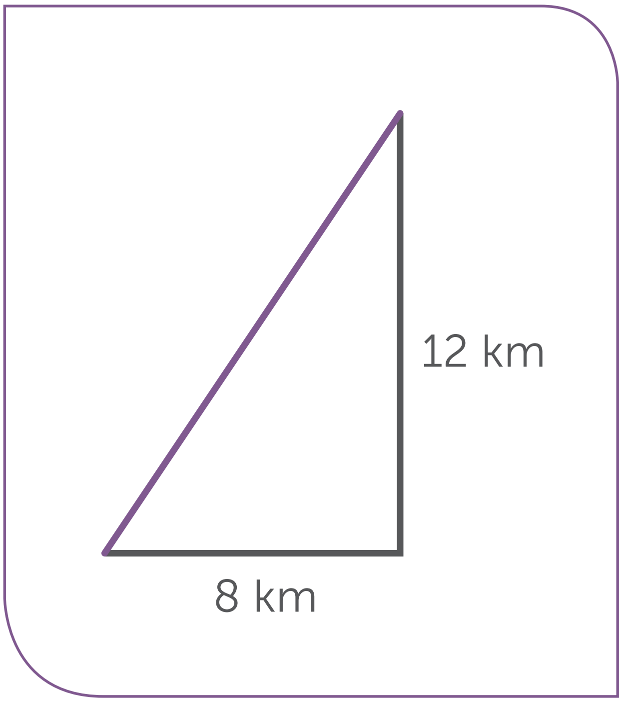
En el caso del hexágono y el octágono regular, los alumnos podrán realizar diferentes procedimientos. Por ejemplo, descomponerlos en otras figuras cuya área sepan calcular. Dado que se les proporciona la fórmula, es probable que quieran aplicarla, y entonces tendrán que calcular la medida de la apotema. En el caso del hexágono, puede calcularse usando el teorema de Pitágoras. Los alumnos tendrán que recordar que el hexágono puede dividirse en seis triángulos equiláteros.



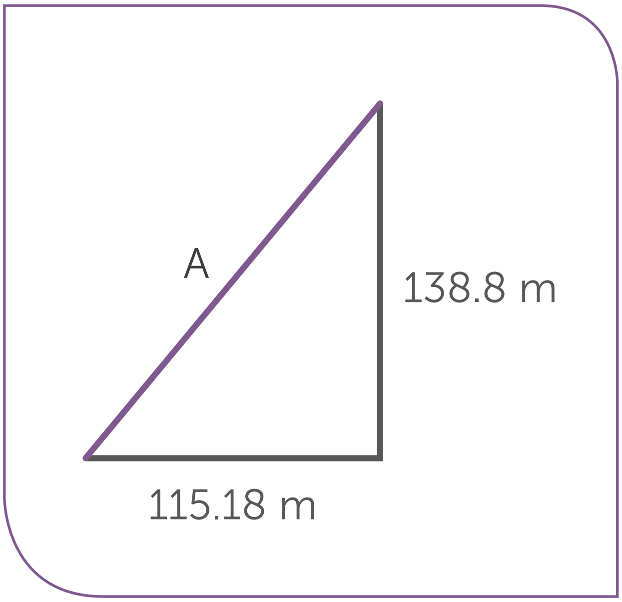
El caso del octágono es diferente, ya que, para calcular la medida de la apotema, deberán tener presente cómo obtener el ángulo central (360° entre 8), sacar la mitad de éste y, con ese dato, obtener la tangente del ángulo; pueden usar calculadora.



En la sesión 4 los alumnos resolverán problemas diversos. Sugierales que, cuando sea necesario, hagan un diagrama que represente el problema; esto les permitirá identificar el triángulo rectángulo que tienen que considerar para encontrar la medida que se pide. Por ejemplo, para el problema del inciso a), el diagrama será:



Los problemas c) y e) involucran figuras tridimensionales, por lo que también se recomienda que los alumnos representen la situación con figuras en dos dimensiones. Por ejemplo, para el problema c), el triángulo a considerar es el siguiente:



Pautas para la evaluación formativa

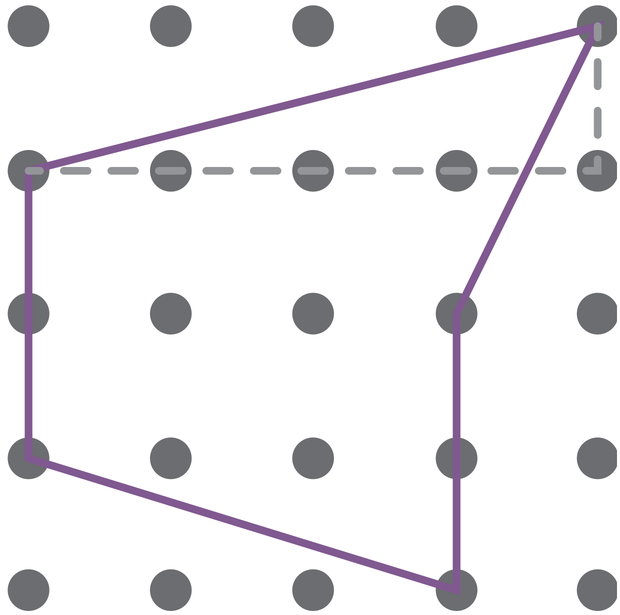
Observe si los alumnos:

- Aplican el teorema de Pitágoras para calcular un lado de un triángulo conociendo los otros dos.
- Usan el teorema de Pitágoras para calcular las medidas que requieren para obtener el perímetro y el área.
- Utilizan el teorema de Pitágoras para representar problemas que lo implican.

¿Cómo apoyar?

Cada vez que lo considere necesario, ayude a los alumnos a visualizar e identificar el triángulo rectángulo que está en juego en el problema. Por ejemplo, en los problemas de las puertas, el triángulo rectángulo está formado por dos lados de las puertas y la diagonal del rectángulo; a veces los alumnos no lo visualizan, por lo que es importante hacer énfasis en esto.

Para calcular la medida del lado en las figuras, también es importante apoyar a los alumnos a visualizar el o los triángulos rectángulos. Por ejemplo, en la siguiente figura hay que calcular la hipotenusa de un triángulo cuyos catetos miden 1 y 4 unidades.



También apóyelos a visualizar las relaciones y propiedades de los triángulos rectángulos para determinar las medidas. Por ejemplo, los dos primeros triángulos rectángulos de la sesión 2 son semejantes y su razón de semejanza es 4; al calcular la hipotenusa del primer triángulo se aplica el teorema de Pitágoras y se obtiene $\sqrt{2}$. Entonces, si se aplican los criterios de semejanza, se puede observar que la medida de la hipotenusa del triángulo 2 es $4\sqrt{2} = 5.6568$ y, si se determinan las medidas de las hipotenusas de los triángulos de manera independiente, se obtiene que la hipotenusa del triángulo 2 es $\sqrt{32} = 5.66$. Si lo considera necesario, en la discusión grupal destaque estas relaciones para que los alumnos visualicen de manera integral las actividades y no sólo se concentren en ciertos resultados particulares o aislados.

¿Cómo extender?

Puede complejizar algunos de los problemas. Por ejemplo, en la sesión 3 pida que construyan un triángulo cuya área sea de 10 unidades.

En el caso del problema de la pirámide de Keops, puede pedir que calculen la medida de las aristas de sus caras.

Secuencia 18 Tendencia central y dispersión de dos conjuntos de datos 1

(LT, Vol. II, págs. 86-93)

Tiempo de realización	4 sesiones
Eje temático	Análisis de datos
Tema	Estadística
Aprendizaje esperado	Compara la tendencia central (media, mediana, moda) y de dispersión (rango y desviación media) de dos conjuntos de datos.
Intención didáctica	Que los alumnos comparen los valores de las medidas de tendencia central y de dispersión de dos conjuntos de datos estadísticos para analizar situaciones que implican tomar decisiones de manera informada.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisual** • *Comparación de dos conjuntos de datos estadísticos* **Informático** • *Memorama: tus derechos* *(Disponible en http://somosaudiencias.ift.org.mx/ami_ninios_memorama.php)*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recursos audiovisuales** • *Aspectos didácticos del análisis de datos* • *Recursos para el estudio de la estadística*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Revisen la manera de calcular las medidas de tendencia central, rango y desviación media que ya conocen, así como su significado e interpretación en la situación que se les presenta.
- Sesión 2. Identifiquen aspectos relevantes de la representación gráfica de los datos para comparar dos conjuntos de datos; generen conjuntos de datos que satisfagan valores específicos de la mediana, la media aritmética y el rango.
- Sesión 3. Agrupen datos en intervalos y comparen los valores de las medidas de tendencia central, del rango y la desviación media.
- Sesión 4. Comparen dos conjuntos de datos estadísticos y los analicen e interpreten dentro de un proceso estadístico integrado.

Acerca de...

Con el propósito de apoyar a los alumnos en el logro del aprendizaje esperado, se han diseñado dos secuencias didácticas; la 18 es la primera y en ella se destaca la importancia de la lectura de las gráficas y la posibilidad de obtener información a partir de la representación de los datos, así como el uso de las medidas estadísticas que se han estudiado en los tres grados de Telesecundaria. Usted, al permitir que los alumnos respondan las preguntas con los conocimientos que se han construido hasta el momento, podrá valorar lo que han logrado, así como lo que es necesario reforzar o profundizar para que tengan un buen dominio de los conocimientos estadísticos y reflejen un mejor razonamiento estadístico.

En esta secuencia se propone empezar con una discusión sobre el uso y la importancia de la estadística y resaltar la necesidad de centrar su enseñanza en actividades que involucren al alumno en la resolución de problemas reales, proyectos estadísticos y análisis de datos reales. De ahí que la mayoría de las actividades estén vinculadas a la información que corresponde a algunos de los resultados publicados en una encuesta realizada a 24 691 jóvenes de entre 12 y 29 años de edad, en la cual la variable elegida para el estudio fue el número de horas al día que pasan frente a la pantalla de algún dispositivo electrónico, como teléfono celular, televisión, computadora, consola de videojuegos o tableta.

Con la realización de las actividades que integran las sesiones, se espera que los alumnos reconozcan los cuatro componentes principales de la estadística: plantear preguntas, recopilar datos, analizarlos e interpretarlos, todo como un proceso integrado. Se espera también que los alumnos efectúen procedimientos de cálculo de medidas y de construcción de representaciones; la esencia de esto se encuentra en que los valores y las representaciones estadísticas obtenidas puedan significar algo para los alumnos desde la situación que se les presenta como contexto. Éste es, en cierto modo, el fundamento del razonamiento estadístico: producir una mejor comprensión de los datos en un contexto particular.

Por otra parte, el lenguaje es generalmente el medio principal para comunicar nuestras ideas y, en particular, las ideas estadísticas; también es el medio por el cual los alumnos construyen su conocimiento y el que usan para procesar sus ideas. Sin embargo, el lenguaje en la estadística es uno en particular, y es importante que los alumnos lo desarrollen, tanto en su forma escrita como de manera oral, con el fin de expresar su avance en la comprensión del significado de los datos estadísticos. Así, pedir a los alumnos que describan un conjunto de datos relacionándolos con un contexto específico es un primer paso en el desarrollo del lenguaje estadístico. De ahí que se sugiera que no se limite a considerar si una respuesta es correcta o no, sólo por el valor o resultado que se da, sino que se promueva que los alumnos expongan sus argumentos para observar cuáles son algunos de los otros factores que consideran, como la lógica y la experiencia.

Otro aspecto fundamental es que los alumnos comprendan que las medidas de dispersión complementan las de posición central para caracterizar una distribución.

En esta secuencia, los alumnos deben aprender que los datos se pueden reorganizar y comparar con nuevos conjuntos de datos, como los que obtendrán al hacer su encuesta. Este tipo de actividades permite estudiar algunos de los elementos del razonamiento estadístico, como la *transnumeración*, que consiste en transformar la información usando conocimientos básicos de aritmética para facilitar la comprensión.

Sobre las ideas de los alumnos

Se espera que los alumnos, en lo referente a conocimientos y habilidades estadísticas, sean capaces de leer, interpretar, organizar, evaluar críticamente y apreciar información estadística relacionada con contextos sociales.

Tal vez muchos alumnos piensen que hacer una gráfica, calcular una media aritmética o predecir una tendencia en un conjunto de datos son actividades relativamente independientes que se

Pregunta	Gráfica grupo A	Gráfica grupo B
¿Se forma algún bloque de datos? ¿Dónde?		
¿Hay algún hueco o corte? ¿Dónde?		
¿Hay valores atípicos de los datos? ¿Cuáles?		

Glosario
Valor atípico es el valor de los datos que está más lejos de los demás por ser inusualmente mayor o menor que el resto. En inglés se dice *outlier*.

pueden llevar a cabo para un conjunto de datos en particular, pero es importante que haga hincapié en que todas estas actividades están completamente relacionadas entre sí, en especial en la estadística.

Se considera que la mayoría de los alumnos es capaz de abordar la tarea de comparar conjuntos de datos enfocándose en datos específicos. Una manera de hacerlo es comparar los datos más grandes en los dos conjuntos, y la otra es comparar los conjuntos de datos a partir de un dato especifico y contar el número de datos que son iguales o mayores que él en cada conjunto.

¿Cómo guío el proceso?

Se sugiere que en la sección "Para empezar" destaque la importancia de la estadística en diferentes aspectos y áreas del conocimiento. Puede tomar como base el informe de la "Encuesta de Tendencias Juveniles 2018" o algún otro estudio que se encuentre en el portal del INEGI.

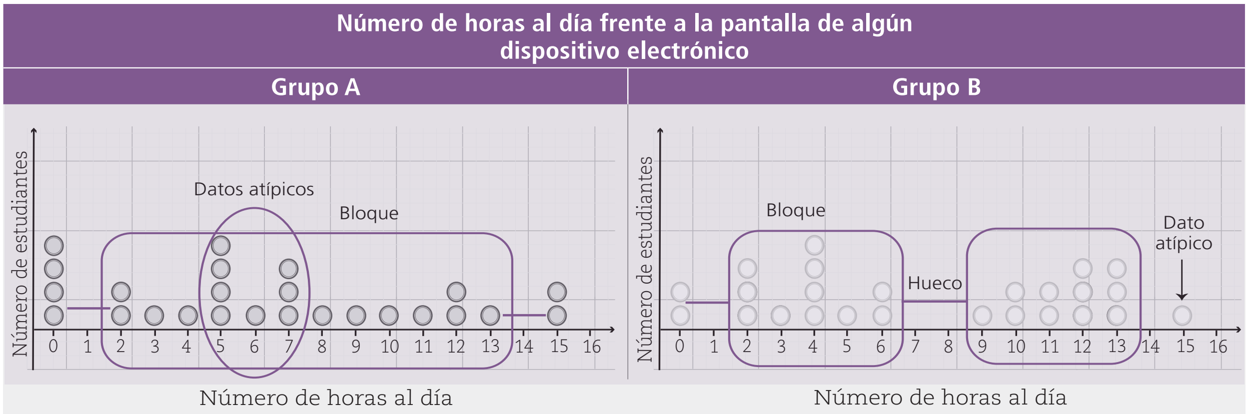
En cuanto a la sección "Manos a la obra", la primera actividad implica que los alumnos realicen diferentes niveles de lectura del gráfico y completen las tareas que se les indica.

Algunos alumnos pueden tener dificultades al dar respuesta a la pregunta del inciso e) de la actividad 1 de la sesión 1: "¿Es posible conocer el promedio del número de horas al día que los jóvenes pasan al frente de la pantalla de algún dispositivo?". Principalmente, porque hay tres medidas que pueden utilizarse como promedio. Recuerde a los alumnos que, cuando se menciona *promedio* se refiere a la media aritmética, pero también se aplica a la mediana y a la moda por ser medidas de tendencia central, como lo estudiaron en primer grado. Si la respuesta es considerar como promedio la media aritmética, entonces será importante revisar de qué manera se podría obtener su valor. Por un lado, se conoce el número total de jóvenes que contestaron la pregunta de la encuesta y, con los diferentes porcentajes de respuesta que aparecen en la primera columna de barras apiladas, se puede determinar cuántos jóvenes contestaron de 1 a 3 horas al día, de 4 a 7, etc. (esto es, 29% de 24 691 más 34% de 24 691, etcétera). Luego sería necesario calcular la marca de clase (el punto medio de cada intervalo: el de 1 a 3 horas al día es 2; el de 4 a 7 es 5.5, etcétera). Una vez que se han reorganizado esos datos, se puede calcular el valor de la media aritmética.

Los procedimientos para calcular las medidas de tendencia central en datos agrupados no corresponden al programa de estudio de la educación secundaria; sin embargo, los alumnos tienen elementos para hacer esta reflexión a partir de los conceptos y procedimientos estadísticos que han estudiado, incluyendo también los de la elaboración de histogramas y polígonos de frecuencia. Además, hacer esta reflexión les permite desarrollar su razonamiento estadístico.

En el caso de la pregunta del inciso f), "¿Quiénes pasan más horas frente a una pantalla, las mujeres o los hombres?", la respuesta es "las mujeres", porque hay un mayor porcentaje que contestó más de 12 horas al día. Y, respecto a "¿En qué intervalo de edad se concentra la mayoría?", se refiere a 14% de las mujeres de 12 a 17 años. Finalmente, en cuanto a la dispersión de los datos, se puede considerar que es mínima la diferencia entre la variabilidad de los datos que corresponden a las mujeres de 12 a 17 y los de 18 a 29 años, incluso al comparar con los datos de los hombres jóvenes y revisar los porcentajes que se presentan para cada intervalo de edad y de horas al día. Al determinar cuál es el rango de la variable de estudio: el número de horas al día que pasan al frente de la pantalla de algún dispositivo, se tiene de 0 a más de 12 horas al día; es importante discutir con los alumnos cuál puede ser el número máximo de horas al día. Tal vez algunos digan que 24 horas, por ser la duración de un día, quizá otros señalen que 16 horas por considerar 8 para dormir. Justamente, de lo que se trata es de que expongan sus argumentos; pueden incluir algunos por su experiencia y otros por la lógica que tienen, lo que también tiene un papel importante en el desarrollo de su razonamiento estadístico.

En la actividad 2 los alumnos comparan dos conjuntos de datos con 25 elementos cada uno. En el inciso a) se pregunta cuál de dos grupos con igual número de alumnos pasa más tiempo al día frente a la pantalla de algún dispositivo electrónico. Posiblemente algunos comparen el número máximo de horas al día que pasan



frente a la pantalla de un dispositivo electrónico en cada grupo para contestar la pregunta. En este caso, coincide en ambos grupos que el máximo dato es 15 horas al día. Otros alumnos, además, pueden considerar que, en el grupo A, dos alumnos lo indicaron, y en el B, sólo uno, por lo que su respuesta al inciso a) será que los alumnos del grupo A pasan más tiempo al día frente a la pantalla de algún dispositivo.

Quizá para responder al inciso a) otros alumnos cuenten el número de alumnos de cada grupo que indicaron que pasan de 10 a 15 horas al día frente a una pantalla. Como se observa, en estos casos no hay necesidad de considerar a quienes indiquen que no pasan ninguna hora frente a una pantalla u otros datos menores a 10 horas al día. En un primer momento, esas respuestas son correctas y factibles; sin embargo, se pretende que en el transcurso del desarrollo de la actividad y de la secuencia, los alumnos hagan un análisis más profundo usando los valores de las medidas de tendencia central y de variabilidad (rango y desviación media).

Puede basarse en la tabla siguiente para revisar el trabajo de los alumnos.

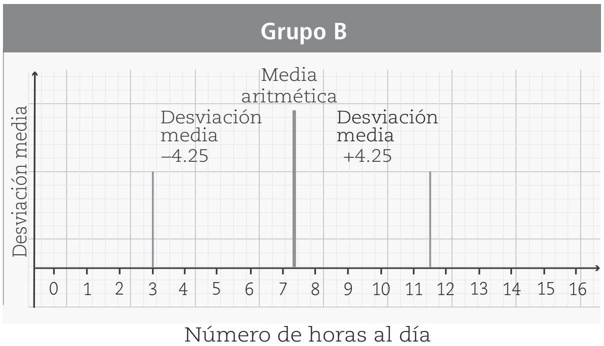
Medida	Grupo A	Grupo B
Media	6.52	7.32
Mediana	6	6
Moda	0 y 5	4
Rango	15	15
Desviación media	3.8208	4.2528

En la pregunta del inciso h) se espera que los alumnos afirmen que en el grupo B hay mayor variabilidad, basándose en el valor de la desviación media, 4.25. Es posible que algunos aún no lo comprendan o den otra respuesta.

En la actividad 3 se propone una discusión grupal. Pida a los alumnos que piensen en las diferencias que hay entre los tipos de preguntas que se hicieron. Se espera que reconozcan que algunas preguntas piden simplemente información del gráfico, mientras que otras requieren de interpretaciones de los datos que se muestran en él. Además, es un buen momento para contrastar las respuestas de los incisos a) y b) de la actividad 2 con las de los incisos e) a h), debido a que el valor del promedio del número de horas al día que los alumnos pasan usando la pantalla de un dispositivo cambia, dependiendo de cuál medida de tendencia central consideren utilizar como promedio.

En la actividad 4, cuando se les cuestiona si consideran que los alumnos de telesecundaria pasan demasiado tiempo frente a la pantalla de algún dispositivo, luego de comparar el número de horas de los alumnos del grupo A con el de los alumnos del grupo B, a menudo contestan que sí, utilizando como justificación el valor de la moda o la diferencia entre los datos máximos para ambos grupos o en el conteo de datos máximos o en el conteo a partir de un dato específico. Rara vez se basan en la diferencia entre los valores de las medidas de tendencia central y de dispersión que encontraron e identificaron.

Con el trabajo de análisis de las actividades 1, 2 y 3 de la sesión 2, se espera que la mayoría de los alumnos visualice mejor y comprenda el significado de los valores de las medidas, en especial de la variabilidad de los datos a partir del análisis gráfico de la desviación media. La siguiente imagen le ayudará a resolver sus dudas con las actividades 2 y 3:



Respecto a la actividad 4 hay diferentes respuestas, porque siempre que se cumpla que la suma de los ocho datos sea igual que 40, la media aritmética será 5. En el inciso a), dos ejemplos de conjuntos de 8 datos con valor de media aritmética de 5 horas al día pueden ser: 2, 4, 8, 3, 8, 5, 6, 4 y 0, 9, 6, 4, 6, 5, 3, 7.

En el caso del inciso b), tres conjuntos de 8 datos que cumplen los valores de media de 5 horas al día y mediana de 4 horas al día pueden ser: 2, 3, 4, 4, 4, 7, 8, 8; 0, 1, 2, 3, 5, 9, 10, 10 y 2, 2, 3, 4, 4, 8, 8, 9.

El tercer conjunto de los datos también cumple con las condiciones del inciso d), ya que el rango es 7 debido a que 9 − 2 = 7, lo que hace que también sea una opción de respuesta del inciso e), junto con los conjuntos 3, 4, 4, 4, 4, 4, 7, 10; 2, 2, 3, 3, 5, 7, 9, 9 y 2, 2, 2, 2, 6, 8, 9, 9.

Una vez más, es importante señalar que cuando revisen las respuestas de manera colectiva, analice los argumentos de los alumnos para promover su razonamiento estadístico. Por ejemplo, en el último conjunto, 2, 2, 2, 2, 6, 8, 9, 9, ninguno de los 8 datos es igual al valor de su media aritmética (5), ni de su mediana (al ser un conjunto de número par de elementos, la mediana es igual que el promedio de los dos datos en las posiciones centrales: (2 + 6) / 2 = 4).

Se requiere que en la discusión grupal de la actividad 5 se analicen detenidamente las características de los conjuntos de datos que encuentren para que comprendan el significado de esas medidas, además de comprender la variabilidad de los conjuntos de datos que cumplen con las condiciones indicadas.

En la sesión 3, los alumnos deben reorganizar los datos del grupo A y del grupo B, considerando los mismos intervalos que se encuentran en el gráfico de la “Encuesta de Tendencias Juveniles 2018”, para hacer la comparación entre el total de ambos grupos y los resultados de dicha encuesta. Las respuestas de cada tabla son:

Intervalo de horas	Grupo A	Grupo B	Total (en ambos grupos)
De 1 a 3	3	4	7
De 4 a 7	9	7	16
De 8 a 12	6	8	14
Más de 12	3	4	7
Nada	4	2	6

Medidas	Grupo A	Grupo B	Total (en ambos grupos)
Media aritmética	6.52	7.32	6.92
Desviación media	3.8208	2528	4.0368
Mediana	6	6	6
Moda	0 y 5	4	0
Rango	15	15	15

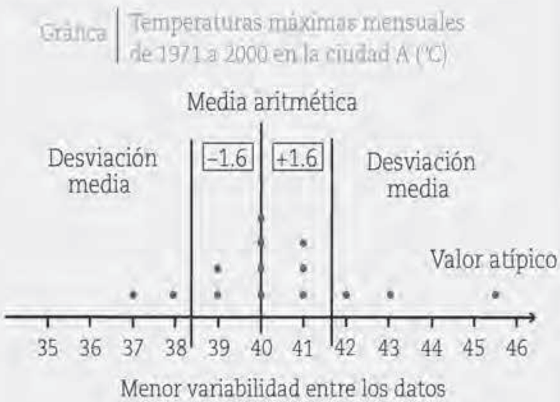
Respecto al total, se observa que el dato con mayor frecuencia es 0 horas al día y la media aritmética es casi 7 horas al día, mientras que el dato central en los tres conjuntos es 6 horas al día. Si se comparan estos valores con la información que se presenta en el gráfico de la sesión 1, se observa que se mantiene el intervalo de 4 a 7 horas al día como el más típico, por lo que es posible que utilicen esta información para determinar su respuesta en el inciso b) de la actividad 2; de este modo, los alumnos están considerando los conceptos estadísticos y el conocimiento del contexto para sacar conclusiones.

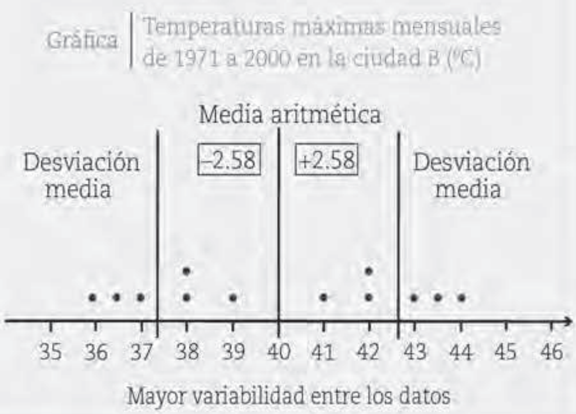
Guíe la organización de las actividades 3 y 4 para que planteen las preguntas y definan a quién le pedirán contestar la encuesta.

En la sesión 4, los alumnos reunirán, organizarán y analizarán los datos que recopilaron para interpretar sus distribuciones y los valores de las medidas que encuentren en las actividades 1, 2 y 3, y los compararán con los de las sesiones anteriores.

Pida que la actividad 4 la resuelvan individualmente y elaboren las representaciones gráficas que consideren convenientes para visualizar los resultados y, si hay interés, elaborar un informe.

Los valores de las medidas de tendencia central y de dispersión resumen la distribución y variabilidad de un conjunto de datos. Particularmente, la media aritmética nos indica el valor central que representa la mayoría de los valores de los datos y la desviación media nos dice qué tan alejados o cercanos están los datos respecto al valor de la media aritmética. Si se consideran ambos valores, comprenderemos mejor, al comparar dos o más conjuntos, cuál tiene mayor variabilidad (menos datos alrededor de la media aritmética) o menor variabilidad (más datos alrededor de la media aritmética), lo cual se puede apreciar con el valor de la desviación media.





Pautas para la evaluación formativa

Con la finalidad de verificar en qué medida se va logrando la intención didáctica que aparece en la ficha descriptiva, es necesario hacer un registro para cerciorarse de que los alumnos realizan lo siguiente:

- Distinguen entre un tipo de representación gráfica estadística y otra.
- Reconocen el significado de las medidas de tendencia central, de rango y desviación media involucradas en cada situación.
- Representan gráficamente las situaciones que implican reorganizar los datos.
- Interpretan los valores de las medidas de tendencia central y de dispersión respecto al contexto o situación que se analiza.

¿Cómo apoyar?

Si lo considera conveniente, podría pedir que calculen la desviación media de los conjuntos de datos que encuentren en la actividad 4 de la sesión 2 para comprender de qué manera se distribuyen los datos.

¿Cómo extender?

Si lo considera necesario —y con el propósito de consolidar y ampliar lo estudiado durante la secuencia—, puede utilizar *software* libre como CoDAP para efectuar los cálculos y las gráficas. Es válido el uso de calculadoras para realizar los cálculos de las medidas de tendencia central y de desviación media, pues con eso se facilitará la interpretación integral de los datos de un conjunto.

