LIBRO PARA EL MAESTRO

Matemáticas

Segundo grado

Matemáticas
Libro para el maestro

TELEsecundaria

Telesecundaria

Segundo grado

Matemáticas. Segundo grado. Telesecundaria. Libro para el maestro fue elaborado y editado por la Dirección General de Materiales Educativos de la Secretaría de Educación Pública.

Secretaría de Educación Pública
Esteban Moctezuma Barragán

Subsecretaría de Educación Básica
Marcos Augusto Bucio Mújica

Dirección General de Materiales Educativos
Aurora Almudena Saavedra Solá

Coordinación de la serie
Lino Contreras Becerril

Coordinación de contenidos
María del Carmen Larios Lozano

Coordinación de autores
Olga Leticia López Escudero

Autores
Hugo Hipólito Balbuena Corro, Silvia García Peña,
Olga Leticia López Escudero

Supervisión de contenidos
José Alfredo Rutz Machorro, Jessica Evelyn Caballero Valenzuela,
Juanita Espinoza Estrada, Esperanza Issa González,
María Luisa Luna Díaz

Revisión técnico-pedagógica
Teresa de Jesús Mezo Peniche, Oscar Alfredo Palmas Velasco

Coordinación editorial
Raúl Godínez Cortés

Supervisión editorial
Jessica Mariana Ortega Rodríguez

Cuidado de la edición
Karla Patricia Esparza Martínez

Lectura
María Fernanda Heredia Rojas

Producción editorial
Martín Aguilar Gallegos

Actualización de archivos
Citlali María del Socorro Rodríguez Merino

Preprensa
Citlali María del Socorro Rodríguez Merino

Iconografía
Diana Mayén Pérez, Irene León Coxtinica, Emmanuel Adamez Téllez

Portada
Diseño: Martín Aguilar Gallegos
Iconografía: Irene León Coxtinica
Imagen: *Los cargadores* (detalle), 1923-1924, Jean Charlot (1898-1979), fresco, 4.69 × 2.30 m, ubicado en el Patio de las Fiestas, planta baja, D. R. © Secretaría de Educación Pública, Dirección General de Proyectos Editoriales y Culturales/fotografía de Gerardo Landa Rojano; reproducción autorizada por el Instituto Nacional de Bellas Artes y Literatura, 2021; D. R. © Sociedad Mexicana de Autores de las Artes Plásticas.

Servicios editoriales
Solar, Servicios Editoriales, S. A. de C. V

Coordinación
Elizabeth González González

Formación
Víctor Daniel Abarca Hernández, Rosa Virginia Cruz Cruz

Diseño
Roberto Ángel Flores Angulo

Ilustración
Roberto Ángel Flores Angulo, David Núñez Bahena

Primera edición impresa y digital, 2019
Primera reimpresión, 2021 (ciclo escolar 2021-2022)

ISBN: 978-607-551-296-9

Impreso en México

En los materiales de Telesecundaria, la Secretaría de Educación Pública (SEP) emplea los términos: alumno(s), maestro(s) y padres de familia aludiendo a ambos géneros, con la finalidad de facilitar la lectura. Sin embargo, este criterio editorial no demerita los compromisos que la SEP asume en cada una de las acciones encaminadas a consolidar la equidad de género.

Presentación

Este libro fue elaborado para cumplir con el anhelo compartido de que en el país se ofrezca una educación con equidad y excelencia, en la que todos los alumnos aprendan, sin importar su origen, su condición personal, económica o social, y en la que se promueva una formación centrada en la dignidad humana, la solidaridad, el amor a la patria, el respeto y cuidado de la salud, así como la preservación del medio ambiente.

El *Libro para el maestro* es una herramienta que permite articular coherentemente el plan de estudios y el libro de texto gratuito con los materiales audiovisuales y digitales propios del servicio de Telesecundaria. Además, es un referente útil al maestro para planear los procesos de enseñanza y aprendizaje, y así obtener el máximo beneficio de la propuesta didáctica del libro para los alumnos.

Este libro está organizado en dos apartados. El primero contiene orientaciones generales relativas a la enseñanza de la asignatura, al enfoque pedagógico y a la evaluación formativa. El segundo está integrado por sugerencias y recomendaciones didácticas específicas, cuyo propósito es ofrecer al maestro un conjunto de opciones para trabajar con las secuencias del libro de texto gratuito. Dichos apartados pueden leerse de manera independiente de acuerdo con las necesidades de los maestros e intereses de sus alumnos.

En su elaboración han participado maestras y maestros, autoridades escolares, padres de familia, investigadores y académicos; su participación hizo posible que este libro llegue a las manos de todos los maestros de Telesecundaria en el país. Con las opiniones y propuestas de mejora que surjan del uso de esta obra en el aula se enriquecerán sus contenidos, por lo mismo los invitamos a compartir sus observaciones y sugerencias a la Dirección General de Materiales Educativos de la Secretaría de Educación Pública y al correo electrónico: librosdetexto@nube.sep.gob.mx.

Índice

Bloque 2 La potencia de las matemáticas y el ajedrez

Bloque 3 El arte de las matemáticas y las matemáticas en el arte

I. Orientaciones generales

1. El objeto de estudio de las matemáticas, su pertinencia y cómo se aprenden

¿Qué tienen que aprender los alumnos en la asignatura de Matemáticas?

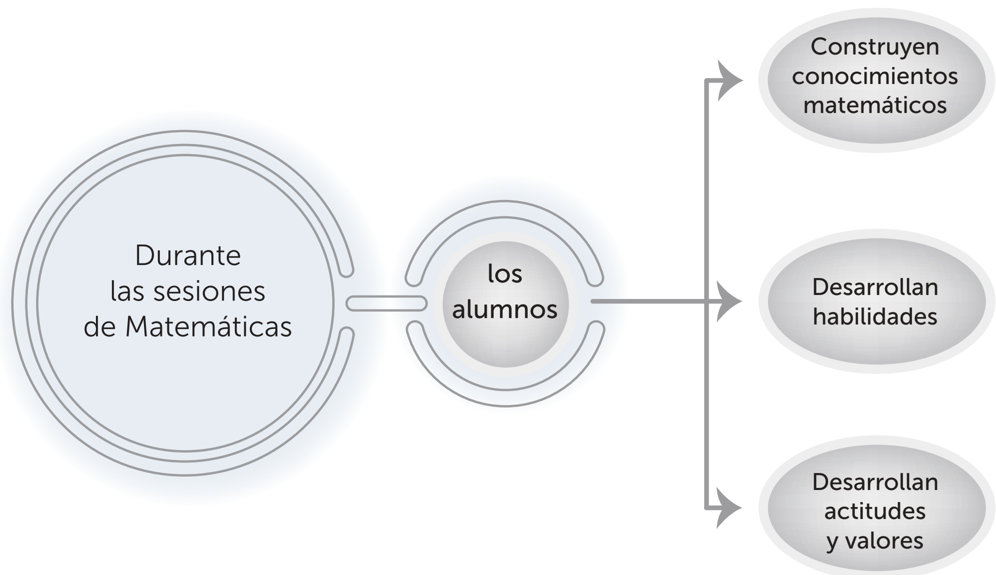
Una respuesta inmediata es, por supuesto, *matemáticas*. En efecto, los alumnos tienen que construir **conocimientos matemáticos**: aprender a multiplicar números decimales, resolver una ecuación, trazar un polígono regular, interpretar una gráfica de línea o calcular la probabilidad de que al lanzar una moneda caiga águila.

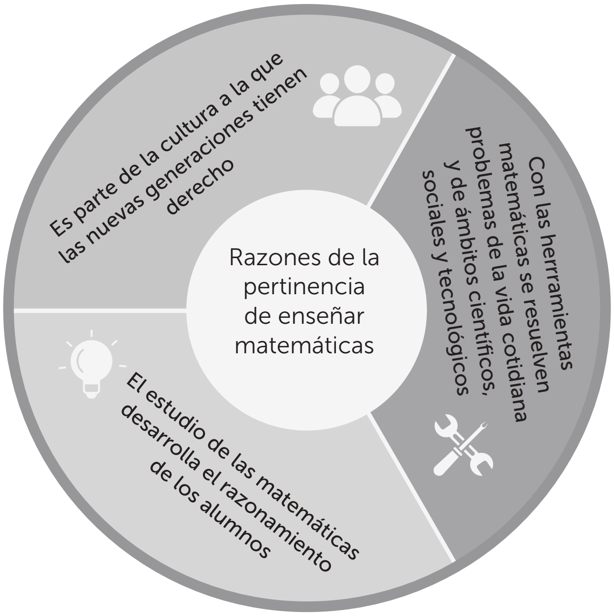
Una reflexión más cuidadosa nos lleva a preguntarnos: ¿sólo tienen que aprender conocimientos matemáticos? Por fortuna, pueden aprender algo más: a aplicar esos conocimientos matemáticos al resolver problemas, es decir, aprender matemáticas implica desarrollar **habilidades** para usar las herramientas de esta asignatura cuando se enfrentan a un problema.

El enfoque que se propone para la enseñanza de Matemáticas permite, además de construir conocimientos matemáticos, desarrollar las habilidades para comunicar la información de la asignatura usando el lenguaje propio de la misma, dar argumentos que justifiquen los procedimientos y razonamientos que permitieron llegar a un resultado; asimismo, promueve **actitudes y valores**, como la *perseverancia* para encontrar la solución a un problema; *aprender a escuchar* los procedimientos y resultados que otros proponen; *tolerancia*, para comprender que hay diferentes procedimientos y maneras de pensar; y *aceptar el error* cuando, con argumentos válidos, un compañero demuestra que la manera en que se resolvió un problema no es la correcta.

Lo expuesto permite comprender por qué las matemáticas forman parte de la educación básica; su alto valor informativo y formativo justifica la pertinencia de su inclusión en el plan y los programas de estudio.

Por otra parte, las herramientas matemáticas permiten resolver problemas de la vida cotidiana y de ámbitos sociales, científicos y tecnológicos, además de desarrollar en los alumnos un pensamiento de alto nivel, como el razonamiento deductivo e inductivo mediante el estudio de la geometría, o el pensamiento numérico y algebraico que ayuda a modelar situaciones, simbolizarlas y manipularlas para obtener un resultado, o el pensamiento aleatorio que se desarrolla con el estudio de la probabilidad y estadística. Esto implica alcanzar un pensamiento abstracto que, entre otras cualidades, los faculte para buscar el bien a través de la verdad. A esto hay que agregar una razón más: las matemáticas constituyen una parte de la cultura que niños y jóvenes tienen derecho a conocer





y que requieren aprender para integrarse a la sociedad del conocimiento, pues son un instrumento poderoso para ejercer la libertad como ciudadanos, en tanto que son más capaces de analizar con rigor las situaciones. Las matemáticas son una herramienta para la autonomía pues los alumnos están más preparados para interpretar críticamente datos y argumentos, así como para reconocer cuando éstos son manipulados.

Lograr que los alumnos construyan conocimientos, desarrollen habilidades y adquieran actitudes y valores mediante el estudio de las matemáticas es un aspecto transversal que depende en gran medida de la manera en la que se trabaja en el aula, en particular con el enfoque de resolución de problemas propuesto para esta asignatura y cuya premisa principal es: se aprende matemáticas al solucionar problemas que permitan usar conocimientos previos, pero que a la vez requieran un esfuerzo cognitivo adicional que obligue a buscar nuevas estrategias de resolución.

Cuando se pensaba que sólo era importante que los alumnos aprendieran conocimientos matemáticos, la mayor parte de las veces sin que tuvieran sentido para ellos, se creía que bastaba con buenas explicaciones, esto es, se le daba un gran peso a la forma de transmitirlas. Por ejemplo, la lección siguiente acerca de proporcionalidad directa que se muestra en un libro de sexto grado de primaria de la década de 1960.

Lección de proporcionalidad en un libro de texto de 1960

Cuando se desconoce uno de los cuatro términos de una proporción, o sea, una cuarta proporcional, se coloca en su lugar una letra. Ejemplos:

$\frac{2}{3} = \frac{a}{6}$ $\qquad \frac{3}{4} = \frac{9}{b}$ $\qquad \frac{5}{6} = \frac{c}{18}$ $\qquad \frac{7}{8} = \frac{21}{d}$

Aplicando la propiedad de que el producto de los medios es igual al producto de los extremos, el valor del término desconocido se encuentra así:

$3a = 2 \times 6 \qquad a = \frac{2 \times 6}{3} \qquad a = 4$

$3b = 4 \times 9 \qquad b = \frac{4 \times \cancel{9}^{3}}{\cancel{3}_{1}} \qquad b = 12$

$6c = 5 \times 18 \qquad c = \frac{5 \times \cancel{18}^{3}}{\cancel{6}_{1}} \qquad c = 15$

$7d = 8 \times 21 \qquad d = \frac{8 \times \cancel{21}^{3}}{\cancel{7}_{1}} \qquad d = 24$

Generalizando lo anterior, se establece:

Un medio desconocido es igual al producto de los extremos dividido entre el medio conocido.

Un extremo desconocido es igual al producto de los medios dividido entre el extremo conocido.

Después de esa explicación se presentaban ejemplos del uso de una proporción en la resolución de problemas:

2. Un kilogramo de azúcar vale $1.80. ¿Cuánto valen 350 gramos?

	Gramos		Precio
Proporción:	$\frac{1\,000}{350}$	=	$\frac{1.80}{x}$

Resolución:
$1\,000\,x = 1.80 \times 350 \qquad x = \frac{(1.80 \times 350)}{1\,000} \qquad x = 0.63$

Resultado: x = $0.63

Observe que, al trabajar esta lección, los alumnos no construían los conocimientos, sino que estaban dados en forma de receta en la que se indicaba paso a paso lo que se debía hacer para llegar a un resultado. Esta manera de trabajar está muy distante de desarrollar habilidades porque se les dice cómo resolver el problema aplicando lo que se les acaba de explicar.

Para este mismo contenido, en el libro de texto de Telesecundaria para este grado, se comienza con un problema que resolverán en pareja, con la finalidad de que compartan ideas y encuentren al menos un procedimiento para obtener los datos que faltan en la tabla (bloque 1, secuencia 4. "Proporcionalidad directa e inversa", sesión 1, *Matemáticas. Segundo grado*).

El problema es similar al ejemplo que se presenta en el libro citado, pero en este caso no se les dice cómo resolverlo ni se les da una explicación previa del contenido. Se espera que usen la información proporcionada en el anuncio, así como los conocimientos con los que cuentan y, a partir de eso, busquen alguna vía para obtener los valores faltantes. La cantidad de agua gastada en 5 minutos está en el anuncio, basta con que lean la infografía para obtener ese dato. Además, seguramente todos los alumnos saben que al doble de tiempo (10 minutos), le corresponderá el doble de agua gastada (200 litros), pero, ¿qué cantidad de agua se gastará en una ducha de seis minutos? La búsqueda de este dato es lo que permite que los alumnos piensen más allá de lo que ya saben. Esta búsqueda los llevará a encontrar el valor unitario, la cantidad de agua gastada en un minuto y, con este dato, podrán encontrar los demás. Estas reflexiones quedan a cargo de los alumnos, aunque sean promovidas por el docente.

Al trabajar en pareja o en equipo se promueve el trabajo colaborativo, momento en el que los alumnos tienen la primera oportunidad de expresar sus ideas y enriquecerlas con las opiniones de los demás. Este tipo de interacción les permite apoyarse mutuamente; es probable que algunos no hayan logrado entender el problema o no encuentren por sí solos un camino para llegar a una solución; o, en su defecto, se enriquecen las formas de abordar los problemas planteados. En este momento el apoyo entre pares es de suma importancia, pues muchas veces el alumno comprende mejor cuando un compañero le explica.