Si lo considera conveniente, para que los alumnos reflexionen acerca de las ventajas y desventajas del uso de los celulares y dispositivos electrónicos, consulte los siguientes artículos: "Niños y tecnología: ventajas e inconvenientes del uso de dispositivos móviles", en https://www.mepiar.com/ninos-y-tecnologia-ventajas-e-inconvenientes-del-uso-de-dispositivos-moviles/ y "Consecuencias físicas de abusar del móvil", en https://www.muyinteresante.es/tecnologia/fotos/consecuencias-fisicas-de-absar-del-movil/dolor-de-cuello

Secuencia 19 Eventos mutuamente excluyentes 2

(LT, Vol. II, págs. 94-101)

Tiempo de realización	4 sesiones
Eje temático	Análisis de datos
Tema	Probabilidad
Aprendizaje esperado	Calcula la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes.
Intención didáctica	Calcular la probabilidad de dos eventos mutuamente excluyentes.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisual** • *Probabilidad de eventos mutuamente excluyentes* **Informático** • *Probabilidad de eventos mutuamente excluyentes*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recurso audiovisual** • *Aspectos didácticos de la enseñanza de la probabilidad*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Utilicen tablas de doble entrada para determinar los resultados favorables de eventos simples, compuestos y mutuamente excluyentes relacionados en una situación dada.
- Sesión 2. Aprendan a calcular la probabilidad de eventos simples, compuestos y mutuamente excluyentes a partir de la regla de la suma.
- Sesión 3. Determinen los resultados favorables de ciertos eventos, reconozcan cuáles son mutuamente excluyentes y calculen la probabilidad de los eventos de acuerdo con la fórmula que les corresponde.
- Sesión 4. Resuelvan problemas que corresponden a situaciones que implican el cálculo de la probabilidad de eventos que son mutuamente excluyentes y de eventos que no lo son.

Acerca de...

En esta secuencia los alumnos calculan la probabilidad de eventos mutuamente excluyentes y utilizan tablas de doble entrada y diagramas de árbol como recursos para organizar los resultados posibles de las situaciones aleatorias que se presentan. Se consideran situaciones relacionadas con la genética, la salud, las matemáticas y la población del mundo desde un punto de vista histórico y del análisis y la interpretación de resultados posibles y resultados favorables de eventos definidos previamente. Dichos resultados se expresan en forma de fracciones, decimales o porcentajes.

Específicamente, en esta secuencia se formaliza la manera de calcular la probabilidad de dos eventos, sean mutuamentes excluyentes o no.

Con el estudio de esta secuencia, los alumnos harán el conteo de los resultados favorables de un evento entre los casos posibles que corresponden a la situación aleatoria. Por lo tanto, requerirán hacer uso de sus habilidades de conteo, tanto para identificar si hace falta considerar algunos resultados posibles en el espacio muestral, como para determinar en qué eventos se está contando dos veces el mismo resultado favorable, es decir, si tienen resultados en común. De ahí que a los alumnos se les proponga el uso de recursos como el cuadro de Punett o el diagrama de árbol.

Sobre las ideas de los alumnos

En la secuencia 9, los alumnos identificaron los eventos mutuamente excluyentes a partir de un enfoque frecuencial, ya que llevaron a cabo el juego de azar propuesto y analizaron las frecuencias relativas obtenidas en otros ensayos, destacando la variabilidad de los resultados cada vez que se realizan los experimentos.

Además, los alumnos también aprendieron que dos eventos son mutuamemente excluyentes si los resultados favorables son distintos; ahora ese conocimiento se complementa indicando que dichos eventos no tienen resultados favorables en común. La intención de esta secuencia es reflexionar con los alumnos acerca de la vinculación de conceptos matemáticos con situaciones sociales para sensibilizarlos y motivarlos a estudiar otras situaciones que se proponen en las actividades de la secuencia, como en otros temas de las matemáticas.

¿Cómo guío el proceso?

En la sección "Para empezar" se trata una situación del área de la genética en la que se utiliza un recurso para organizar y presentar los resultados obtenidos: el cuadro de Punett, que es una tabla de doble entrada en la cual se identifican las combinaciones aleatorias de una descendencia. Esta situación brinda la posibilidad de ilustrar una manera en la que se ha desarrollado el conocimiento matemático, ya que no todos los recursos, procedimientos y conceptos surgen de la matemática misma.

La primera actividad de la sesión 1 corresponde a una situación relacionada con los resultados de una prueba de laboratorio respecto a infectarse con el estafilococo áureo y la edad de las personas participantes en la prueba. Los alumnos deben leer e interpretar la información presentada en el cuadro; ése es el propósito de las preguntas que se plantean en los incisos a) a d) que hacen explícita la relación del contexto con los datos.

Después, en la actividad 2, se les propone llevar a cabo una transnumeración de los datos del cuadro de la actividad 1 en un cuadro que contiene los cocientes que corresponden a las razones de los resultados de la prueba.

En seguida, calcularán la probabilidad de los eventos A, B y C y de algunas de sus combinaciones, lo cual corresponde a la fase de buscar nuevos significados una vez que se han transformado los datos. La siguiente tabla muestra los resultados a los que deben llegar los alumnos:

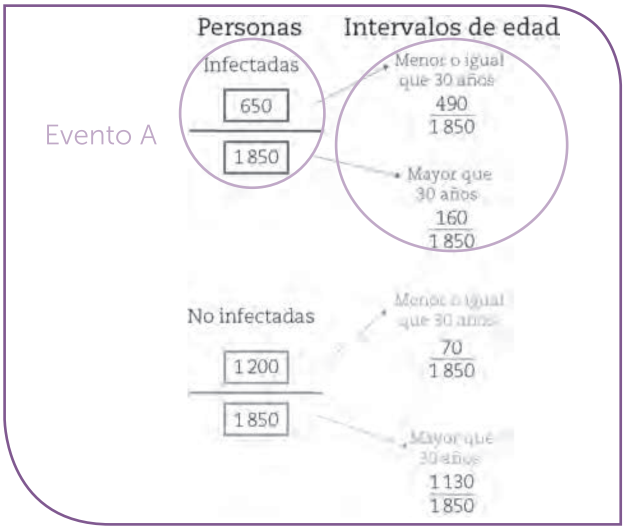
Intervalo de edad (años)	Infectados	No infectados	Total de resultados
Menor o igual que 30	$\frac{490}{1850} = \frac{49}{185}$	$\frac{70}{1850} = \frac{7}{185}$	$\frac{560}{1850} = \frac{56}{185}$
Mayor que 30	$\frac{160}{1850} = \frac{16}{185}$	$\frac{1\,130}{1850} = \frac{113}{185}$	$\frac{1\,290}{1850} = \frac{129}{185}$
Total	$\frac{650}{1850} = \frac{65}{185} = \frac{13}{37}$	$\frac{1\,200}{1850} = \frac{120}{185} = \frac{24}{37}$	$\frac{1\,850}{1850} = 1$

Identificar los eventos mutuamente excluyentes o no excluyentes, como se propone en la actividad 3, es parte de esta fase de buscar nuevos significados por medio de la transnumeración. De tal manera que en la actividad 4, en la discusión grupal, se recomienda señalar este trabajo de transformación. Es importante que guíe a los alumnos para que expliquen las características de los resultados favorables de los eventos mutuamente excluyentes con la intención de que en la actividad 5, al leer la información del recuadro, comprendan la formalización.

Para el caso de los eventos que no son mutuamente excluyentes, pídales que identifiquen si hay resultados que sean comunes como una manera de verificar su nivel de comprensión de la lectura y la revisión de los resultados que deberá hacerse a partir del contexto.

En la actividad 1 de la sesión 2, se pide que comparen la probabilidad del evento A o C y A o B con la suma de las probabilidades de dichos eventos simples, respectivamente, para decidir si son mutuamente excluyentes.

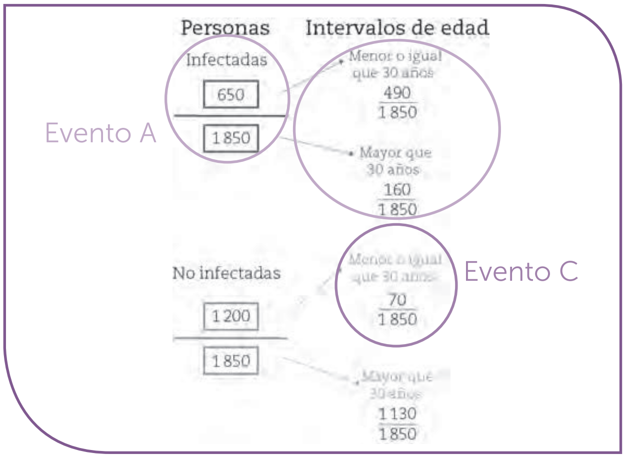
En la actividad 2 se propone una puesta en común en la que se deberá revisar que los alumnos identifiquen que al sumar las probabilidades de los eventos A y B se considera dos veces la probabilidad de que las personas estén enfermas y sean mayores que 30 años, $\frac{160}{1850}$, lo que representa que hay 160 personas con esas dos características y que son casos favorables para ambos eventos. Por lo tanto, los eventos no son mutuamente excluyentes, y para calcular la probabilidad de que ocurran ambos, se debe restar la probabilidad de seleccionar a una de esas 160 personas. Una manera de ilustrarlo es:



En la actividad 3 se introduce la formalización de la suma de las probabilidades de dos eventos que son mutuamente excluyentes o no. En particular, para calcular la probabilidad de que ocurra el evento la persona *está enferma o es mayor que 30 años*, se expresa como:

$$P(G) = P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ y } B)$$
$$= \frac{650}{1850} + \frac{1130}{1850} - \frac{160}{1850}$$
$$= \frac{490}{1850} + \frac{1130}{1850} = \frac{1620}{1850}$$
$$= \frac{162}{185} = 0.8756 = 87.56\%$$

debido a que los eventos A y B no son mutuamente excluyentes. En el caso de los eventos A y C, sí son mutuamente excluyentes, lo cual se puede ver como:



Por otro lado, la probabilidad del evento *la persona está infectada o es menor o igual que 30 años y no esté infectada* es:

$$P(H) = P(A \text{ o } C) = P(A) + P(C) - P(A \text{ y } C) =$$
$$\frac{650}{1850} + \frac{70}{1850} - 0 = \frac{650}{1850} + \frac{70}{1850} = \frac{720}{1850} = \frac{72}{185}$$
$$= 0.3891 = 38.91\%$$

El contexto de la sesión 3 es numérico; en la actividad 1 se deben encontrar los 24 resultados posibles que se obtienen al escribir números con tres cifras con un conjunto de cuatro dígitos.

Posteriormente, se definen algunos eventos y se pregunta por los resultados favorables para identificar la no repetición de números de tres cifras y que existe un evento, el C, que es imposible que ocurra en esta situación numérica.

2	3	5
2	5	3
3	2	5
3	5	2
5	2	3
5	3	2

3	5	7
3	7	5
5	3	7
5	7	3
7	3	5
7	5	3

5	7	2
5	2	7
7	5	2
7	2	5
2	5	7
2	7	5

7	2	3
7	3	2
2	7	3
2	3	7
3	7	2
3	2	7

La incorporación de un evento imposible (o vacío) es un aspecto importante en la construcción del concepto de eventos mutuamente excluyentes y del razonamiento probabilístico de los alumnos, y debe ser analizado en la revisión grupal propuesta en las actividades 2 y 5.

Se espera que en la actividad 3 los alumnos identifiquen que los eventos: "B: El número elegido es mayor que 500" o "D: El número elegido tiene 2 en la primera cifra", son mutuamente excluyentes, como se observa en la imagen anterior, donde se puede ver que los eventos B y D no tienen resultados favorables en común.

Tal vez algunos alumnos indiquen que también los eventos: "A: El número elegido es múltiplo de 3" o "C: El número es menor que 200", son mutuamente excluyentes; en este caso, el evento "C: El número elegido es menor que 200", es vacío (no tiene resultados favorables) porque no hay resultados favorables para comparar con el evento A.

En la actividad 4, los alumnos deben elegir cuál es la manera correcta de aplicar la regla de la suma para calcular la probabilidad de los eventos indicados. Las respuestas a esta actividad son:

a) ¿Cuál es la probabilidad del evento (*A* o *B*)?

☐ $P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B)$

☑ $P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ y } B)$

$= \frac{12}{24} + \frac{12}{24} - \frac{6}{24} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

b) ¿Cuál es la probabilidad del evento (*A* o *C*)?

☑ $P(A \text{ o } C) = P(A) + P(C)$

$= \frac{12}{24} + \frac{0}{24} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$

☐ $P(A \text{ o } C) = P(A) + P(C) - P(A \text{ y } C)$

c) ¿Cuál es la probabilidad del evento (*B* o *C*)?

☑ $P(B \text{ o } C) = P(B) + P(C)$

$= \frac{12}{24} + \frac{0}{24} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$

☐ $P(B \text{ o } C) = P(B) + P(C) - P(B \text{ y } C)$

d) ¿Cuál es la probabilidad del evento (*A* o *D*)?

☐ $P(A \text{ o } D) = P(A) + P(D)$

☑ $P(A \text{ o } D) = P(A) + P(D) - P(A \text{ y } D)$

$= \frac{12}{24} + \frac{6}{24} - \frac{2}{24}$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

e) ¿Cuál es la probabilidad del evento (*C* o *D*)?

☑ $P(C \text{ o } D) = P(C) + P(D)$

$= \frac{0}{24} + \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$

☐ $P(C \text{ o } D) = P(C) + P(D) - P(C \text{ y } D)$

En la actividad 5, los alumnos deben exponer los argumentos que les llevaron a seleccionar lo que marcaron con anterioridad. Para justificar, basta con anotar los resultados favorables en común, o bien, que no haya resultados favorables en común. Por ejemplo, en el inciso a) el evento A o B tiene 6 resultados favorables que son: 573, 537, 735, 753, 723, 732.

En la actividad 6 se les pide definir eventos mutuamente excluyentes a cada uno de los eventos indicados. Una propuesta para el caso del evento M es: *el número elegido no es múltiplo de 3,* éste representa el complemento del evento A. En el caso del evento N, podría ser *el número elegido tiene 5 en la primera cifra*.

Anime a los alumnos a encontrar otros eventos, apoyándose en los conceptos que conocen, como el de evento complementario. La fórmula para calcular las probabilidades de los eventos que propongan debe ser del tipo: $P(A \text{ o } M) = P(A) + P(M)$.

Finalmente, en la sesión 4 se proponen dos situaciones relacionadas con los contextos de población y de acceso a la televisión e internet; la primera está expresada en porcentajes y millones de personas de cada región, por lo que, para contestar, se requiere analizar y reorganizar la información. Tal vez los alumnos observen que al sumar los porcentajes se obtiene el valor de 101%, debido a que son porcentajes redondeados; generalmente así se utilizan en los informes, y dado que esta situación es extraída de uno de ellos, esto es algo común (véase fuente). Además, se enfrentan a que el porcentaje de las regiones de Oceanía y EUA y Canadá está integrado en 5%, lo que dificulta la respuesta de los incisos a) y c), por lo que es conveniente utilizar el dato de población expresado en millones de personas. Una sugerencia es utilizar una tabla como la siguiente para mostrar el número de personas por región: y aplicar la regla de la suma para calcular la probabilidad de los eventos indicados.

Región	Número de personas	(%)	Países	Número de personas	(%)
Asia	4700000000	60.16	China	1484470000	19
			India	1406340000	18
África	1300000000	16.64			
Europa	750000000	9.60			
Latinoamérica y el Caribe	650000000	8.32			
EUA y Canadá	370000000	4.74			
Oceanía	43000000	0.55			
Total	7813000000	100.00			

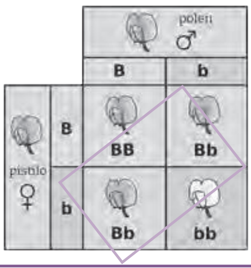
De esta tabla también es posible comprender que los porcentajes están redondeados, e incluso, también el número de personas. La ventaja de organizar los datos en este tipo de tablas es

que podemos identificar el número de personas a las que se hace referencia en cada inciso de la actividad para calcular la probabilidad, y de ahí podemos utilizar el porcentaje o la razón entre el número de personas de la región y el total. De esta forma, las respuestas a las preguntas son:
a) En términos de porcentaje: 61% + 4.74% = 65.74%.
b) En términos de porcentaje: 19% + 18% = 37%.
c) En términos de porcentaje: 8% + 4.74% = 12.74%.

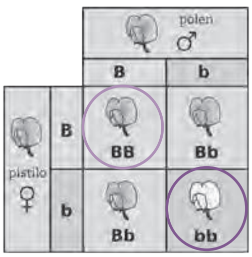
En la actividad 2, la respuesta a la pregunta se obtiene mediante la suma: 62% + 27% – 7% = 82%.

En la actividad 3, se solicita usar el cuadro de Punnett a fin de contestar las siguientes preguntas:

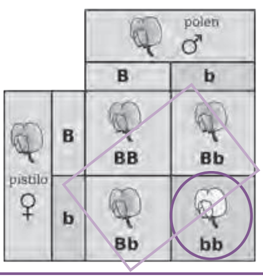
a) $\frac{1}{2}$



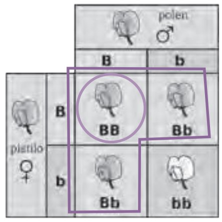
b) Mutuamente excluyentes;
$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$



c) Mutuamente excluyentes;
$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$



d) No son mutuamente excluyentes;
$\frac{3}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$



Pautas para la evaluación formativa

Con la finalidad de verificar la medida en que se logra la intención didáctica que aparece en la ficha descriptiva, es necesario hacer un registro para cerciorarse de que los alumnos realizan lo siguiente:

- Distinguen entre un tipo de evento y otro.
- Reconocen el significado de dos eventos mutuamente excluyentes.
- Representan gráficamente las situaciones que se plantean, ya sea en tablas o diagramas.
- Interpretan los valores de las medidas de la probabilidad de ocurrencia de los eventos respecto al contexto o la situación que se analiza.

¿Cómo apoyar?

Si observa que los alumnos aún tienen dificultades para comprender el origen de los cuadros de Punett, consulte: https://www.ck12.org/book/ck-12-conceptos-biolog%C3%ADa/section/3.6/. Si en el caso de la actividad 1 de la sesión 4 observa que los alumnos tienen dificultades, pida que presenten la información mediante un cuadro o diagrama de árbol.

¿Cómo extender?

Si considera necesario conocer más sobre el estafilococo áureo, consulte https://www.msdmanuals.com/es/hogar/infecciones/infecciones-bacterianas-bacterias-grampositivas/infecciones-por-staphylococcus-aureus.

Puede retomar los eventos de la secuencia 9 para practicar el cálculo de la probabilidad de eventos compuestos mediante el uso de la regla de la suma.

Evaluación. Bloque 2

(LT, Vol. II, págs. 106–107)

Reactivos 1 y 2. *Mínimo común múltiplo y máximo común divisor.* En el primero, el alumno debe obtener la descomposición en factores primos del número 472 que es $2 \times 2 \times 2 \times 59$. Pida a los alumnos que verifiquen la descomposición al multiplicar los factores. Pueden utilizar calculadora.

En el reactivo 2, la situación presentada implica determinar cuántas horas después una persona volverá a coincidir en la toma de sus tres medicamentos. Se puede determinar al calcular el mínimo común múltiplo de 2, 3 y 4, que es 12, así la respuesta correcta es C.

Reactivo 3. *Figuras geométricas y equivalencia de expresiones de segundo grado y ecuaciones cuadráticas.* El alumno debe identificar la ecuación cuadrática que permite determinar las medidas de la lona que plantea el problema: *El perímetro de una lona rectangular mide 30 m y su área, 50 m*^{2}.

La ecuación es la opción A, porque $x(15 - x) = 50$ se puede transformar en:

Expresiones algebraicas equivalentes ➔

$$(15x - x^2) = 50$$
$$15x = 50 + x^2$$

Al igualar a cero para resolver la ecuación cuadrática:

Resolución de ecuación cuadrática ➔

$$0 = 50 + x^2 - 15x$$
$$0 = x^2 - 15x + 50$$

El trinomio al cuadrado se puede resolver factorizando:

$$0 = (x - 10)(x - 5)$$

De donde: $(x_1 - 10) = 0$
Al despejar queda que $x_1 = 10$ puede representar el valor de la medida del largo de la lona y $0 = (x_2 - 5)$ por lo que $x_2 = 5$ puede representar el valor de la medida del ancho de la lona.

Se sugiere que de manera semejante se desarrollen las otras ecuaciones para que el alumno comprenda lo que representa cada situación. También pida que, antes de resolver, expliquen por qué seleccionaron esas respuestas, de esa manera se conocerán cuáles son los aspectos del problema que lo llevan a elegir una u otra respuesta, así como a conocer cuáles son las características de las ecuaciones cuadráticas que distingue y cuáles no y los problemas al escribir una expresión algebraica equivalente (secuencia 11). Considere, además, que en la resolución por factorización de una ecuación cuadrática implícitamente está vinculado el contenido que el alumno ha estudiado en las secuencias 1, 2 y 10. Por lo tanto, es importante no limitarse en la revisión de la respuesta correcta, sino en indagar junto con el alumno de qué manera lo hizo para conocer realmente el progreso que va logrando. Como puede observar, el conocimiento matemático es acumulativo y progresivo, por lo cual se puede describir como una espiral, cuanta más información se obtenga del proceso que sigue un alumno al dar respuesta a un reactivo, mejor podemos conocer cuáles son sus fortalezas y debilidades y hacer los ajustes necesarios en la planeación de las actividades didácticas.

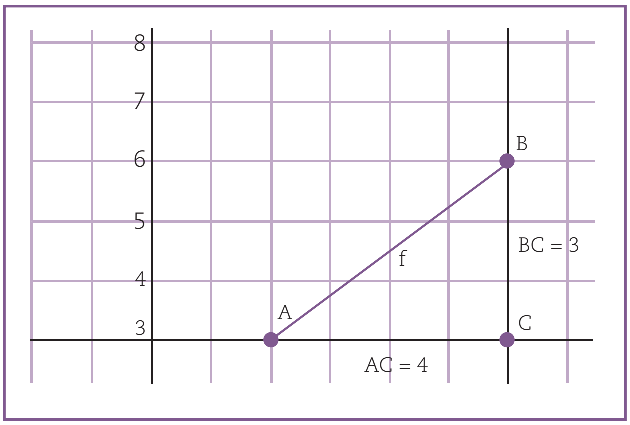
Reactivos 4, 5 y 6. *Polígonos semejantes.* En el reactivo 4 se espera que el alumno no requiera de construir el triángulo semejante, sino que interprete el dato que corresponde al valor de la razón de semejanza y comprenda que la longitud de cada lado del nuevo triángulo será dos veces y media la longitud de la medida original, respectivamente. La respuesta correcta es la opción B.

En el reactivo 5, el alumno requiere comparar los triángulos para determinar cuáles son semejantes, lo que implica determinar cuáles son los lados correspondientes entre los triángulos y luego determinar si las medidas de los lados son proporcionales y cuál es la razón de semejanza. Un error común de los alumnos es comparar solamente los valores de las medidas de los lados sin considerar la correspondencia. En este caso, se debe considerar como referente común el vértice del ángulo de 50° en cada triángulo y a partir de él comparar las longitudes de los lados correspondientes entre los triángulos.

A partir de lo anterior, se puede observar que solamente los triángulos B y D son semejantes.

Los dos triángulos del reactivo 6 son semejantes por el criterio de semejanza AA, ya que se conoce la medida de un par de ángulos correspondientes que es igual, 60°, por ser ángulos alternos internos entre paralelas (los lados BA y DE) y el otro par de ángulos iguales son los que se forman con los segmentos transversales que se intersecan en el punto C, al ser ángulos opuestos por el vértice.

Reactivos 7 y 8. *Teorema de Pitágoras.* Para determinar la distancia entre los puntos A (2, 3) y B (6, 6), ubicados en un plano cartesiano, la imagen muestra el triángulo rectángulo que se forma y la hipotenusa f representa la distancia entre los puntos A y B, la cual es equivalente a la raíz cuadrada de la suma de las áreas de los cuadrados formados por los catetos AC y BC. Entonces $AB = \sqrt[2]{4^2 + 3^2} = \sqrt[2]{16 + 9} = \sqrt[2]{25} = 5$.

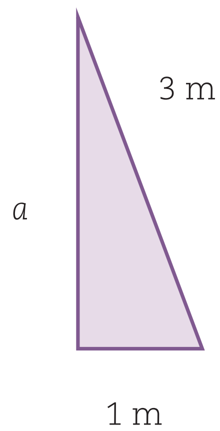


En el reactivo 8, para determinar la altura que alcanza la escalera de 3 m de largo y cuyo pie queda a 1 m de la pared, la altura corresponde a uno de los catetos del triángulo rectángulo que se forma:

$$3^2 = 1^2 + a^2$$

De donde:

$$a^2 = 3^2 - 1^2$$
$$a = \sqrt[2]{3^2 - 1^2}$$
$$a = \sqrt[2]{9 - 1}$$
$$a = \sqrt[2]{8}$$
$$a = \sqrt[2]{4 \times 2} =$$
$$\sqrt[2]{4} \times \sqrt[2]{2} = 2 \times \sqrt[2]{2} = 2.828427124 \approx 2.83$$

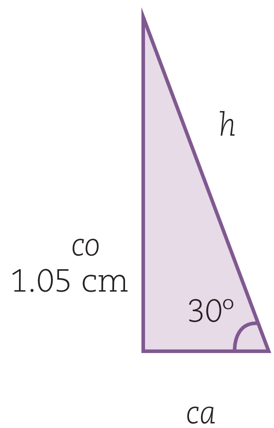


Reactivos 9 y 10. *Razones trigonométricas.* En el reactivo 9, la expresión que permite calcular la medida de la hipotenusa del triángulo rectángulo descrito es:

$$\text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2} = \frac{\textit{cateto opuesto}}{\textit{hipotenusa}} = \frac{1.05 \ cm}{\textit{hipotenusa}}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1.05 \ cm}{\textit{hipotenusa}}$$

$$\textit{hipotenusa} = \frac{1.05 \ cm}{\frac{1}{2}} = 2.1 \ cm$$



En el caso del reactivo 10, el alumno debe considerar que: $\cos A = \frac{3}{5} = \frac{ca}{h}$ y $\tan A = \frac{co}{ca} = \frac{co}{3}$, lo que significa que la hipotenusa mide 5 y el cateto adyacente mide 3 del triángulo rectángulo, entonces, el cateto opuesto mide 4, siendo la opción D la respuesta correcta, $\tan A = \frac{4}{3}$.

Reactivo 11. *Eventos mutuamente excluyentes.* Para identificar cuáles son los eventos mutuamente excluyentes, se sugiere listar los resultados posibles al lanzar tres monedas iguales al aire e identificar cuáles son los resultados favorables a cada evento y cuáles tienen resultados ajenos.

<table>
<tr><th>Moneda 1</th><th>Moneda 2</th><th>Moneda 3</th><th colspan="4">Eventos</th></tr>
<tr><td>S</td><td>S</td><td>S</td><td>Caen tres soles</td><td></td><td rowspan="7">Cae uno o más soles</td><td>No aparecen o caen águilas</td></tr>
<tr><td>A</td><td>S</td><td>S</td><td rowspan="3">Caen dos soles</td><td rowspan="7">Caen menos de tres soles</td><td rowspan="7"></td></tr>
<tr><td>S</td><td>A</td><td>S</td></tr>
<tr><td>S</td><td>S</td><td>A</td></tr>
<tr><td>A</td><td>A</td><td>S</td><td rowspan="3">Cae un sol</td></tr>
<tr><td>A</td><td>S</td><td>A</td></tr>
<tr><td>S</td><td>A</td><td>A</td></tr>
<tr><td>A</td><td>A</td><td>A</td><td>No cae sol</td><td></td></tr>
</table>

La segunda parte de la evaluación está integrada por siete actividades. En la primera, las respuestas son:

MCD de 420, 630 y 330 = $2 \times 3 \times 5 = 30$
mcm de 420, 630 y 330 = $2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 11 = 13\,860$.

En la segunda actividad, las tres expresiones algebraicas equivalentes para representar el área de las figuras geométricas son:

a)		
Expresión 1	Expresión 2	Expresión 3
$(2a + 3b)(2a + 3b)$	$(2a + 3b)^2$	$4a^2 + 12ab + 9b^2$

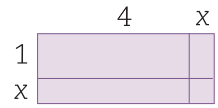
b)		
Expresión 1	Expresión 2	Expresión 3
$aq + pq + ap + a^2$	$q(a + p) + a(p + a)$	$a(a + p + q) + pq$

Considere que pueden existir otras expresiones algebraicas equivalentes.

Para la tercera actividad, una respuesta posible es: $(x + 1)(x + 4) = x^2 + 5x + 4$.

La figura geométrica puede cambiar de posición, pero la expresión en producto de dos factores es única.

En la actividad 4, las raíces que corresponden son c), a) y b), de arriba hacia abajo.



Para la quinta actividad, una manera de determinar cuál es la representación gráfica es asignando valores a la variable x en la expresión algebraica de la función $y = 3.14x^2 + 9.42x$.

Por ejemplo, $x = 1$, $x = 5$ y $x = 10$. Así se obtienen los puntos (1, 12.56), (5, 125.6) y (10, 408.2), respectivamente, que se ubican en la gráfica del inciso b).