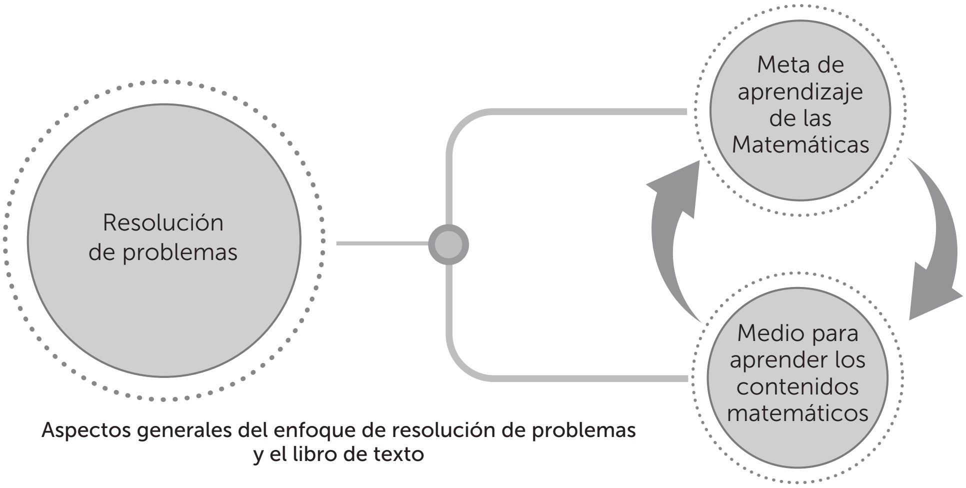
Después de la resolución de algunos problemas, en la actividad 3 de esta secuencia se sugiere hacer una puesta en común. Este momento de la sesión es coordinado por el docente y es fundamental para que los alumnos profundicen en sus reflexiones, desarrollen habilidades de comunicación y adquieran actitudes y valores. Durante la puesta en común los alumnos comparan sus resultados y los procedimientos que utilizaron para encontrarlos, y con ello se dan cuenta de que para resolver un problema hay diferentes caminos, algunos más cortos o más directos, por consiguiente probablemente más claros. Contrariamente a lo que se suele pensar, no se trata nada más de que todas las parejas o todos los equipos digan lo que hicieron, es un momento para analizar y discutir algo que resulta de interés para todos y en el que se pueden formular algunas conclusiones con el apoyo del maestro.

La puesta en común es también el momento en que se identifican errores y se analiza de dónde provienen. Algunas fuentes pueden ser: una operación mal realizada, una lectura equivocada del problema o la aplicación de una técnica que no es adecuada para el problema en cuestión. De esta manera el error se convierte en una fuente de reflexión, análisis y aprendizaje sobre lo que se está trabajando. Es así como se deposita en los alumnos no sólo la responsabilidad de resolver los problemas que se plantean, sino de explicar por qué los procedimientos utilizados y los resultados encontrados son correctos o incorrectos.

2. Enfoque didáctico de Matemáticas

La resolución de problemas es el eje alrededor del cual gira el estudio de las matemáticas, es una meta y, al mismo tiempo, el medio para aprenderlas.

Es una meta porque se pretende que, al finalizar la educación básica, los alumnos puedan usar los conceptos, las técnicas y las habilidades matemáticas desarrolladas para resolver cualquier problema que lo requiera. Y resolver problemas es también un medio que les permite analizar, discutir y desplegar estrategias de resolución, lo cual les servirá para construir conocimientos y desarrollar habilidades.

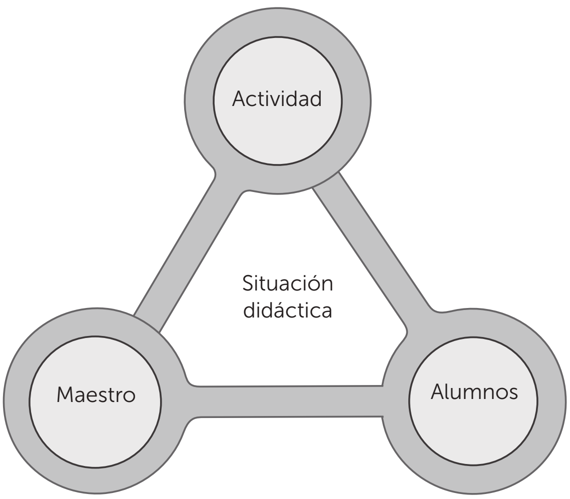


Aspectos generales del enfoque de resolución de problemas y el libro de texto

2.1 Aspectos generales de la enseñanza de Matemáticas

Cómo se construyen las situaciones didácticas de la asignatura

Una situación didáctica comprende el escenario de la sesión en su conjunto, incluyendo la actividad que sirve como medio para el estudio, el grupo de alumnos y el maestro.[1]



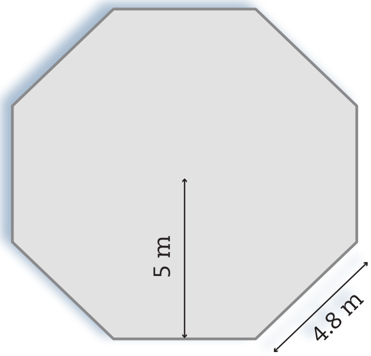
El punto de partida para que los alumnos estudien y aprendan matemáticas está en presentarles actividades que despierten su interés y favorezcan su reflexión. En el libro de texto, las actividades se diseñaron con base en los aprendizajes esperados que señalan los programas de estudio; algunos se sitúan en contextos de la vida real, es decir, se toman de diversas áreas en las cuales los conocimientos que se abordan tienen alguna aplicación; sin embargo, otros se dan en el campo de la propia disciplina, en la que hay una gran variedad de problemas que resultan verdaderos desafíos para los alumnos.

Un ejemplo de un problema de la vida real es el que se plantea a los alumnos en la sesión 4, "Problemas con polígonos regulares", de la secuencia 10, "Perímetro y área de polígonos regulares". Aquí los estudiantes ponen en juego diversos conocimientos que posiblemente ya tienen, pero además les brinda la oportunidad

[1] En el marco de la Teoría de las Situaciones Didácticas desarrollada por Guy Brousseau.

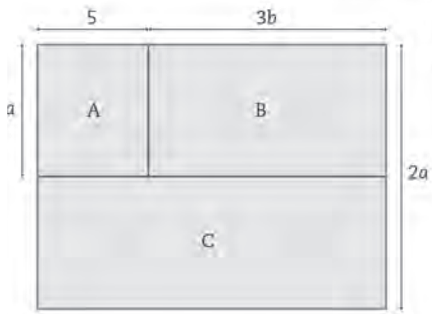
Quiosco de Chignahuapan, Puebla

de conocer otras formas de llegar al resultado y elegir la que les resulte más accesible.



Ejemplos de problemas puramente matemáticos son los que se plantean en la sesión 2, "Expresiones equivalentes para perímetros y áreas", de la secuencia 7. "Figuras geométricas y equivalencia de expresiones 1". En éstos, los estudiantes deben formular expresiones algebraicas equivalentes, tanto para el área como para el perímetro de una figura, verificar que efectivamente son equivalentes, compararlas con otras

1. Formen un equipo para realizar las siguientes actividades. Regresemos al problema del campo de tulipanes. Ya se calculó una parte de su área, ahora obtengan el área total tomando como base el procedimiento que utilizaron anteriormente.



   a) Obtengan la expresión algebraica con la que se determina el área de *todo* el campo de tulipanes, utilizando sólo las medidas de cada uno de sus lados. ________________

   b) Encuentren otra expresión algebraica distinta con la que se pueda calcular la misma área. ________________

   c) Verifiquen las equivalencias de ambas expresiones asignando una serie de valores numéricos. Pueden auxiliarse de una tabla como la siguiente:

Valores		Áreas	
		Primera expresión:	Segunda expresión:
a	b		

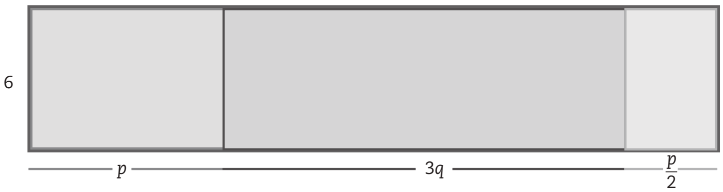
2. Intercambien sus respuestas con las de otro equipo. ¿Obtuvieron las mismas expresiones algebraicas? En caso de que sean distintas, comprueben que se llegue al mismo resultado con cualquiera de las expresiones que obtuvo el otro equipo.

Dos expresiones algebraicas son equivalentes si para cualquier valor que se les asigne a sus literales se obtiene el mismo resultado. Por ejemplo, en estas dos expresiones:

$2(a + b) + 3(a + 5) = 2b + 5(a + 3)$, al asignarle a la literal a el valor de 1 y a b el de 3, se obtendrá una identidad.

$$2(1 + 3) + 3(1 + 5) = 6 + 5(1 + 3)$$
$$8 + 18 = 6 + 20$$
$$26 = 26$$

3. Observen el siguiente dibujo.

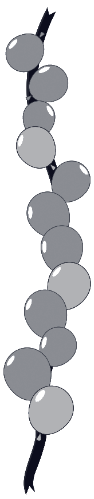


y justificar si lo son o no, lo cual les permite desarrollar capacidades cognitivas de análisis, inferencia, abstracción y deducción.

No está por demás hacer énfasis en que las actividades de estudio propuestas en el libro no son aisladas, están organizadas de manera gradual de acuerdo con cierto nivel de dificultad, secuenciadas y formuladas para que los alumnos adquieran de manera progresiva los conocimientos, habilidades y actitudes según su edad escolar, de manera que los conceptos que forman parte del lenguaje propio de la asignatura les permitan avanzar en el conocimiento matemático.

El papel de los conocimientos previos

Un criterio importante para la elaboración de las secuencias de actividades ha sido que los alumnos entiendan qué se busca en cada problema o actividad, a dónde se quiere llegar sin que se les diga cómo hacerlo. Esto último es su responsabilidad y su propio mérito cuando han logrado obtener un resultado, aunque no sea necesariamente el que se espera. Para ello deben apoyarse en lo que ya saben hacer, en los conocimientos previos que les permiten entender el problema y quizá vislumbrar alguna



1. Resuelve de manera individual el siguiente problema. Adriana va a decorar su salón de clases para un festejo y ha decidido hacer tiras de globos rosas y azules conforme el modelo que se observa a la izquierda.

a) Describe el arreglo que tiene la tira de globos. ____________________

____

b) Adriana le pide ayuda a Paola para elaborar las tiras de globos y le señala en qué lugares debe colocar los globos azules. ¿Cómo le indicarías a Paola la manera de colocarlos? ____________________

c) Si se continúa con la tira de globos, ¿de qué color será el globo que ocupe el lugar 42? __________ ¿Y el lugar 60? __________

d) Si la tira tendrá 100 globos, ¿cuántos globos azules necesitarán? __________

e) Compara tus respuestas con las de tus compañeros; en particular, comenten la manera en que describieron el arreglo de globos y acuerden un procedimiento o regla para saber de qué color es el globo en las posiciones que se indicaron.

f) Escriban a continuación el procedimiento o regla que acordaron. __________

____

Seguiremos trabajando con sucesiones numéricas. Ahora obtendrás y escribirás la regla que las determina, mediante dos o más expresiones algebraicas equivalentes.

vía de resolución. Sin embargo, muchas veces esos conocimientos no son suficientes para conseguir el resultado y, por lo tanto, será necesario que echen mano de algo más, quizá de adaptar alguna técnica conocida, buscar otra que responda a las nuevas condiciones, modificar o ampliar una idea que deja de ser cierta para todos los casos. Esto sucede en la mente de un alumno cuando se embarca en la resolución de un desafío, además de muchos otros fenómenos que allí se conjuntan y que conforman el acto de aprender y de aprender a aprender.

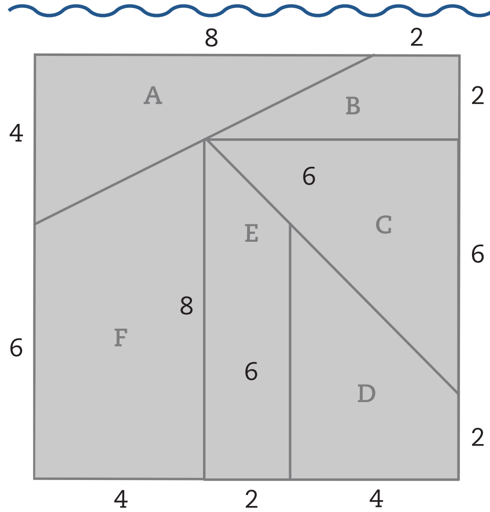
Por ejemplo, analicemos el problema 1 de la sesión 1, "¿De qué color?", correspondiente a la secuencia 6, "Sucesiones y expresiones equivalentes 1".

Los alumnos pueden describir la sucesión de manera verbal y responder de igual manera la primera pregunta. Para la segunda y tercera preguntas es probable que dibujen la sucesión hasta los lugares que se indican, o bien, que se apoyen en los conocimientos aritméticos que poseen al descubrir que los globos azules corresponden a múltiplos de cuatro. Sin embargo, les resultará más difícil responder la última pregunta recurriendo al mismo método. Aun sabiendo que 100 es múltiplo de 4, y que por lo tanto en ese lugar va un globo azul, será necesario que analicen la relación entre el lugar que ocupa un globo, si este número es de la forma $4n$, y cuál es el valor de n cuando, en este caso, $4n = 100$.

El papel de los intereses de los alumnos para el aprendizaje de Matemáticas

La escuela y los docentes tienen la responsabilidad de que los intereses de los alumnos se enfoquen hacia las actividades de estudio que realizan cotidianamente. Es cierto que el ambiente familiar y el medio social en el que los alumnos conviven influyen en buena medida en su interés por aprender, pero la escuela y el aula son, por antonomasia, lugares propicios para orientar los intereses hacia el trabajo intelectual. El gran reto para la escuela y los maestros consiste en cambiar la clase magistral y el ejercicio memorístico por un espacio en el que los alumnos interactúen con el problema y se establezca entre ellos un ambiente de trabajo colaborativo con la finalidad de encontrar procedimientos y resultados que pondrán a consideración de sus compañeros y analizarán con el apoyo del docente.

Sin duda en cualquier grupo de alumnos hay diferencias, a las cuales hay que estar atento para evitar el desinterés y el rezago, pero eso no significa que cada alumno requiera de una actividad diferente. Por ejemplo, considere el



Medidas del rompecabezas original	Medidas del nuevo rompecabezas
2	
4	5
6	
8	

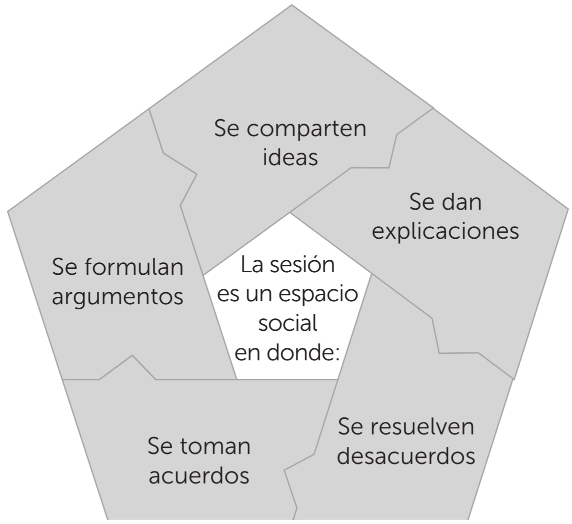
problema de la página anterior, propuesto en la actividad 1 de la sesión 5, “Rompecabezas”, de la secuencia 2, “Multiplicación y división de fracciones positivas”:

Las diferencias entre los alumnos surgirán en el momento en que cada uno trate de construir su pieza. Saben que un lado que mide 4 en el rompecabezas original, deberá medir 5 en la pieza que van a construir, pero, ¿cuánto debe medir un lado que mide 2? ¿Y uno que mide 6? ¿Y uno que mide 8? Algunos alumnos persistirán en usar la estrategia aditiva, que consiste en sumar lo mismo a todas las medidas. En este caso, si de 4 aumentó a 5, lo que mide 2 aumentará a 3 y este mismo criterio se usará con las demás medidas. Gracias a un atributo de este problema, al intentar armar el rompecabezas se darán cuenta de que las piezas no embonan, lo que les indica que la estrategia usada no funciona.