En la actividad 6, para encontrar la medida del ancho de un disco de superficie de 56.52, la expresión algebraica de la función se convierte en la ecuación: $56.52 = 3.14x^2 + 9.42x$. Al igualar a cero, se obtiene: $3.14x^2 + 9.42x - 56.52 = 0$

$$\frac{3.14}{3.14}x^2 + \frac{9.42}{3.14}x - \frac{56.52}{3.14} = \frac{0}{3.14}$$

$$x^2 + 3x - 18 = 0$$

Al factorizar la ecuación cuadrática, se tiene: $(x + 6)(x - 3) = 0$.

Si el factor $(x + 6) = 0$, entonces $x_2 = 3$. Si el factor es $(x - 3) = 0$, entonces $x_1 = -6$.

De acuerdo con el contexto del problema, el valor de la incógnita representa la medida del ancho del disco, es decir que debe ser un valor positivo; la respuesta correcta es $x_2 = 3$.

La actividad 7 requiere calcular la media aritmética y la desviación media de cada conjunto de datos; los valores son:

	Caseta de cobro A	Caseta de cobro B
Media aritmética	Llegan 25.6 automóviles	Llegan 27.5 automóviles
Desviación media	±5.8 automóviles	±7.7 automóviles

La respuesta de los incisos a) y b) es la caseta B.

Bloque 3

Secuencia 20 Mínimo común múltiplo y máximo común divisor 2

(LT, Vol. II, págs. 108-113)

Tiempo de realización	3 sesiones
Eje temático	Número, álgebra y variación
Tema	Número
Aprendizaje esperado	Usa técnicas para determinar el mcm y el MCD.
Intención didáctica	Que los alumnos identifiquen el máximo factor común en una expresión algebraica de dos o más términos y lo usen para factorizar dicha expresión.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisual** • *Factor común de una expresión algebraica* **Informático** • *Aplicaciones del mcm y del MCD*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recursos audiovisuales** • *Generalización de los conceptos de múltiplo y factor* • *Descomposición factorial prima, MCD y mcm*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Factoricen expresiones algebraicas compuestas por uno o más términos e identifiquen cuál es el factor que es el MCD.
- Sesión 2. Analicen algunos casos en los que el álgebra permite generalizar propiedades de los números y valoren la utilidad del factor común.
- Sesión 3. Usen el MCD de dos o más números o expresiones algebraicas al resolver problemas.

Acerca de...

Con el desarrollo de esta secuencia culmina el estudio del mcm y el MCD que se inició en el bloque 1 con las secuencias 1 y 2, tituladas "Múltiplos, divisores, y números primos" y "Criterios de divisibilidad". La importancia de estos conceptos radica, sobre todo, en el uso que se puede hacer de ellos al resolver una gran variedad de problemas numéricos, algebraicos, geométricos y de medición. Los problemas que se plantean en esta secuencia son sólo una pequeña muestra de ello.

Como se podrá apreciar a lo largo de la secuencia, el trabajo que los alumnos desarrollarán en las actividades les permitirá una mejor comprensión del factor común. Por otra parte, el MCD en expresiones algebraicas se apoya en el estudio que se ha hecho con los números, en el cociente y producto de potencias de la misma base que se estudió en segundo grado y en la equivalencia de expresiones algebraicas que se estudian en este grado.

El programa de estudios no contempla la multiplicación y la división de monomios y polinomios porque esas técnicas no son necesarias para entender lo que es el factor común y el máximo común divisor de una expresión algebraica.

Tampoco señala como propósito que los alumnos hagan demostraciones formales, entre otras razones porque a esta edad no está suficientemente desarrollado el razonamiento deductivo.

Por esta razón, la generalización de algunas propiedades de los números se hace de manera guiada, no con la idea de que los alumnos memoricen los procesos, sino para que aprecien otro tipo de problemas en los que el álgebra resulta útil. También permite destacar algunas propiedades y relaciones entre los números, como ocurre en varios de los problemas de la sección "Para terminar", por ejemplo el inciso b) de la segunda actividad en la sesión 2. Sin duda, los conocimientos que los alumnos adquieran con el estudio de esta secuencia les proporcionarán más elementos para resolver problemas que impliquen usar ecuaciones y funciones.

Sobre las ideas de los alumnos

Se sabe que el uso de un concepto como el de factor común, o cualquier otro, no se transfiere de manera automática de un contexto a otro —por ejemplo, del numérico al algebraico—, pero es absolutamente válido y necesario usar el conocimiento que se tiene y valorar si es o no suficiente para entender lo nuevo. Un ejemplo es que los alumnos saben que una expresión algebraica como $6x^2y^3z$, consta de un coeficiente y una parte literal. Esta expresión es equivalente a $2 \cdot 3 \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y \cdot z$.

Será importante que los alumnos reconozcan que está integrado por un total de ocho factores que ya no se pueden descomponer en más, pero sí agrupar para formar otros factores, por ejemplo, 6, $6x$, $6x^2$, etcétera, aunque no necesariamente en este orden.

Tal vez algunos de los alumnos consideren todavía que un factor sólo puede ser un número, por lo que se pretende que, al finalizar el estudio de esta secuencia, acepten que un número y una o varias literales y sus exponentes pueden representar un factor. Estas ideas básicas, y otras que se mencionaron en el apartado anterior, son las que le dan sustento a los conceptos de factor común, MCD y mcm.

¿Cómo guío el proceso?

Se sugiere que lea junto con los alumnos la sección "Para empezar" y resalte todas las dudas que surjan alrededor de lo que ahí se plantea. Por ejemplo: "¿Por qué estamos seguros de que x y $x + 1$ son dos números consecutivos?"; "¿Por qué x y $x + 2$ no son números consecutivos?"; "¿Cuántos términos tiene la expresión $3x + 3$?"; "¿Por qué x no es un factor común de los dos términos?". Es importante que desde el inicio vea cuáles conceptos no están suficientemente claros y se realice el trabajo necesario para allanar las dudas antes de que se hagan más grandes o sean prácticamente irreversibles y limiten la comprensión de nuevos conocimientos.

En la actividad 2 de la sesión 1, haga hincapié en que, cuando los términos de una expresión algebraica se separan con el signo más o con el signo menos, las expresiones pueden ser binomios, trinomios o polinomios.

Si no hay uno de estos signos de por medio, se trata de un solo término (un monomio) como ocurre en la actividad 1. Apoye a los alumnos para que distingan entre factor, factor común y mayor factor común, esta última expresión equivale a decir máximo común divisor.

1. Trabajen en pareja. Escriban expresiones equivalentes a cada monomio de manera que sean el producto de dos factores. Anótenlas en cada celda.

Monomios	Expresiones algebraicas equivalentes como producto de dos factores			
$6x^2$	$3(2x^2)$			
$12ab^2$	$2a(6b^2)$			
$8x^2y^3$	$2xy(4xy^2)$			

2. ¿Cuáles son todos los factores comunes de cada binomio y trinomio? Anótenlos en la celda correspondiente. Observen el ejemplo.

$4x^3 + 2x^2$	$12xy^2 - 3y^2$	$8a^2 b^2 - ab^2$	$3x^2 - 6xy$	$3x^2 - 6xy + 9y$
1, 2, x, $2x$, x^2, $2x^2$	1, y, y^2, 3	1, a, b, b^2	1, x, 3	1, 3

Cuando hablamos de *factor*, nos referimos a un solo término, por ejemplo, $6x$ es un factor del monomio $6x^2y^3z$, como se señaló en un párrafo anterior. Al decir *factor común*, nos referimos al factor que divide de manera exacta a dos o más términos de una expresión algebraica. Si el factor común es el mayor posible, entonces se trata del máximo común divisor (MCD). Por ejemplo, en la última celda de la tabla de la actividad 2, la expresión $3x^2 - 6xy + 9y$ tiene como factores comunes a 1 y 3, porque las literales x y y sólo aparecen en dos de los tres términos, así que el MCD es 3.

Otro ejemplo, en la actividad 5, un factor común de $5x^2 + 10x$, es 5, porque éste divide exactamente a los dos términos de la expresión y, en este caso, también son x y $5x$, por la misma razón.

En la actividad 1 de la sesión 2 observe si los alumnos logran seguir el proceso para concluir que la suma de dos números impares cualesquiera siempre es un número par. Se inicia con la conjetura de si será cierto o no y se pide probar con varios ejemplos numéricos. Algunos alumnos lo harán de manera espontánea. Hay que enfatizar, una vez más, que en matemáticas los ejemplos no son suficientes para mostrar que una propiedad es cierta, y basta con un contraejemplo para mostrar que es falsa. Así que dé un tiempo razonable y pídales que busquen un contraejemplo.

Un primer asunto en el que conviene ponerse de acuerdo es cómo se representa de manera general un número impar. Seguramente todos estarán de acuerdo en que $2n$ representa un número par, puesto que contiene al 2 como factor. Por lo tanto, un número impar es $2n + 1$, ya que a todo número par le sigue un impar. De manera que la suma de dos números impares puede expresarse como

$$(2n + 1) + (2n + 3);\ (2n + 5) + (2n + 7);$$

en estos ejemplos está expresada la suma de dos números impares diferentes y puede mostrarse que todos los resultados que se obtengan contienen al 2 como factor, con lo que se confirma que la suma de dos números impares es un número par. Por ejemplo,

$$2n + 5 + 2n + 7 = 4n + 12 = 2(2n + 6).$$

En la tabla de la actividad 2 puede haber resultados variados, sólo hay que cumplir la condición de escribir un número de dos cifras diferentes, luego invertir las cifras: la cifra de las unidades pasa a ser de las decenas y viceversa, y luego calcular la diferencia, lo que significa restar, del número mayor, el menor. Primero hay que verificar que todas las diferencias, independientemente de los números que se hayan escrito, sean múltiplos de 9, luego hay que generalizar esta propiedad con el uso del álgebra.

En el caso de que surjan errores en alguno de los pasos que hay que seguir, y usted pueda orientar a los alumnos para corregirlos, a continuación se muestra el procedimiento adecuado:

$$\begin{aligned} 10a + b - (10b + a) &= 10a + b - 10b - a \\ &= 9a - 9b = 9(a - b) \end{aligned}$$

La expresión final incluye el número 9 como factor, entonces no hay duda de que la diferencia siempre será múltiplo de 9.

Después de resolver la actividad 2, se espera que los alumnos no tengan problemas para realizar la actividad 3, observe cómo representan algebraicamente un número de dos cifras en el que la cifra de las unidades es igual a la de las decenas, pueden variar las literales, pero debe ser algo similar a $10a + a$.

La actividad 5 puede ser un buen indicador de hasta dónde los alumnos han captado la idea de factor común, MCD y su diferencia con el mcm.

Es probable que haya diferencias en las respuestas, invítelos a que expresen sus opiniones, pues esto les ayuda a entender mejor.

En el problema 1 de la sesión 3, los alumnos deben usar el factor común para hacer lo que se indica. En esencia, se trata de descomponer la expresión $3x^2 + 6x$ en un producto de dos factores, uno de los cuales representará la medida del ancho y la otra el largo del rectángulo. Las posibles respuestas se resumen en la siguiente tabla.

Ancho	Largo
x	$3x + 6$
3	$x^2 + 2x$
$x + 2$	$3x$

En cualquiera de las opciones, al multiplicar largo por ancho, el producto es el área dada, $3x^2 + 6x$, de manera que, al asignar un valor a x, los alumnos se darán cuenta de que el área es igual, pero si calculan el perímetro usando esas expresiones, se obtienen resultados diferentes en cada caso. Esto último obedece a que las expresiones algebraicas del perímetro no son equivalentes entre ellas.

El problema de la actividad 2 tiene solución única, pues sólo la primera de las tres opciones que aparecen en la tabla da como expresión para el perímetro $8x + 12$. Hay otras opciones que dan este perímetro, pero no cumplen con el área dada.

El problema 4 vincula la factorización numérica con la factorización algebraica. La factorización en primos de $168 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 7$. Para obtener las sumas que se obtendrán en la tabla es necesario agrupar los factores de diferentes maneras y usar el signo + y el signo − convenientemente.

El problema de la actividad 6 permitirá a los alumnos generalizar, con ayuda del álgebra, una de las propiedades de la división de números enteros. Seguramente, para encontrar las primeras divisiones, procederán por ensayo y error, pero se darán cuenta de que si multiplican el divisor por un número natural y al resultado le suman el residuo, obtienen el dividendo. Por ejemplo $12 \times 3 + 5 = 41$, con este resultado se formula la división $41 \div 12 = 3$ y sobran 5. De manera que se puede plantear una infinidad de divisiones que cumplen con la condición establecida, y encontrar los dividendos mediante la fórmula, $12n + 5$, siendo n un número entero.

Para resolver la actividad 7, es muy probable que los alumnos busquen dos números cualesquiera que multiplicados den 2688; dicho de otra manera, que descompongan 2688 en un producto de dos factores. Enseguida, duplican uno de los factores, triplican el otro, los multiplican y obtienen el resultado. Lo anterior equivale a agregar un dos y un tres a la descomposición prima de 2688, que es lo mismo que multiplicar este número por seis. Observe si los alumnos se dan cuenta de este hecho, si no, puede comentarlo al hacer la revisión y dividir.

En la actividad 8, observe si los alumnos comienzan por plantear la suma: $n + 2n + 3n + 4n = 10n$, lo que permite ver que, para cualquier valor entero de n, el número $10n$ será múltiplo de 10 y, por lo tanto, terminará en cero.

En la actividad 9 deje que los alumnos lleven a cabo el proceso que se plantea y observe si las respuestas a la pregunta del inciso d) coinciden en que el resultado es 1. La formulación de la propiedad que se pide en el inciso e) puede ser enunciada de varias maneras, por ejemplo, "si un número se eleva al cuadrado y se le resta el producto del que va antes por el que va después, el resultado siempre es 1".

Finalmente, en la actividad 11 se plantea una generalización más amplia que la que se analiza en la sección "Para empezar". Observe si los alumnos logran formular algebraicamente los casos necesarios para llegar a una conclusión. Al probar con cuatro números consecutivos, verán que la expresión factorizada contiene al 2 como factor $2(2n + 3)$. Con base en esto, algunos dirán que sí es múltiplo de cuatro, pero para $n = 1$ el valor de la expresión es 10, que efectivamente es múltiplo de dos, pero no de cuatro. Al seguir probando con otras sucesiones de números consecutivos, se espera que puedan concluir que esta generalización sólo es válida para sucesiones impares de números consecutivos como 3, 5, 7, es decir, donde n es impar.

9. Consideren tres números enteros consecutivos cualesquiera y hagan en su cuaderno lo que se indica.

a) Representen algebraicamente los tres números.

n, $n + 1$, $n + 2$

b) Eleven al cuadrado el número de en medio.

$(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$

c) Obtengan el producto del primer número por el tercero.

$n(n + 2)$, $n^2 + 2n$

d) Al cuadrado del número de en medio, réstenle el producto del primero por el tercero. ¿Cuál es el resultado?

$(n^2 + 2n + 1)$, $(n^2 + 2n) = 1$

e) Describan la propiedad anterior.

Son número primos relativos, y su máximo común divisor es uno.

Dato interesante
En matemáticas aún falta mucho por descubrir, por ejemplo, la conjetura de Collatz que dice: "Dado cualquier número natural, se aplica una de estas dos sencillas reglas: si es par, se divide entre dos; si es impar, se multiplica por 3 y se le suma 1. Al número restante se le aplican las mismas reglas, y así hasta terminar. Los últimos números terminarán irremediablemente en 4, 2 y el final en 1". ¿Por qué ocurre esto?

Pautas para la evaluación formativa

Observe y registre si los alumnos logran:

- Identificar el mayor factor común en una expresión algebraica de dos o más términos.
- Factorizar una expresión algebraica de dos o más términos, extrayendo el mayor factor común.
- Completar razonamientos para generalizar propiedades de los números.

¿Cómo apoyar?

Es probable que algunos alumnos necesiten repasar contenidos que ya se han estudiado, como el producto y cociente de potencias de la misma base o la equivalencia de expresiones algebraicas. Recuerde que siempre es recomendable regresar hasta donde sea necesario para que los alumnos puedan entender lo nuevo. En general, no basta con unos pocos ejemplos, es necesario realizar actividades que se pueden encontrar en secuencias anteriores de este grado o de grados anteriores.

Una actividad que puede plantear para el caso de la sesión 1, es la expresión

$$5x^4y + 2x^3y^2 - x^2y^3 + xy^4,$$

que es un polinomio que consta de cuatro términos. ¿Cuál es el MCD de los términos de este polinomio?

¿Cómo extender?

Puede plantear otras preguntas con la idea de que los alumnos usen el álgebra para obtener conclusiones. Por ejemplo, ¿qué características tiene la suma de un número par con un impar?

También puede plantearles, para el caso del problema 4 de la sesión 3, que vincula la factorización numérica con la factorización algebraica, que obtengan diferencias entre los factores. Por ejemplo, el 82 se obtiene con los mismos factores de la primera fila, pero el 84 debe ser positivo y el 2 negativo, así el producto es −168.

Para obtener −26 en la última columna, la forma de agrupar los factores es $2 \times 2 \times 3 = 12$ y $2 \times 7 = 14$, y ambos sumandos deben ser negativos, pues la suma es −26 y el producto 168. Esto se puede resolver también al formular la ecuación de segundo grado $x^2 - 26x + 168 = 0$. Al factorizarla se tiene

$$(x - 12)(x - 14) = 0$$

y sus raíces son $x_1 = 12$ y $x_2 = 14$.

Secuencia 21 Figuras geométricas y equivalencia de expresiones de segundo grado 3

(LT, Vol. II, págs. 114-119)

Tiempo de realización	3 sesiones
Eje temático	Número, álgebra y variación
Tema	Patrones, figuras geométricas y expresiones equivalentes
Aprendizaje esperado	Formula expresiones de segundo grado para representar propiedades del área de figuras geométricas y verifica equivalencia de expresiones, tanto algebraica como geométricamente.
Intención didáctica	Que los alumnos manipulen expresiones algebraicas, ya sea factorizadas o expresadas como el producto realizado y comprueben su equivalencia al hacer las operaciones necesarias. Que los alumnos sustituyan las literales por valores arbitrarios y obtengan resultados iguales al hacer las operaciones indicadas.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisual** • *De la geometría al álgebra en la matemática de los antiguos griegos* **Informático** • *Expresiones algebraicas cuadráticas*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recursos audiovisuales** • *Expresiones equivalentes y no equivalentes* • *Factorización de expresiones algebraicas de segundo grado*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Factoricen expresiones algebraicas de segundo grado y comprueben su equivalencia.
- Sesión 2. Verifiquen que son equivalentes las expresiones algebraicas que representan el área de dos figuras iguales, aunque las partes que las forman estén organizadas de diferente manera.
- Sesión 3. Usen la trasposición de términos para comprobar que dos expresiones algebraicas son equivalentes cuando representan la misma área.

Acerca de...

El armado de rompecabezas es una actividad lúdica que no es exclusiva sólo de los niños pequeños, sino que es atractiva e interesante para las personas adultas.

En esta secuencia se usa el rompecabezas de Arquímedes como recurso para trabajar nuevamente con el uso de expresiones algebraicas equivalentes para representar áreas. Además, se aprenderá a relacionar las expresiones algebraicas de segundo grado con una expresión factorizada.

Para lograrlo, los alumnos tendrán que retomar y usar ideas y conceptos estudiados en secuencias y grados anteriores, entre los cuales se encuentran el concepto de diagonal, las alturas de los triángulos, la correspondencia de lados y la congruencia de triángulos, el teorema de Pitágoras y las propiedades de la igualdad.

Se continúa el trabajo de factorizar expresiones algebraicas y comprobar que las expresiones obtenidas son equivalentes al dar un mismo valor a las literales que son iguales en las expresiones empleadas. Para realizar las comprobaciones se recurre al uso de la trasposición de términos.

Finalmente, el estudio del contenido de esta secuencia coloca el foco tanto en la transformación y operación de expresiones algebraicas, como en el empleo de la geometría para que los alumnos comprendan el uso de la literal como número general.

Sobre las ideas de los alumnos

Una idea errónea entre los alumnos consiste en pensar que cuando una figura se recorta para armarla de manera diferente, cambia su área; o bien, que si cambia la expresión con la cual se representa el área, la superficie cambia. En el trabajo que desarrollen en esta secuencia podrán observar que, aunque armen de diferente manera el rompecabezas, su área se conserva.

El uso de las literales no es algo simple, y la realización de operaciones con ellas tampoco es sencillo. Muchos alumnos tienen dificultades o confusiones para distinguir cuando las literales se usan como incógnitas en una ecuación o como variables en una función o en cualquier expresión algebraica como un número general.

¿Cómo guío el proceso?

Este contenido puede relacionarse con la asignatura de Historia, ya que se hace referencia al matemático griego Arquímedes. Se sugiere realizar una lectura comentada de la sección "Para empezar", señalando las aportaciones de los antiguos filósofos y matemáticos griegos, las cuales han llegado hasta nuestros días, y resaltando cómo han trascendido a través de los siglos.

Se sugiere que se detengan para responder las preguntas planteadas en esta introducción, o bien para expresar algunas hipótesis al respecto que después podrán someter a comprobación.

En la actividad 1 de la sesión 1 se solicita que factoricen dos expresiones, cada una como producto de dos factores. Es muy probable que, en el inciso a), algunos alumnos escriban: $(x + y)^2$, o bien $x(x + 2y) + y^2$. Aunque no son incorrectas estas expresiones, es necesario hacerles ver que se requiere obtener dos factores, por lo que la respuesta sería $(x + y)(x + y)$. Para la expresión del inciso b) será $(x + a)(x + b)$.

En ambos casos, tenga presente que si a los alumnos no se les ocurre comprobar sus respuestas antes de esperar la revisión colectiva, usted debe invitarlos a validar lo que hicieron buscando la manera de justificarlo.

En estos casos puede suceder que igualen las expresiones dadas con lo que escribieron y efectúen las operaciones necesarias para observar si la igualdad se cumple, o, de forma más sintética, que asignen valores a las literales. Esto mismo se les puede proponer en la actividad 2.

En la sesión 2 se trabaja con el rompecabezas de Arquímedes (incluido también en el recortable de la página 181). Al respecto, se sugiere pedir que los alumnos lo lleven al aula ya recortado.

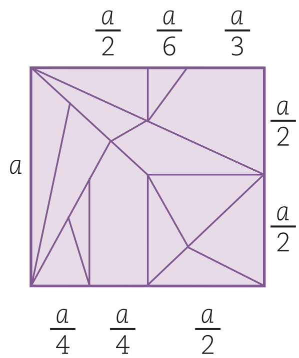
En el inciso a) de la actividad 1 se trata de expresar el área de un cuadrado, por lo que los alumnos podrán escribir tres diferentes expresiones, de acuerdo con las acotaciones que usen para ello. Por ejemplo, para decir que el área es la medida de un lado elevado al cuadrado: $a^2, \left(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\right)^2, \left(\frac{a}{3}+\frac{a}{6}+\frac{a}{2}\right)^2, \left(\frac{a}{4}+\frac{a}{4}+\frac{a}{2}\right)^2$; para expresar como producto de la medida de dos lados: $\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\right)\left(\frac{a}{3}+\frac{a}{6}+\frac{a}{2}\right), \left(\frac{a}{4}+\frac{a}{4}+\frac{a}{2}\right)(a)$, etcétera. Son seis productos diferentes, le sugerimos pedir a los alumnos que los encuentren y realizar un intercambio de ideas acerca de la equivalencia de todos los productos.

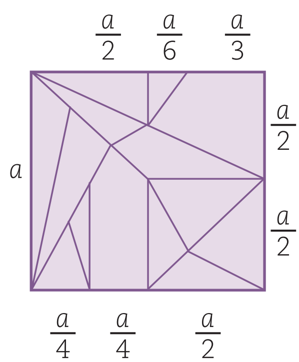
Lo importante es que tengan claridad de que las expresiones que escribieron son equivalentes y que por eso es valiosa su respuesta al inciso b). Si observa que hay una expresión que no consideraron, puede proponérsela a los alumnos y pedirles que verifiquen si es equivalente o no a las anteriores.

También puede sugerir que calculen el perímetro del rompecabezas, con lo que seguirán ejercitando tanto la transformación de expresiones algebraicas como el uso de las fracciones.

En la segunda actividad de la sesión 2 deberán usar el rompecabezas recortado para reproducir los otros dos que aparecen en su libro. Con el fin de emplear eficientemente el tiempo de la clase, se sugiere que le pida a la mitad del grupo que trabaje con el armado del rompecabezas 1, y la otra mitad armará el 2.

Al llegar a la actividad 4, puede hacer una puesta en común de su trabajo y pedir que compartan las expresiones escritas para cada uno, y después determinar si son equivalentes. Las dimensiones que deberán considerar para expresar el área son:





En la actividad 6 se pide a los alumnos que digan si el área de los dos rectángulos en que queda dividido el rompecabezas es igual; aquí podrían notar que en esta construcción quedan 7 piezas de cada lado del segmento y usar esto como justificación para decir que las áreas son iguales.

Cabe aclarar que sí son iguales las áreas de los rectángulos, pero su justificación no se basa en el número de piezas, sino en la equivalencia de las expresiones que se obtienen al expresar el área de ambos. Para que los alumnos descarten esa hipótesis errónea, requiere solicitarles que tracen un segmento igual en los rompecabezas 1 y 2 para que observen que hay piezas que quedan divididas en dos partes y, no obstante, las áreas de los dos rectángulos obtenidos son iguales.

En la actividad 7 se les pide la expresión que corresponde a cada triángulo cuando el rompecabezas se divide por la diagonal, y también la expresión que representa la longitud de ambas diagonales. En esta sección se recomienda que recuerden las características de las diagonales de un cuadrado.

En la actividad 8, para calcular la medida de las diagonales del rompecabezas, deberán recurrir al teorema de Pitágoras: $AD^2 + DC^2 = y^2$. Así, los alumnos deberán transformar las expresiones y usar, además, varios conocimientos, como operaciones con fracciones. Una expresión que podrían obtener para la diagonal *y* es:

$$(a)^2 + \left(\frac{4a}{4}\right)^2 = y^2$$

$$a^2 + a^2 = y^2 \rightarrow \sqrt{2a^2} = \sqrt{y^2}$$

y, por lo tanto, $y = \sqrt{2a^2}$

de donde $y = a\sqrt{2}$

Otra expresión posible es:

$$\left(\frac{2a}{2}\right)^2 + \left(\frac{6a}{6}\right)^2 = y^2$$

$$a^2 + a^2 = y^2 \rightarrow \sqrt{2a^2} = \sqrt{y^2}$$

y, por lo tanto, $y = \sqrt{2a^2}$

de donde $y = a\sqrt{2}$

En ambos casos se llega a la misma expresión. Este aprendizaje puede aprovecharse para que los alumnos también recuerden que si un número cualquiera está elevado al cuadrado y se le extrae raíz cuadrada, se obtiene el mismo número: $\sqrt{y^2} = y$.

Conviene que en esta parte promueva que los alumnos recuerden que si dos cantidades son iguales a una tercera, entonces esas dos cantidades son iguales entre sí.

$$(a)^2 + \left(\frac{4a}{4}\right)^2 = y^2 \text{ y } \left(\frac{2a}{2}\right)^2 + \left(\frac{6a}{6}\right)^2 = y^2$$

Entonces, $(a)^2 + \left(\frac{4a}{4}\right)^2 = \left(\frac{2a}{2}\right)^2 + \left(\frac{6a}{6}\right)^2$

En la sesión 3 se continúa usando el *Stomachion* armado en la sesión anterior para responder a las preguntas planteadas. En la actividad 1 inciso a), bastará que tomen cualquiera de las expresiones obtenidas para representar la longitud de la diagonal y la dividan entre 2.

Para responder la actividad 2, deberán recurrir de nuevo al teorema de Pitágoras para expresar la longitud de $\overline{EC}$ y $\overline{ED}$.

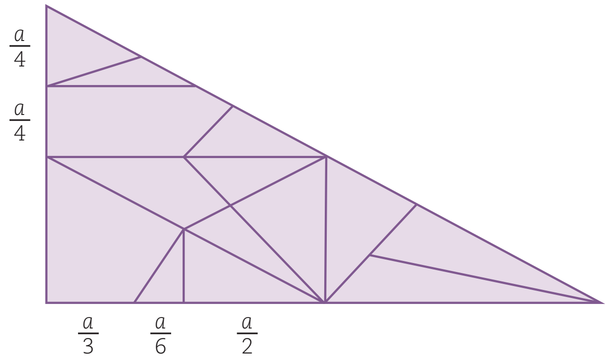
Para responder el inciso c) de esta actividad pueden establecer varias relaciones, por ejemplo:

- Dado que E es punto medio de un lado del cuadrado, la distancia del punto E al punto D es igual a la distancia del punto E al punto C, por tanto, $\overline{ED} = \overline{EC}$.
- Como los lados del cuadrado miden lo mismo, entonces $a = \frac{a}{3} + \frac{a}{6} + \frac{a}{2}$; $\frac{a}{2} = \frac{a}{2}$ y $\angle A = \angle B$, por lo tanto, los triángulos ADE y BCE son congruentes, así que $\overline{ED} = \overline{EC}$.

Como las dos opciones se sustentan en aspectos geométricos y el propósito de esta secuencia se basa en que los alumnos transformen y operen con expresiones algebraicas, si no aparece esta opción, usted podría solicitarles que obtengan la expresión algebraica que representa la longitud de cada segmento y que comprueben la equivalencia de ambas expresiones haciendo las operaciones correspondientes.

Desde esta actividad hasta la 7, los alumnos deberán usar expresiones algebraicas para representar lo que se solicita. Es muy probable que los alumnos sólo se concreten a sustituir las literales por valores arbitrarios. Aunque esto es una buena estrategia para comprobar la equivalencia, pídales que también hagan las transformaciones algebraicas necesarias para comprobar la igualdad de las expresiones.

En la actividad 6 faltan, en la longitud de las medidas, dos valores que permiten contar con los datos necesarios para establecer la expresión que represente el área del triángulo, la cual es igual a la del rompecabezas original, es decir, a^2.



Los valores que faltan en el triángulo son $\frac{a}{2}$ en la altura y a en la base, por lo que una expresión puede ser

$$A = \frac{\left(\frac{a}{3} + \frac{a}{6} + \frac{a}{2} + a\right)\left(\frac{a}{4} + \frac{a}{4} + \frac{a}{2}\right)}{2}$$

Otra expresión correcta podría ser

$$A = \frac{\left(\frac{12a}{6}\right)\left(\frac{4a}{4}\right)}{2}$$

Finalmente, al llevar a cabo las transformaciones algebraicas para demostrar que son equivalentes, o cuando sustituyan las literales por los valores que ellos quieran, seguramente se darán cuenta de muchos atajos que pueden tomar al hacer las operaciones, incluso hacer algunos mentalmente.

Pautas para la evaluación formativa

Para valorar el avance de los alumnos, observe si logran:

- Comprender que las literales se usan para representar cualquier valor.
- Saber que las literales iguales en una expresión algebraica representan un mismo valor.
- Comprender que se puede usar cualquier literal para representar un valor determinado, pero que una vez que se elige, ésta tendrá el mismo valor sin importar cuántas veces aparezca en dicha expresión.

- Representar una expresión algebraica como el producto de dos factores.
- Usar la trasposición de términos para establecer la equivalencia de expresiones algebraicas.
- Escribir varias expresiones algebraicas que representen una misma área.

¿Cómo apoyar?

Si los alumnos aún enfrentan problemas para efectuar las trasformaciones que les permitan establecer la equivalencia de expresiones algebraicas, pídales que recuerden cuáles son las operaciones contrarias (suma-resta, multiplicación-división, potencia-raíz) y que en ellas se basa la trasposición de términos.

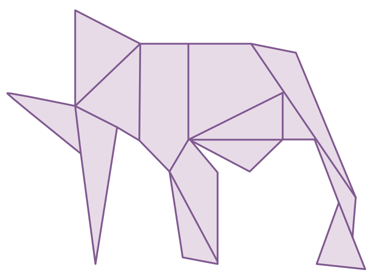
¿Cómo extender?

Con el fin de ejercitar las operaciones y de que no se queden con la idea de que sólo se puede comprobar la igualdad con números naturales, pida a los alumnos que usen fracciones o números decimales para llevar a cabo la comprobación de la equivalencia de las expresiones que obtengan, por ejemplo:

$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$	$x = \frac{2}{3}$ $y = \frac{1}{4}$
$x^2 + (a + b)\,x + ab =$ $(x + a)(x + b)$	$x = \frac{1}{5}$ $a = \frac{1}{2}$ $b = \frac{1}{2}$
$(a)^2 + \left(\frac{4a}{4}\right)^2 = \left(\frac{2a}{2}\right)^2 + \left(\frac{6a}{6}\right)^2$	$a = \frac{2}{3}$

Si lo considera conveniente, puede decirles que armen un elefante con las piezas del *Stomachion* y, posteriormente, propiciar una discusión acerca del área total de las piezas que conforman al elefante, para valorar si comprendieron la conservación del área al descomponer y recomponer figuras geométricas.

Elefante



Secuencia 22 Ecuaciones cuadráticas 3

(LT, Vol. II, págs. 120-131)

Tiempo de realización	6 sesiones
Eje temático	Número, álgebra y variación
Tema	Ecuaciones
Aprendizaje esperado	Resuelve problemas mediante la formulación y solución algebraica de ecuaciones cuadráticas.
Intención didáctica	Que los alumnos resuelvan problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas y que las resuelvan por el método que ellos decidan, incluyendo el uso de la fórmula general.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisuales** • *Fórmula general* • Discriminante de la *fórmula general* **Informático** • *Fórmula general*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recursos audiovisuales** • *Recomendaciones iniciales para el estudio de ecuaciones cuadráticas* • *Aspectos a considerar para resolver ecuaciones cuadráticas incompletas* **Bibliografía** • Santos Trigo, Luz M. (2010). *La función cuadrática. Enfoque de resolución de problemas*, México, Editorial Trillas.

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Reconozcan la necesidad de contar con una fórmula que permita resolver cualquier tipo de ecuación cuadrática.
- Sesión 2. Resuelvan problemas usando la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado.
- Sesión 3. Analicen el signo del discriminante para conocer las soluciones de una ecuación cuadrática, dos soluciones distintas, sólo una solución doble o ninguna solución en los números racionales e irracionales.
- Sesión 4. Resuelvan problemas que impliquen el uso de propiedades de las raíces de ecuaciones cuadráticas y de propiedades geométricas.
- Sesión 5. Elijan el tipo de ecuación más eficaz para modelar situaciones y su solución, además de que identifiquen las soluciones en una gráfica para después obtener dicha ecuación.
- Sesión 6. Comparen el comportamiento de las gráficas de las funciones lineales y cuadráticas para determinar la manera en que a cada una de esas funciones se le asocia una ecuación.

Acerca de...

¿Qué conocen los alumnos acerca de la ecuación cuadrática? En las secuencias 4, "Ecuaciones cuadráticas 1", y 14, "¿Ecuación o función?", aprendieron a analizar el comportamiento de las gráficas de funciones de las formas $y = ax^2 + c$ y $y = ax^2 + bx$, y a determinar la manera en que a estas funciones se les asocian las ecuaciones $ax^2 + c = 0$ y $ax^2 + bx = 0$ respectivamente.

Aprendieron, también, a resolverlas algebraicamente y a reconocer que los valores de las abscisas de los puntos en que las gráficas de las funciones cortan al eje X representan las soluciones de estas ecuaciones. Otro aprendizaje fue la aplicación de esas técnicas para la resolución de problemas concretos.

En esta última secuencia sobre ecuaciones cuadráticas, los alumnos extenderán esos conocimientos a la ecuación cuadrática completa $ax^2 + bx + c = 0$ y su resolución mediante la fórmula general.

Con esto se espera que los alumnos puedan identificar una ecuación cuadrática como aquella que se escribe así: $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b y c son números cualesquiera y a debe ser diferente de 0, y las resuelvan aplicando la fórmula general, por factorización y de manera gráfica.

Adicionalmente, los alumnos reconocerán: las raíces de una ecuación cuadrática; la relación que existe entre el valor del discriminante de una ecuación cuadrática y las raíces y, consecuentemente, el número de puntos en que corta la gráfica al eje X. Asimismo, sabrán lo que se obtiene si se suman o multiplican las raíces de una ecuación cuadrática.

Sobre las ideas de los alumnos

¿Los alumnos tienen idea de que muchos fenómenos del mundo real tienen que ver con la idea de *variación*, es decir, con la idea de cambio? La única manera de saberlo es preguntarlo, y ésta es una buena manera de empezar el estudio de esta secuencia. Los alumnos saben que "a mayor velocidad, menos tiempo cuando la distancia es constante", pero es difícil que comprendan la diferencia entre esta situación y decir "voy a hacer un viaje de 150 km a una velocidad de 80 km/h, ¿cuánto tardaré en llegar?".

En la primera situación se deja abierta la posibilidad de variar la velocidad y, en consecuencia, el tiempo; en la segunda, se tienen ya establecida la distancia y la velocidad, por lo tanto, sólo hay una respuesta posible para el tiempo. Dicho de otra forma, los alumnos muchas veces confunden situaciones de variación con situaciones que implican ecuaciones.

¿Cómo guío el proceso?

Antes de iniciar el trabajo con esta secuencia, podría platicar con los alumnos acerca de qué tipo de ideas tienen sobre situaciones como las siguientes: "¿Cómo varía la distancia que recorre un automóvil que se mueve a una velocidad constante conforme transcurre el tiempo?"; "¿Qué tanto varía una deuda a cierta tasa de interés cuando pasa el tiempo?"; "Si lanzan una pelota hacia arriba, ¿cómo varía su velocidad hasta el punto en que se detiene?". Motívelos para que reflexionen acerca de cómo las representarían matemáticamente, ¿qué ideas pueden proponer los alumnos sobre estas cuestiones?, ¿qué otros ejemplos de fenómenos de variación pueden aportar? Las respuestas de los alumnos constituyen una buena base para despertar su interés a partir de involucrarlos en la construcción del proceso de aprendizaje.

Con el fin de ubicar a los alumnos en el tema de la formulación y solución de las ecuaciones cuadráticas completas, se propone, en la sección "Para empezar", un "truco" que tiene el propósito de encontrar rápidamente el cuadrado de un número de dos cifras, terminado en 5.

En las actividades 1 y 2 de la sesión 1 se explica que el "truco" se basa en el hecho de que el producto de dos binomios iguales es un trinomio cuadrado perfecto. El binomio es $(10a + 5)$, donde a es el dígito de las decenas y el resultado es $100a(a + 1) + 5^2$, donde a y $(a + 1)$ representan números consecutivos. Por ejemplo, si el dígito de las decenas es 8, entonces $85 \times 85 = 100 \times 8 \times 9 + 5^2 = 7200 + 25 = 7225$.

En la actividad 3 se propone que los alumnos resuelvan un problema que, mediante la aplicación de la ecuación cuadrática completa $3x^2 - 4x - 15 = 0$.

Los alumnos pueden encontrar por ensayo y error una solución: $x_1 = 3$, sin embargo, puede dificultárseles encontrar la segunda solución por el método de factorización que conocen, pues saben hacerlo en los casos donde el coeficiente del término cuadrático es 1, y en este caso no es así. De ahí la necesidad de contar con un método general que permita resolver ecuaciones cuadráticas completas, y aquí el texto propone la fórmula general.

Si bien es posible factorizar expresiones como $3x^2 - 4x - 15$ éste no es un tema para tratar en educación secundaria porque implica una excesiva y compleja manipulación algebraica. La factorización es $3x^2 - 4x - 15 = 3(x - 3)(x + \frac{5}{3})$. Es decir, la segunda solución es: $x_2 = -\frac{5}{3}$.

Algo que puede llamar la atención de los alumnos es que en la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas $x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ aparece el doble signo $\pm$ de la raíz cuadrada. Por ello, conviene que recuerde de dónde surge ese doble signo. Una manera de hacerlo se explica a continuación.

La raíz cuadrada de un número no negativo x es aquel número que, multiplicado por sí mismo, da como resultado el valor x. Por ejemplo: $\sqrt{4} = +2$ porque $(+2)(+2) = 4$; pero también $\sqrt{4} = -2$ porque $(-2)(-2) = 4$. En general, la raíz cuadrada de un número no negativo tiene dos raíces, una positiva y la otra negativa.

La actividad 1 de la sesión 2 propone la resolución del problema planteado en la actividad 3 de la sesión anterior mediante la fórmula general con el propósito de que los alumnos se familiaricen con su uso.

Esto tiene la intención de que los alumnos reconozcan cómo se representa el problema con una ecuación y que asocien los coeficientes de los términos de la ecuación con la fórmula general, para después sustituirlos en ella, como se indica a continuación:

Ecuación cuadrática	Coeficientes		
$ax^2 + bx + c = 0$	a	b	c
$3x^2 - 4x - 15 = 0$	3	−4	−15

Al aplicar la fórmula general al desarrollo de las dos posibles soluciones, se obtiene:

Fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas	
Primera solución $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	Segunda solución $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
$= \frac{-(-4) + \sqrt{(-4)^2 - 4(3)(-15)}}{2(3)}$ $= \frac{4 + \sqrt{196}}{6} = 3$	$= \frac{-(-4) - \sqrt{(-4)^2 - 4(3)(-15)}}{2(3)}$ $= \frac{4 - \sqrt{196}}{6} = -\frac{10}{6} = -\frac{5}{3}$

En este caso, las soluciones de la ecuación representan los dos números que cumplen con las condiciones del problema.

Con respecto al problema que se propone en la actividad 4 de la sesión 2, los alumnos pueden darse cuenta de que la ecuación cuadrática que lo resuelve se obtiene directamente de la figura de la página 124: el área de cada andador (ancho) de la alberca es $5x$, y la de cada andador (largo) de ésta es $10x$; además, en la figura se observa que las esquinas de la alberca son cuatro cuadritos de x metros por lado y el área de los cuatro es $4x^2$. La suma de todas estas partes del andador es $4x^2 + 2(5x) + 2(10x)$ y como el área de todos es 16 m², para encontrar el valor de x (ancho del andador) se plantea la ecuación $4x^2 + 30x = 16$, que en la forma general de la ecuación cuadrática sería $4x^2 + 30x - 16 = 0$, cuyas soluciones son $x_1 = 0.5$ y $x_2 = -8$; en consecuencia, el ancho del andador sólo puede ser 0.5 m, porque los valores negativos no pueden representar longitud.

En el inciso c) de la actividad 6, es necesario que promueva que los alumnos observen que la ecuación $3x^2 - 10x = 25$ es equivalente a $3x^2 - 10x - 25 = 0$.

En la actividad 1 de la sesión 3 es importante recordar a los alumnos que toda ecuación cuadrática tiene dos raíces, que pueden ser distintas o iguales, o incluso pueden no ser números racionales o irracionales. Por ejemplo, la ecuación $3x^2 + x - 10 = 0$ tiene dos raíces diferentes:

$$x_1 = \frac{5}{3} \text{ y } x_2 = -2.$$

Por otro lado, $x^2 + 2x + 1 = 0$ tiene dos raíces iguales, lo cual puede verse si el primer miembro se expresa como producto de dos factores:

$$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)(x + 1) = 0$$

Entonces, si se habla de las soluciones de esta ecuación, podría pensarse en $x = -1$ (una solución); pero si se habla de raíces, podría pensarse en $x_1 = -1$ y $x_2 = -1$ y en este caso las raíces son iguales, es decir, la ecuación tiene dos raíces iguales o raíz doble.

En la actividad 1 de la sesión 3 es muy importante que utilice las gráficas que aparecen en la página 125 del libro, para que los alumnos reflexionen sobre los siguientes aspectos:

- La relación que existe entre el valor del discriminante ($b^2 - 4ac$) de una ecuación cuadrática y el número de raíces.
- La representación geométrica de las raíces de la ecuación cuadrática, determinada por el valor del discriminante.

El valor del discriminante de la primera ecuación $3x^2 + x - 10 = 0$ es mayor que cero (es 121), por lo que la ecuación tiene dos raíces distintas ($\frac{5}{3}$ y -2) y la gráfica de la función correspondiente, corta al eje X en dos puntos, cuyas abscisas son esas dos raíces.

El valor del discriminante de la segunda ecuación $x^2 + 2x + 1 = 0$ es cero, y la ecuación tiene dos raíces iguales (en este caso -1) y la gráfica de la función corta al eje X sólo en un punto. El vértice de la parábola es un punto sobre el eje X.

El valor del discriminante de la tercera ecuación $3x^2 - 2x + 1 = 0$ es menor que cero (es -8), y la ecuación no tiene raíces fraccionarias ni decimales, por lo que la gráfica de la función no corta al eje X.

En las actividades 1 y 2 de la sesión 4, los alumnos deberán llegar a las siguientes respuestas:

a) $(2x + 3)^2 = 2(6x + 4) \rightarrow 4x^2 + 12x + 9 = 12x + 8 \rightarrow 4x^2 + 1 = 0 \rightarrow$ No tiene solución.

b) $8(2 - x)^2 = 2(8 - x)^2 \rightarrow 8(4 - 4x + x^2) = 2(64 - 16x + x^2) \rightarrow 6x^2 - 96 = 0 \rightarrow x_1 = 4$, $x_2 = -4$.

c) $3x(x - 2) - (x - 6) = 4(x - 3) + 10 \rightarrow 3x^2 - 11x + 8 = 0 \rightarrow x_1 = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$, $x_2 = 1$.

En la actividad 3, inciso a), se pide aplicar las propiedades de la suma y el producto de las raíces de una ecuación cuadrática para verificar si las soluciones de las ecuaciones de la actividad 1 son correctas. Por tanto, se desglosa la explicación para cada respuesta.

El inciso a) no tiene solución porque no existe ningún número racional o irracional que sea la raíz cuadrada de un número negativo. En este caso $x = \pm\sqrt{-\frac{1}{4}}$.

Inciso b) $x_1 + x_2 = 4 - 4 = 0$ y $\frac{-b}{a} = \frac{0}{6} = 0$; $x_1(x_2) = (4)(-4) = \frac{-96}{6} = -16$ y $c = -96$.

Inciso c) $x_1 + x_2 = \frac{8}{3} + 1 = \frac{11}{3}$ y $\frac{-b}{a} = \frac{-(-11)}{3} = \frac{11}{3}$; $x_1 (x_2) = (\frac{8}{3})(1) = \frac{8}{3}$ y $\frac{c}{a} = \frac{8}{3}$.

Para resolver la actividad 4, solicite a los alumnos completar el triángulo rectángulo prolongando el radio hasta el extremo D de la cuerda CD, así como trazar el segmento DF, que une los extremos de las cuerdas.

Las medidas del triángulo serán: para la hipotenusa, $2r$ y para los catetos, $(r + 6)$ y 12, respectivamente. Al aplicar el teorema de Pitágoras, se obtiene: $(2r)^2 = (r + 6)^2 + 12^2$. Al simplificar y ordenar los términos de la ecuación, se obtiene $r^2 - 4r - 60 = 0$. Una de sus soluciones da la medida del radio: 10 cm.

En las actividades de la sesión 5, los alumnos tendrán la oportunidad de elegir la herramienta matemática más eficaz para resolver un problema dado, en este caso, una ecuación de primer grado, un sistema de ecuaciones lineales, o una ecuación cuadrática.

En la actividad 1, inciso a), la primera parte del problema no ofrece ninguna dificultad: $x + y = 184$, pero la segunda parte, sí. Una estrategia para hallar la ecuación que modela esa segunda parte consiste en suponer que no hay residuo y la ecuación es $\frac{x}{y} = 2$, para que el residuo sea 7 hay que restar 7 al numerador así que la ecuación es $\frac{x - 7}{y} = 2$.

En la actividad 3 se propone la ecuación $x^2 + (x + 1)^2 + (x + 2)^2 = 110$ y se pide elegir de cuatro problemas los que pueden modelarse con esta ecuación; las soluciones son los incisos a) y c).

Aquí conviene preguntar a los alumnos por qué los otros dos no corresponden a la ecuación planteada.

Para dar respuesta a ello, los alumnos deberán simplificar y ordenar los términos de la ecuación cuadrática y expresarla en su forma normal o canónica: $3x^2 + 6x - 105 = 0$ que, al factorizarla, se obtiene $3(x - 5)(x + 7) = 0$ y, por lo tanto, las soluciones de la ecuación son: $x_1 = 5$ $x_2 = -7$ y sólo la primera solución es válida para el problema. Los números consecutivos son 5, 6 y 7 y el número de tres cifras es 567 porque $5^2 + 6^2 + 7^2 = 110$.

En la sesión 6 se proponen dos problemas. Después de que los alumnos los lean, plantee las siguientes preguntas para promover la reflexión:

"¿Qué tienen en común estos problemas?"; "¿En qué son diferentes?"; "¿Alguno de ellos se resuelve mediante una ecuación cuadrática?¿Cuál?"; "Para resolver uno de ellos, ¿conviene elaborar una tabla de valores?"; "Si en ambos se representa la medida del ancho del rectángulo con la literal *a*, ¿cómo se representa la medida del largo en función de la medida del ancho?".

En el primer problema, las medidas de los lados pueden representarse de la siguiente manera: ancho = a, largo = $8 - a$. Consecuentemente, el área será $a(8 - a)$. Como no se especifica numéricamente el área, habrá que elaborar una tabla de valores para calcular las posibles áreas del gallinero y determinar cuál sería la mayor. De esto se concluye que el gallinero de mayor área tendría forma cuadrada de 4 m por lado.

Con respecto del problema 2, la representación algebraica del área es también $a(8 - a)$, pero como aquí sí se conoce el valor numérico del área (15 m^2), puede plantearse la ecuación que permite encontrar la medida de los lados del gallinero: $a(8 - a) = 15$, cuyas soluciones son $a_1 = 3$ y $a_2 = 5$.

Pautas para la evaluación formativa

Para valorar el avance de los alumnos, observe si logran:

- Resolver algebraicamente ecuaciones cuadráticas completas e incompletas.
- Representar gráficamente situaciones que implican funciones lineales y cuadráticas.
- Determinar el tipo de raíces de una ecuación cuadrática a partir del valor del discriminante de la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas.
- Identificar las raíces de una ecuación en la gráfica correspondiente.

¿Cómo apoyar?

Es probable que algunos alumnos aún tengan dificultades para simplificar y ordenar ecuaciones cuadráticas para obtener su forma general o canónica. Si esto sucede, sugiérales que revisen las secuencias sobre expresiones equivalentes.

También puede proponer situaciones problemáticas adicionales que impliquen la representación algebraica de funciones cuadráticas y de ecuaciones asociadas a ellas.

Por ejemplo:

Considere la función cuadrática $y = x^2 + 2x - 3$.

- Pida elaborar una tabla de valores de esta función para determinar si tiene un valor máximo o un valor mínimo.
- ¿Cuál es ese valor? ¿Es máximo o mínimo?
- ¿Cuáles son las raíces de la ecuación asociada a esa función?

¿Cómo extender?

Si observa que los alumnos resuelven con facilidad algún problema, pídales que inventen uno para que lo resuelva todo el grupo y tengan claridad de cuál o cuáles son las posibles soluciones.

Secuencia 23 Funciones 3

(LT, Vol. II, págs. 132-141)

Tiempo de realización	4 sesiones
Eje temático	Número, álgebra y variación
Tema	Funciones
Aprendizaje esperado	Analiza y compara diversos tipos de variación a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica, que resultan de modelar situaciones y fenómenos de la física y de otros contextos.
Intención didáctica	Que los alumnos resuelvan problemas que implican el análisis de la relación de variación cuadrática para conocer sus propiedades y características y las pueda expresar algebraicamente.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisuales** • *Maximización de áreas en un proyecto de acuaponia* • *Modelación de fenómenos con funciones cuadráticas* **Informático** • *Elementos y características de una función cuadrática*
Materiales de apoyo para el maestro	**Bibliografía** • "Cada gota cuenta" (22 de diciembre de 2020), en FAO. Disponible en http://www.fao.org/fao-stories/article/es/c/1113809/ **Recursos audiovisuales** • *Interpretación de gráficas con secciones curvas* • *Relaciones funcionales con variación cuadrática*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Analicen el crecimiento y decrecimiento cuadrático a partir de las representaciones tabular y gráfica para determinar un punto máximo y expresar algebraicamente la situación.
- Sesión 2. Resuelvan problemas a partir de elaborar e interpretar la representación tabular y gráfica que describe el crecimiento cuadrático.
- Sesión 3. Comparen las representaciones tabular y gráfica para interpretar los valores que representan un fenómeno que tiene una variación de segundo grado.
- Sesión 4. Resuelvan problemas que implican conocer las propiedades y características de la función cuadrática a partir de sus distintas representaciones, poniendo énfasis en el eje de simetría y el vértice de la parábola, así como en la información que aportan sobre la situación que representan.

Acerca de...

Las funciones cuadráticas permiten examinar y describir un tipo de crecimiento uniforme. El análisis de las características de las funciones cuadráticas en la resolución de problemas, cuando se representan en gráficas y en tablas, permitirá construir modelos a partir de ellas. Algunas de las características de las funciones cuadráticas que se explorarán son la simetría y los puntos máximos y mínimos que corresponden al vértice de la parábola. Se espera que los alumnos pasen gradualmente de realizar la representación punto por punto y sólo con valores enteros para obtener y analizar la gráfica, a anticipar la localzación del vértice y del eje de simetría de la parábola a partir de graficar ciertos puntos, que no necesariamente serán valores enteros, para ver el comportamiento de la función.

Asimismo, se trabajará con números naturales, fracciones y decimales. No sólo se utilizan esos números en los cálculos, sino que, al evaluar las funciones cuadráticas, aparecen números con expansión decimal infinita, es decir, números racionales e irracionales.

Es importante que, en estas circunstancias, se ponga énfasis en lo que significa la aproximación a un número de cifras decimales que se decida apropiado para operar. El uso de una calculadora puede ser de apoyo para los cálculos correspondientes.

Sobre las ideas de los alumnos

En secuencias pasadas, los alumnos se han acercado al concepto de variación cuadrática, pero muchos de ellos pueden tener aún ideas poco claras sobre lo que significa. Por ejemplo, es probable que algunos alumnos piensen que una función cuadrática sólo puede crecer o decrecer y no se dan cuenta de que en una parábola se encuentran ambos tipos de comportamientos: cuando la parábola abre hacia abajo, el comportamiento es primero creciente y después decreciente (como en el caso de una pelota que se avienta hacia arriba y luego cae al suelo), mientras que, cuando la parábola abre hacia arriba, el comportamiento es primero decreciente y después creciente (como en el caso de una cadena que se encuentra agarrada entre dos soportes). Es importante que haga notar esto a los alumnos, para que comprendan que el comportamiento creciente o decreciente depende del punto de vista desde el que se vea la función y cómo se modele el sistema que se está estudiando.

Por otro lado, los alumnos pueden pensar que el comportamiento de las parábolas es no uniforme porque no se comporta como una línea recta; en este punto es primordial que les comente que una función (sea lineal o cuadrática) se considera uniforme y constante siempre que su forma sea simétrica respecto a alguno de sus ejes, esto es, que su forma sea predecible.

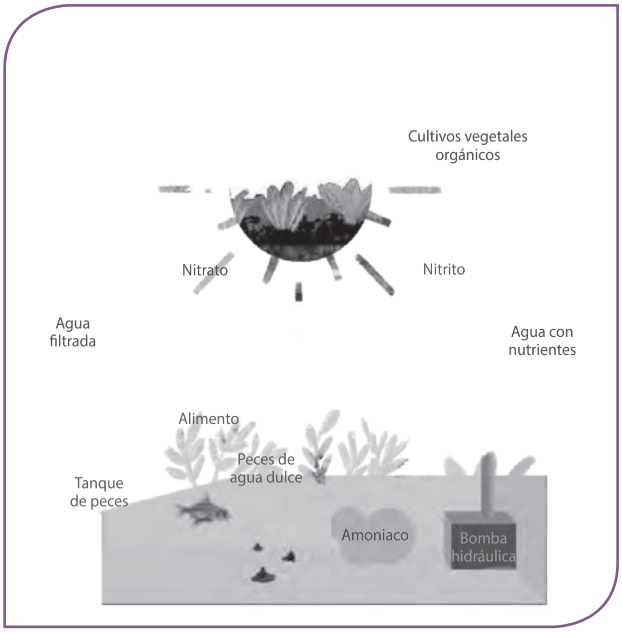
Por ejemplo, en física, el crecimiento de la aceleración con respecto al tiempo es cuadrático, creciente y constante al mismo tiempo, ya que siempre es simétrico con respecto a su eje.

¿Cómo guío el proceso?

Antes de comenzar el trabajo con esta secuencia, si le es posible vea con sus alumnos estos videos acerca de algunos proyectos de acuaponia exitosos en nuestro país: https://www.youtube.com/watch?v=xqN0mzOKoz8, https://www.youtube.com/watch?v=BhPabu3bYY8, https://www.youtube.com/watch?v=nDtHcyn0D64

Posteriormente, lea con ellos la sección "Para empezar" y pídales que analicen el diagrama propuesto. Comente lo que significa la producción sustentable. Es un momento en el cual, dependiendo del contexto de sus alumnos, puede aprovechar para que hablen de sus conocimientos o de la relación con el cultivo de plantas y el cuidado de peces o cualquier otro ser vivo. Esto servirá para responder y discutir en torno a las preguntas que se presentan.