Otros alumnos pensarán que si a una medida de 4 le corresponde 5, a una medida de 1, que es la cuarta parte de 4, debe corresponderle la cuarta parte de 5, que es $\frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$, de manera que a una medida de 2 le corresponde dos veces $1\frac{1}{4} = 2\frac{1}{2}$. Esta estrategia, que se conoce como *el cálculo del valor unitario*, permite calcular las medidas que se requieren.

Es probable que otros alumnos usen un razonamiento más complejo. Pensarán de entrada que las nuevas medidas deben ser proporcionales a las originales para que el rompecabezas tenga la misma forma. Se preguntarán, entonces, ¿por cuánto hay que multiplicar 4 para obtener 5? La respuesta es $\frac{5}{4}$, así habrán encontrado el factor de proporcionalidad o factor de escala que permite calcular las medidas que se requieren. Se trata de un mismo problema, pero cada alumno o cada equipo de alumnos lo resuelve apoyándose en los conocimientos con los que cuenta; en la puesta en común se deben discutir y analizar estos diferentes procedimientos.

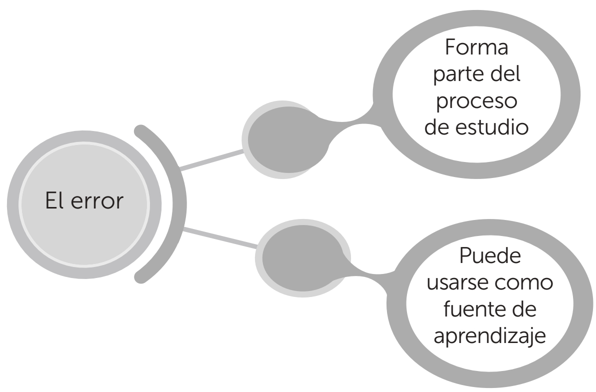
Aunque cada alumno construye los conocimientos a su manera, la sesión es un espacio social en el que las interacciones entre alumnos y con el profesor juegan un papel fundamental para compartir ideas, formular argumentos y explicaciones, tomar acuerdos y resolver desacuerdos, analizar y superar errores o conceptos erróneos. Es el espacio idóneo para que los



alumnos aprendan y se interesen por aprender cada vez más, asimismo para que desarrollen habilidades, actitudes y valores.

El error en el aprendizaje, los procesos de aprendizaje, el acercamiento al conocimiento convencional

Cuando se piensa en un grupo de alumnos que interactúan con un problema para tratar de encontrar alguna vía de resolución y un resultado, es altamente probable que se cometan errores. Éstos forman parte del proceso de estudio y, en vez de ocultarlos, dejarlos de lado o, peor aún, penalizarlos, hay que plantearlos al grupo para ser analizados y que entre todos busquen cuál fue el razonamiento que hubo detrás de ellos. Muchas veces se deben a una interpretación equivocada de lo que dice el problema, otras veces a carencias de los alumnos; lo importante es identificar su causa, en qué parte del proceso se originan y de qué manera se pueden superar.

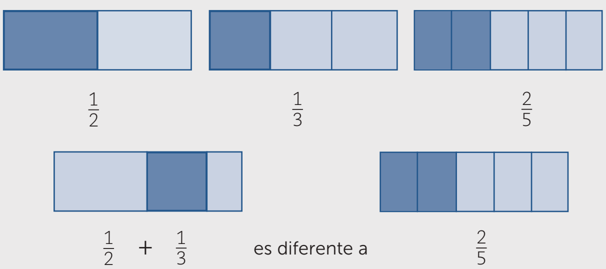


No todos los errores merecen ser analizados y discutidos. Hay errores casuales, como escribir una cifra por otra cuando se escribe una cantidad, o dejar de lado una cantidad al sumar varias, y basta con señalarlos en el momento.

Sin embargo, sí es importante que se analicen colectivamente los errores conceptuales —como pensar que $\frac{17}{18}$ es mayor que $\frac{3}{2}$, porque tiene números más grandes—, o errores de procedimiento —como suponer que $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$, porque se suman numeradores y denominadores—, poniendo en juego los argumentos de los propios alumnos y con las aclaraciones necesarias del maestro, con el fin de que se conviertan en fuente de aprendizaje.

Para lograr esto, se requiere crear en el aula un ambiente en el que los alumnos no se sientan incómodos o se inhiban cuando cometen un error; esto es, que el error no sea visto como algo reprobable. En el ejemplo anterior, donde para sumar dos fracciones suman numeradores y denominadores ($\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$), no es suficiente con que el maestro diga que es incorrecto, es recomendable invitar a los alumnos a que ellos mismos decidan si es correcto o no el resultado y que argumenten por qué. Es probable que surjan argumentos como los siguientes:

- No es posible que $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ sea igual a $\frac{2}{5}$ porque si a $\frac{1}{2}$ le sumamos algo más el resultado debe ser mayor que un medio, y $\frac{2}{5}$ es menor que un medio.
- Si representamos las fracciones, se observa que al sumar un medio más un tercio da una fracción mayor que $\frac{2}{5}$



- En su expresión decimal $\frac{1}{2}$ es 0.5, $\frac{1}{3}$ es 0.333... y $\frac{2}{5}$ es 0.4, al sumar 0.5 y 0.333... no se obtiene 0.4

Al buscar argumentos para probar que la suma es o no correcta, los alumnos desarrollan muchas habilidades, por ejemplo, su sentido numérico, y simultáneamente profundizan sus conocimientos matemáticos. Asimismo, al reflexionar sobre lo que es correcto o no lo es (o sobre lo que funciona y lo que no), los alumnos se dan cuenta de cuestiones sutiles, pero muy importantes en Matemáticas, a saber: que no siempre se pueden generalizar conocimientos o procedimientos; es decir, empiezan a ejercer un razonamiento más reflexivo.

Aprender a aprender en Matemáticas

¿Qué significa aprender a aprender en general, y en particular en Matemáticas? En primer lugar, significa aceptar que para aprender es necesario estudiar, y estudiar implica pensar, observar, analizar, formular hipótesis, razonar, tomar decisiones, en suma, usar la inteligencia para conocer algo que no se sabe. A partir de esta premisa, es de esperarse que lo que se aprende se convierta en un saber funcional, que tiene vida propia y que se puede usar, incluso de forma automática, para conocer más y lograr otros saberes. Esto es lo que significa aprender a aprender. Veamos un ejemplo.

Clase A

El profesor les pide a sus alumnos que investiguen cuál de las dos fracciones siguientes es mayor.

$$\frac{3}{4} \quad \frac{3}{2}$$

Les da tiempo para que analicen y encuentren la respuesta, mientras tanto, monitorea el trabajo. Si nota dificultades, brinda apoyo, pero sin decir la respuesta.

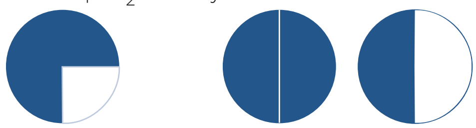
Cuando la mayoría ha terminado, el profesor promueve una puesta en común en la que se confrontan, en este caso, dos ideas diferentes: $\frac{3}{4}$ es mayor que $\frac{3}{2}$ y $\frac{3}{2}$ es mayor que $\frac{3}{4}$. Algunos argumentos que pueden surgir a favor de la segunda idea son los siguientes:

- $\frac{3}{2}$ es mayor, porque es más que una unidad y $\frac{3}{4}$ es menos que una unidad.
- Los medios son más grandes que los cuartos. Si se tienen 3 de cada uno, entonces $\frac{3}{2}$ es mayor que $\frac{3}{4}$
- Si convertimos $\frac{3}{2}$ a cuartos, se tienen $\frac{6}{4}$, que es más que $\frac{3}{4}$

Clase A

- Si convertimos a decimales $\frac{3}{2}$, es 1.5 y $\frac{3}{4}$ es 0.75, por lo que es mayor $\frac{3}{2}$.
- Al ubicar estas fracciones en la recta numérica, se observa que $\frac{3}{2}$ es mayor.

- Al representar con dibujos estas fracciones, se observa que $\frac{3}{2}$ es mayor.



$\frac{3}{4}$ $\frac{3}{2}$

Los alumnos escuchan, analizan y discuten los procedimientos y argumentos de sus compañeros.

No se puede pasar por alto que hay otra idea acerca de cómo se aprende, una idea que socialmente es muy aceptada y cuyo origen se remonta al surgimiento de la escuela como institución. Consiste en un maestro que enseña y un grupo de alumnos que intenta aprender lo que el maestro explica. Esta idea es la que le da sustento al consabido proceso enseñanza y aprendizaje que aún tiene vigencia en las prácticas que se observan en muchos salones de clase. Un ejemplo de lo anterior es el siguiente.

Clase B

El profesor indica a los alumnos que van a comparar las siguientes fracciones:

$$\frac{3}{4}\ \boxed{\phantom{<}}\ \frac{3}{2}$$

Les explica que, para comparar dos fracciones, se multiplica en cruz de la siguiente manera:

$$\frac{3}{4}\ \boxtimes\ \frac{3}{2}$$

Tres por dos y cuatro por tres.

$$\frac{3}{4}\ \boxtimes\ \frac{3}{2}$$

$$3 \times 2 = 6 \qquad 4 \times 3 = 12$$

Les indica que como el primer resultado es menor, entonces la primera fracción es menor.

Si el primer resultado hubiera sido mayor, entonces la primera fracción sería mayor. Se concluye que:

$$\frac{3}{4}\ \boxed{<}\ \frac{3}{2}$$

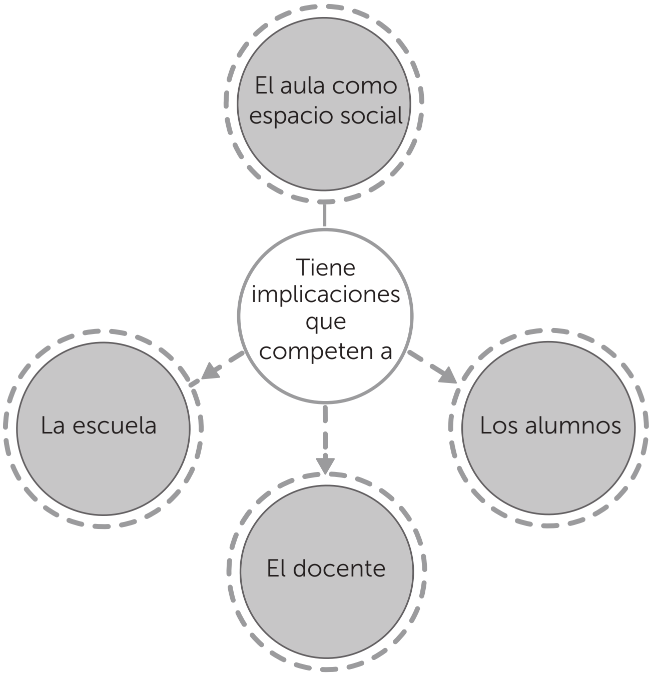
¿Cuál es el problema con esta segunda idea de lo que significa aprender? Que no es coherente con muchos de los propósitos que se pretende lograr con los alumnos, como desarrollar su pensamiento crítico, su autonomía, su razonamiento lógico; que aprendan a formular argumentos y explicaciones; que identifiquen y analicen errores; que validen sus procedimientos y resultados; que exploren caminos diferentes al resolver un problema; en fin, que no favorece en los alumnos el desarrollo de la capacidad de aprender a aprender.

¿Cómo se espera lograr ese tipo de propósitos en un grupo de alumnos que está supeditado a lo que el maestro le dice que haga que incluso siente temor al hacer algo distinto de lo que el maestro explicó? No se puede afirmar que como resultado de esta práctica los alumnos no aprenden; sin duda algo aprenden, algunos más que otros, pero la mayoría de las veces se trata de conocimientos que no saben usar en otros contextos o situaciones. "¿Es de suma o de resta?" es una típica pregunta de los alumnos y evidencia que los conocimientos adquiridos no funcionan, se olvidaron fácilmente y el alumno no está en posibilidad de usarlos y mucho menos de reconstruirlos. Lo peor es que, a medida que se avanza en la escolaridad, muchos alumnos se han convencido de que no pueden con las matemáticas porque no lograron entender los conocimientos básicos y sus relaciones, que es lo que permite seguir construyendo sus conocimientos.

2.2 Condiciones en el aula para la enseñanza y el aprendizaje de Matemáticas

Concebir el aula como *un espacio social en el que se construye conocimiento* tiene varias implicaciones. Algunas son competencia de la escuela, otras del docente y otras de los alumnos.

A *la escuela* le corresponde propiciar y organizar el intercambio de experiencias entre los maestros, a través de la observación de la clase entre compañeros o el análisis de casos en las reuniones de consejo técnico escolar. La enseñanza de las matemáticas con el enfoque de resolución de problemas debe ser un proyecto de escuela. Por lo tanto, es de vital importancia que haya continuidad de un grado a otro, que cuando los alumnos pasan al siguiente grado escolar no se pierda el trabajo realizado por un profesor que aplica este enfoque.



Asimismo, se requiere impulsar una cultura escolar en la que el tiempo destinado a la clase sea intocable, esto es, que se ocupe fundamentalmente en actividades de estudio. Tanto los alumnos como el docente deben estar concentrados en la tarea que realizan, los alumnos buscando alternativas para resolver la situación que se les planteó, mientras el docente observa lo que hacen y escucha lo que dicen, plantea preguntas o aclara dudas para que los alumnos puedan avanzar. Es recomendable que el profesor se mantenga en el aula durante las sesiones y no sea interrumpido por otro maestro, el director o algún padre de familia.

A *los docentes* les corresponde, sin duda, la responsabilidad mayor para que el aula sea un espacio social de construcción de conocimiento. En primer lugar, son los encargados de planear las actividades que se van a proponer a los alumnos; aunque éstas se encuentran en el libro de texto, es necesario que el docente las estudie previamente y lea las sugerencias correspondientes en el libro para el maestro. Estas dos acciones le darán elementos para saber cuál es la intención didáctica de las actividades, las dificultades que pueden encontrar los alumnos, los posibles errores y, en general, la manera de hacer adecuaciones y guiar el proceso de estudio.

Junto con la puesta en marcha de actividades de estudio, al profesor le corresponde implementar y ser consecuente con las normas de carácter didáctico que los alumnos asumirán poco a poco para ser partícipes de un clima de confianza y respeto mutuo, pero también de ruptura con los cánones que se han establecido a través del tiempo en las sesiones de matemáticas. El maestro debe convertir el aula en un espacio para dialogar, compartir ideas, discutir, analizar y establecer acuerdos sobre la tarea que se desarrolle.

Al maestro le corresponde provocar la interacción entre los alumnos al organizar las tareas en parejas o equipos, permitiendo que compartan interpretaciones del problema planteado, estrategias de resolución y acuerdos para compartir y confrontar con los demás compañeros. Una vez que la mayoría de los alumnos arriben a ciertos resultados, el maestro será el responsable de organizar la interacción con el resto del grupo con la finalidad de que compartan ideas, analicen procedimientos diferentes, discutan la pertinencia de los resultados y lleguen a conclusiones que formarán parte de la memoria de la sesión; es decir, que se conviertan en conocimientos que tanto los alumnos como el maestro pueden traer a primer plano para que sean utilizados en otras tareas.