En la actividad 1 de la sesión 1 conviene que analicen la imagen y entiendan bien qué les plantea el problema. Tal vez sea necesario que oriente a los alumnos para determinar que los catetos del triángulo superior miden x, y por lo tanto, la medida de la altura del rectángulo es la misma que los catetos del otro triángulo, esto es $(13 - x)$. Los alumnos pueden verificar que los



triángulos son semejantes. En este tipo de actividades conviene que se exploren las razones para elegir o descartar las gráficas y así sustentar la elección. Por ello, no es suficiente tabular algunos puntos, pues hay cuestiones particulares que deben refinarse y sustentarse. Si observa que por lo general los alumnos trabajan con números enteros o que tienen dificultades para la elección de la gráfica, puede sugerir el llenado de una nueva tabla que complemente la que ya llenaron. Por ejemplo:

Base x (m)	6.0	6.1	6.2	6.3	6.4	6.5	6.6	6.7
Área $A(x)$ (m^2)								

Esta tabla se puede analizar colectivamente y les ayudará para ver cuál es el comportamiento de la gráfica. Algunos alumnos pudieran no identificar que la solución del problema planteado corresponde a la mitad de la parábola porque, en el momento en que la medida del largo del rectángulo es igual a la medida de su ancho, es decir, cuando se forma el cuadrado, los siguientes valores formarán rectángulos con los mismos valores, pero ahora los valores de la base serán los de la altura, esto significa que se invierten. Las preguntas de los incisos b) y d) pueden ayudar a esta reflexión. Cuando un alumno se dé cuenta de esto, será importante orientarlo para que asocie este hecho con la simetría de la gráfica y con su punto máximo, obteniendo las mismas medidas y el área máxima del rectángulo, lo cual ayudará a sus respuestas en la actividad 3.

Lea con el grupo el problema de la primera actividad de la sesión 2 para que les ayude a comprenderlo. Puede poner como ejemplo que el suplemento alimenticio, como algunos otros alimentos, puede ser bueno en cierta medida, pero si se excede su consumo, se vuelve contraproducente. Solicite a los alumnos que digan qué tipo de alimentos pueden causar estos efectos (sal, azúcar, entre muchos otros). Para responder las preguntas de los incisos, los alumnos deberán profundizar en el significado de la simetría de la parábola y, una vez que la grafiquen, reflexionar sobre qué representa el punto máximo que, en este caso, es la cantidad óptima de suplemento alimenticio para que los peces aumenten el mayor peso posible.

En la actividad 2 puede reflexionar con ellos acerca de los puntos donde la parábola corta al eje X, las abscisas de estos puntos son las raíces de la ecuación de segundo grado, lo cual se estudió en la secuencia 22, de las cuales sólo un valor responde al problema, en este caso la raíz positiva. Otro análisis es acerca del vértice de la parábola que representa la ganancia máxima del peso de los peces por semana. Podrán notar que las coordenadas del vértice V(2.5, 2.4) coinciden con los valores de ciertos términos de la función:

$$y = -3(x - 2.5)^2 + 24$$

Es importante que para este tipo de funciones los alumnos identifiquen que el eje de simetría es una recta paralela al eje Y, que pasa por el vértice de la parábola. Revise esta propiedad para cada parábola que grafiquen o que se examinan a lo largo de la secuencia.

En la sesión 3, los alumnos continúan el trabajo de analizar las gráficas, tablas y expresiones de las funciones cuadráticas, sus propiedades y características. Pero también se pretende que entiendan mejor el sistema de acuaponia y cómo influye en lo que le pasa a los peces y al cultivo de las plantas, y cómo esto se puede modelar matemáticamente.

Al tabular los valores tendrán los elementos suficientes para discriminar y elegir la gráfica que representa la función del problema. Pida a los alumnos que argumenten por qué eligieron la gráfica, pero también por qué descartaron las otras tres; esto les llevará necesariamente a referirse a las características de cada gráfica y comprender mejor qué papel tiene cada término. Una vez que transformen la expresión algebraica de una forma a otra, reflexionen sobre lo que representan los valores de los términos en cada una de las expresiones. Por ejemplo, podrán notar que en la expresión general de la parábola $y = ax^2 + bx + c$, c es donde ésta corta el eje de las ordenadas, y en la función

$$y = -0.05(x - 3.5)^2 + 0.8,$$

aparecen las coordenadas del vértice V(3.5, 0.8).

En las actividades 2 y 3 se quiere que los alumnos analicen las gráficas y determinen si quieren usar el suplemento para que tanto peces como plantas saquen el mejor beneficio, que los peces salgan más beneficiados que las plantas o viceversa. Aquí no hay una respuesta correcta o incorrecta, se trata de interpretar la información y que el responsable determine qué valores son los convenientes.

En la sesión 4 los alumnos continúan analizando diversos aspectos sobre la alimentación de los peces y las ganancias que se obtienen en una venta.

Es la primera vez en la secuencia que los alumnos trabajan con una expresión que tiene coeficiente positivo para el término cuadrado de la función:

$$N(s) = 2.25s^2 - 9s + 11.$$

Cuestione e identifique qué razón dan los alumnos para que el cambio de signo determine el sentido de apertura de la parábola. Esto ya lo han visto antes, sobre todo en las secuencias relacionadas con ecuaciones de segundo grado, pero ahora se pretende que lo vinculen con el contexto del problema. Por ejemplo, que la parábola "abra hacia abajo" significa que primero hay un crecimiento y luego un decrecimiento. Es necesario que vinculen este razonamiento con los problemas y modelos de cada situación presentada. En esta sesión deben quedar claras las propiedades de las parábolas, el significado y la interpretación que tienen en los diferentes problemas planteados en las sesiones. En el problema de ganancias es importante que vean que no siempre vender más caro implica mayor ganancia. Se propone abrir el diálogo de reflexión con la siguiente pregunta: "¿Comprarían un libro, un juego o un alimento que, aunque les gustara mucho, estuviera muy caro?".

Una idea puede ser que los precios muy altos disminuyen las ventas. En el siguiente problema puede dejar a los alumnos que investiguen previamente qué efectos tienen los nitratos en los peces y en las plantas para que tengan más elementos sobre la acuaponia.

La actividad 6 permitirá a los alumnos que argumenten sus respuestas con base en lo que han analizado hasta ahora.

Pautas para la evaluación formativa

Con la finalidad de verificar en qué medida se logra la intención didáctica que aparece en la ficha descriptiva, es necesario hacer un registro para cerciorarse de que los alumnos realizan lo siguiente:

- Argumentan su elección entre las gráficas que modelan un problema.
- Analizan el crecimiento y decrecimiento cuadrático a partir de las representaciones tabular y gráfica.
- Determinan los puntos máximo o mínimo de una parábola y los identifican en la expresión algebraica que modela un problema.
- Resuelven problemas a partir de observar e interpretar la representación tabular y gráfica de un fenómeno que se modela con una función cuadrática.

¿Cómo apoyar?

Es probable que los alumnos tengan dificultades para trazar las gráficas de las actividades 2 y 3 de la sesión 3, por lo que se sugiere las lleve graficadas en formato grande para analizarlas con todo el grupo y, a partir de los diferentes argumentos, sean capaces de tomar la decisión que crean más conveniente.

¿Cómo extender?

Puede formalizar y profundizar sobre lo que algunos alumnos tal vez pudieron haber notado: si la expresión de la parábola es de la forma $y = a(x - h)^2 + k$, podemos encontrar de inmediato el vértice de la parábola que es (h, k); si la expresión de la parábola es de la forma $y = ax^2 + bx + c$, podemos encontrar de inmediato el punto donde la gráfica de la función interseca al eje Y. Este punto es $(0, c)$.

Además, podría pedir a los alumnos que den ejemplos de funciones cuadráticas crecientes, decrecientes y constantes, y que comenten sus hallazgos con sus compañeros de grupo.

Secuencia 24 Polígonos semejantes 3

(LT, Vol. II, págs. 142-151)

Tiempo de realización	4 sesiones
Eje temático	Forma, espacio y medida
Tema	Figuras y cuerpos geométricos
Aprendizaje esperado	Construye polígonos semejantes. Determina y usa los criterios de semejanza de triángulos.
Intención didáctica	Que los alumnos resuelvan problemas que implican utilizar la semejanza de triángulos para calcular medidas de distancias inaccesibles.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisuales** • *Estimación de distancias usando el pulgar* **Informático** • *Cálculos de distancias usando la semejanza de triángulos*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recursos audiovisuales** • *Aspectos didácticos de la enseñanza de los polígonos semejantes* • *Acerca de los criterios de semejanza* • *Medir utilizando el pulgar.* Disponible en https://www.youtube.com/watch?v=JPOaN-VzF5U (Consultado el 9 de diciembre de 2002). • *Método de medición de distancias inaccesibles.* Disponible en https://www.youtube.com/watch?v=r2Fqg3FnkIE&feature=youtu.be (Consultado el 9 de diciembre de 2002).

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Utilicen el método de sombras basado en la aplicación de los criterios de semejanza de triángulos AA y ALA para calcular alturas.
- Sesión 2. Utilicen el concepto de reflexión de la luz para calcular alturas inaccesibles y comparen las estrategias empleadas para determinar cuál es la más útil ante las condiciones y los datos de cada situación.
- Sesión 3. Usen el método de paralaje y planeen estrategias para aplicar la semejanza de triángulos en la resolución de problemas que implican el cálculo de una distancia inaccesible.
- Sesión 4. Resuelvan problemas que implican el uso de los criterios de semejanza de triángulos para obtener medidas de longitudes inaccesibles en diversos contextos.

Acerca de...

Medir es una de las acciones que más han relacionado las matemáticas con la vida cotidiana a lo largo de la historia del ser humano. Asimismo, medir y estimar longitudes es una de las actividades matemáticas que pudieran resultar más cercanas y prácticas al contexto de los alumnos. Por otro lado, los criterios de semejanza ofrecen a los alumnos un recurso que les permite calcular medidas inaccesibles. Para ello, deberán hacer abstracciones, conjeturas y generalizaciones, así como validar criterios que les servirán para conocer y profundizar en las propiedades geométricas de los triángulos.

Los alumnos han trabajado en secuencias anteriores con la semejanza de polígonos, los criterios de congruencia y semejanza de triángulos, lo cual les abre la posibilidad de usarlos para resolver problemas de medición, sobre todo para hacer cálculos de medidas inaccesibles.

Sobre las ideas de los alumnos

Algunos alumnos tal vez aún tengan dificultades para usar adecuadamente los criterios de semejanza de triángulos. Por ejemplo, podrían argumentar que los triángulos de la primera actividad de la sesión 1 son semejantes, de acuerdo con el criterio AAA, dado que los ángulos alfa, beta y gama son iguales entre sí. El planteamiento es incorrecto, pues aunque estos ángulos sí son iguales, el criterio señalado es respecto a los tres ángulos de cada triángulo, y es suficiente con tener dos ángulos correspondientes iguales.

¿Cómo guío el proceso?

Lea y comente con los alumnos la sección "Para empezar". En primer lugar, resalte la importancia de los bosques, poniendo atención a las cuestiones medioambientales y a las productivas. El buen cuidado de los bosques y las selvas permitirá un mayor beneficio para todos a lo largo del tiempo, mientras que una sobrexplotación sólo da beneficios a unos cuantos en el corto plazo. Además de las preguntas sugeridas, puede formular otras, como: "¿Por qué razones se cortan los árboles?"; "¿Cómo se puede determinar cuándo conviene cortar un árbol?". Esto los puede llevar a respuestas relacionadas con la medición, y así después comprender qué utilidad tendría la semejanza en estas situaciones.

En la secuencia, los alumnos deberán usar la semejanza de triángulos para resolver diversos problemas de medición. Para ello, deberá determinar cuáles triángulos son semejantes y por qué, identificando la correspondencia de lados y ángulos. A partir de los datos conocidos o accesibles, utilicen los criterios de semejanza, establezcan la razón de semejanza y calculen las medidas que faltan o que no se pueden medir directamente.

En las sesiones 1 y 2 se espera que los alumnos determinen las alturas de árboles a partir de diversos procedimientos y las condiciones que se establecen.

En la actividad 1 de la primera sesión, se pide que se encuentren las alturas de dos árboles, teniendo como referencia las medidas de las sombras que proyectan una persona y los árboles a una cierta hora del día. Por un lado, se pretende que los alumnos argumenten por qué son semejantes los tres triángulos que se forman aplicando correctamente el criterio AA, ya que las medidas de los tres ángulos correspondientes en los tres triángulos son iguales. Ayude a quienes tengan dificultades para determinar la relación de correspondencia entre los ángulos de los tres triángulos orientándolos para encontrar la incidencia de los rayos del sol y determinar los ángulos que tienen la misma medida debido a la condición de paralelismo y la verificación de la semejanza. Es necesario hacerles notar que el ángulo formado por el árbol y su sombra mide 90°. Por otro lado, se pretende que encuentren la razón de semejanza en cada caso, o las relaciones de proporcionalidad que les permitan hacer las operaciones necesarias para determinar las alturas que se piden.

Razón de semejanza entre el triángulo que forma la altura de Josefina y su sombra respecto a la altura del árbol 1 y su sombra.	Razón de semejanza entre el triángulo que forma la altura de Josefina y su sombra respecto a la altura del árbol 2 y su sombra.
$\frac{3.75}{2} = \frac{x}{1.60}$	$\frac{7}{2} = \frac{z}{1.60}$

En la actividad 2, se propone a los alumnos que utilicen otro procedimiento para encontrar la altura de un árbol, ya que ahora los datos conocidos son las distancias entre los árboles y el observador, y la altura del árbol más cercano al que observa, $\frac{7.2}{3} = \frac{x}{2.5}$ por lo que $x = 6$.

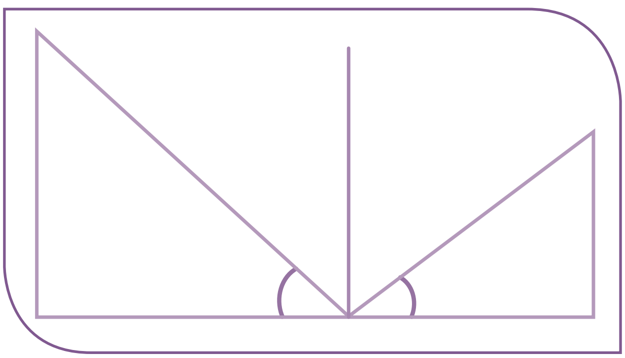
Recuerde que lo importante es establecer las relaciones geométricas entre las figuras y no calcular las dimensiones y obtener la medida. Así que los argumentos y las justificaciones de los alumnos deberán reflejar el razonamiento geométrico que han desarrollado.

En la sesión 2 se presenta un par de estrategias más para medir las alturas inaccesibles. En la actividad 2 se plantea la primera estrategia donde se observa que no basta con encontrar la medida del cateto que corresponde a la altura del triángulo más grande, sino que hay que sumar la altura del otro árbol

$$\frac{4.2}{1.2} = \frac{x}{1}$$

de donde $x = 3.5$ m y al sumar 2.5 m, que corresponde a la altura del árbol conocido, la altura del otro árbol es de 6 m.

En la actividad 3 se presenta la segunda estrategia, en la que es necesario comprender en qué consiste la reflexión de la luz y cómo los ángulos de incidencia y de reflexión son iguales. Explore el concepto de *ángulos complementarios* respecto al ángulo que forman la recta normal y el espejo, para que tengan los datos necesarios de los triángulos que se forman entre el punto más alto del árbol y los ojos de la niña. Deberán observar que se forman triángulos semejantes que tienen un vértice común, como el que aquí se muestra.

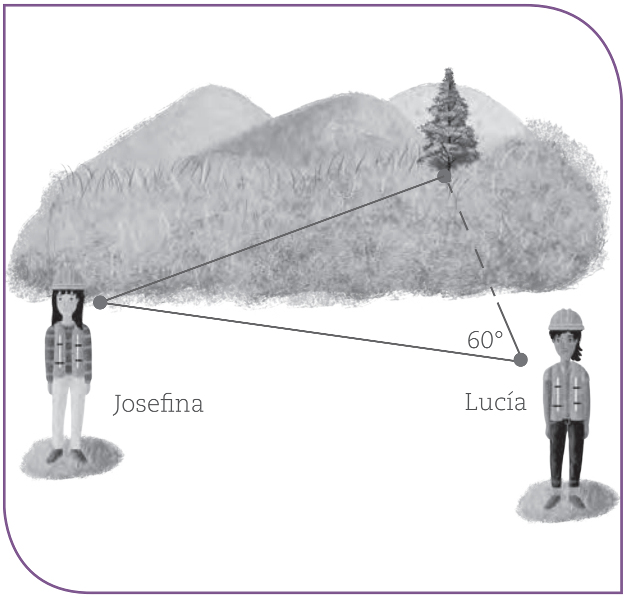


En esta sesión se presentan varios datos interesantes que conviene que discuta con los alumnos para que continúen con la reflexión sobre el cuidado y aprovechamiento de los bosques.

También puede ver el recurso sugerido en la sección "Visita la biblioteca" para complementar la información. Si le es posible, muestre a sus alumnos fotografías del árbol del Tule y comente acerca de la medida de la envergadura de una persona adulta para que estimen el perímetro aproximado del tronco de este árbol. Además, vale la pena identificar la estrategia más adecuada para calcular su altura. También podría pedir a sus alumnos que hagan mediciones de la altura de algunas cosas que haya en la escuela, por ejemplo la canasta de basquetbol, el asta de la bandera, el tamaño de algún árbol, etc., con el fin de poner en práctica los conocimientos estudiados en esta secuencia. Al final se dan sugerencias de cómo extender esta actividad.

En la sesión 3 se propone un par de construcciones geométricas y un método de estimación que les permitirá a los alumnos calcular la distancia de un punto a otro cuando no se puede acceder de forma directa.

En la primera actividad es importante que comprendan la construcción y por qué los triángulos que se forman son semejantes y útiles para encontrar la distancia deseada. Si lo considera pertinente, pida que, sin ver la imagen, los alumnos sigan las instrucciones del libro. Es decir, que se paren en un punto en el patio de la escuela y elijan un árbol o cualquier otro objeto (poste, edificio) que sirva como referencia. Sigan las instrucciones, cotejen que su construcción haya sido bien realizada y, después, verifiquen la precisión de la medida que obtuvieron, midiendo con un metro dicha distancia (en caso de que ésta fuera accesible). En la segunda actividad, tiene que cerciorarse de que los alumnos tomen como elemento importante la medida de los ángulos para trazar la construcción auxiliar de triángulos semejantes. Observe que si un ángulo es de 60°, conviene que el triángulo que se forma entre el árbol, el punto de referencia de Lucía y el de Josefina, sea equilátero, con lo cual se pueden formar dos triángulos rectángulos isósceles.



El método del pulgar para el cálculo de distancias es otra actividad que se puede realizar dentro o fuera del aula. El objetivo es que vean cómo la semejanza interviene en este método de estimación y no tanto la precisión de la medida, pues como se verá, su precisión dependerá de que la estimación o el conocimiento de una longitud sea acertada. Vea el audiovisual correspondiente para que quede claro este método. Después, cuando comparen los resultados que obtuvo cada pareja respecto a las razones que hay entre la distancia del pulgar a los ojos y la distancia que hay entre los ojos, podrán ver que los cálculos se facilitan, pues esta razón se aproxima mucho a 10 y se puede generalizar.

$$\frac{\textit{distancia del pulgar al ojo}}{\textit{distancia entre ojos}}$$

Después de leer el recuadro con la explicación del método de paralaje, comente cómo este método se usa para calcular distancias en el espacio, por ejemplo, la que hay de la Tierra a una estrella dentro de nuestra galaxia. Esto lo pueden comentar con más detenimiento y mayor profundidad cuando vean la secuencia "Razones trigonométricas 3", posterior a ésta.

En la sesión 4, los alumnos resolverán problemas que implican poner en juego lo aprendido acerca de la semejanza de triángulos para obtener medidas de longitudes en diversos contextos.

Pautas para la evaluación formativa

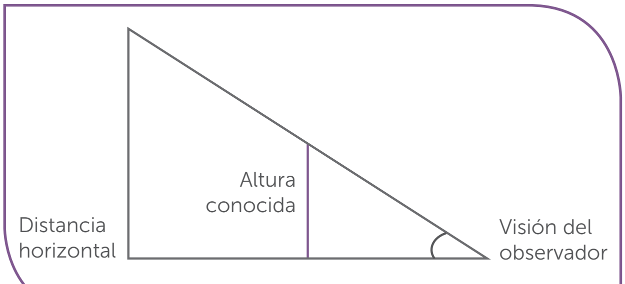
Con la finalidad de verificar en qué medida se logra la intención didáctica que aparece en la ficha descriptiva, es necesario hacer un registro para cerciorarse de que los alumnos realizan lo siguiente:

- Aplican los criterios de semejanza de triángulos para calcular las alturas usando el procedimiento de las sombras.
- Usan diversas estrategias para el cálculo de alturas y determinan cuál de ellas es mejor, según las condiciones y los datos que se presentan.
- Resuelven problemas que implican recurrir a las estrategias estudiadas sobre el uso de la semejanza de triángulos para obtener medidas de longitudes en diversos contextos.

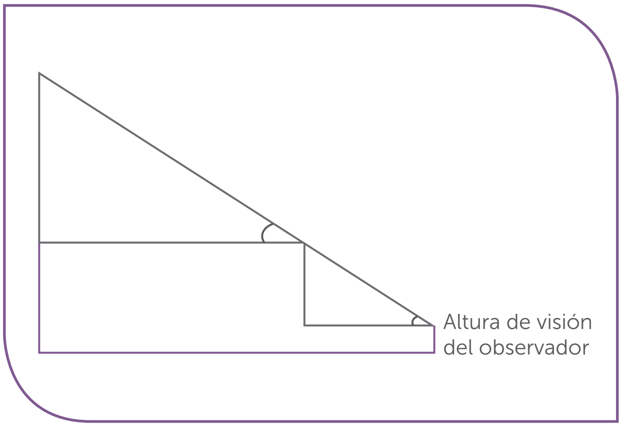
¿Cómo apoyar?

Si observa que los alumnos tienen dificultades para comprender cómo establecer las relaciones de correspondencia entre los lados y ángulos de los triángulos para determinar si son semejantes o no, destaque los datos que se conocen o proporcionan en cada actividad, desde los trazos y los triángulos que se forman. Por ejemplo, en la actividad 1 de la primera sesión, se conoce el tamaño de la sombra que proyectan cada árbol y la persona a una hora determinada, y la altura del observador, además de la condición de paralelismo de los rayos para formar las hipotenusas de los triángulos.

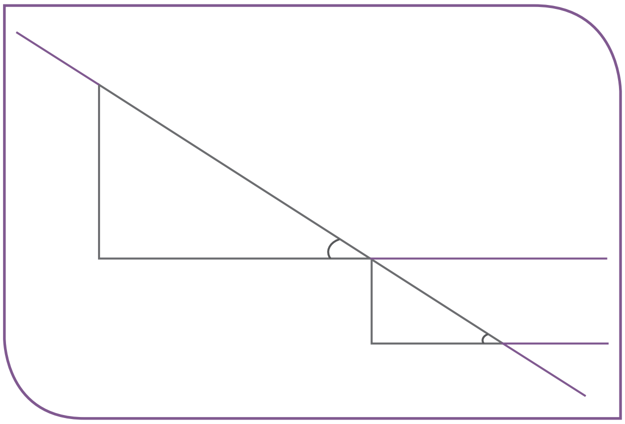
En el caso de la actividad 2 de la sesión 1, puede destacar que las distancias a las cuales se encuentran los árboles y el observador, que en este caso es Josefina, describen la distancia horizontal, pues están al ras del suelo.



En la sesión 2, el cateto que sirve de base de los triángulos está desplazado; sin embargo, es posible determinar una distancia horizontal común, debido a que ambos triángulos coinciden en un punto.



Si prolonga la hipotenusa y los catetos que forman la base de los triángulos, los alumnos podrán observar que el dibujo corresponde a líneas paralelas cortadas por una transversal, con lo cual se espera que identifiquen las relaciones de ángulos correspondientes que existen.



¿Cómo extender?

Entre las sesiones 2 y 3, o al final de la secuencia, puede pedir a sus alumnos que salgan a medir la altura de los objetos con los diversos métodos aprendidos o con alguna alternativa que diseñen entre todos. Por ejemplo, en la actividad 2 de la sesión 1, se usa la altura conocida de un árbol para calcular la de otro. En lugar de tener un objeto fijo, pueden usar un metro de madera, una vara o a un compañero que les sirva como referencia.

Puede formar equipos y pedir que todos midan la altura de los mismos objetos, pero cada uno con un método diferente. También puede pedir que cada equipo mida un solo objeto, pero con todos los métodos aprendidos, además de alguno que usted les haya mostrado. Esto les servirá para comparar medidas, porque sin duda habrá diferencias. Comenten a qué se deben dichas diferencias; esto es importante porque no dependen sólo de hacer bien las operaciones ni de usar bien o mal las propiedades de semejanza, sino de diferencias que puede haber en las longitudes que sirvan como referencia, por ejemplo el desplazamiento del metro al medir distancias horizontales entre un objeto y otro, o la mala posición del espejo o de la mirada del observador, entre otros factores que influyen al realizar una medición precisa. Se sugiere comentar cómo y cuándo se necesitan hacer medidas más precisas y cuándo puede haber ciertos márgenes de error. También se puede comentar qué significa calibrar las medidas y cómo podrían calibrar los métodos de medición para saber más o menos cuál es el margen de error de cada uno. Por ejemplo, se puede medir la altura de una canasta de basquetbol o un edificio, del cual se sepa la altura exacta, para comparar su resultado con la medida ya conocida.

Secuencia 25 Razones trigonométricas 3

(LT, Vol. II, págs. 152-161)

Tiempo de realización	5 sesiones
Eje temático	Forma, espacio y medida
Tema	Figuras y cuerpos geométricos
Aprendizaje esperado	Resuelve problemas utilizando las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.
Intención didáctica	Que los alumnos analicen algunas características y relaciones de las razones trigonométricas y resuelvan problemas en diversos contextos.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisual** • *Maravillas de la trigonometría* **Informático** • *Cálculo de distancias y ángulos*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recurso audiovisual** • *Aspectos didácticos de la enseñanza de la trigonometría*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Calculen alturas inaccesibles con el apoyo de un instrumento y el uso de las razones trigonométricas.
- Sesión 2. Usen las razones trigonométricas para calcular alturas y distancias.
- Sesión 3. Resuelvan problemas que impliquen calcular la medida de los ángulos agudos de triángulos rectángulos a partir de la medida de los lados.
- Sesión 4. Determinen el valor del seno, el coseno y la tangente de los ángulos de 30°, 45° y 60° y reconozcan algunas relaciones entre ellas.
- Sesión 5. Reconozcan los intervalos entre los que se mueven los valores de las razones seno, coseno y tangente y determinen si estos valores crecen o decrecen en los ángulos de 0° a 90°.

Acerca de...

En la secuencia 7, los alumnos resolvieron problemas que requerían el uso de razones trigonométricas recurriendo a procedimientos informales; en la secuencia 16, conocieron y estudiaron las definiciones de las razones seno, coseno y tangente de un ángulo. En esta secuencia se espera que resuelvan problemas aplicando lo que han aprendido sobre trigonometría y logren establecer algunas relaciones entre las razones trigonométricas. Por ejemplo que *sen* 30° = *cos* 60°. Esto es, que el seno de un ángulo es igual al coseno de su complemento, y que al dividir el seno de un ángulo entre el coseno del mismo ángulo se obtiene su tangente. No es el propósito esencial que los alumnos memoricen estas relaciones, lo importante es contribuir a la idea de que en matemáticas hay conceptos que guardan relaciones muy estrechas, como en este caso de las razones trigonométricas.

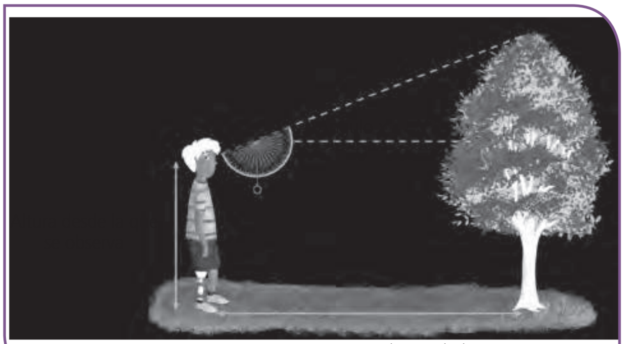
Sobre las ideas de los alumnos

La mayoría de los alumnos construyen los conceptos matemáticos de manera aislada, sin identificar las estrechas relaciones que hay entre ellos. Por ejemplo, estudian la multiplicación y la división creyendo, erróneamente, que son dos operaciones que nada tienen que ver entre sí. De ahí la necesidad de seleccionar problemas que les permitan establecer relaciones entre diferentes conceptos. Muchas veces los alumnos aplican las razones trigonométricas en triángulos que no son rectángulos, es decir, generalizan para todos los triángulos las mismas relaciones, por lo que es importante aclarar esto.

¿Cómo guío el proceso?

En la sesión 1, los alumnos resolverán un caso práctico: medirán indirectamente, y haciendo uso de la trigonometría, una altura elegida por ellos. Para lograrlo, construirán un instrumento que les permitirá conocer la medida del ángulo que podrán emplear para calcular la altura elegida. Es importante que considere el tiempo que los alumnos tardarán en construir el instrumento. Si lo cree pertinente, puede dejarlo de tarea en lugar de hacerlo en clase, dependerá del tiempo con el que cuente para estudiar la secuencia.