También deberá estar al tanto de los progresos y rezagos de los alumnos y, en el segundo caso, buscará las estrategias necesarias para superar las dificultades y lograr avances, es decir, deberá hacer ajustes a su planeación de acuerdo con las situaciones que se vayan presentando en el grupo, ya sea para retroalimentar, regresar o avanzar más en los conocimientos estudiados. Ésta también es una forma de evaluación de la cual se hablará más adelante; sin embargo, es importante resaltar que no se limita a vigilar el desempeño de los alumnos, es necesario que el

a resolver el problema planteado y, por otra parte, exponiendo y explicando sus razonamietos al resto del grupo. También aprenderán a escuchar las ideas de los demás para enriquecer o cambiar las propias. Asimismo, sabrán que la interacción con sus compañeros y con el maestro se debe desarrollar en un marco de respeto y compromiso con la tarea que están desarrollando.

profesor reflexione acerca de las actividades que plantea al grupo y de su actuación como organizador de las tareas y el aprendizaje de sus alumnos. Por ejemplo, debe preguntarse y reflexionar en torno a si las actividades resultaron muy fáciles o muy difíciles, si lograron despertar el interés de los alumnos, o bien, si es necesario hacer algún cambio. La mejor manera de saber si una actividad es adecuada para el grupo y provoca la reflexión y el interés de los alumnos es llevándola al aula, lo cual permite hacer las adecuaciones pertinentes.

A *los alumnos* les corresponde pensar y producir ideas para solucionar los problemas que se les plantean; trabajar en equipo asumiendo una responsabilidad compartida; defender sus puntos de vista y aprender a escuchar y aceptar las ideas de sus compañeros; reconocer las dificultades que tienen y tratar de superarlas con ayuda de otros. También sabrán que su responsabilidad no es sólo encontrar un resultado, sino verificar que es correcto, esto es, deben comprobar que responde a lo que plantea el problema. De igual forma, aprenderán que algunos problemas no tienen solución y, por lo tanto, no se verán forzados a encontrarla. Sabrán que a veces faltan datos para contestar, o sobran datos y no necesariamente se tienen que usar todos.

En general, se espera que los alumnos asuman una actitud participativa en las sesiones, pensando, comentando con sus compañeros las ideas y estrategias que consideran les ayudarán

2.3 La evaluación

La evaluación está fuertemente vinculada al proceso de estudio, pues consiste en recabar información de manera permanente y continua sobre el desempeño de los alumnos y del propio docente, así como sobre la pertinencia de las actividades de estudio, con la finalidad de emitir juicios y hacer lo necesario para mejorar lo que se evalúa.

Puesto que se plantea una forma diferente de acercar a los alumnos al conocimiento, se hace necesaria una manera distinta de evaluar. En este sentido, la evaluación deja de ser equivalente a la aplicación de uno o más exámenes para asignar una calificación que ineludiblemente lleva el sello personal de cada docente. En otras palabras, el 9 de un docente no necesariamente significa lo mismo que el 9 que asigna otro, por lo que la sola calificación no puede dar cuenta clara de qué tanto sabe un estudiante.

Evaluación inicial: “Punto de partida”

Aunque en el libro de texto se presenta un examen denominado “Punto de partida”, sólo tiene la finalidad de que el docente empiece a conocer a sus alumnos: quiénes muestran más carencias en cuanto a conocimientos para que, desde el inicio, se busquen alternativas que les permitan avanzar. Esta evaluación inicial permitirá también saber, conforme se desarrolla el curso, en qué medida el grupo en general y cada alumno en particular supera las dificultades mostradas. Si usted considera que el instrumento le es insuficiente para las finalidades señaladas, puede elaborar el propio, y para ello se sugieren las siguientes recomendaciones generales:

- Incluir datos de identificación: nombre del alumno, del docente y fecha de realización.
- Indicar el tipo de evaluación.
- Señalar instrucciones claras y explícitas.
- Incluir preguntas, situaciones o problemas en los que se exploren conocimientos y habilidades que el alumno debiera tener con base en los aprendizajes esperados del grado anterior.
- Dar a conocer al alumno el resultado de la evaluación con *observaciones y recomendaciones puntuales.*

Es importante que el alumno se percate de su desempeño mediante este instrumento, con la finalidad de que pueda conocer dónde se encuentra en ese momento y valore los avances que vaya teniendo a lo largo del curso.

La evaluación formativa como parte del proceso de estudio

Se realiza mediante la observación y registro de notas durante el desarrollo de las actividades de estudio; en ella se involucran los alumnos y el docente. Su finalidad es promover la reflexión, tanto del maestro como de los alumnos sobre los avances en el aprendizaje. Se parte de las intenciones didácticas, en las que se prevé el recurso que se espera sea utilizado al resolver un problema. Suele suceder que los alumnos no lo utilicen y esto es motivo de evaluación, tanto para la actividad como para los alumnos. ¿Qué ajustes necesita la actividad para que los alumnos se vean en la necesidad de usar tal o cual recurso? ¿Qué tipo de apoyos necesitan los alumnos para avanzar? Dos preguntas que hay que tener presentes en todo momento para que el trabajo que los alumnos realizan bajo la dirección del maestro tenga una finalidad clara y puedan hacerse a tiempo los ajustes necesarios para mejorar el aprendizaje de los estudiantes.

Entre las acciones que se requieren para que una evaluación sea considerada formativa está la *retroalimentación*. Entendida no sólo como una nota que informe a los alumnos ("muy bien", "revisa tu trabajo", "debes ser más cuidadoso", etc.), sino como la oportunidad de analizar con mayor profundidad el trabajo realizado, planteando preguntas adicionales y dejando claramente identificados los errores cometidos. Una retroalimentación significativa, también conocida como devolución, no consiste en volver a explicar el contenido con las mismas o diferentes palabras, ni "mostrarles" formas de solución; se deben buscar o proponer otras estrategias, como se señaló en párrafos anteriores, como promover una discusión grupal en la que se analicen los errores, se formulen contraejemplos para que los alumnos comprendan en qué consiste el error, se formen parejas con un alumno que ha comprendido el tema y otro que tenga dificultades para que trabajen juntos la resolución de problemas, así como que se invite a los alumnos a que platiquen y reflexionen sobre lo que hicieron.

La evaluación formativa es esencialmente cualitativa, le permite al maestro emitir juicios acerca de lo que sabe el alumno y las dificultades que debe superar, de manera que tenga elementos para informar a los padres de familia, en caso

de que el alumno requiera algún apoyo. También ofrece información sobre la actividad planteada, por ejemplo, si resultó apropiada o si hay que hacer ajustes o cambios. Por último, la evaluación formativa también permite al maestro darse cuenta de si su actuar es adecuado o debe cambiar la estrategia.

A continuación le proporcionamos unos ejemplos que le pueden sugerir formas de efectuar este tipo de evaluación.

	Aprendizaje esperado	Intenciones didácticas		Pautas para la evaluación formativa	Aspectos a considerar en el trabajo en las sesiones
		Secuencia	Sesión		
Eje temático Número, álgebra y variación	AE1. Resuelve problemas de multiplicación y división con fracciones y decimales positivos.	**1. Multiplicación y división de números decimales positivos** Desarrolla habilidad para multiplicar y dividir números decimales y sabe usar estas operaciones al resolver problemas.	**1. Multiplicaciones por 10, por 100 y por 1000** Aprende a usar la técnica para multiplicar un número natural o decimal por una potencia de 10.	• Realiza multiplicaciones mentales de un número natural o decimal por 10, 100 y 1 000. • Utiliza la técnica para multiplicar rápidamente un número natural o decimal por una potencia de 10.	• Resuelve multiplicaciones de un número natural por una potencia de 10. • Reconoce que hay una técnica que permite hallar el resultado de un número natural por una potencia de 10. • Reconoce la técnica de contar la cantidad de ceros y recorrer el punto decimal ese número de veces a la derecha.
			2. Divisiones por 10, por 100 y por 1000 Aprende a usar la técnica para dividir un número natural o decimal entre potencias de 10.	• Realiza divisiones mentales de números naturales o decimales por una potencia de 10. • Utiliza las técnicas para dividir un número natural o decimal entre una potencia de 10. • Realiza multiplicaciones y divisiones entre dos números decimales entre potencias de diez.	• Resuelve divisiones de un número decimal por una potencia de 10. • Reconoce que se debe recorrer el punto decimal a la izquierda tantas cifras como ceros tenga el divisor. • Multiplica o divide dos números decimales. • Comprende que, en el caso de factores decimales menores que uno, la multiplicación achica y la división agranda. • Explica cómo resolver las divisiones con la técnica para dividir un número natural o decimal entre potencias de 10.
			3. ¿Qué significa multiplicar 0.3 × 0.4? Comprende el significado de multiplicar dos números decimales y usa el algoritmo de esta operación al resolver problemas.	• Realiza multiplicaciones y divisiones con números menores que 1. • Utiliza la técnica para multiplicar y dividir números decimales.	• Calcula el área de diferentes rectángulos cuyos lados están expresados en décimos de unidad de longitud. • Realiza multiplicaciones entre dos números decimales en el contexto de cálculo de áreas de rectángulos.

Eje temático	Aprendizaje esperado	Intenciones didácticas		Pautas para la evaluación formativa	Aspectos a considerar en el trabajo en las sesiones
		Secuencia	Sesión		
Eje temático Número, álgebra y variación	AE1. Resuelve problemas de multiplicación y división con fracciones y decimales positivos.	**1. Multiplicación y división de números decimales positivos** Desarrolla habilidad para multiplicar y dividir números decimales y sabe usar estas operaciones al resolver problemas.	**3. ¿Qué significa multiplicar 0.3 × 0.4?** Comprende el significado de multiplicar dos números decimales y usa el algoritmo de esta operación al resolver problemas.	• Realiza multiplicaciones y divisiones con números menores que 1. • Utiliza la técnica para multiplicar y dividir números decimales.	• Realiza divisiones entre dos números decimales en el contexto de cálculo de áreas de rectángulos. • Divide y multiplica mentalmente dos números decimales. • Comprende que al multiplicar décimos por décimos produce centésimos, y al dividir centésimos entre décimos produce décimos. • Resuelve operaciones y usa la calculadora para verificar que los resultados sean correctos. • Explica cómo resolvió multiplicaciones y divisiones con números menores que 1 y la técnica que utilizó para multiplicar y dividir números decimales.
			4. Técnicas para multiplicar o dividir por decimales Comprende el significado de dividir dos números decimales y usa el algoritmo de esta operación al resolver problemas.	• Realiza multiplicaciones y divisiones con números decimales. • Utiliza la técnica para multiplicar y dividir números decimales.	• Utiliza la multiplicación y división con números decimales para calcular el área de diferentes rectángulos. • Distingue la técnica que permite quitar el punto decimal multiplicando el dividendo por el divisor, por la misma potencia de 10. • Comprende la técnica que permite convertir decimales menores que 1 en enteros, para eso se multiplica el dividendo y el divisor por una potencia de 10. • Analiza que la propiedad que subyace es la que dice que se pueden multiplicar los dos términos de una división sin alterar el resultado. • Explica cómo resolvió multiplicaciones y la técnica que utilizó para multiplicar y dividir números decimales.

Eje temático	Aprendizaje esperado	Intenciones didácticas		Pautas para la evaluación formativa	Aspectos a considerar en el trabajo en las sesiones
		Secuencia	Sesión		
Eje temático Forma, espacio y medida	AE 12. Calcula el volumen de prismas y cilindros rectos.	**11. Volumen de prismas** Resuelve problemas que implican calcular el volumen de prismas.	**1. Cajas de cartón** Construye prismas cuya base es un polígono regular.	• Visualiza e imagina espacialmente para el tratamiento del volumen de prismas. • Construye prismas a partir de una representación plana.	• Reconoce el nombre de algunos cuerpos geométricos. • Interpreta la representación plana de un prisma (dibujo en dos dimensiones). • Construye moldes de prismas a partir de su representación plana.
			2. Cajas y chocolates Profundiza en la noción de volumen al determinar el volumen de un prisma con diferentes unidades cúbicas.	• Determina el volumen de un prisma con diferentes unidades. • Usa la fórmula para calcular el volumen de un prisma cuya base es un polígono regular.	• Identifica diferentes unidades de medida para determinar el volumen de un prisma. • Analiza la diferencia de unidad de volumen en diferentes prismas. • Toma correctamente las medidas necesarias para calcular el volumen de un prisma. • Expresa cómo determinar el volumen de un prisma con diferentes unidades.
			3. ¿Será la misma fórmula? Desarrolla la fórmula para calcular el volumen de un prisma cuya base es un polígono regular.	• Determina si para un prisma cuya base es un polígono regular también se puede usar la misma fórmula.	• Mide de manera correcta prismas para calcular su volumen. • Conoce y aplica fórmulas para calcular volumen de los prismas. • Calcula el volumen de prismas por medio de la suma. • Calcula el volumen de prismas por medio de la fórmula cuya base es el polígono regular. • Calcula el volumen de prismas cuya base es un triángulo o un cuadrilátero. • Describe cómo calcular el volumen de un prisma por dos procedimientos.
			4. Resolvamos problemas Resuelve problemas que impliquen el cálculo del volumen de prismas.	• Resuelve problemas que implican el cálculo del volumen de prismas cuya base es un polígono regular.	• Calcula el volumen de polígonos regulares. • Diferencia el volumen y capacidad y la relación entre el decímetro cúbico y el litro. • Calcula volúmenes de prismas cuyas dimensiones son literales. • Escribe expresiones con las que se obtienen volúmenes de prismas. • Explica procedimientos para calcular volúmenes de prismas cuyas dimensiones son literales.

Por otra parte, durante la puesta en común el maestro habrá de darse cuenta de quiénes participan y quiénes no, con el objeto de animar a estos últimos a que lo hagan.

Suele suceder que alguien, que por lo general no participa, sugiere una buena idea para llegar a la solución. Para estos casos conviene usar un anecdotario. Se requiere una libreta o un tarjetero y destinar una hoja o una tarjeta para cada uno de los alumnos. En el anecdotario se registran únicamente los hechos que se salen de lo común, con la idea de conservar algunas de las ideas o formas de actuar de los alumnos que nos permitan apreciar sus procesos de aprendizaje. A continuación, a manera de ejemplo, se muestra una nota que pudiera corresponder a un alumno.

Alumno X	Grado: 2º Sec.	Fecha: 9/09/19
Han pasado dos semanas de clases en las que X no había participado, pero ahora lo hizo con una explicación clara del procedimiento que utilizaron en su equipo para resolver un problema que implicaba el uso de la multiplicación con números fraccionarios. Es necesario animarlo para que siga participando.		

Rúbrica			
Nombre del estudiante: Angélica Lira Macías	Grado: 2	Grupo: A	Asignatura: Matemáticas
Eje: Forma, espacio y medida	Secuencia: 11. Volumen de prismas		

Aspectos observables	Hace lo esperado	En proceso	Aún no se observa	Total
Razonamiento matemático	Resuelve todo tipo de problemas que implican calcular el volumen de prismas.	Soluciona algunos problemas que implican calcular el volumen de prismas.	No puede resolver problemas que implican calcular el volumen de prismas.	
Ponderación	**25%**	**20%**	**15%**	
Estrategias y procedimientos	Reconoce y nombra cualquier cuerpo geométrico, construye prismas cuya base es un polígono regular y utiliza la fórmula para calcular polígonos regulares.	Identifica el nombre de algunos cuerpos geométricos, construye sólo algunos prismas cuya base es un polígono regular y utiliza las fórmulas para calcular agunos polígonos regulares.	No reconoce el nombre de los cuerpos geométricos, no puede construir prismas cuya base es un polígono regular y no utiliza las fórmulas para calcular polígonos regulares.	
Ponderación	**25%**	**20%**	**10%**	
Conceptos matemáticos	Conoce la noción de volumen al determinar el volumen de un prisma con diferentes unidades cúbicas y sabe las fórmulas para calcular volumen de prismas.	Indica la noción de volumen al determinar el volumen de un prisma con diferentes unidades cúbicas y sabe algunas de las fórmulas para calcular volumen de prismas.	No conoce la noción de volumen al determinar el volumen de un prisma con diferentes unidades cúbicas y no sabe las fórmulas para calcular volumen de prismas.	
Ponderación	**25%**	**20%**	**15%**	
Explicaciones	Expone de manera oral y escrita los conocimientos y procedimientos que utiliza para calcular el volumen de prismas.	Presenta de manera oral los conocimientos y procedimientos que utiliza para calcular el volumen de prismas.	No expresa de forma clara los conocimientos y procedimientos que utiliza para calcular el volumen de prismas.	
Ponderación	**25%**	**20%**	**10%**	
Observaciones generales:				

Además del anecdotario, hay otros recursos para recabar información sobre el desempeño de los alumnos, por ejemplo: el libro de texto, el cuaderno de trabajo, la lista de registro de actividades, la carpeta de trabajos, rúbricas, listas de cotejo y los ejercicios que realizan de manera periódica. A continuación, se proporciona un ejemplo de estos instrumentos.