Se espera que los alumnos noten que el ángulo que deben emplear es el que aparece marcado en el diagrama con la letra *x*.



Distancia hacia el objeto

Y también se espera que observen que ese ángulo es el complemento del ángulo que forma el hilo con el popote, pues el ángulo X es opuesto por el vértice al complemento del ángulo que se forma con el hilo y el popote. Por ejemplo, si el ángulo entre el popote y el hilo es de 50°, entonces el ángulo X es 90° – 50° = 40°. Si esto no ocurre así, se sugiere ayudarlos a reflexionar acerca de ello.

Respecto a la distancia que hay hasta el objeto y la altura del observador, los alumnos podrán elegir si determinan esas distancias en metros y centímetros. Para ello pueden usar una cinta métrica, una regla, el metro del juego geométrico del maestro o una cuerda y luego medir la cuerda con el instrumento con el que cuenten. Asimismo, si así lo deciden, también pueden usar una unidad de medida que se use en la localidad en la que viven y que sea adecuada para longitudes.

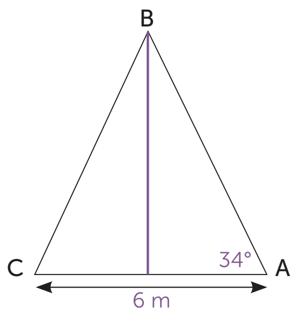
Si bien en la actividad 2 se indica que en la página 180 de su libro hay una tabla de valores de las razones trigonométricas, los alumnos pueden usar una calculadora científica si cuentan con ella.

Son comunes dos errores en esta actividad. Uno es que los alumnos crean que tienen que usar el valor del ángulo que forma el hilo con el popote, y el otro es que olviden aumentar al resultado la altura desde la cual se observa. Si al monitorear el trabajo de los alumnos observa alguno de estos errores, puede apoyar con preguntas como: "¿Cuál es el triángulo rectángulo que van a considerar?"; "¿El ángulo que están tomando en cuenta forma parte de ese triángulo?"; "¿Ya consideraron la altura desde la cual se observa?".

Supervise que elaboren los diagramas que se piden en la actividad 3. Si varios equipos eligieron medir la misma altura es importante que en la puesta en común se comente, si obtienen resultados diferentes, si esto se debe a un error de medida (de las distancias o del ángulo), o es un error de cálculo (se equivocan al hacer las operaciones), o bien un error de imprecisión en los instrumentos utilizados; esto último es común porque las herramientas con que cuentan son inexactas, incluso si se usan de manera correcta. También es importante que se tenga en mente, a lo largo de toda la secuencia, que la mayoría de los valores de las razones trigonométricas de las tablas son aproximaciones. Es probable que los alumnos que recurran a la calculadora encuentren un resultado y los que usen las tablas, otro, debido a que en la pantalla de la calculadora aparecen más números a la derecha del punto decimal; no obstante, si los cálculos son correctos, los resultados son muy aproximados.

Los problemas de la sesión 2 se han elegido de tal manera que los alumnos tengan que emplear alguna de las tres razones trigonométricas que han estudiado. En la primera actividad, para calcular la altura del asta bandera tienen el valor de un ángulo y su cateto adyacente y necesitan calcular el cateto opuesto, así que podrán usar la tangente del ángulo de 27°. Puede aprovechar este problema para comentar con los alumnos las alturas de un asta bandera (quizás obtuvieron la medida del asta de su escuela en la sesión 1) o las astas banderas monumentales de México que llegan a medir más de 100 m de altura. Para que se den una idea de esta última medida, se sugiere que la comparen con alguna longitud del entorno escolar.

En el problema del inciso d) también conviene usar la tangente. Se espera que los alumnos noten que la altura pedida es igual a (3)(tan 34°). Es probable que se equivoquen y consideren los 6 m para calcular la altura del triángulo, pero como el triángulo ABC es isósceles, se debe considerar la mitad del segmento AC.



Algunos de los despejes que los alumnos tendrán que hacer son más sencillos que otros. Por ejemplo, en el inciso a) el despeje es:

$$\tan 27° = \frac{co}{100}$$

$$co = (100)(\tan 27°)$$

Mientras que para el inciso b) es:

$$sen\ 40° = \frac{1.27}{h}$$

$$(h)(sen\ 40°) = 1.27$$

$$h = \frac{1.27}{sen\ 40°}$$

Un error común es que los alumnos consideren que el 1.27 "pasa" multiplicando a sen 40°. Apoye a los alumnos que cometan este error recordándoles cómo se despeja un cociente cuando la cantidad desconocida es el denominador y no el numerador.

Es de suma importancia que usted realice la actividad 2 y que le dedique tiempo en clase para revisar algunos de los problemas que inventen los alumnos para que los resuelvan todos los compañeros, pues esto ayuda a clarificar conceptos o descartar ideas erróneas que pudieran tener aún.

Hasta este momento, los alumnos han calculado el valor de las razones trigonométricas a partir de los lados de un triángulo rectángulo. En la sesión 3 harán el proceso inverso: dado el valor de alguna de las razones trigonométricas, determinarán el ángulo.

En el primer problema tendrán que encontrar cuál es el ángulo cuyo seno es $\frac{6}{10}$, o bien 0.6. Quienes usen tablas se darán cuenta de que este valor no está exactamente, pero se espera que tomen el valor de 0.601 como el más cercano y que corresponde a 37°, mientras que los alumnos que usen la calculadora científica encontrarán que:

$$\boxed{sen^{-1}} \left(\frac{6}{10}\right) \approx 36.869°$$

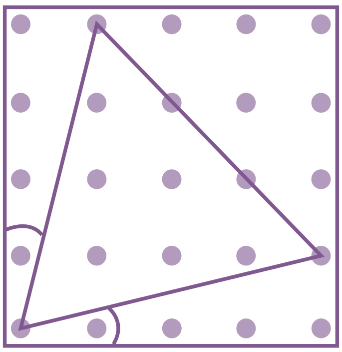
Aproveche la puesta en común de la actividad 2 para seguir comentando acerca de que, al trabajar con las razones trigonométricas, se obtienen valores aproximados.

Una aclaración que vale la pena hacer a los alumnos es acerca de las teclas $\boxed{INV}$ y $\boxed{sen^{-1}}$, que vienen en las calculadoras científicas; ambas se usan para obtener el ángulo cuyo seno es el número que se introduce en la calculadora después de apretar alguna de estas teclas. Esto podría confundir a los alumnos porque, matemáticamente, la razón trigonométrica inversa del seno es la cosecante:

$$csc\ (\alpha) = \frac{1}{sen\ (\alpha)}$$

La tecla $\boxed{sen^{-1}}$ representa a la función inversa del seno, llamada arcoseno (arcsen).

El problema planteado en la actividad 4 fue abordado anteriormente. Los alumnos demostraron que el triángulo no es equilátero calculando la medida de los lados a partir del teorema de Pitágoras. En este caso se pide que exploren si los tres ángulos miden 60°. Para comprobar que el triángulo no es equilátero es suficiente con que uno de los ángulos no mida 60°; podrán elegir cualquier ángulo. Por ejemplo, se puede partir de que el ángulo de la esquina inferior izquierda del geoplano mide 90°. Con las razones trigonométricas se puede investigar si la suma de los ángulos marcados es 30°; si así fuera, el ángulo interior del triángulo mediría 60°.



La medida de los ángulos indicados se puede calcular de la siguiente manera, si se toma como unidad la distancia entre cada punto:

ángulo cuya tangente es $\frac{1}{4}$.

El resultado es 14.036°, aproximadamente. Al sumar ambos se obtiene 28.072°, por lo tanto, el ángulo interior del triángulo no mide 60°. Si bien se está trabajando con aproximaciones, la suma de los dos ángulos marcados no medirá nunca 30°, aunque se tome una aproximación con más decimales.

En la sesión 4, los alumnos conocerán una manera de calcular el seno, el coseno y la tangente de los ángulos de 30°, 60° y 45°. Para los dos primeros se recurre a un triángulo equilátero y para el tercero se usa un triángulo rectángulo isósceles. Al hacerlo tendrán que hacer uso de raíces cuadradas inexactas. Recuerde que una raíz cuadrada inexacta pertenece a los números irracionales, es decir, se trata de un número que tiene una parte a la derecha del punto decimal que es infinita y no tiene periodo; esto ocasiona que siempre se tenga que trabajar con aproximaciones. Por ejemplo, para la tangente de 30° encontrarán: $\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Podría quedarse indicado de esta manera, pero, si los alumnos lo prefieren, pueden usar la calculadora para determinar un valor aproximado de la raíz cuadrada de 3 y dividir uno entre ese valor, lo cual deberá comentarse en el grupo y concluir que el valor encontrado es una aproximación. Es muy probable que en bachillerato los alumnos aprendan a usar un proceso llamado racionalización de radicales para transformar este tipo de expresiones.

La actividad 2 está dedicada a explorar algunas relaciones interesantes e importantes entre las razones trigonométricas. Al completar la tabla es muy probable que los alumnos se sientan inclinados a consultar la tabla de las funciones trigonométricas o a usar la calculadora para comprobar, por ejemplo, que el seno de un ángulo es igual al coseno de su complemento, es decir, explorarían si:

$$\begin{aligned} sen\ 30° &= cos\ 60° \\ sen\ 20° &= cos\ 70° \\ sen\ 35° &= cos\ 55° \\ sen\ 8° &= cos\ 82° \end{aligned}$$

Y notarán que sí se cumplen estas igualdades. No obstante, más que comprobaciones numéricas, se espera que los alumnos usen argumentos basados en las definiciones de las razones trigonométricas. Por ejemplo: "El seno de un ángulo es igual al coseno de su complementario porque en un triángulo rectángulo los ángulos agudos son complementarios y el cateto opuesto de uno es el cateto adyacente del otro, por lo tanto, al calcular $\frac{co}{h}$ de uno da lo mismo que $\frac{ca}{h}$ del otro".

Para la afirmación f), quizá busquen los valores del seno y del coseno de un ángulo, eleven al cuadrado ambos resultados, lo sumen y obtengan 1 (o un número aproximado a uno). Nuevamente, lo ideal es que apliquen las definiciones para argumentar la afirmación:

$$sen^2 A + cos^2 A = \left(\frac{co}{h}\right)^2 + \left(\frac{ca}{h}\right)^2$$

Elevando al cuadrado:

$$\frac{co^2}{h^2} + \frac{ca^2}{h^2}$$

Al resolver la suma y por el teorema de Pitágoras:

$$\frac{co^2 + ca^2}{h^2} = \frac{h^2}{h^2} = 1$$

por lo que:

$$sen^2\, A + cos^2\, A = 1$$

Si a nadie se le ocurre, usted puede sugerir que apliquen las definiciones. En la puesta en común contraste esta manera de argumentar con la de trabajar con datos numéricos aproximados, pues además no se pueden probar todos los valores, sino solamente algunos, lo cual impide hacer generalizaciones, mientras que el argumento anterior permite afirmar que es válido para todos los valores de los ángulos.

En la actividad 1 de la sesión 5, los alumnos profundizarán en el estudio de las razones trigonométricas al ver cómo varían los valores de estas razones y tendrán que extender el concepto de razón más allá de la relación entre los lados de un triángulo rectángulo; éste es un primer acercamiento para pasar de las razones a las funciones trigonométricas. Aquí se enfrentarán con ideas importantes que les podrían resultar difíciles, por ejemplo, que pueden calcular el seno de un ángulo de 0° o de 90° a pesar de que no existe un triángulo rectángulo que tenga ángulos con esos valores. En un primer momento permita que traten de encontrar en equipo las justificaciones que se piden en el inciso b), y en la puesta en común puede apoyarlos para que completen o modifiquen los argumentos dados. Por ejemplo, para analizar el valor mínimo del seno pueden considerar un triángulo rectángulo con un ángulo agudo muy pequeño, muy cercano a 0°, como el siguiente:

Haga notar que el cateto opuesto a este ángulo también se acerca a cero, por lo que, cuando el ángulo mida 0°, la razón $\frac{co}{h}$ tendrá como valor $\frac{0}{h} = 0$.

En cambio, en un triángulo rectángulo con un ángulo agudo muy cercano a los 90°, como el siguiente:

se observa que el valor del cateto opuesto se va acercando al valor de la hipotenusa, por lo tanto, la razón $\frac{co}{h}$ tendrá como valor $\frac{h}{h} = 1$.

Los conceptos anteriores no son fáciles de entender porque se han introducido con las razones trigonométricas a partir de los lados de un triángulo rectángulo y porque sólo se han considerado con ángulos agudos, pero reflexionar esto con los alumnos les aclara por qué en las tablas o en la calculadora hay valores de las razones para 0° y 90°.

Un ejemplo de argumento podría ser: “El valor mínimo del seno de un ángulo es 0, porque cuando el ángulo se acerca a 0° el cateto opuesto tiende a cero”.

El valor máximo del seno de un ángulo es 1, porque cuando el ángulo se acerca a 90° la medida del cateto opuesto se acerca a la medida de la hipotenusa.

Razonamientos similares se pueden hacer para el coseno y la tangente. Especial atención merece la tangente de 90°. Los alumnos notarán que tiende a infinito, porque el cateto adyacente se acerca a cero y la razón $\frac{co}{ca}$ se va haciendo cada vez más grande, es decir, tiende al infinito.

Cuando se efectúa esta operación en la calculadora, la pantalla indica que hay un error matemático debido a que la división entre cero no existe y se define como infinito (∞)

Asimismo, como una breve introducción a la idea de función trigonométrica se espera que, a partir del análisis de los valores de las razones, los alumnos reflexionen si crecen o decrecen e identifiquen la gráfica en el plano cartesiano.

Pautas para la evaluación formativa

Observe si los alumnos:

- Usan correctamente el instrumento que construyeron para calcular diferentes alturas.
- Recurren, en forma adecuada, a las razones seno, coseno y tangente de un ángulo al resolver problemas.
- Calculan la medida de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo a partir de la medida de los lados del triángulo.
- Logran dar argumentos generales para algunas relaciones entre las razones seno, coseno y tangente de un ángulo a partir de sus definiciones.

¿Cómo apoyar?

Recuerde que no se trata de memorizar los valores de las razones, pero sí de identificar las relaciones que hay entre ellas. Si los alumnos no recuerdan las definiciones de las razones estudiadas, permita que usen como formulario el recuadro de la sesión 3 de la secuencia 16, para que lo consulten cuando así lo deseen

Ayúdelos a identificar en los problemas cuál es el triángulo rectángulo que deben considerar, y en dicho triángulo, cuál ángulo está en juego, cuál es su cateto opuesto y cuál su cateto adyacente.

¿Cómo extender?

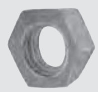
Pida a los alumnos que investiguen si hay más razones trigonométricas además de seno, el coseno y la tangente de un ángulo, y si encuentran otras, digan cómo se llaman y qué relación tienen con las razones que estudiaron.

Averigüen si el seno, el coseno y la tangente de un ángulo sólo se pueden calcular para los ángulos agudos o también para otros valores, como ángulos obtusos (de más de 90° y menos de 180°) o para ángulos entrantes (de más de 180°).

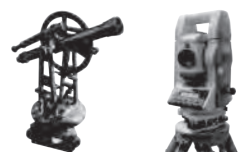
Manos a la obra

Cálculo de alturas

1. Trabajen en equipo. En esta actividad construirán un instrumento que les servirá para medir ángulos. Consigan el siguiente material:

• Hilo resistente 	• Un transportador 
• Pegamento blanco 	• Una tuerca 
• Popote de cartón	

Dato interesante
El teodolito es un instrumento de medición mecánico-óptico y visual. En ingeniería se emplea para medir distancias, desniveles y ángulos. El primer teodolito fue construido en 1787 por Jesse Ramsden (1735-1800). Abajo se muestra la evolución del diseño de los teodolitos. La fotografía de la derecha es de uno actual.



Secuencia 26 Tendencia central y dispersión de dos conjuntos de datos 2

(LT, Vol. II, págs. 162-169)

Tiempo de realización	3 sesiones
Eje temático	Análisis de datos
Tema	Estadística
Aprendizaje esperado	Compara la tendencia central (media, mediana y moda) y dispersión (rango y desviación media) de dos conjuntos de datos.
Intención didáctica	Que los alumnos comparen la tendencia y distribución de datos estadísticos reales que corresponden a una misma situación, así como la tendencia y distribución de dos conjuntos de datos estadísticos que corresponden a dos aspectos diferentes de la misma situación.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisual** • *Comparación de conjuntos de datos estadísticos* **Informático** • *Estadísticas en la hoja de cálculo*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recursos audiovisuales** • *Aspectos didácticos del análisis de datos* • *Recursos para el estudio de la estadística*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Analicen y comparen la tendencia y distribución de datos estadísticos respecto a una situación real.
- Sesión 2. Analicen y comparen dos conjuntos de datos a partir de los valores de las medidas de tendencia central, rango y desviación media.
- Sesión 3. Presenten y comparen conjuntos de datos estadísticos que corresponden a situaciones reales.

Acerca de...

En esta secuencia se amplía lo que los alumnos ya saben sobre la representación de datos con gráficos y medidas de tendencia central, rango y desviación media, así como de la interpretación de gráficas y medidas de tendencia central y dispersión para dar sentido al conjunto de datos, es decir, para interrogar los datos.

Durante el estudio de esta secuencia, los alumnos se centrarán en la comparación de dos conjuntos de datos estadísticos con igual número de elementos. Además, se introduce la comparación de conjuntos de datos con diferente número de elementos. Tales comparaciones permiten apoyar el desarrollo del razonamiento estadístico de los alumnos a partir de actividades que involucran las ideas de dispersión y variabilidad, formas de distribución de los datos y razonamientos sobre los datos.

Entre los propósitos de comparar conjuntos de datos estadísticos está determinar si los conjuntos de datos representan poblaciones iguales o diferentes. En este sentido, el estudio de secuencia ayuda a que los alumnos aprendan algunas de las técnicas necesarias para este propósito en el nivel de secundaria e implican la reorganización de los datos, el uso de los valores de las medidas de tendencia central y de dispersión para hacer estas comparaciones.

Los resultados obtenidos por los alumnos les ayudarán a hacer inferencias y predicciones basadas en datos, en lugar de suposiciones sobre los datos o las poblaciones de las que se toman. Un ejemplo son los diferentes conjuntos de datos estadísticos y algunos de los valores que representan conjuntos de datos presentados en encuestas oficiales usados para analizarlos a lo largo de la secuencia.

Uno de los aspectos importantes que los alumnos deben comprender cuando comparan conjuntos de datos con diferente número de elementos es que se requiere del razonamiento multiplicativo para interpretar y hacer las comparaciones a partir de proporciones y frecuencias relativas que pueden expresarse como porcentajes.

Sobre las ideas de los alumnos

Entre las concepciones que los alumnos han construido a partir de las secuencias de los grados anteriores están el análisis de datos como proceso que involucra su recolección, descripción y representación utilizando métodos estadísticos y la obtención de conclusiones a partir de los datos y valores que los representan o resumen.

Es importante distinguir con los alumnos el análisis descriptivo que se hace con un solo conjunto de datos y el análisis que se puede hacer con dos conjuntos de datos para que les quede lo más claro posible lo que en esta secuencia estudiarán.

Tal vez algunos alumnos en este último grado de educación básica tengan algunas confusiones sobre los conocimientos y procesos al leer, interpretar, organizar y evaluar datos estadísticos. A veces, los alumnos suelen pensar que leer datos y organizarlos son actividades que no tienen relación; por ello, es importante que los oriente para que comprendan que hacer una gráfica, calcular una media aritmética y predecir la distribución de un conjunto de datos son actividades relacionadas.

Entre las definiciones y los conceptos estadísticos fundamentales implícitos en la secuencia están el de *población*, *muestra*, *variable de estudio*, *dato*, *datos*, *dato cualitativo*, *dato cuantitativo*. No se trata de darles las definiciones o de que las busquen, sino de saber que están presentes en el momento de llevar a cabo las actividades y que los alumnos están construyendo las nociones para comprender esos conceptos. Por ejemplo, *población* es el conjunto de individuos u objetos cuyas propiedades o características interesa analizar. Generalmente, los alumnos entienden que este concepto hace referencia a un conjunto de personas y, en estadística, puede ser también un conjunto de animales u objetos. De ahí que se le llame población de interés o de estudio, y se considera definida por completo cuando es posible especificarla mediante una lista de sus elementos (datos). Otra manera en que los alumnos aprenden a identificar cuál es la población a la que se hace referencia es mediante el título del gráfico y de los ejes horizontal y vertical. Una *muestra* es un subconjunto de una población. La *variable* es la característica de interés acerca de cada elemento de una población o muestra, mientras que un dato es el valor de la variable, asociado a un elemento de una población o una muestra.

Si analiza las secuencias de grados anteriores, observará que, por ejemplo, se insiste en que los alumnos determinen el título de las gráficas y de los ejes. Se espera que, con la reflexión sobre las diversas actividades de esta secuencia, los alumnos reconozcan con claridad y precisión las poblaciones y muestras que se están estudiando en cada caso. Los alumnos deberán aprender que, por una parte, puede ocurrir que los conjuntos de datos sean de dos poblaciones en las que se observa una misma característica. Por ejemplo, el ingreso mensual promedio de las mujeres profesionistas, comparado con el ingreso mensual promedio de los hombres profesionistas. O que ambos conjuntos son parte de una misma población, por ejemplo, los conjuntos de ingreso mensual promedio tanto de los hombres como de las mujeres profesionistas conforman la población de ingresos mensuales promedio de profesionistas.

¿Cómo guío el proceso?

En la sección "Para empezar" se propone la introducción al estudio de la secuencia a partir del análisis y la reflexión de algunos datos estadísticos de la infografía. Es recomendable preguntar a los alumnos qué saben sobre las aplicaciones actuales de la estadística y en qué áreas se aplica. Luego, lea con ellos la información de la infografía y destaque que se encuentra expresada en forma de proporción: 1 de cada 10 mujeres; 1 de cada 10 hombres; 1 de cada 3 trabajadores. Esto se describe así debido a que la población de mujeres, hombres y trabajadores de América Latina son tres conjuntos que no tienen el mismo número de elementos y, por lo tanto, se utiliza el razonamiento multiplicativo expresado mediante proporciones, que nos permite, por ejemplo, hacer la comparación entre hombres y mujeres y comprender la información que se presenta.

En la actividad 1 de la sesión 1 se espera que los alumnos puedan:

- Leer los datos. El alumno debe identificar en el gráfico que la variable de estudio es el número de profesionistas por carrera universitaria. Además, cuando los alumnos lean la información que muestran las gráficas de barras, se espera que reconozcan que cada barra representa una carrera universitaria (cualidad) y la longitud de la barra indica el número de profesionistas (frecuencia absoluta) en esa. En la primera gráfica, las barras aparecen ordenadas respecto a la longitud en forma descendente y, en la segunda, las longitudes de las barras están en orden ascendente. De esta manera, parte de la respuesta al inciso a) es el número de profesionistas por carrera entre las carreras más solicitadas y las 10 con menos profesionistas.

  Otra información que los alumnos leen directamente del gráfico es que el valor del promedio del número de profesionistas por carrera universitaria es 237 105, y que este valor no necesariamente corresponde a las 20 carreras que aparecen en las dos gráficas de barras. Los alumnos deberán comprender que los datos estadísticos de estas carreras son los datos extremos de un conjunto con más de 20 elementos y que desconocemos cuántas carreras se registraron en total.
- Leer entre los datos. En las preguntas de los incisos b) y c), las respuestas corresponden a la comparación entre los datos; en el caso del inciso b), es la carrera de Ciencias ambientales con 24 458 profesionales y, en el del inciso c), Administración y gestión de empresas con 1 248 893. En la pregunta d) de la actividad 1 se les pide a los alumnos indicar el número promedio de profesionistas por carrera, que es 237 105, valor que, como ya se indicó, se muestra en la infografía y, al ubicarlo entre los datos de las diez carreras universitarias con mayor número de profesionistas y las diez con menor número de profesionistas, se observa que el valor promedio está entre los datos de las dos gráficas.
- Leer más allá de los datos. En la pregunta del inciso e) el alumno puede utilizar el rango como valor para determinar cuál de los dos conjuntos tiene mayor variabilidad. Si así lo hace, determinará que el conjunto de 10 carreras con más profesionistas presenta mayor variabilidad porque el rango es 895 778 (diferencia entre 1 248 893 y 353 115). En la gráfica de las 10 carreras con menos profesionistas, la carrera con menor número tiene 24 458 y la décima con menos profesionistas tiene 55 341, con lo que hay una diferencia de 30 883 (más del doble), siendo mayor la observada en la otra gráfica.

La actividad cierra con el inciso f), una pregunta abierta enfocada a conocer cuál es la comprensión de los alumnos del conjunto de datos que han analizado y reorganizado. Dependerá de si su respuesta se basa en la información que presenta el gráfico o en experiencias personales respecto a la situación y no considera los datos.

Es posible que los alumnos deseen compartir sus soluciones con un compañero antes de la discusión grupal; permítalo. Durante la discusión, también pida que piensen en las diferencias en los tipos de preguntas que se hicieron. Los alumnos deben reconocer que algunas piden simplemente información del gráfico, mientras que otras implican interpretaciones y manipulación de los datos que se muestran en él.

La segunda actividad implica una tarea de reorganización en la que los alumnos deben identificar las representaciones gráficas que corresponden a la distribución de los 20 datos de la actividad anterior a partir del número de profesionistas. En este caso, la gráfica de línea no es el tipo de gráfica estadística adecuada para mostrar la distribución del número de profesionistas, que es la situación que se está analizando. Es importante recordar que una gráfica de línea se usa para mostrar la tendencia de los datos en el tiempo, por lo que en el eje horizontal se consideran años, meses, días o cualquier unidad de medida de tiempo.

Una manera de verificar si las representaciones gráficas son correctas es permitir dar respuesta a las preguntas de los incisos a) al e) de la actividad 2, al leerlas.

Los datos de las gráficas de barra de la actividad 1 representan los extremos de la distribución completa del número de profesionistas por carrera; es cierto que no sabemos cuántas carreras se registraron en total, ni el número total de profesionistas, pero sí conocemos que el número promedio de profesionistas es 237 105, lo cual permite suponer que la distribución del conjunto de datos tiene una forma de J a la derecha, porque el mayor número de elementos se agrupa en un extremo del rango y se extiende al otro extremo; por lo tanto, la distribución de los datos es asimétrica. Este tipo de distribuciones también se llama sesgada y se identifica de acuerdo con la dirección de la cola (que se forma con los datos extendidos, no con la ubicación de los datos más agrupados que forman un bloque). Por ejemplo, la imagen muestra la posible forma de la distribución después de ubicar el valor del promedio que se proporciona en el gráfico de la sesión 1 y las respuestas a las preguntas de los incisos a) al c). De esta forma podemos notar que una de las respuestas correctas es la primera imagen de la actividad 2.

En la pregunta del inciso d) de la actividad 2 se puede considerar el promedio de 237 105 profesionistas por carrera como el dato típico, es decir, el que mejor representa al conjunto de datos para dar respuesta a la pregunta; sin embargo, sería conveniente hacer una reflexión con los alumnos, ya que la distribución es asimétrica y existe un dato atípico, que de conocerse todos los datos sería conveniente considerar el valor de la mediana, porque en su cálculo no influye el valor de los datos atípicos.

En el inciso e), la pregunta implica leer entre los datos, pero dado que se tiene un conjunto incompleto, no es posible calcular el valor de la desviación media, pues no conocemos cuántas carreras en total se registraron, ni tampoco conocemos el número de profesionistas de las carreras que están entre las 10 carreras con menos y las 10 con más profesionistas.

En la discusión grupal que corresponde a la actividad 3, proponga la revisión de las respuestas a partir de una de las dos gráficas, ya sea la de puntos o la de barras (como se hace en la imagen anterior), y consideren que el promedio del número de profesionistas está ubicado entre 200 000 y 250 000. Además, pueden considerar que el valor del rango es mayor que 1 200 000 y la forma de la distribución de los datos es asimétrica, por lo que puede plantear hacer una hipótesis sobre los valores de los datos que faltan: si la mitad del rango es 600 000, aproximadamente, y la cuarta parte a su vez es un poco más de 300 000, eso nos hace suponer que los valores de los datos faltantes están entre 100 000 y 600 000 profesionistas.

En la actividad 4, se propone que comente con sus alumnos la manera en que creen que pudieron recolectarse los datos del número de profesionistas por

carrera; de manera semejante a la actividad "Para empezar", el propósito es indagar sobre cuál es el nivel de aprendizaje que tienen para considerar la información de los datos y valores de las medidas para dar respuesta a las preguntas de esta actividad.

Conjunto de datos	Hombres	Mujeres
Mediana	\$11710	\$10076
Rango	\$10128	\$8586
Media aritmética	\$12061	\$10300
Desviación media	\$1781	\$1385

Algunas de las preguntas o expresiones que pudieron plantearse a las personas para recolectar los datos son: ¿qué profesión desempeña?, ¿qué estudios realiza o realizó?