Lista de cotejo				
Nombre del estudiante: Angélica Lira Macías	Grado: 2	Grupo: A	Bloque: 1	Asignatura: Matemáticas
Eje: Número, álgebra y variación	Secuencia 7. Figuras geométricas y equivalencia de expresiones 1			

Criterios de evaluación	Sí	No	Puntaje
Conoce la noción de equivalencia de expresiones algebraicas en contextos geométricos.			
Utiliza expresiones algebraicas para calcular el perímetro y el área de figuras geométricas básicas y compuestas.			
Entiende geométricamente el concepto de equivalencia de expresiones algebraicas, valiéndose del perímetro y el área de figuras geométricas.			
Distingue que una forma de verificar la equivalencia entre dos expresiones algebraicas es asignar valores a las literales que las componen.			
Reconoce la equivalencia de dos expresiones asignando valores numéricos a las literales de ambas expresiones algebraicas.			
Resuelve expresiones algebraicas para obtener expresiones equivalentes mediante la reducción de términos semejantes.			
Asigna valores a las variables de expresiones algebraicas para determinar si son o no equivalentes.			
Explica los procedimientos algebraicos que utilizó para obtener expresiones equivalentes que permitan obtener el perímetro y el área de diversas figuras geométricas.			
Reconoce y determina cuando las expresiones son equivalentes o no.			
Escribe expresiones algebraicas y maneja el lenguaje matemático.			
Observaciones del maestro:			

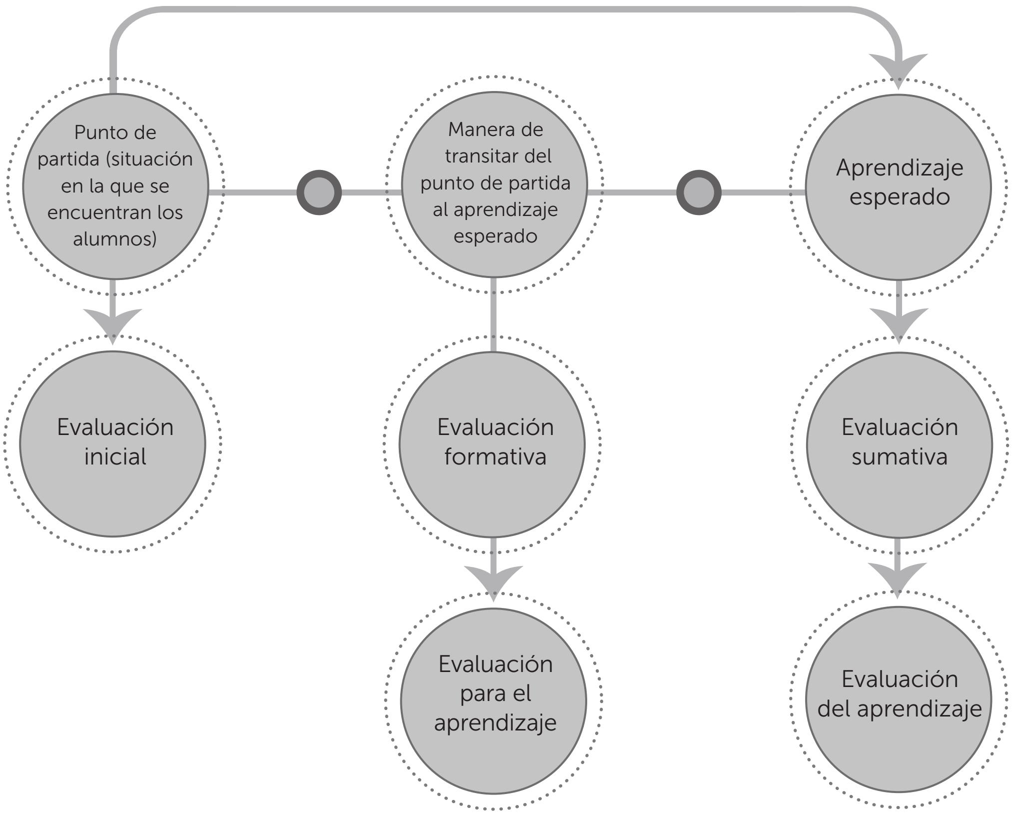
La evaluación sumativa

Consiste en dar una calificación cuya escala es del 1 al 10. Ésta debe reflejar lo que el maestro ha observado en el alumno desde que inició el proceso ("Punto de partida") hasta el punto al que ha llegado en el momento de asentar dicha calificación.

Por otra parte, es importante que esta evaluación se acompañe de evidencias del trabajo que el alumno ha realizado, de los comentarios y sugerencias que el profesor le ha dado acerca de su desempeño y de las tareas adicionales que le ha propuesto para superar los obstáculos, o bien, para avanzar en sus aprendizajes.

La calificación parcial o final no puede ni debe ser el resultado de una sola prueba. Si así fuera, la evaluación formativa no tendría ningún sentido. Afortunadamente, el profesor de telesecundaria trabaja con un solo grupo, conoce muy bien a sus alumnos y cuenta con información suficiente para emitir una calificación basada en criterios claros.

El siguiente diagrama resume lo anterior.



Esa forma diferente de evaluar los logros alcanzados va de la mano del proceso de estudio. Así, mientras los alumnos trabajan en la resolución de un problema, el profesor observa lo que hacen y escucha cómo piensan, se da cuenta dónde hay dificultades y toma nota de ello para tratar de superarlas.

Hay una evaluación adicional que no refleja necesariamente el avance de los alumnos, pero que tiene una gran importancia.

Cuando se elige una actividad para plantear a un grupo de alumnos, no hay certeza sobre lo que va a suceder. ¿Les resultará interesante? ¿Muy fácil? ¿Muy difícil? ¿Tediosa? Es en el momento de la aplicación cuando se pueden responder estas preguntas y tomar las medidas necesarias. Si en el proceso de estudio intervienen el profesor, los alumnos y la actividad que se plantea, la evaluación debe aplicarse a estos tres elementos.

La autoevaluación docente

El maestro debe analizar también su propia actuación: ¿faltó dar una información que era importante? ¿Proporcionó alguna información que no debía haber dado? ¿Dejó demasiado tiempo para la actividad y ya no alcanzaron a realizar la puesta en común? ¿Hubiera sido mejor que organizara a los alumnos en equipos? Generalmente, estos y otros cuestionamientos surgen de manera natural como consecuencia de la forma de trabajar y abonan a la formación profesional del docente.

El maestro puede emitir juicios respecto a la actividad que planteó a partir de la reacción de los alumnos y, como se dijo anteriormente, la forma en que gestionó la clase le permite darse cuenta de su propio desempeño.

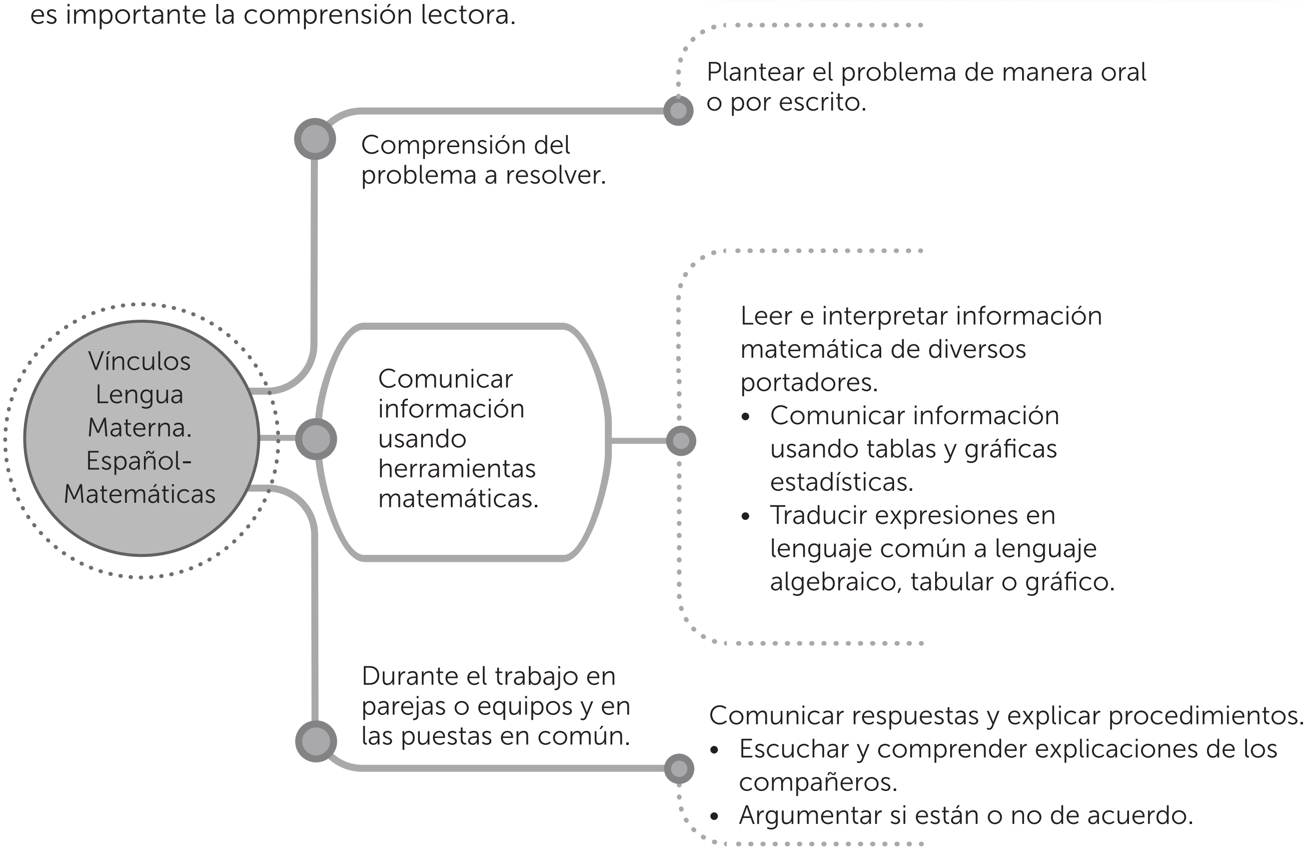
Evaluarse a uno mismo no es tarea fácil, se puede ser muy duro o excesivamente laxo; en ninguno de los casos se logra la mejor forma de acompañar a los alumnos en su proceso de aprendizaje. Por eso, la observación entre pares es una propuesta para mejorar y seguir aprendiendo sobre la tarea docente. Así, el intercambio de ideas, sugerencias y estrategias entre compañeros docentes se vuelve una necesidad si se quiere un mejor desempeño.

3. La vinculación con otras asignaturas

Puesto que todas las personas aprendemos desde el nacimiento de manera integral (holística), es importante establecer en la educación formal la relación que tienen los aprendizajes en las diferentes asignaturas y el modo en que ese aprendizaje se convierte en cimiento sobre el cual se construyen nuevos saberes.

La vinculación de las Matemáticas con otras asignaturas puede darse de manera inseparable y estar siempre presente en las clases de Matemáticas, o bien a partir de los contextos seleccionados para plantear los problemas que se resolverán con herramientas matemáticas.

En el primer caso se tiene la vinculación de las matemáticas con la asignatura de Lengua Materna. Español. Un ejemplo clásico es la necesidad de que los alumnos comprendan el problema que deben resolver, ya sea que el profesor lo plantee de manera oral o por escrito. Si se trata de un problema planteado por escrito (por ejemplo, las actividades del libro de texto), es importante la comprensión lectora.



Otra manera en que esta asignatura está presente durante las clases de Matemáticas se refiere a los contenidos relacionados con la comunicación de la información a través de herramientas matemáticas, por ejemplo: cuando se trasvasan datos numéricos a tablas o gráficas (circulares, de barras, histogramas, gráficas de línea), cuando se lee e interpreta información matemática de diversos portadores (diarios, revistas, internet, etcétera) o cuando se traducen expresiones que están en el lenguaje común al lenguaje algebraico, tabular o gráfico.

Cuando se realizan puestas en común, al ceñirse al enfoque de resolución de problemas también se establece un vínculo con la asignatura de Lengua Materna. Español, ya que los alumnos tienen que comunicar sus respuestas y explicar los procedimientos que siguieron, así como escuchar los de sus compañeros o argumentar si están o no de acuerdo con lo que se está discutiendo.

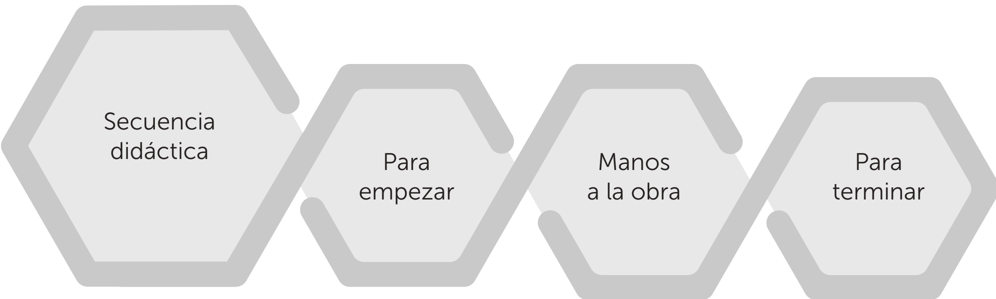
Por otra parte, a partir del análisis del documento curricular se identificaron vínculos puntuales con las asignaturas de Historia, Ciencias y Tecnología, Física, mismos que están identificados en el libro para el maestro y aparecen indicados en la ficha descriptiva, al inicio de las recomendaciones particulares para trabajar cada secuencia, en la segunda parte de este libro.

En conclusión, la importancia de señalar estas vinculaciones se basa en la idea de lograr que los alumnos vean sus aprendizajes como algo que les permite no sólo saber más acerca de una asignatura en particular, sino que estos conocimientos les ayudan a comprender otros de diversa índole, y que las habilidades que se desarrollan en un área de estudio también apoyan y son útiles para otros aprendizajes.

4. El libro de texto de Matemáticas para el alumno

Cada uno de los aprendizajes esperados y señalados en el Plan y Programas de Estudio se dividieron en contenidos que se desarrollan a través de propuestas de aprendizaje por secuencias didácticas repartidas en tres bloques. El libro de texto del alumno *Matemáticas. Segundo grado. Telesecundaria* está conformado por 12 secuencias que integran el bloque 1 y 24 secuencias que corresponden a los bloques 2 y 3, para conformar una propuesta de 36 secuencias didácticas. Una secuencia didáctica puede incluir de tres a cinco sesiones.

La estructura de cada secuencia didáctica está conformada por tres componentes didácticos: "Para empezar" (inicio), "Manos a la obra" (desarrollo) y "Para terminar" (cierre).

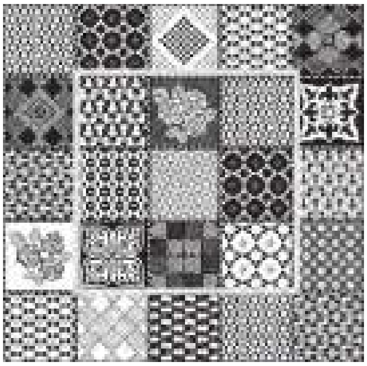


Bloque 1	Bloque 2	Bloque 3
1. Multiplicación y división de números decimales positivos 2. Multiplicación y división de fracciones positivas 3. Multiplicación de números enteros 4. Proporcionalidad directa e inversa 5. Sistemas de ecuaciones 2 × 2. Método gráfico 6. Sucesiones y expresiones equivalentes 1 7. Figuras geométricas y equivalencia de expresiones 1 8. Polígonos 1 9. Conversión de medidas 1 10. Perímetro y área de polígonos regulares 11. Volumen de prismas 12. Probabilidad clásica 1	13. Multiplicación y división de números enteros 14. Multiplicación y división de números con signo 15. Potencias con exponente entero 1 16. Raíz cuadrada de números cuadrados perfectos 17. Reparto proporcional 18. Figuras geométricas y equivalencia de expresiones 2 19. Sucesiones y expresiones equivalentes 2 20. Sistemas de ecuaciones. Métodos de igualación y de sustitución 21. Relación funcional 1 22. Polígonos 2 23. Conversión de medidas 2 24. Área del círculo 25. Medidas de tendencia central y de dispersión 1 26. Histogramas y polígonos de frecuencia	27. Potencias con exponente entero 2 28. Raíz cuadrada de números positivos 29. Sistemas de ecuaciones 2 × 2. Método de suma y resta 30. Relación funcional 2 31. Polígonos 3 32. Conversión de medidas 3 33. Volumen de cilindros rectos 34. Gráficas de línea 35. Medidas de tendencia central y de dispersión 2 36. Probabilidad clásica 2

Para empezar. Presenta un escrito breve que da un panorama sobre aspectos generales que remiten al tema de estudio.

Manos a la obra. Se presentan actividades de estudio para lograr la intención didáctica de cada secuencia. Las actividades están conformadas por situaciones problemáticas que corresponden a la edad y características de los alumnos de este grado; cada una de las actividades están conformadas por situaciones problemáticas que se pretende despierten el interés en los alumnos y que corresponden a conceptos, procedimientos y habilidades por desarrollar.

■ Para empezar



En varios países anglosajones, existe una técnica artesanal para hacer una colcha, un tapete o un mantel, cosiendo o tejiendo fragmentos de diversas telas. En los países hispanohablantes, a estas piezas se les conoce como *acolchados*.

Observa la ilustración. ¿Cuántas expresiones algebraicas distintas podrías escribir para calcular el perímetro o el área de la sección remarcada en la colcha?

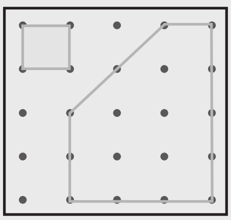
En esta secuencia continuaremos relacionando la representación geométrica con la algebraica para aprender a obtener más de una expresión algebraica de una situación y verificar que sean equivalentes. Se espera que, al finalizar el estudio de la secuencia, puedas dar más de una respuesta a la pregunta anterior.

■ Manos a la obra

Puntos y figuras

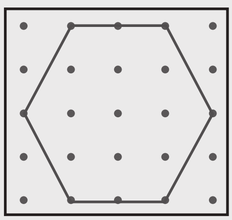
1. Trabajen en parejas las siguientes actividades. Calculen y escriban el área de los siguientes polígonos de acuerdo con la unidad indicada en el polígono 1.

Polígono 1



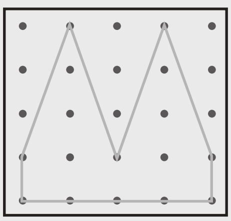
A = ____________

Polígono 2



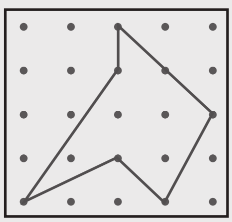
A = ____________

Polígono 3



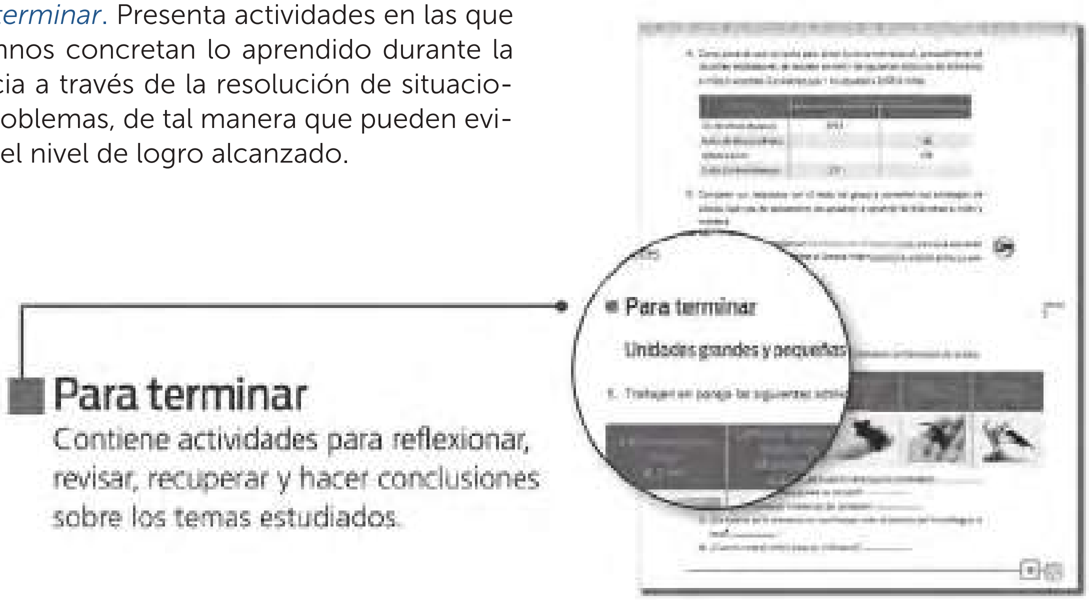
A = ____________

Polígono 4



A = ____________

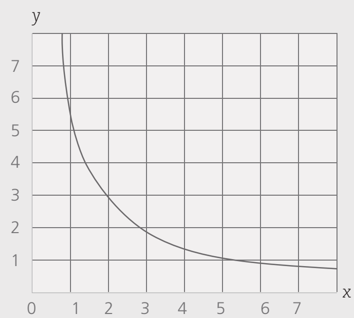
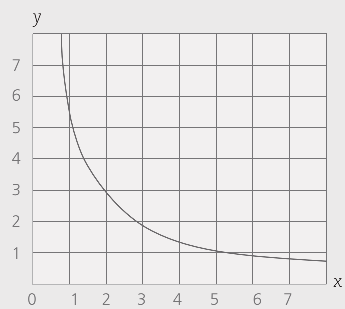
Para terminar. Presenta actividades en las que los alumnos concretan lo aprendido durante la secuencia a través de la resolución de situaciones o problemas, de tal manera que pueden evidenciar el nivel de logro alcanzado.



Para terminar

Diversos tipos de variación

1. Trabajen en pareja. Completen la siguiente tabla. Anoten si cada gráfica ilustra una relación de proporcionalidad y de qué tipo, o si no lo hace. También anoten una expresión algebraica que relacione *x* con *y*.

Gráfica		
¿Se trata de una relación de proporcionalidad?	☐ Sí ☐ No	☐ Sí ☐ No
Si la respuesta es afirmativa, ¿de qué tipo es?		
Expresión algebraica		

5. Materiales de apoyo para la enseñanza y el aprendizaje

La propuesta educativa del libro de texto se complementa con recursos audiovisuales e informáticos que apoyarán a los estudiantes en su aprendizaje. Los programas audiovisuales están diseñados en función del tratamiento de los contenidos desarrollados en el libro de texto; en ellos se conjuga la imagen, el movimiento y el sonido para motivar, ejemplificar, profundizar o consolidar lo estudiado en la secuencia. En cada secuencia se integran uno o dos audiovisuales, identificados por el nombre correspondiente y un icono.

6. Observen el recurso audiovisual *La proporcionalidad en la vida cotidiana*, donde encontrarán ejemplos del uso cotidiano de la proporcionalidad directa o inversa. Propongan con sus compañeros dos ejemplos más de proporcionalidad inversa.

Los recursos informáticos están diseñados para que los alumnos tengan oportunidad de aplicar, practicar y fortalecer los contenidos o procedimientos principales de cada secuencia. Al igual que los audiovisuales, en cada secuencia se integra un recurso informático que se identifica por el nombre que le corresponde y un ícono.

El maestro cuenta también con materiales audiovisuales específicos para apoyar su práctica docente, los cuales contienen recomendaciones precisas acerca de los contenidos temáticos que se desarrollan para lograr cada uno de los 15 aprendizajes esperados del grado, así como orientaciones didácticas para propiciar su aprendizaje.

Los recursos audiovisuales e informáticos están disponibles en el portal de Telesecundaria con el fin de que se utilicen las veces que sean necesarias.

7. Utilicen el recurso informático *Problemas de proporcionalidad directa e inversa*, donde practicarán la resolución de problemas de estos tipos de variación.

6. Alternativas para seguir aprendiendo como maestros

El trabajo docente, tal como se plantea en párrafos anteriores, es una tarea compleja que implica un alto grado de profesionalización. No es nada fácil conducir debates entre los alumnos, apoyarlos para que logren comunicar sus ideas de manera clara y obtener algunas conclusiones como resultado de la puesta en común, usar el error como fuente de aprendizaje o poner contraejemplos cuando un alumno tiene concepciones erróneas. Se necesita tener un conocimiento sólido de la asignatura, altas expectativas sobre los alumnos, una gran apertura para dar entrada a diferentes formas de pensar y una gran calidad humana para brindar apoyo y seguridad a los alumnos que se rezagan.

Los docentes de Telesecundaria afrontan una complejidad mayor por el hecho de atender todas las asignaturas. En este servicio educativo, la condición de tener un dominio sólido en las asignaturas pasa a un segundo plano, a cambio de contar con materiales que guíen puntualmente los procesos de estudio y de asumir la responsabilidad de leerlos y utilizarlos, pero, al mismo tiempo, que tales materiales les brinden la libertad para hacer las adecuaciones que consideren necesarias, en función del contexto social y las características de los alumnos que integran el grupo.

Ningún maestro, pero en especial el de Telesecundaria, se puede mostrar arrogante al pensar que lo sabe todo, ya que, por parte de los alumnos, puede surgir algún procedimiento que el profesor no conozca, o alguna pregunta para la cual no se tiene una respuesta. Es válido decir *no sé*, o *no lo había pensado de esa manera*, lo cual debería ser algo normal para los alumnos, siempre y cuando el ambiente que se experimente en el aula sea la búsqueda de alternativas de solución. Se debe tener en cuenta que el profesor es la persona con más experiencia, pero no por eso está obligado a tener siempre todas las respuestas.

La profesionalización del docente, mencionada al inicio de este punto, se logra en el día a día con los aciertos y los errores, mediante el intercambio de experiencias con otros maestros, en la medida en que en el centro de trabajo se hable de la práctica docente y se emprendan acciones conjuntas para mejorar.

En la propuesta que ponemos a consideración de los profesores de Telesecundaria se incluyen audiovisuales dirigidos a la práctica docente, algunos se refieren a la profundización del contenido matemático y otros a la didáctica de dichos contenidos. En las sugerencias para el trabajo con los diferentes contenidos podrá encontrar la guía de los audiovisuales que se elaboraron para el apoyo de la labor docente.

7. Mapa curricular

A continuación se ofrece la manera en que se plantea lograr los aprendizajes esperados del grado con el desarrollo de las secuencias para apoyar al docente en su planeación anual.

Eje	Tema	Aprendizajes Esperados	Bloque 1	Bloque 2	Bloque 3
Número, álgebra y variación	Multiplicación y división	1. Resuelve problemas de multiplicación y división con fracciones y decimales positivos.	*Secuencia 1* Multiplicación y división de números decimales positivos		
			Secuencia 2 Multiplicación y división de fracciones positivas		
		2. Resuelve problemas de multiplicación y división con números enteros, fracciones y decimales positivos y negativos.	*Secuencia 3* Multiplicación de números enteros	*Secuencia 13* Multiplicación y división de números enteros	
				Secuencia 14 Multiplicación y división de números con signo	
		3. Resuelve problemas de potencias con exponente entero y aproxima raíces cuadradas.		*Secuencia 15* Potencias con exponente entero 1	*Secuencia 27* Potencias con exponente entero 2
				Secuencia 16 Raíz cuadrada de números cuadrados perfectos	*Secuencia 28* Raíz cuadrada de números positivos
	Proporcionalidad	4. Resuelve problemas de proporcionalidad directa e inversa y de reparto proporcional.	*Secuencia 4* Proporcionalidad directa e inversa	*Secuencia 17* Reparto proporcional	
	Ecuaciones	5. Resuelve problemas mediante la formulación y solución algebraica de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.	*Secuencia 5* Sistemas de ecuaciones 2 × 2. Método gráfico	*Secuencia 20* Sistemas de ecuaciones. Métodos de igualación y de sustitución	*Secuencia 29* Sistemas de ecuaciones 2 × 2. Método de suma y resta
	Funciones	6. Analiza y compara situaciones de variación lineal y proporcionalidad inversa, a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica. Interpreta y resuelve problemas que se modelan con este tipo de variación incluyendo fenómenos de la física y otros contextos.		*Secuencia 21* Relación funcional 1	*Secuencia 30* Relación funcional 2

Eje	Tema	Aprendizajes Esperados	Bloque 1	Bloque 2	Bloque 3
Número, álgebra y variación	Patrones, figuras geomé-tricas y expresiones equivalen-tes	7. Verifica algebraicamente la equivalencia de expre-siones de primer grado, formuladas a partir de sucesiones.	*Secuencia 6* Sucesiones y expresiones equivalentes 1	*Secuencia 19* Sucesiones y expresiones equivalentes 2	
		8. Formula expresiones de primer grado para repre-sentar propiedades (perí-metros y áreas) de figuras geométricas y verifica equivalencia de expresio-nes, tanto algebraica como geométricamente (análisis de las figuras).	*Secuencia 7* Figuras geométricas y equivalencia de expresiones 1	*Secuencia 18* Figuras geométricas y equivalencia de expresiones 2	
Forma, espacio y medida	Figuras y cuerpos geométri-cos	9. Deduce y usa las rela-ciones entre los ángulos de polígonos en la cons-trucción de polígonos regulares.	*Secuencia 8* Polígonos 1	*Secuencia 22* Polígonos 2	*Secuencia 31* Polígonos 3
	Magnitudes y medidas	10. Resuelve problemas que implican conversiones en múltiplos y submúltiplos del metro, litro, kilogramo y de unidades del Sistema Inglés (yarda pulgada, galón, onza y libra).	*Secuencia 9* Conversión de medidas 1	*Secuencia 23* Conversión de medidas 2	*Secuencia 32* Conversión de medidas 3
		11. Calcula el perímetro y área de polígonos regula-res y del círculo a partir de diferentes datos.	*Secuencia 10* Perímetro y área de polígonos regulares	*Secuencia 24* Área del círculo	
		12. Calcula el volumen de prismas y cilindros rectos.	*Secuencia 11* Volumen de prismas		*Secuencia 33* Volumen de cilindros rectos
Análisis de datos	Estadística	13. Recolecta, registra y lee datos en histogramas, polí-gonos de frecuencia y gráficas de línea.		*Secuencia 26* Histogramas y polí-gonos de frecuencia	*Secuencia 34* Gráficas de línea
		14. Usa e interpreta las medidas de tendencia cen-tral (moda, media aritmé-tica y mediana), el rango y la desviación media de un conjunto de datos y decide cuál de ellas conviene más en el análisis de los datos en cuestión.		*Secuencia 25* Medidas de tenden-cia central y de dispersión 1	*Secuencia 35* Medidas de tendencia central y de dispersión 2
	Probabili-dad	15. Determina la probabi-lidad teórica de un evento en un experimento aleatorio.	*Secuencia 12* Probabilidad clásica 1		*Secuencia 36* Probabilidad clásica 2

II. Sugerencias didácticas específicas

Punto de partida (LT, págs. 10 y 11)

Con esta batería de reactivos se pretende apoyar al maestro en la valoración del dominio que tienen los estudiantes de los aprendizajes esperados de primero de secundaria.