En la actividad 5, una propuesta de posible organización de la tabla es:

Número de registro	Género	Estatura en cm	Color de cabello	Talla de calzado	Preocupaciones	Carrera universitaria

La actividad 1 de la sesión 2 implica para los alumnos la lectura de gráficos que les permitirá hacer comparaciones entre los dos conjuntos de datos estadísticos.

Para llevar a cabo la actividad 3, antes de pedir que se distribuyan entre ellos el trabajo, dígales que recuerden los elementos de un histograma y de un polígono de frecuencias, así como el procedimiento de elaboración. Los alumnos deben comprender qué cambia en la nueva gráfica, por qué ahora en el eje horizontal se representa el ingreso mensual promedio y, en el eje vertical, el número de veces que se registró ese ingreso en el mes. Indique que, para efectuar los cálculos del inciso b), pueden usar calculadora si no pueden usar hoja de cálculo electrónica. Las respuestas a la tabla son:

En la actividad 5 puede comentar con sus alumnos sobre la posibilidad de hacer una exhibición en el periódico mural para los compañeros de otros grados y describir la información que presentan: tanto de la manera en que la obtuvieron como la organización y presentación de los resultados. Incluso podrían discutir sobre las personas a quienes les interesaría conocer esta información.

La actividad 6 establece una conexión entre lo que los alumnos analizaron en las sesiones 1 y 2, y por cuál o cuáles carreras universitarias o técnicas se interesan y cuáles no sabían que existen. Si le es posible, consulte con ellos el estudio cualitativo "La educación de las niñas y jóvenes mujeres en Ciencias, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas (CTIM)", disponible en http://www.ift.org.mx/sites/default/files/contenidogeneral/usuarios-y-audiencias/estudioculiattivoninasyjovenesencarrerasstem.pdf, así como el recorrido en la base de datos del sitio de IMCO. Ésta es una oportunidad para vincularse con el trabajo de orientación vocacional que se hace en la escuela. Posteriormente, se propone comparar los datos estadísticos de la sexta pregunta de la encuesta con lo estudiado en la sección "Para empezar" para decidir si representan a poblaciones iguales o diferentes.

En la sesión 3 se presenta una infografía que muestra algunos aspectos de interés en las vidas de los jóvenes. Al leer la infografía, se espera que los alumnos describan que la pregunta de interés del estudio es: "¿Cuáles son tus preocupaciones hoy en día?". Y que les quede claro que 24691 jóvenes contestaron algunas de las 12 respuestas que se muestran. Los resultados para cada respuesta se expresan en porcentaje, y es posible conocer cuántos jóvenes contestaron cada una de esas respuestas porque se conoce el total de mujeres y hombres. Por ejemplo, 41% de los 24691 jóvenes contestó que le preocupa no tener dinero, es decir, 10123 jóvenes dieron esa respuesta. Una posible dificultad que los alumnos pueden tener es comprender que los jóvenes dieron más de una respuesta, por eso se les cuestiona en el inciso b) por el porcentaje total de las respuestas. Se espera que los alumnos no tengan problemas para contestar las preguntas de los incisos c) al i) porque son tareas de lectura de gráficas que han efectuado en otros momentos y otras actividades.

En particular en el inciso f) se espera que los alumnos observen que al 62% de los hombres de 12 a 17 años les preocupa sacar buenas calificaciones, mientras que al 4% no le preocupa bajar de peso.

Pautas para la evaluación formativa

Con la finalidad de verificar en qué medida se logra la intención didáctica que aparece en la ficha descriptiva, es necesario hacer un registro para cerciorarse de que los alumnos realizan lo siguiente:

- Distinguen entre los tipos de gráficas estadísticas, así como el tipo de datos que es conveniente incluir en cada gráfica.
- Interpretan el valor de las medidas de tendencia central, rango y desviación media, involucradas en cada situación.
- Reorganizan los datos correctamente.
- Comparan dos conjuntos de datos a partir de los valores de la media y desviación media o de la media y el rango.
- Comparan dos conjuntos de datos estadísticos que corresponden a dos atributos de una situación.

¿Cómo apoyar?

Si observa que los alumnos leen e interpretan incorrectamente las gráficas de la sesión 1, recuérdeles que una gráfica de barras muestra las frecuencias de valores de datos específicos en un conjunto de datos y se puede usar para datos categóricos o numéricos. Cada barra es el valor de un dato (por ejemplo, Derecho) y la longitud de cada barra corresponde a la frecuencia (número de profesionistas por carrera).

¿Cómo extender?

Con la intención de que los alumnos lleven a cabo otras actividades de reorganización de los datos que les permitan utilizar la información contenida en la gráfica de la actividad 1 y la de la sesión 2, puede proponerles elaborar gráficas en su cuaderno que muestren cuáles son las 10 carreras con:

- Mayor ingreso económico promedio mensual.
- Mayor ingreso promedio mensual para las mujeres.
- Mayor ingreso promedio mensual para los hombres.

Para enriquecer los conceptos de población y muestra que están implícitos en la comparación de los conjuntos de datos, los alumnos pueden extender la aplicación de su encuesta si la localidad en la que se encuentra la escuela es grande, y además investigar entre las personas cercanas a ellos (vecinos, familiares, amigos, etc.) cuáles son los ingresos promedio que perciben. También puede sugerir acceder a internet, bajar la base de datos disponible en el sitio del IMCO y utilizar los datos de bachilleres contra universitarios, o los de profesionistas en actividad informal y formal, con el propósito de que analicen diferentes aspectos de la situación que viven los profesionistas.

Porcentajes por género e intervalo de edad

Total	12-17 años	18-29 años	Total	12-17 años	18-29 años
38	29	44	45	27	48
40	57	29	34	62	28
33	29	35	33	26	35
15	20	12	13	23	11
12	12	12	11	11	11
11	11	12	12	11	12
10	10	11	11	9	11
8	8	8	8	7	9
8	8	7	8	10	8
8	10	6	7	9	6
6	7	5	4	4	4
5	6	5	5	5	5
16078	7095	8983	8613	1902	6711

Secuencia 27 Eventos mutuamente excluyentes 3

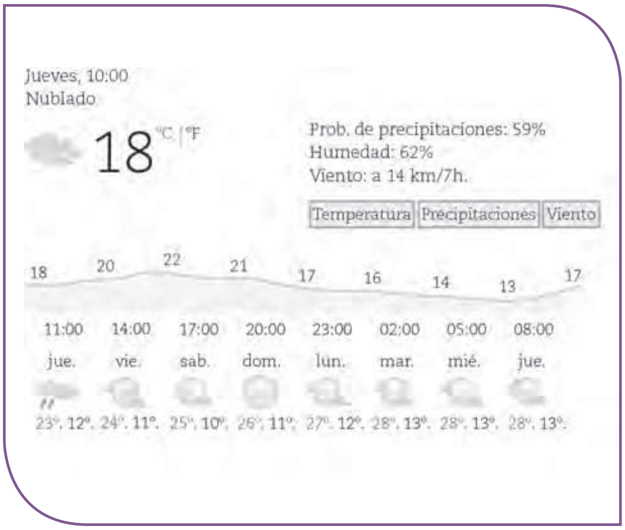
(LT, Vol. II, págs. 170-175)

Tiempo de realización	3 sesiones
Eje temático	Análisis de datos
Tema	Probabilidad
Aprendizaje esperado	Calcula la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes.
Intención didáctica	Determinar si un juego de azar es justo o no y, en caso de no serlo, modificarlo de tal manera que sea posible convertirlo en justo.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisual** • *Juego de azar* **Informático** • *Juego de azar*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recurso audiovisual** • *Aspectos didácticos de la enseñanza de la probabilidad*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Calculen la probabilidad frecuencial y teórica de eventos simples, compuestos y mutuamente excluyentes en situaciones relacionadas con datos estadísticos.
- Sesión 2. Reconozcan las condiciones o reglas que hacen que un juego de azar sea justo y, en caso necesario, redefinan los eventos para que el juego de azar cumpla con esta condición.
- Sesión 3. Compensen los premios de un juego de azar para que sea justo.



Acerca de...

En esta secuencia, las situaciones que se consideran como contexto para calcular la probabilidad de eventos simples, compuestos y mutuamente excluyentes corresponden a la estadística y los juegos de azar. Al explorar y analizar este tipo de situaciones, se pretende reforzar y ampliar los conceptos de eventos independientes y mutuamente excluyentes introducidos en las secuencias 9 y 19. A diferencia de la secuencia 19, en la cual los alumnos aprendieron a calcular la probabilidad de eventos mutuamente excluyentes, en esta secuencia analizarán algunos de los resultados posibles de las situaciones propuestas usando las medidas de dispersión, no para encontrar valores y efectuar los cálculos de manera mecánica, sino para darles sentido y significado.

Entre las razones para elegir esas situaciones se encuentra, por un lado, la estrecha vinculación entre la estadística y la probabilidad y la relación de éstas con los ámbitos biológico, físico y social, así como el hecho de que proponer juegos permite comparar cualitativamente las probabilidades de eventos en un ambiente entretenido y de indagación.

Uno de los propósitos de la estadística es describir, medir y explicar la variabilidad en los datos, la cual es una característica que se puede presentar y observar en una diversidad de situaciones. En esta secuencia se pone énfasis en el significado físico de la variabilidad de los datos.

Con respecto a los juegos de azar, los ejercicios propuestos son ejemplos de problemas de muestreo repetido que permiten explorar el razonamiento probabilístico de los alumnos. A partir de estos juegos de azar, en los cuales se usan los mismos dados, las mismas fichas y el mismo tablero, es posible comprender y afirmar los conceptos de eventos simples, compuestos y mutuamente excluyentes (o ajenos) con cambios mínimos o profundos a las reglas o a los premios, así como hacer uso de estrategias que generen una actitud proactiva de los alumnos para enfrentar e intentar resolver problemas, no sólo de matemáticas, sino de cualquier situacion en general.

Por otro lado, se propone la construcción del concepto de juego justo a partir de la selección de eventos o sucesos que sean equiprobables, para lo cual los alumnos deberán examinar la validez de las predicciones que hacen y reflexionar sobre el proceso seguido en cada partida respecto a las reglas o condiciones que se den, las cuales están definidas por los eventos o sucesos por observar, así como por las condiciones del generador aleatorio (moneda, dados, ficha, ruleta, cartas, entre otros) que se utilice en el juego. Los alumnos deberán comprender que cuando no se puede redefinir una regla o condición de un juego para que sea equitativo, entonces ellos podrían proponer ajustes en los premios. Se espera que los alumnos, al establecer el uso de un sistema de registro, como las tablas y los diagramas, puedan reflexionar sobre lo ocurrido en cada partida y reconocer posibles patrones que les permitan plantear algunas conjeturas que se conviertan en propuestas de premios con base en el análisis de los resultados, de tal forma que al final sea un juego justo.

Sobre las ideas de los alumnos

En las secuencias 9 y 19 los alumnos identificaron cuándo dos eventos son mutuamente excluyentes y cómo se calcula la probabilidad de este tipo de eventos, lo cual será importante para el estudio de esta secuencia.

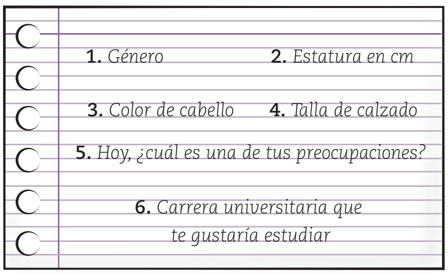
Entre los conocimientos matemáticos que los alumnos continuarán usando más adelante se encuentran los porcentajes, los decimales y las relaciones entre ellos, así como la correspondencia de éstos con las fracciones.

Se conocen las dificultades que los alumnos enfrentan con estos números y los errores generalizados que cometen al usarlos, lo que significa que son conceptos complejos que requieren de un largo proceso secuencial de actividades diversas, entre las que se encuentran las de los juegos de azar.

Por otra parte, se han utilizado a lo largo de las secuencias contextos para darle sentido a la presencia de la variabilidad en los resultados favorables y lograr una mejor comprensión de ciertos conceptos, como el de eventos mutuamente excluyentes.

¿Cómo guío el proceso?

Comience leyendo con los alumnos la sección "Para empezar", en la cual se propone una reflexión sobre la escala de la medida de la probabilidad, tanto en su expresión numérica como verbal. Además, al usar el contexto del pronóstico del estado del tiempo, se espera que los alumnos consideren de qué manera se hacen las predicciones. Comente que en esta situación confluyen diversas variables, y la observación y el análisis a partir del registro y la organización de los datos y los cálculos que se pueden obtener a partir de éstos, permiten establecer el vínculo entre estadística, probabilidad y geografía. Si lo considera conveniente, proponga que observen el siguiente video en el que se presenta información para comprender mejor el concepto de estado del tiempo: https://www.youtube.com/watch v=CiZbF-gV2sQ&ab_channel=smnmexico2



En la actividad 1 de la sesión 1, los alumnos realizan 10 extracciones del mazo de tarjetas considerando tres características a observar del conjunto total de datos registrados en éstas. Es importante que los alumnos reconozcan su conjunto total de tarjetas como su población de interés y que los datos registrados en la tabla de las 10 extracciones representan una muestra aleatoria debido a que cada tarjeta la sacaron al azar. También es conveniente que los lleve a la siguiente reflexión: si regresan las tarjetas para repetir la experiencia de extraer las 10 tarjetas y registrar los resultados, entonces obtendrán una nueva muestra aleatoria, ya que no necesariamente se extraen las mismas tarjetas ni en el mismo orden. Si se procede de esa manera varias veces, se obtienen muestras aleatorias diferentes. Es importante que consideren lo anterior y no se limiten a completar la tabla y dar respuesta a las preguntas: deben pensar principalmente en cómo cambiarían las muestras cada vez que se saca un nuevo conjunto de cartas del mazo.

Por otra parte, para determinar las probabilidades de cada característica (género, estatura en centímetros y talla de calzado), consideramos que todos los valores de los datos para cada característica tienen la misma probabilidad de ocurrir, ya que no contamos más que con la información de los 10 resultados de la extracción y no hay razón alguna para considerar que un resultado es más probable que otro.

En la actividad 2 de la sesión 1 se calculan las probabilidades de los mismos eventos, pero considerando todo el conjunto de datos (población), por lo que cada probabilidad es la razón entre el número de veces que es favorable un determinado evento y el número total de datos o registros. En la puesta en común de la actividad 3, se espera que oriente a los alumnos para contrastar los valores de la probabilidad frecuencial obtenidos al hacer las extracciones y los valores obtenidos en el recuento de todos los datos. Además, es importante que usted promueva la reflexión acerca de la variación en los valores de la probabilidad de cada situación en la actividad 1 si la muestra cambia; en algunas ocasiones los valores de las probabilidades serán similares y en otras no, lo cual se debe a la relación entre la variabilidad de los datos y la incertidumbre.

En la actividad 4 se propone a los alumnos hacer una conjetura a partir de los resultados y las reflexiones anteriores; también pueden considerar el valor de la media aritmética que obtuvieron en la secuencia 26 respecto a la talla promedio de calzado de mujer y la probabilidad de que la talla de calzado de una mujer sea mayor que 23; con esto, los alumnos están exponiendo su razonamiento ante una decisión que deben tomar.

Es importante recordar que el razonamiento es un proceso mental y entre las maneras de conocer cómo razonan los alumnos están las expresiones orales y por escrito, las cuales se pueden valorar una vez que son registradas, compartidas y discutidas, por lo que las puestas en común son espacios de exposición del razonamiento de los alumnos.

En las sesiones 2 y 3 se consideran algunos juegos de azar. A los alumnos que les corresponden el lanzamiento de dos dados cúbicos se les proporcionan las reglas para jugarlo por parejas. El propósito de la sesión 2 es que descubran si las reglas del juego (eventos) conceden ventaja a alguno de los jugadores y, si es así, entonces se pretende que sean equitativos o justos, analizando la equiprobabilidad de los eventos. En la sesión 2, actividades 1 a 3, deberá asegurarse de que cuentan con las fichas y los dados requeridos. Debe recomendar que cada alumno registre en su cuaderno la manera en que coloca las fichas en el tablero en cada partida y la diferencia que obtiene en cada extracción. El análisis se debe centrar en los eventos que el alumno debe elegir para que ambos jugadores tengan las mismas probabilidades de ganar al jugar.

En la sesión 3, el juego también se desarrolla a partir de la diferencia entre los puntos de las caras superiores de los dados; sin embargo, ahora existe el premio de puntos a repartir. Una vez que los alumnos elaboren el diagrama de árbol con los 36 resultados posibles, deben identificar los resultados favorables a cada uno de los seis eventos. Para el evento A: la diferencia es 5, y deben marcar los resultados (6, 1) y (1, 6). De esa manera, los resultados favorables para el evento F: la diferencia es 0, son (1, 1); (2, 2); (3, 3); (4, 4); (5, 5); (6, 6), de tal manera que Emma tiene más posibilidades de ganar que Joel. Una manera de compensar el juego sin cambiar las reglas (los eventos) es que Joel reciba dos puntos cada vez que salga uno de sus resultados favorables. Es importante que proponga analizar la propuesta que den los alumnos en la actividad 4.

Pautas para la evaluación formativa

Para valorar el avance de los alumnos, observe si logran:

- Distinguir entre evento simple, compuesto y mutuamente excluyente.
- Calcular la probabilidad de eventos mutuamente excluyentes.
- Interpretar los valores de las medidas de la probabilidad de los eventos respecto al contexto o la situación que se analiza.

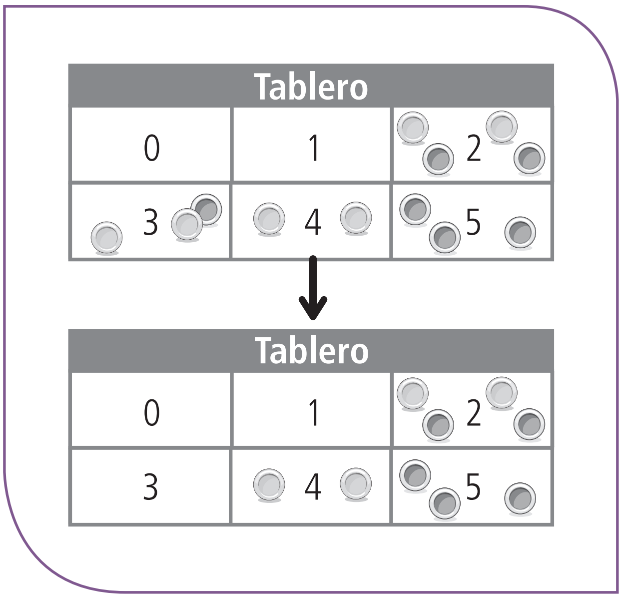
¿Cómo apoyar?

Si observa que los alumnos tienen dificultades para comprender la manera en que la estadística y la probabilidad se complementan, consulte y analice junto con ellos los datos registrados varios años atrás de los promedios de temperatura máxima mensual de un determinado año y elaboren una gráfica de línea para mostrar su variación con respecto a otros años.

También le puede pedir a los alumnos que analicen varios datos de lluvia y temperatura para decidir en qué mes del año conviene llevar a cabo un evento social con el objetivo de minimizar la probabilidad de mal tiempo. Pueden consultar esta información en el sitio del Sistema Meteorológico Nacional en la liga: https://smn.conagua.gob.mx/es/climatologia/temperaturas-y-lluvias/resumenes-mensuales-de-temperaturas-y-lluvias

¿Cómo extender?

Para que los alumnos conozcan la manera en que se modifican las condiciones del juego por utilizar un dado no cúbico, solicite que visiten el recurso del sitio https://www.dado-virtual.com/ para generar los lanzamientos de los dados y hacer los ajustes a los tableros o a las reglas del juego necesarios para que sean justos.



Evaluación. Bloque 3

(LT, Vol. II, págs. 106–107)

Reactivo 1. *Razones trigonométricas*. De acuerdo con los datos de la imagen, la razón que es conveniente utilizar es el seno del ángulo de 30°. Recordar que *sen* 30° = $\frac{co}{h} = \frac{1}{2}$, por lo que

$$\frac{1}{2} = \frac{co}{65 \text{ m}}$$

$$co = \frac{1}{2} \times 65 \text{ m} = 32.5 \text{ m}$$

Reactivos 2 y 3. *Funciones.* Para el reactivo 2 se puede apreciar en la gráfica que el sistema de acuaponia es el de mejor rendimiento en kilogramos por metro cuadrado. En el reactivo 3 se observa que la máxima producción para los tres tipos de cultivo es 45 días.

Reactivos 4 y 5. *Polígonos semejantes.* En el reactivo 4 la razón de semejanza ΔBCD: ΔAED de los triángulos que se forman en el pentágono es $\frac{7}{4.32}$ = 1.62. Para el reactivo 5 la medida del lado AE del pentágono es de 7 cm.

Reactivo 6. *Mínimo común múltiplo y máximo común divisor.* La expresión algebraica para representar un múltiplo de 5, siendo *x* un número natural es 5*x*.

Reactivo 7. *Eventos mutuamente excluyentes.* Se refiere a las condiciones que generan un juego justo. Conviene hacer una tabla con los resultados favorables de los eventos, como la siguiente:

Eventos La canica que sale tiene...	Resultados favorables al evento	Número de resultados favorables
A: ... un número menor que 10.	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	9
B: ... un número de dos dígitos.	10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50	41
C: ... un número mayor que 25.	26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45 ,46, 47, 48, 49, 50	25
D: ... un número terminado en número par.	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48, 50	25
E: ... un número que es múltiplo de 5.	5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50	10

El juego entre Manuel y Fernanda es justo si ellos consideran los eventos C y D como reglas del juego, porque esos eventos tienen el mismo número de resultados favorables.

La **segunda parte** la integran ocho actividades. La primera actividad se relaciona con *polígonos se-*

mejantes, y para determinar la profundidad de la cisterna según los datos de la imagen, se tiene:

$$\frac{243 \text{ cm}}{90 \text{ cm}} = \frac{x}{165 \text{ cm}};\ 2.7 = \frac{x}{165 \text{ cm}};$$
$$2.7\ (165 \text{ cm}) = x;\ x = 445.5 \text{ cm}$$

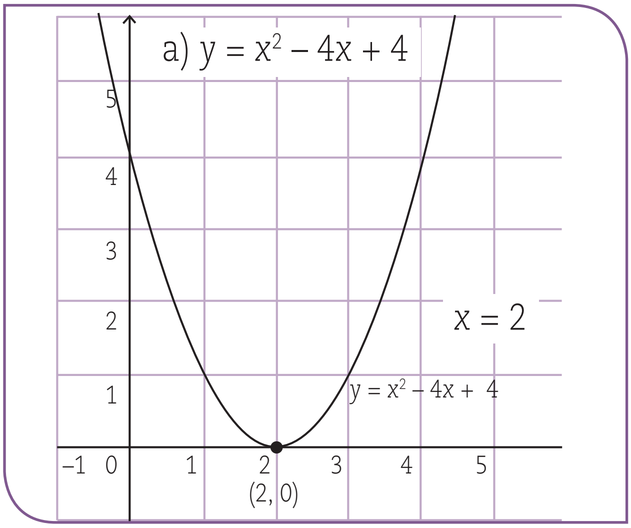
Lo cual significa que la cisterna tiene una profundidad de 445.5 cm.

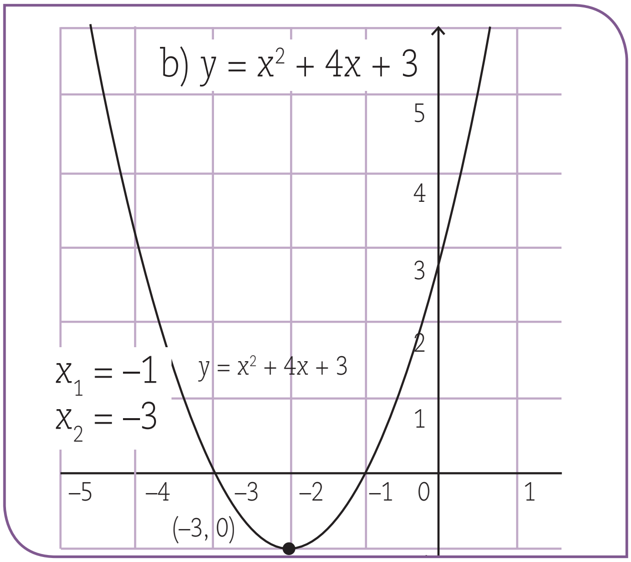
La segunda actividad corresponde a *ecuaciones cuadráticas.* La siguiente tabla muestra los valores del discriminante *D* y, de acuerdo con su valor, cuántas soluciones tiene cada una de las ecuaciones cuadráticas.
a) $x^2 - 20x + 100 = 0$; $D = 0$; la ecuación tiene dos raíces iguales.
b) $x^2 - 3x + 2 = 0$; $D > 0$; la ecuación tiene dos raíces distintas.
c) $x^2 - 2x + 3 = 0$; $D < 0$; la ecuación no tiene raíces en los números racionales o irracionales.

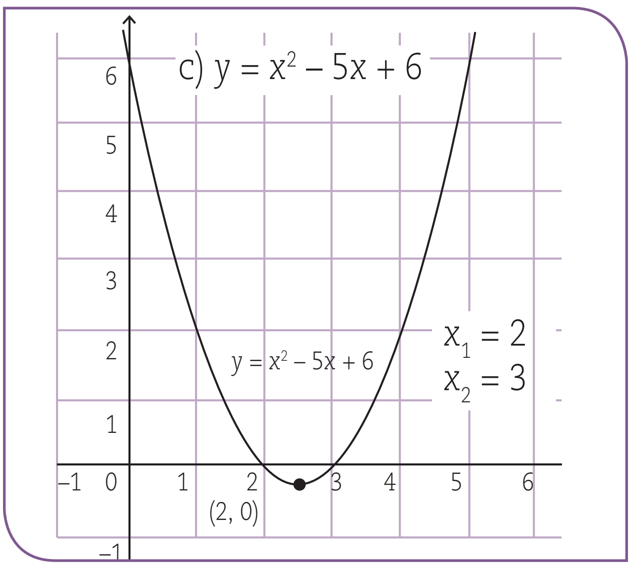
La tercera actividad también está relacionada con *ecuaciones cuadráticas* y con *figuras geométricas y equivalencia de expresiones de segundo grado.* La resolución de la situación implica plantear las expresiones algebraicas que corresponden a las dimensiones de un terreno.
a) Medidas originales del terreno: Ancho: x; Largo: $3x$; Área: $A = 3x^2$
b) Medidas aumentadas del terreno: Largo: $3x + 12$; Ancho: $x + 6$; Área: $2A = (3x + 12)(x + 6) = 3x^2 + 12x + 18x + 72 = 3x^2 + 30x + 72$
c) Ecuación que permite hallar la medida original del ancho del terreno:
$2A = 3x^2 + 30x + 72$, como $A = 3x^2$, al sustituir en 2A resulta: $3x^2 - 30x - 72 = 0$
d) Soluciones de la ecuación: $x_1 = 12$; $x_2 = -2$

Es importante que el alumno comprenda que las dos soluciones de la ecuación cuadrática no necesariamente son las dos soluciones que resuelven la situación problemática.

La actividad 4 también está vinculada con *ecuaciones cuadráticas* y con *funciones*, específicamente con la elaboración y lectura de la gráfica de una función cuadrática para determinar cuáles son los valores de la abscisa en que la gráfica corta al eje X.







Puede ocurrir que algún alumno no requiera elaborar las gráficas y decida igualar cada función a cero y resolver cada ecuación para obtener los valores de las abscisas, que son los valores de x_1 y x_2.

La actividad 5 permite evaluar los conocimientos adquiridos con respecto a las figuras geométricas y la equivalencia de expresiones algebraicas. La expresión factorizada del área del trapecio que se pide es:

$$A = \frac{bh}{2} + \frac{Bh}{2} = \frac{h}{2}(B + b)$$

También pueden escribir:

$$A = \frac{bh}{2} + \frac{Bh}{2} = h\left(\frac{B + b}{2}\right)$$

La sexta actividad corresponde a *eventos mutuamente excluyentes*. La respuesta correcta del inciso a) es seleccionar el tablero 3 porque $\frac{13}{36}$ del área total corresponden a la zona de color amarillo, lo que representa poco más de un tercio. En el caso del inciso b), la probabilidad de ganar el premio de \$50 jugando con el tablero 3 es de $\frac{13}{36}$, por la razón descrita en el inciso a). Y con respecto a la probabilidad de ganar el premio utilizando el tablero 1 es de $\frac{1}{3}$.

El juego es justo si se quita el tablero 3 y el tablero 2 o si se ajusta el tablero de manera que tenga la misma probabilidad que el tablero 1 o 4, pero se debe quitar el tablero 3 para jugar con tres tableros. Es decir, las opciones que se deben marcar con una ✓, son la segunda y la tercera.

La séptima actividad implica evaluar contenidos relacionados con el estudio de *tendencia central y dispersión de dos conjuntos de datos*. Al leer e interpretar los conjuntos de datos que se muestran en las gráficas, el alumno dará las respuestas que se piden.