Reactivo 1. Sucesiones de números y figuras. Con la resolución de este reactivo los alumnos muestran sus conocimientos y habilidades para determinar los términos siguientes y el término enésimo de una sucesión de figuras con progresión lineal de la forma: $a\boldsymbol{n}$. En la sucesión que se presenta a los alumnos, el cuadrado que corresponde a la figura $\boldsymbol{n}$ tiene $4\boldsymbol{n}$ cuadritos. Los cuadrados de las figuras 6 y 10 tienen 24 y 40 cuadritos, respectivamente.

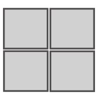


Figura 1

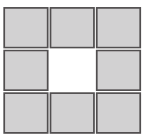


Figura 2

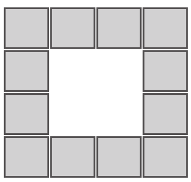


Figura 3

Reactivo 2. Ecuaciones de primer grado. En la resolución de los incisos que implica este reactivo los alumnos deberán traducir un problema verbal en una expresión algebraica; en este caso, en una ecuación que lo modele para encontrar la solución mediante la aplicación de los conocimientos adquiridos.

En el inciso a) los alumnos deben traducir la situación a la expresión $\frac{m}{2} = \frac{p-8}{2} = 18$, donde m representa la edad de la madre, y p, la edad del padre. Así, la edad de la madre es 36 y la del padre 44 años.

En el inciso b), la ecuación correspondiente es: $3s + 4c = 1\,200$, pero cada suéter vale \$50 más que una camisa, así, la expresión algebraica equivalente es:

$$3(c+50) + 4c = 3c + 150 + 4c = 7c + 150 = 1\,200$$

Litros	17	25	28	35	43	55	64	78	81
Minutos	3.4	5.0	6.6	7.0	8.6	11.0	12.8	15.6	16.2

El precio de una camisa es de \$150, y el de un suéter, \$200.

En el inciso c) la ecuación lineal es: $2n - 6 = \frac{n}{2}$; al aplicar operaciones inversas hasta despejar n se obtiene:

$$2n - \frac{n}{2} = 6 \qquad \frac{4}{2}n - \frac{1}{2}n = \frac{3}{2}n = 6 \qquad n = \frac{12}{3} = 4$$

Reactivo 3. Proporcionalidad directa. Con la respuesta de este reactivo se observa si los alumnos reconocen una situación de proporcionalidad directa y establecen alguna estrategia que les permita obtener los valores faltantes.

En el inciso a) se considera un promedio de bombeo de sangre por minuto distinto al de la tabla a fin de que los estudiantes no recuperen de ella el valor señalado, por lo que:

$$24 \text{ h} \times 60 \text{ min} \times 5.5 \text{ L} = 7\,920 \text{ L}$$

Reactivo 4. Porcentaje. En este reactivo se podrá observar el grado de dominio de los alumnos sobre el uso de las operaciones básicas y el manejo de porcentajes. En la tabla se agrega un renglón que permite identificar en términos de porcentajes la parte que representa de la cantidad base, en este caso se llama "Precio sin IVA" equivalente a 100%.

Artículo	Precio sin IVA	Precio con IVA	Descuento	Precio total
	100%	116%	en %	(+ IVA – descuentos incluidos)
Lavadora	$4939.66	$5730.00	20	$4584.00
Comedor	$11890.00	$13792.40	15	$11723.54
Refrigerador	$6688.89	$7759.11	10	$6983.20
Estufa	$5336.21	$6190.00		
Recámara	$5964.29	$6918.57	16	$5811.60

En el caso de la estufa, no tiene un porcentaje de descuento, así que los estudiantes o usted pueden proponer uno o no aplicar ninguno.

Para contestar el inciso a) se considera el monto de los precios totales para descontar el 5% equivalente a $0.05 = \frac{5}{100}$. Hay al menos dos maneras de proceder para obtener el total:

A. Sumar los precios totales y descontar al total el 5%.

Artículo	Precio sin IVA	Precio con IVA	Descuento	Precio total
	100%	116%	en %	(+ IVA – descuentos incluidos)
Comedor	$11890.00	$13792.40	15	$11723.54
Recámara	$5964.29	$6918.57	16	$5811.60
				$17535.14
			menos 5%	$876.75
				$16658.38

B. Descontar de cada precio total 5% y luego sumar las cantidades para obtener el total final. En el caso del inciso b), los alumnos pueden proceder de manera semejante. El precio total del comedor y refrigerador es:

Artículo	Precio sin IVA	Precio con IVA	Descuento	Precio total	Descuento adicional 5%	
	100%	116%	en %	(+ IVA – descuentos incluidos)	5%	
Comedor	$11890.00	$13792.40	15	$11723.54	$586.18	$11137.36
Refrigerador	$6688.89	$7759.11	10	$6983.20	$349.16	$6634.04
						$17771.40

Reactivo 5. Volumen de prismas. Con este reactivo los alumnos muestran sus conocimientos y habilidades sobre el volumen de prismas, conversión entre medidas de longitud del Sistema Internacional y la ubicación espacial. Debido a la posición en que se deben colocar las cajas dentro del contenedor, se espera que determinen el número de cajas que se pueden colocar por el frente (largo del contenedor), 5 y 8 cajas por el ancho, y así en el fondo del contenedor habrá $8 \times 5 = 40$ cajas. Dada la altura de 28 dm se forman tres niveles más. Por lo tanto, en el contenedor caben $40 \times 4 = 160$ cajas. Otra opción consiste en calcular el volumen (capacidad) del contenedor y el volumen que ocupan las cajas, de donde se tiene:

$$8 \text{ m} \times 4 \text{ m} \times 2.8 \text{ m} = 89.6 \text{ m}^3$$
$$\rightarrow 80 \text{ dm} \times 40 \text{ dm} \times 28 \text{ dm} = 89\,600 \text{ dm}^3$$

Éste es el volumen que le cabe al contenedor, y el volumen de cada caja es:

$$16 \text{ dm} \times 5 \text{ dm} \times 7 \text{ dm} = 560 \text{ dm}^3$$

Por lo tanto, se divide el volumen del contenedor entre el volumen de cada caja:

$$89\,600 \div 560 = 160$$

Reactivo 6. Perímetro y área de figuras compuestas. Este reactivo implica calcular el perímetro y el área total de la figura compuesta por figuras rectangulares. La parte superior de la figura mide de largo 170 cm y de altura 20 cm de cada lado. La parte inferior de la figura es irregular y mide en total 270 cm más. Así, el perímetro es 500 cm. Para obtener el área total se puede calcular el área de cada sección, identificadas de izquierda a derecha:

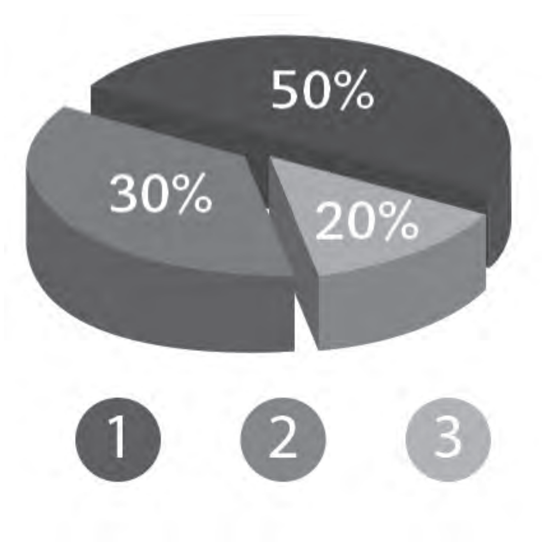
Reactivo 7. Medidas de tendencia central y gráfica circular. Se espera que los alumnos reconozcan que la medida de tendencia central conveniente es la moda, porque representa la marca de pantalones que la gente prefiere. En este caso, esa marca es la 1 pues la prefieren 15 de las 30 personas entrevitadas; además, esto representa el 50%, y el otro 50% se reparte entre las opciones 2 y 3, de la siguiente forma:

$$\frac{30}{6} = \frac{100\%}{x\%} \rightarrow x = 20\%$$

$$\frac{30}{9} = \frac{100\%}{x\%} \rightarrow x = 30\%$$

Por lo tanto, la gráfica circular se obtiene al distribuir de manera proporcional los 360° que tiene el círculo entre el tanto por ciento correspondiente a cada valor obtenido.

Marca de pantalones que la gente prefiere



Bloque 1

Secuencia 1 Multiplicación y división de números decimales positivos (LT, págs. 14-21)

Tiempo de realización	4 sesiones
Eje temático	Número, álgebra y variación
Tema	Multiplicación y división
Aprendizaje esperado	Resuelve problemas de multiplicación y división con fracciones y decimales positivos.
Intención didáctica	Que los alumnos desarrollen habilidad para multiplicar y dividir números decimales y sepan usar estas operaciones al resolver problemas.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisuales** • *Multiplicaciones por 10, por 100, por 1 000* • *División por 10, por 100, por 1 000*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recurso audiovisual** • *La multiplicación y división con fracciones y decimales positivos*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Aprendan la técnica para multiplicar un número natural o decimal por una potencia de 10.
- Sesión 2. Aprendan a usar la técnica para dividir un número natural o decimal entre una potencia de 10.
- Sesión 3. Comprendan el significado de multiplicar dos números decimales y usen el algoritmo de esta operación al resolver problemas.
- Sesión 4. Comprendan el significado de dividir dos números decimales y usen el algoritmo de esta operación al resolver problemas.

Acerca de...

El estudio de esta secuencia se inicia con un ejercicio en el que dos alumnos multiplican un número natural por una potencia de 10; uno de ellos usa papel y lápiz y el otro, calculadora. La finalidad es que se den cuenta de que hay una técnica para multiplicar por una potencia de 10 que permite hallar el resultado más rápido que la calculadora, por lo que vale la pena conocerla y usarla. Este mismo juego se extiende a la multiplicación de un decimal por una potencia de 10 y después a la división de un natural o decimal entre una potencia de 10.

Para darle significado a la multiplicación entre dos números decimales, se utiliza como apoyo gráfico un cuadrado como unidad cuadrada dividida en centésimos (véase la sesión 3). También se calcula el área de diferentes rectángulos cuyos lados están expresados en décimos de unidad de longitud, mientras que su producto, que es la unidad de área, está expresado en centésimos de unidad de área.

Este mismo recurso se usa para la división cuando se conoce el área y la medida de un lado del rectángulo. La intención es que los alumnos generalicen la idea de que, si multiplican décimos por décimos, en el resultado debe haber centésimos. Si multiplican décimos por centésimos, en el resultado debe haber milésimos. Dicho de otra manera: el producto debe contener tantas cifras decimales como la suma de las cifras decimales de los factores.

Un aspecto importante que se analiza en esta secuencia es la relación inversa entre multiplicación y división a partir de casos concretos como:

- Multiplicar por 0.1 tiene el mismo efecto que dividir entre 10.
- Dividir entre 0.1 tiene el mismo efecto que multiplicar por 10.

En general, para dividir entre un decimal se usa la técnica de multiplicar el dividendo y el divisor por la misma potencia de 10, con la finalidad de que el divisor sea un número natural.

Sobre las ideas de los alumnos

No obstante que las técnicas para multiplicar o dividir por potencias de 10 ahorran tiempo al efectuar cálculos, los alumnos tienden a no usarlas. Se ha observado que muchos de ellos ponen filas de ceros en los productos parciales en vez de sólo correr el punto decimal o agregar ceros cuando multiplican o dividen por potencias de 10. Otros prefieren usar la calculadora cuando no es necesario. Una posible causa es que no entienden por qué funcionan las técnicas y se olvidan de ellas. Es necesario cuestionar sistemáticamente si el cálculo se puede hacer mentalmente, si es necesario escribir la operación o usar la calculadora.

Muchos alumnos suelen confundir potencia de 10 con múltiplo de 10. Conviene aclararles que los múltiplos de 10 son de la forma $10n$, esto es, 10(1) = 10, 10(2) = 20, 10(3) = 30, etcétera, mientras que las potencias de 10 son de la forma 10^n, es decir, $10^1 = 10$, $10^2 = 100$, $10^3 = 1000$, $10^4 = 10000$, etcétera. Para multiplicar por un múltiplo de 10 es necesario multiplicar por 10 y luego por n. Por ejemplo,

$$2.5 \times 60 = 2.5 \times 10 \times 6$$

¿Qué material se necesita?

Si les es posible, al finalizar el trabajo de la primera sesión vean el audiovisual *Multiplicaciones por 10, por 100, por 1000*, para que reafirmen o rectifiquen sus aprendizajes; al término de la segunda sesión, se sugiere utilizar el audiovisual *División por 10, por 100, por 1000.*

Algunas actividades requieren el uso de calculadora; procure que haya al menos una por pareja, pero es necesario controlar su uso.

¿Cómo guío el proceso?

La multiplicación y la división con decimales tienen un uso social muy amplio. Puede iniciar el estudio de la secuencia solicitando ejemplos de problemas en los que se utilizan estas operaciones y, de paso, ver qué tanto saben de ellas.

La actividad 1 de la sesión 1 requiere el uso de una calculadora por pareja. Dé el tiempo suficiente para realizar el ejercicio y observe si, a medida que transcurre, el alumno que usa papel y lápiz obtiene más rápido el resultado una vez que se da cuenta de que, para multiplicar un número natural por una potencia de 10, basta con agregarle ceros. Una vez que realizan las rondas propuestas, asegúrese de que las reglas que formulan en la actividad 2 y en la 3b de la sesión 1 son claras y precisas. Algunos alumnos suelen decir, erróneamente, que se recorren los ceros, cuando lo que se recorre es el punto decimal y, en algunos casos, se requiere agregar ceros.

Observe si usan las técnicas formuladas para resolver rápidamente los problemas de la actividad 5 de la sesión 1, y si logran ver que en la actividad 7 de la sesión 1 se puede multiplicar por una potencia de 10 y luego por un dígito.

Apoye a los alumnos para que revisen con detalle las actividades 4 a 7 de la sesión 2, ya que es necesario dejar claro que $0.1 = \frac{1}{10}$ y multiplicar por $\frac{1}{10}$ equivale a obtener la décima parte, es decir, a dividir entre 10. Por otra parte, dividir entre $\frac{1}{10}$ es la operación inversa de multiplicar por $\frac{1}{10}$, por lo tanto, dividir entre $\frac{1}{10}$ equivale a multiplicar por 10.

La unidad cuadrada que se utiliza en la sesión 3 es un buen recurso para que los alumnos vean los tamaños relativos de una unidad, un décimo y un centésimo. Muchos alumnos todavía piensan que $\frac{1}{100}$ es mayor que $\frac{1}{10}$

También ilustra que al multiplicar décimos por décimos se obtienen centésimos, y que al dividir centésimos entre décimos se obtienen décimos.

La propiedad que se ilustra en el segundo recuadro de formalización de la sesión 4 es la misma que permite encontrar fracciones equivalentes; es conveniente establecer esta relación.

En una división, si el dividendo y el divisor se multiplican por el mismo número, el cociente no se altera. Por ejemplo:

$$15 \div 3 = 5;\ (15 \times 4) \div (3 \times 4) = 60 \div 12 = 5;\ (15 \times 10) \div (3 \times 10) = 150 \div 30 = 5.$$

En general, $a \div b = (a \times n) \div (b \times n)$.

Cuando el divisor de una división es un número decimal, es necesario multiplicarlo por 10, 100, 1 000, etcétera, para convertirlo en entero; sin embargo, hay que multiplicar el dividendo por el mismo número para que el cociente no se altere.