En Ciudad Valles, la menor temperatura que se espera es 28° y la mayor es 34°, mientras que en la ciudad de Toluca, la menor temperatura es 17° y la mayor temperatura pronosticada es 23°. En ambas ciudades, el rango de la temperatura máxima y mínima pronosticada es 6°.

En Toluca, la temperatura máxima más frecuente pronosticada es 19° y 20° y, en Ciudad Valles, la más frecuente es 32° y 34°.

La temperatura máxima media pronosticada para Ciudad Valles es 32.14° con una desviación media de ±1.43. En el caso de la ciudad de Toluca se pronostica que la temperatura máxima media es 20° con una variación media de ±1.29. De acuerdo con esta información, se espera que la temperatura máxima para las próximas dos semanas tenga poca variación.

Como se puede observar en las respuestas, quizá algunos alumnos sólo consideren uno de los dos valores que corresponden a la temperatura máxima más frecuente en cada conjunto. Esto significa que los conjuntos son bimodales. Otra posible dificultad al leer los datos en ambos conjuntos es considerar como la menor temperatura (máxima) el primer dato registrado en cada gráfica.

La última actividad, la octava, implica leer e interpretar las gráficas de línea. Respuestas:

a) En Ciudad Valles, S. L. P.

b) En Ciudad Valles, S. L. P. Por el pico que se registra al principio de la segunda semana, entre lunes y miércoles, particularmente, para el martes se espera un registro de 41 mm de precipitación en esa ciudad.

En el caso del inciso c), el valor del rango en el nivel de precipitación esperada para cada ciudad resume mejor el pronóstico que se muestra en las gráficas, porque en Ciudad Valles va de 0 a 41 mm y en Toluca, de 0 a 6.6 mm.

Recursos audiovisuales e informáticos

Clave	Aprendizajes esperados
AE1	Determina y usa los criterios de divisibilidad y los números primos.
AE2	Usa técnicas para determinar el mcm y el MCD.
AE3	Resuelve problemas mediante la formulación y la solución algebraica de ecuaciones cuadráticas.
AE4	Analiza y compara diversos tipos de variación a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica, que resultan de modelar situaciones y fenómenos de la física y de otros contextos.
AE5	Formula expresiones de segundo grado para representar propiedades del área de figuras geométricas y verifica equivalencia de expresiones, tanto algebraica como geométricamente.
AE6	Diferencia las expresiones algebraicas de las funciones y de las ecuaciones.
AE7	Construye polígonos semejantes. Determina y usa criterios de semejanza de triángulos.
AE8	Resuelve problemas utilizando las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.
AE9	Formula, justifica y usa el teorema de Pitágoras.
AE10	Compara la tendencia central (media, mediana y moda) y dispersión (rango y desviación media) de dos conjuntos de datos.
AE11	Calcula la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes.

Recursos audiovisuales. Bloque 1					
Secuencia didáctica	Sesión	Clave	Tema	Finalidad	Título
1. Múltiplos, divisores y números primos	3. La criba de Eratóstenes	AE1	Múltiplos y divisores comunes y números primos	Distinguir los conceptos: múltiplo, divisor, número primo y número compuesto. Que usen divisiones sucesivas para determinar si un número es o no primo.	*Múltiplos, divisores, números primos y compuestos*

Recursos audiovisuales. Bloque 1					
Secuencia didáctica	**Sesión**	**Clave**	**Tema**	**Finalidad**	**Título**
2. Criterios de divisibilidad	4. Algo más acerca de los criterios de divisibilidad	AE2	Criterios de divisibilidad 2, 3, 4, 5, 6, 9 y 10	Resolver problemas que implican determinar si un número entero es o no divisible entre otro número entero menor o igual que diez.	*Criterios de divisibilidad*
3. Figuras geométricas y equivalencia de expresiones de segundo grado 1	4. Más vitrales	AE5	Propiedades de la igualdad Multiplicación de expresiones algebraicas Reglas de la representación simbólica de las literales Expresiones algebraicas equivalentes de primer y segundo grado	Desarrollar habilidad para identificar y obtener expresiones equivalentes que representen sucesiones o áreas de polígonos.	*Expresiones cuadráticas equivalentes 1*
4. Ecuaciones cuadráticas 1	3. Interpretación gráfica de las soluciones	AE3	Visualización gráfica de una ecuación de primero y segundo grado: solución única, dos soluciones o ninguna solución	Visualizar gráficas de ecuaciones de primero y segundo grado con solución única, dos soluciones o ninguna.	*Ecuaciones cuadráticas 1*
5. Funciones 1	4. Albercas	AE4	Representación gráfica de situaciones que implican variación lineal, inversa y cuadrática, así como escalonadas, y de secciones rectas y curvas Nociones de dependencia y variación (razón de cambio) Contrastar formas de variación de manera cualitativa Interpolación	Analizar y comparar de manera cualitativa diferentes formas de variación a partir de sus representaciones gráficas en contextos que resulten familiares o significativos para los alumnos.	*Llenado de recipientes*
6. Polígonos semejantes 1	3. Rompecabezas geométricos	AE7	Trazo de polígonos semejantes Lados correspondientes Razón de semejanza Diferencia entre congruencia y semejanza	Identificar y construir polígonos semejantes.	*Construcción de polígonos semejantes*
	5. Semejante o congruente				*Aplicaciones en situaciones reales de la semejanza*

Recursos audiovisuales. Bloque 1

Secuencia didáctica	Sesión	Clave	Tema	Finalidad	Título
7. Razones trigonométricas 1	2. Pendientes de calles y carreteras	AE8	Triángulo rectángulo Ángulo recto y ángulo agudo; cateto opuesto, cateto adyacente, hipotenusa Razones trigonométricas: seno, coseno y tangente	Resolver problemas que impliquen razones entre dos lados de un triángulo rectángulo usando procedimientos informales.	*Construcción de rampas de acceso y carreteras*
	5. Rampas, calentadores solares y escaleras				*Aplicaciones de la trigonometría*
8. Teorema de Pitágoras 1	3. Armemos rompecabezas	AE9	Triángulo rectángulo Cateto adyacente, cateto opuesto, hipotenusa	Formular y justificar geométrica y algebraicamente el teorema de Pitágoras.	*Pruebas geométricas del teorema de Pitágoras*
	4. Pruébalo ahora ¡con álgebra!				*El teorema de Pitágoras*
9. Eventos mutuamente excluyentes 1	3. Espacio muestral y eventos mutuamente excluyentes	AE11	Eventos singulares Eventos no singulares o compuestos Espacio de resultados Eventos excluyentes Evento posible, imposible y seguro	Distinguir cuándo los eventos son sencillos, compuestos y/o mutuamente excluyentes.	*Eventos simples, compuestos y mutuamente excluyentes*

Recursos audiovisuales. Bloque 2

Secuencia didáctica	Sesión	Clave	Tema	Finalidad	Título
10. Mínimo común múltiplo y máximo común divisor 1	2. Técnicas para factorizar en primos	AE2	Descomposición prima de un número; mcm y MCD.	Resolver problemas que implican calcular el MCD o el mcm de dos o más números o expresiones algebraicas.	*Descomposición en factores primos*
	5. De mínimo común múltiplo y máximo común divisor			Usar el mcm y el MCD.	*Problemas que se resuelven con el mcm o con el MCD*

Recursos audiovisuales. Bloque 2

Secuencia didáctica	Sesión	Clave	Tema	Finalidad	Título
11. Figuras geométricas y equivalencia de expresiones de segundo grado 2	4. En busca de los factores	AE5	Expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada Factorización de expresiones algebraicas Simplificación de expresiones algebraicas	Resolver problemas que implican encontrar expresiones algebraicas equivalentes a una expresión cuadrática dada que permite determinar el área de una composición de figuras rectangulares.	*Factores de una expresión algebraica de segundo grado*
12. Funciones 2	5. El uso del teléfono celular al conducir	AE4	Métodos de resolución de ecuaciones de segundo grado a partir de la factorización (por ejemplo, propiedad del factor cero, producto de binomios, entre otros) Expresión algebraica de ecuaciones de segundo grado	Resolver problemas que implican ecuaciones de segundo grado. Comparar diferentes procedimientos de resolución de un problema que implica una ecuación de segundo grado y decidir cuál procedimiento es más eficaz. Expresar algebraicamente la ecuación algebraica que modela una situación o fenómeno.	*Distancia de seguridad*
13. Ecuaciones cuadráticas 2	2. Ecuaciones de la forma $ax^2 + bx = 0$	AE3	Nociones de dependencia y razón de cambio a partir de utilizar la representación tabular y gráfica Obtener la parábola de la forma $y = ax^2$ y $y = ax^2 + c$ Parábola: Valor máximo y mínimo, vértice y eje de simetría	Resolver problemas que implican el análisis de la variación cuadrática para conocer las propiedades y características de ese tipo de variación y obtener la expresión algebraica de ese tipo de relación funcional.	Ecuaciones cuadráticas incompletas
	4. De la forma factorizada a la forma canónica				*Ecuaciones cuadráticas por factorización*
14. ¿Ecuación o función?	3. Análisis gráfico de $y = x^2$ y $y = x^2 + c$	AE6	Uso de la literal como incógnita y como variable. Diferencias entre ecuación y función	Analizar situaciones que se modelan con las ecuaciones y funciones del tipo $y = ax^2$ y $y = ax^2 + c$.	*¿Función o ecuación?*
15. Polígonos semejantes 2	1. ¿Semejantes o no semejantes?	AE7	Razón de semejanza Lados homólogos Criterios de semejanza de triángulos	Resolver problemas sobre semejanza de triángulos.	*Lados y ángulos correspondientes*
	4. Tercer criterio de semejanza			Comprender los criterios necesarios y suficientes para determinar si dos triángulos son semejantes o no.	*Criterios de semejanza*
16. Razones trigonométricas 2	5. Los valores de las razones	AE8	Razones trigonométricas: seno, coseno y tangente	Resolver problemas empleando razones trigonométricas.	*A veces Pitágoras no es suficiente*

Recursos audiovisuales. Bloque 2

Secuencia didáctica	Sesión	Clave	Tema	Finalidad	Título
17. Teorema de Pitágoras 2	4. Cálculo de distancias	AE9	Triángulo pitagórico	Resolver problemas que impliquen calcular medidas o distancias utilizando el teorema de Pitágoras.	*Aplicaciones del teorema de Pitágoras*
18. Tendencia central y dispersión de dos conjuntos de datos 1	4. Presentación de resultados	AE10	Medidas de tendencia central, rango y desviación media de un conjunto de datos	Resolver problemas que impliquen comparar la tendencia y distribución de dos conjuntos de datos estadísticos que corresponden a la misma situación. Comparar la tendencia y distribución de dos conjuntos de datos estadísticos que corresponden a dos aspectos de una misma situación.	*Comparación de dos conjuntos de datos estadísticos*
19. Eventos mutuamente excluyentes 2	4. Población y probabilidad	AE11	Eventos singulares. Eventos no singulares. Espacio de resultados. Eventos mutuamente excluyentes	Resolver e identificar eventos mutuamente excluyentes. Unión de A y B (evento compuesto o no singular).	*Probabilidad de eventos mutuamente excluyentes*

Recursos audiovisuales. Bloque 3

Secuencia didáctica	Sesión	Clave	Tema	Finalidad	Título
20. Mínimo común múltiplo y máximo común divisor 2	3. El factor común de una expresión algebraica	AE2	Descomposición prima de un número; mcm; MCD	Resolver problemas que impliquen el uso del MCD en el conjunto de los números enteros.	*Factor común de una expresión algebraica*
21. Figuras geométricas y equivalencia de expresiones de segundo grado 3	3. La genialidad de Arquímedes	AE5	Factorización de expresiones algebraicas y obtención de expresiones algebraicas distintas pero equivalentes	Resolver problemas que impliquen transformar expresiones algebraicas de primer y segundo grado en otras que son equivalentes. Determinar si una fracción es decimal o no. Resolución de problemas con ayuda del álgebra.	*De la geometría al álgebra en los antiguos griegos*
22. Ecuaciones cuadráticas 3	2. Uso de la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas	AE3	Fórmula general cuadrática para resolver ecuaciones de segundo grado. Análisis del significado del discriminante de la fórmula general para determinar si la ecuación tiene dos soluciones distintas, una sola solución o ninguna y de qué tipo de número son las soluciones	Resolver problemas que implican ecuaciones de segundo grado utilizando la fórmula general. Plantear y resolver problemas que se modelan con una ecuación de segundo grado utilizando la técnica que da la resolución más conveniente. Verificar la validez de una solución. Analizar la pertinencia de la solución numérica. Relación con la variación.	*Fórmula general*

Recursos audiovisuales. Bloque 3

Secuencia didáctica	Sesión	Clave	Tema	Finalidad	Título
22. Ecuaciones cuadráticas 3	4. ¿Cuál procedimiento conviene?	AE3	Fórmula general cuadrática para resolver ecuaciones de segundo grado Análisis del significado del discriminante de la fórmula general para determinar si la ecuación tiene dos soluciones distintas, una sola solución o ninguna y de qué tipo de número son las soluciones	Resolver problemas que implican ecuaciones de segundo grado utilizando la fórmula general. Plantear y resolver problemas que se modelan con una ecuación de segundo grado utilizando la técnica que da la resolución más conveniente. Verificar la validez de una solución. Analizar la pertinencia de la solución numérica. Relación con la variación.	*Discriminante de la fórmula general*
23. Funciones 3	1. Cálculo del área para un proyecto de acuaponia	AE4	Análisis de los valores numéricos que se obtienen de relaciones funcionales del tipo $y = ax^2 + bx + c$ y del tipo $y = a(x - d)^2$ Características de las funciones cuadráticas: simetría, existencia de un valor máximo y uno mínimo, ubicación del vértice de la parábola	Resolver problemas que implican el análisis de la relación de variación cuadrática para conocer sus propiedades y características y poder expresarla algebraicamente.	*Maximización de áreas en un proyecto de acuaponia*
	4. La mayor ganancia por la venta de las lechugas				*Modelación de fenómenos con funciones cuadráticas*
24. Polígonos semejantes 3	3. ¿Qué tan lejos está?	AE7	Aplicación de la semejanza de triángulos	Resolver problemas que implican utilizar la semejanza de triángulos para construir polígonos y calcular medidas de distancias inaccesibles.	*Estimación de distancias usando el pulgar*
25. Razones trigonométricas 3	5. ¿Crece o decrece?	AE8	Seno, coseno y tangente Ángulo de elevación Ángulo de inclinación Ángulo de depresión	Resolver problemas de cálculo de distancias inaccesibles mediante medidas indirectas utilizando razones trigonométricas.	*Maravillas de la trigonometría*
26. Tendencia central y dispersión de dos conjuntos de datos 2	3. ¿Qué nos preocupa hoy en día?	AE10	Conjuntos de datos presentados en gráficas estadísticas como polígonos de frecuencias vinculados con probabilidad	Comparar conjuntos de datos presentados en gráficas estadísticas y obtener la media aritmética, la mediana, la moda y la desviación media.	*Comparación de conjuntos de datos estadísticos*
27. Eventos mutuamente excluyentes 3	3. Otro juego de dados	AE11	Aplicación de la regla de la suma. Juego justo	Determinar si un juego de azar es justo o no.	*Juegos de azar*

Recursos informáticos. Bloque 1

Secuencia didáctica	Sesión	Clave	Tema	Finalidad	Título
1. Múltiplos, divisores y números primos	3. La criba de Eratóstenes	AE1	Múltiplos y divisores de un número y números primos	Distinguir los conceptos: múltiplo, divisor, número primo y número compuesto. Que usen divisiones sucesivas para determinar si un número es o no primo.	*Algunos múltiplos, todos los divisores*
2. Criterios de divisibilidad	2. Divisibilidad entre 2 o entre 5	AE1	Criterios de divisibilidad 2, 3, 4, 5, 6, 9 y 10	Resolver problemas que implican determinar si un número entero es o no divisible entre otro número entero menor o igual que diez.	*Criterios de divisibilidad*
3. Figuras geométricas y equivalencia de expresiones de segundo grado 1	4. Más vitrales	AE5	Propiedades de la igualdad Multiplicación de expresiones algebraicas Reglas de la representación simbólica de las literales. Expresiones algebraicas equivalentes de primer y segundo grado	Desarrollar habilidad para identificar y obtener expresiones equivalentes que representen sucesiones o áreas de polígonos.	*Expresiones cuadráticas equivalentes 1*
4. Ecuaciones cuadráticas 1	3. Interpretación gráfica de las soluciones	AE3	Visualización gráfica de una ecuación de primero y segundo grado: solución única, dos soluciones o ninguna solución	Visualizar en gráficas de ecuaciones de primero y segundo grado con solución única, dos soluciones o ninguna.	*Análisis de ecuaciones cuadráticas*
5. Funciones 1	4. Albercas	AE4	Representación gráfica de situaciones que implican variación lineal, inversa y cuadrática, así como escalonadas, y de secciones rectas y curvas Nociones de dependencia y variación (razón de cambio) Contrastar formas de variación de manera cualitativa Interpolación	Analizar y comparar de manera cualitativa diferentes formas de variación a partir de sus representaciones gráficas en contextos que resulten familiares o significativos para los alumnos.	*Análisis cualitativo de gráficas de relaciones de variación*
6. Polígonos semejantes 1	2. Escala o razón de semejanza	AE7	Trazo de polígonos semejantes. Lados correspondientes Razón de semejanza Diferencia entre congruencia y semejanza	Identificar y construir polígonos semejantes.	*Razón de semejanza*

Recursos informáticos. Bloque 1

Secuencia didáctica	Sesión	Clave	Tema	Finalidad	Título
7. Razones trigonométricas 1	2. Pendientes de calles y carreteras	AE8	Triángulo rectángulo Ángulo recto y ángulo agudo Cateto opuesto, cateto adyacente, hipotenusa Razones trigonométricas: seno, coseno y tangente	Resolver problemas que impliquen razones entre dos lados de un triángulo rectángulo usando procedimientos informales.	*¿Cuál tiene mayor pendiente?*
8. Teorema de Pitágoras 1	4. Pruébalo ahora ¡con álgebra!	AE9	Triángulo rectángulo Cateto adyacente, cateto opuesto, hipotenusa Ángulo recto, ángulo agudo	Formular y justificar geométrica y algebraicamente el teorema de Pitágoras.	*Otras pruebas del teorema de Pitágoras*
9. Eventos mutuamente excluyentes 1	3. Espacio muestral y eventos mutuamente excluyentes	AE11	Eventos singulares Eventos no singulares o compuestos Espacio de resultados Eventos excluyentes Evento posible, imposible y seguro	Distinguir cuándo un evento es: sencillo, compuesto y/o mutuamente excluyente.	*Eventos simples, compuestos y mutuamente excluyentes*

Recursos informáticos. Bloque 2

Secuencia didáctica	Sesión	Clave	Tema	Finalidad	Título
10. Mínimo común múltiplo y máximo común divisor 1	5. De mínimo común múltiplo y máximo común divisor	AE2	Divisibilidad	Resolver problemas que implican calcular el MCD o el mcm de dos o más números o expresiones algebraicas.	*Factorización en números primos*
11. Figuras geométricas y equivalencia de expresiones de segundo grado 2	4. En busca de los factores	AE5	Expresiones algebraicas equivalentes	Resolver problemas que implican encontrar expresiones algebraicas equivalentes a una expresión cuadrática dada que permite determinar el área de una composición de figuras rectangulares.	*Factorización de expresiones cuadráticas*
12. Funciones 2	5. El uso del teléfono celular al conducir	AE4	Funciones	Resolver problemas al identificar las funciones; observar la dependencia del valor de una de las variables respecto de otra en una relación funcional cuadrática.	*Análisis de gráficas y expresiones algebraicas de funciones cuadráticas*

Recursos informáticos. Bloque 2

Secuencia didáctica	Sesión	Clave	Tema	Finalidad	Título
13. Ecuaciones cuadráticas 2	2. Ecuaciones de la forma $ax^2 + bx = 0$	AE3	Ecuaciones cuadráticas	Utilizar métodos de resolución de ecuaciones de segundo grado a partir de la factorización.	*Factorización de ecuaciones cuadráticas incompletas*
	4. De la forma factorizada a la forma canónica				*Ecuaciones cuadráticas por factorización*
14. ¿Ecuación o función?	4. Funciones con la forma $y = ax^2 + bx$	AE6	Funciones y ecuaciones cuadráticas	Interpretar las parábolas asociadas a funciones cuadráticas incompletas e identificar las soluciones de las ecuaciones cuando la función se iguala a cero.	*¿Función o ecuación?*
15. Polígonos semejantes 2	5. ¿Cuáles triángulos son semejantes?	AE7	Polígonos semejantes	Identificar los criterios de semejanza para determinar y trazar triángulos semejantes.	*Criterios de semejanza*
16. Razones trigonométricas 2	3. Razones interesantes e importantes	AE8	Razones trigonométricas	Calcular las razones seno, coseno y tangente de un ángulo en problemas con diversos contextos.	*Cálculo de razones trigonométricas a partir de triángulos rectángulos*
17. Teorema de Pitágoras 2	3. Teorema de Pitágoras y área	AE9	Teorema de Pitágoras	Resolver problemas que impliquen el uso del teorema de Pitágoras en un contexto de cálculo de áreas de distintas figuras geométricas.	*Uso del teorema de Pitágoras en las figuras geométricas*
18. Tendencia central y dispersión de dos conjuntos de datos 1	4. Presentación de resultados	AE10	Medidas de tendencia central, rango y desviación media de un conjunto de datos	Comparar las medidas de tendencia central y de dispersión de dos conjuntos de datos estadísticos.	*Memorama: tus derechos.*
19. Eventos mutuamente excluyentes 2	4. Población y probabilidad	AE11	Probabilidad	Resolver problemas que requieran calcular la probabilidad de eventos mutuamente excluyentes.	*Probabilidad de eventos mutuamente excluyentes*

Recursos informáticos. Bloque 3					
Secuencia didáctica	Sesión	Clave	Tema	Finalidad	Título
20. Mínimo común múltiplo y máximo común divisor 2	3. El factor común de una expresión algebraica	AE2	Divisibilidad	Resolver problemas que implican el uso del máximo común divisor de dos más números.	*Aplicaciones del mcm y del MCD*
21. Figuras geométricas y equivalencia de expresiones de segundo grado 3	3. La genialidad de Arquímedes	AE5	Expresiones algebraicas equivalentes	Avanzar en la comprensión de la noción de equivalencia de expresiones algebraicas de segundo grado, mediante la identificación de expresiones algebraicas distintas del área de una figura.	*Expresiones algebraicas cuadráticas*
22. Ecuaciones cuadráticas 3	6. ¿Ecuación o función?	AE3	Ecuaciones cuadráticas	Resolver ecuaciones de segundo grado aplicando la fórmula general y que resuelvan problemas que implican este conocimiento.	*Fórmula general*
23. Funciones 3	4. La mayor ganancia por la venta de las lechugas	AE4	Funciones	Pasar de la expresión tabular, a la gráfica y a la expresión algebraica de una función de segundo grado.	*Elementos y características de una función cuadrática*
24. Polígonos semejantes 3	4. ¡A calcular medidas!	AE7	Polígonos	Resolver problemas donde se calculen las medidas de distancias o longitudes inaccesibles, usando la semejanza de los triángulos.	*Cálculos de distancias usando la semejanza de triángulos*
25. Razones trigonométricas 3	3. ¿Cuánto mide el ángulo?	AE8	Razones trigonométricas	Resolver problemas que requieran calcular distancias y ángulos mediante medidas indirectas, utilizando razones trigonométricas.	*Cálculo de distancias y ángulos*
26. Tendencia central y dispersión de dos conjuntos de datos 2	2. Ingreso mensual promedio de un profesionista	AE10	Medidas de tendencia central	Comparar conjuntos de datos presentados en gráficas estadísticas y obtener la media aritmética, la mediana, la moda y la desviación media.	*Estadísticas en la hoja de cálculo*
27. Eventos mutuamente excluyentes 3	3. Otro juego de dados	AE11	Probabilidad	Aplicar la regla de la suma. Juego justo.	*Juegos de azar*

Bibliografía

Block Sevilla, David *et al*. (2010). *¿Al doble le toca el doble? La enseñanza de la proporcionalidad en la educación básica*, México, Ediciones SM (Somos maestr@s).

Díaz Godino, Juan *et al*. (1996). *Azar y probabilidad*, Madrid, Síntesis.

Grupo Beta (1999). *Proporcionalidad geométrica y semejanza*, Madrid, Síntesis.

Hitt, F. (2002). *Funciones en contexto*, México, Pearson Educación (Prentice Hall).

Itzcovich, Horacio (2005). *Iniciación al estudio didáctico de la geometría. De las construcciones a las demostraciones*, Buenos Aires, Libros del Zorzal.

Secretaría de Educación Pública (1999). *Libro para el maestro. Matemáticas. Educación secundaria*, México, SEP.

Secretaría de Educación Pública (2018). *Matemáticas. Primer grado. Libro para el maestro. Telesecundaria*, México, SEP.

Sessa, Carmen (2008). *Iniciación al estudio didáctico del álgebra. Orígenes y perspectivas*, México, SEP/ Libros del Zorzal.

Ursini, Sonia *et al*. (2005). *Enseñanza del álgebra elemental. Una propuesta alternativa*, México, Trillas.

Zill, D. y Dewar, J. (1998). *Álgebra y trigonometría*, México, Mc Graw Hill.

Referencias electrónicas

Batanero Bernabeu, Carmen y Luis Serrano Romero (1995). *La aleatoriedad, sus significados e implicaciones educativas*, UNO, 5, 15-28.

Bodí Pascual, Samuel David (2008). *Análisis de la comprensión de divisibilidad en el conjunto de los números naturales*, tesis doctoral, Universidad de Alicante. Disponible en http://www.eltallerdigital.com (Consultado el 10 de marzo de 2020).

Espinosa Pérez, Hugo *et al*. (2000). *Fichero de actividades didácticas. Matemáticas. Educación secundaria*, 2ª ed., 2ª reimp., México, SEP. Disponible en https://www.uv.mx/personal/grihernandez/files/2011/04/ficheroactividades.pdf (Consultado el 12 de julio de 2019).

García Peña, Silvia y Olga Leticia López Escudero (2008). *La enseñanza de la geometría*, México. Serie Materiales para apoyar la práctica educativa. Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación. Disponible en https://local.inee.edu.mx/images/stories/2014/Publicaciones_CONPEE/pdf/geometriacompleto.pdf (Consultado el 12 de julio de 2020).

Grimaldi, Verónica *et al*. (2017). *Ecuaciones. Aportes para el debate acerca de su enseñanza*, Buenos Aires, Santillana (Cuadernos de apoyo didáctico. Secundaria básica y últimos años de la primaria). Disponible en https://wcarpre.s3.amazonaws.com/2_Ecuaciones.pdf (Consultado el 12 de mayo de 2020).

Pérez Carrizales, César O. (s. f.). "Sucesiones numéricas", en *Asesoría secundaria 1*. Disponible en http://recursos.salonesvirtuales.com/wp-content/uploads/bloques/2012/06/Susesionesnumericas.pdf

Quevedo, F. (2011). *Medidas de tendencia central y dispersión. Medwave* Mar;11(3). doi:10.5867/medwave.2011.03.4934 (Consultado el 20 abril de 2020).

Secretaría de Educación Pública. *Matemáticas. Secundaria 3°*. Disponible en https://www.planyprogramasdestudio.sep.gob.mx/sec-ae-pensamiento-mate3.html (Consultado el 10 de enero de 2021).

Serradó Bayés, Ana (2013). "El proyecto internacional de alfabetización estadística". *Números*, revista de didáctica de las matemáticas, volumen 83, páginas 19-33. Disponible en http://www.sinewton.org/numeros (Consultado el 14 mayo de 2020).

UNESCO (2017). Contenidos más integradores en libros de texto: enfoques sobre religión, género y cultura. Disponible en acceso abierto bajo la licencia Attribution-ShareAlike 3.0 IGO (CC-BY-SA 3.0 IGO) (http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/igo/).

UNESCO (2017). Escuelas en acción, ciudadanos del mundo para el desarrollo sostenible: guía para el alumnado.

Créditos iconográficos

Ilustración
María Itzel Alcántara Jurado: **pp.** 10-11.
Carolina Tovar González: **pp.** 62, 65, 80, 138, 141, 144-145, 147 y 151.

Fotografía
p. 7: *la hora de la luna, Tierra*, Pixabay 4439728; **p. 11:** (arr.) calentador de agua solar, ©mipan/Shutterstock.com; (centro) personaje en vitral de plomo, Pixabay 3984958; **p. 15:** fotografía de Martín Córdova Salinas/Archivo iconográfico DGME-SEB-SEP; **p. 151:** (ab. izq.) teodolito, fotografía de qfwfq78, bajo licencia CC BY-NC-ND 2.0; (ab. der.) teodolito DTM-A20, fotografía de PhY, bajo licencia CC BY-SA 3.0.

Matemáticas. Tercer grado.
Libro para el maestro. Telesecundaria
se imprimió por encargo
de la Comisión Nacional de
Libros de Texto Gratuitos, en los
talleres de , con domicilio en
en el mes de de 202 .
El tiraje fue de ejemplares.