Esta propiedad es la que permite convertir el divisor decimal en un número natural para poder hacer la división.

$$\frac{a}{b} = \frac{an}{bn};\ a \div b = an \div bn$$

Pautas para la evaluación formativa

Con la finalidad de verificar en qué medida se va logrando la intención didáctica de esta secuencia, es necesario hacer un registro de lo siguiente.

a) Ante un problema como: "Un kilogramo de tortillas cuesta \$14.50. ¿Cuánto debo pagar por 10 kg?".
   - ¿El alumno es capaz de obtener el resultado inmediatamente?
   - ¿Sucede lo mismo ante un problema que implica dividir un decimal entre una potencia de 10?

b) Ante un problema como: "Javier dio 3.5 vueltas alrededor de una pista de 2.5 km de longitud. ¿Cuántos kilómetros recorrió en total?".
   - ¿El alumno logra obtener y expresar el resultado correcto sin necesidad de usar una calculadora?
   - ¿Sucede lo mismo con un problema que implica dividir entre un decimal? Por ejemplo: "Javier recorrió 8.75 km alrededor de una pista que mide 2.5 km de longitud. ¿Cuántas vueltas dio?".

¿Cómo apoyar?

En la sesión 1, si observa que después de jugar varias rondas con la calculadora una pareja no logra darse cuenta de que basta con agregar ceros, juegue con ellos, use lápiz y papel, y ellos la calculadora. Es muy probable que después de resolver algunas operaciones adopten la técnica y la usen. Si es necesario, haga lo mismo cuando se usen decimales.

Si en la actividad 7 de la sesión 1 los alumnos no logran ver que, por ejemplo, para multiplicar 12.40×15 se puede multiplicar por 10, que da 124, y luego sumar a este resultado la mitad de 124, que es 62, para obtener un total de 186, haga una puesta en común para que usted o algún alumno lo explique.

Si un alumno no logra ver que dividir entre $\frac{1}{10}$ tiene el mismo efecto que multiplicar por 10, use una calculadora y ponga varios ejemplos en los que se multiplique un número natural por 0.1, para que se vea que el resultado siempre es 10 veces mayor.

¿Cómo extender?

En cada sesión proponga una operación y pida que inventen un problema que se pueda resolver con ella. Analicen algunos de los problemas propuestos para ver si son claros, si la pregunta está bien formulada y si tiene una sola respuesta, varias o ninguna.

Secuencia 2 Multiplicación y división de fracciones positivas (LT, págs. 22-31)

Tiempo de realización	5 sesiones
Eje temático	Número, álgebra y variación
Tema	Multiplicación y división
Aprendizaje esperado	Resuelve problemas de multiplicación y división con fracciones y decimales positivos.
Intención didáctica	Que los alumnos desarrollen habilidad para multiplicar y dividir números fraccionarios y sepan usar estas operaciones al resolver problemas.
Materiales	• Juego de geometría • Papel cartulina o cartoncillo
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisuales** • *Una vuelta y media* • *Multiplicar, a veces, también es dividir* **Informático** • *Multiplicar por el recíproco*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recurso audiovisual** • *La multiplicación y división con fracciones y decimales positivos*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Desarrollen una técnica para calcular una fracción de un número natural ($\frac{a}{b}$ de n) y la relacionen con la multiplicación $\frac{a}{b} \times n = n \times \frac{a}{b}$
- Sesión 2. Desarrollen una técnica para averiguar cuántas veces cabe una fracción en un número natural y la relacionen con la división $n \div \frac{a}{b}$
- Sesión 3. Conozcan el significado del factor recíproco y cuál es el efecto que produce en una figura a escala.
- Sesión 4. Desarrollen una técnica para dividir un número natural entre una fracción, o una fracción entre otra fracción, apoyados en la noción de recíproco de un número.
- Sesión 5. Usen las técnicas para multiplicar o dividir números fraccionarios al resolver problemas.

Acerca de...

Ésta es la primera de dos secuencias definidas para estudiar específicamente la multiplicación y división de fracciones. Se inicia con un problema que no resulta extraño para los alumnos. Se trata de una pista de carreras cuya longitud es de 400 m, en la que se requiere calcular la distancia recorrida al dar x cantidad de vueltas. Se pone a los alumnos ante la necesidad de averiguar cuánto es $\frac{a}{b}$ de 400 y, enseguida, este mismo problema se traslada a otras cantidades.

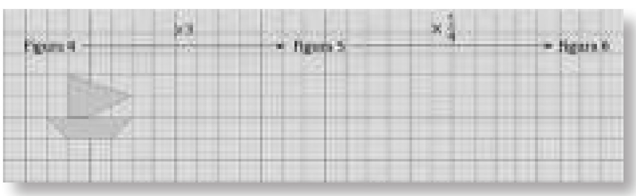
El problema fundamental en esta parte es pasar de la expresión $\frac{a}{b}$ de n a la multiplicación $\frac{a}{b} \times n = n \times \frac{a}{b}$. Es preciso que los alumnos comprendan la relación anterior, pues están acostumbrados a que el resultado de multiplicar dos números naturales es siempre un número mayor que los dos factores: por ejemplo, $5 \times 9 = 45$, que es la traducción de 5 **veces** 9 o 9 **veces** 5; sin embargo, el significado de esta operación cambia en el conjunto de los números racionales, por ejemplo, $\frac{1}{2} \times 4 = 2$, significa $\frac{1}{2}$ *de* 4.

Se continúa con la división de un natural entre una fracción, ante el problema de averiguar cuántas veces cabe una medida en otra. A diferencia de la multiplicación, esta idea sí se vincula directamente con la división de naturales. En este caso, lo que se complica es entender el porqué de la técnica o algoritmo, puesto que no se trata simplemente de decir que se multiplica el primer numerador por el segundo denominador y el primer denominador por el segundo numerador, ni tampoco que se multiplica en cruz sin saber por qué, pues cuando no se comprende por qué se llevan a cabo algunos pasos, fácilmente se olvida el orden en que deben realizarse. Por ello, el recurso que se utiliza para entender la técnica de la división es la noción del recíproco, en el contexto de la construcción de figuras a escala.

Sobre las ideas de los alumnos

Cuando se trata de calcular una fracción unitaria de un número natural, $\frac{1}{b}$ de n, los alumnos no tienen mucha dificultad, basta con dividir n entre b. Sin embargo, cuando se trata de calcular $\frac{a}{b}$ de n muchos alumnos insisten en hacer una sola operación, obtienen $\frac{1}{b}$ de n y se olvidan de multiplicar por a.

Muchos alumnos prefieren ir directamente a la técnica sin entender por qué se aplica de tal o cual manera. El dibujo a escala es un buen recurso para entender que dividir entre $\frac{a}{b}$ equivale a multiplicar por $\frac{b}{a}$, pero hay que destinar el tiempo necesario para que los alumnos hagan los trazos que se requieren y vean lo que pasa con las figuras y con los factores de escala que se utilizan. Tampoco es fácil que noten de inmediato que, por ejemplo, la aplicación de dos factores consecutivos, $\times\ 3$ y $\times\ \frac{1}{4}$ equivalen a la aplicación de un solo factor: $\times\ \frac{3}{4}$



La idea de la multiplicación y la división como operaciones inversas debe cobrar fuerza en esta secuencia. En el contexto del dibujo a escala, la finalidad es que los alumnos vayan de una figura A a una figura B mediante la aplicación de un factor de escala $\times\ \frac{a}{b}$. Al plantear la pregunta: ¿cómo se regresa de la figura B a la figura A?, es importante que verifiquen que eso se logra aplicando a B el factor inverso $\times\ \frac{b}{a}$, lo que equivale a dividir entre $\frac{a}{b}$

¿Qué material se necesita?

Procure que todos los alumnos tengan papel cuadriculado y una regla para el trazo de figuras a escala, así como escuadras y papel cartulina o cartoncillo para trazar las figuras de la sesión 5.

¿Cómo guío el proceso?

Para introducir la secuencia, después de leer la sección "Para empezar", comente brevemente con los alumnos acerca de las pistas de atletismo, si las han visto, si saben cuánto mide una vuelta alrededor de la pista, e inicien la resolución de las actividades. Si observa que algunos alumnos tienen dificultades para llenar la primera tabla, realice uno de los cálculos con la participación del grupo. Por ejemplo, para saber cuántos metros corrió Elena, es necesario que los alumnos tengan claro primero que los 400 m equivalen a $\frac{8}{8}$; después, que dividirán esta cantidad en ocho partes iguales $(400 \div 8 = 50)$ y, finalmente, que de esas ocho partes iguales Elena recorrió cinco; por lo tanto, basta con multiplicar $50 \times 5 = 250$. Para encontrar la cantidad de vueltas, pueden hacerlo por aproximaciones: 400 cabe más de cuatro veces en 1 900 y menos de cinco, de donde $4 \times 400 = 1\,600$; ya sólo faltaría saber cuánto representan los 300 m faltantes. Para eso basta observar que 100 m es la cuarta parte de 400, por lo que 300 equivale a tres cuartas partes. Así, 1 900 equivale a $4\frac{3}{4}$ vueltas.

Respecto a las preguntas que se presentan después de la tabla de la actividad 1 de la sesión 1, hay que verificar, en particular, en el inciso d), si los alumnos identifican la fracción $\frac{7}{10}$ a partir de las operaciones que se hacen.

En la actividad 2 de esta sesión se usa indistintamente la escritura decimal o fraccionaria. Hay que ver si los alumnos logran establecer la equivalencia. Esto se retomará en la última sesión, en la que se vincula la escritura decimal con el porcentaje.

Es probable que en los problemas de la actividad 3 se usen procedimientos diferentes. Por ejemplo, en el inciso a), $\frac{1}{3}$ *de* $24 = 8$; $\frac{1}{4}$ *de* $24 = 6$;

$\frac{3}{8}$ *de* $24 = 9$. Y $8 + 6 + 9 = 23$, entonces, sólo un alumno prefiere natación.

Otro procedimiento es: $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{23}{24}$, entonces, $\frac{1}{24}$, uno de 24 prefiere natación.

En los problemas de división es probable que recurran al valor unitario. Por ejemplo, en la actividad 3 de la sesión 2, para saber cuántas veces cabe $\frac{1}{3}$ de metro en 12 metros, se puede averiguar que en un metro cabe tres veces, por lo tanto, en 12 metros cabe $12 \times 3 = 36$ veces. Ahora bien, si $\frac{1}{3}$ cabe 36 veces, $\frac{2}{3}$, que es el doble de $\frac{1}{3}$, cabe 18 veces.

Al inicio de la sesión 3 conviene aclarar que un factor de escala es un número que multiplica las medidas de los lados de una figura para hacerla más grande o más chica. Procure que sean los propios alumnos quienes concluyan que, si el factor de escala es mayor que 1, la figura se hace más grande; si es menor que 1, se hace más chica, y, si es igual a 1, la figura queda igual.

Sugiérales que, al calcular las medidas con una escala determinada, las expresen como fracciones y no como decimales, ya que algunos de éstos son periódicos.

En la sesión 5, donde deben construir un rompecabezas más grande que el que se muestra, procure que después de que decidan quién hará cada pieza, comenten cómo calcularán las medidas que les tocan. Si les salió mal, no es necesario que usted se los diga, ellos se darán cuenta de que las piezas no embonan y deberán revisar el procedimiento que usaron para calcular las medidas. Es común que su razonamiento sea: "Si la pieza medía 4 y ahora debe medir 5, entonces hay que sumar 1 a cada medida", lo que llevará a que las piezas **no** embonen. Si esto ocurre, pregúnteles qué hicieron en las dos sesiones anteriores para obtener una figura mayor o una menor que la original. Es muy importante hacer una puesta en común de los procedimientos utilizados, pues entre todos se ayudarán a comprender mejor.

Pautas para la evaluación formativa

Con la finalidad de verificar en qué medida se va logrando la intención didáctica que aparece en la ficha descriptiva, y lo que se dice en la sección "¿Qué busco?", es necesario hacer un registro de lo siguiente:

a) Ante un problema como: "Un automóvil da $3\frac{2}{5}$ vueltas alrededor de una pista de 5 km. ¿Qué distancia recorrió el automóvil?".
   - ¿El alumno es capaz de obtener los $\frac{2}{5}$ de 5 para sumarlo a los 15 km de las tres vueltas recorridas?
   - ¿Representa la multiplicación convencional, $3\frac{2}{5} \times 5$, o calcula mentalmente el resultado?

b) Ante un problema como: "¿Cuántos vasos de $\frac{3}{4}$ de litro se pueden llenar con 15 L de agua de naranja?".
   - ¿El alumno es capaz de ver que el problema puede resolverse mediante la división $15 \div \frac{3}{4}$?
   - ¿Es capaz de resolver la división o suma muchas veces $\frac{3}{4}$ hasta completar 15?

c) Ante un problema como: "Si a una figura A se le aplica un factor de escala $\times\ \frac{3}{5}$, para obtener la figura B, ¿cuánto debe medir en la figura B un lado que en la figura A mide $\frac{2}{3}$?".
   - ¿El alumno es capaz de plantear la multiplicación $\frac{3}{5} \times \frac{2}{3}$, resolverla y expresar el resultado?

d) Ante un problema como: "Para obtener la figura B se usó el factor de escala $\times\ \frac{4}{5}$. ¿Cuál es el factor de escala que se debe utilizar para pasar de la figura B a la original?".
   - ¿El alumno responde inmediatamente que se trata del factor recíproco $\frac{5}{4}$?

¿Cómo apoyar?

Si los alumnos no logran resolver problemas como los de la pista de atletismo, sugiérales que dibujen la pista y anoten cuántos metros corresponden a la mitad, la tercera parte, etcétera.

Si no logran resolver problemas de división en los que se trata de averiguar cuántas veces cabe una cantidad en otra, sugiérales que hagan sumas.

Si nota que no entienden los problemas de escala, será necesario calcular las medidas y trazar las figuras para que noten si hubo algún error.

¿Cómo extender?

Utilice variantes en los problemas de escala: que unas veces encuentren las medidas de la figura reproducida; otras, la escala; otras, las medidas originales.

Secuencia 3 Multiplicación de números enteros

(LT, págs. 32-37)

Tiempo de realización	4 sesiones
Eje temático	Número, álgebra y variación
Tema	Multiplicación y división
Aprendizaje esperado	Resuelve problemas de multiplicación y división con números enteros, fracciones y decimales positivos y negativos.
Intención didáctica	Que los alumnos desarrollen habilidad para multiplicar números enteros y usen estas operaciones al resolver problemas.
Materiales	• Papel cuadriculado • Regla • Lápices de colores
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisuales** • *La regla de los signos de la multiplicación de números enteros y el plano cartesiano* • *La regla de los signos de la multiplicación de números enteros* **Informático** • *Multiplicación y división de números con signo*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recurso audiovisual** • *La multiplicación y división con números enteros, fracciones y decimales positivos y negativos* **Bibliografía** • Gallardo, Aurora y Abraham Hernández (s.f.). "Emergencia de los números enteros". Disponible en http://www.matedu.cinvestav.mx/~maestriaedu/docs/asig5/Agallardo.pdf (Consultado el 17 de julio de 2019).

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Extiendan el concepto de multiplicación de números naturales como una suma de sumandos repetidos para obtener el producto de números enteros.
- Sesión 2. Reconozcan los argumentos para determinar que el producto de un número entero positivo por uno negativo es un número entero negativo.
- Sesión 3. Comprendan la regla de los signos de la multiplicación de números enteros al graficar los valores de y cuando se tiene una relación de la forma $y = mx$.
- Sesión 4. Apliquen la regla de los signos de la multiplicación de números enteros en diferentes situaciones.

Acerca de...

Esta es la primera de dos secuencias definidas para estudiar específicamente la multiplicación y división de números enteros, y es la primera de tres secuencias que se definen para el logro del aprendizaje esperado: resuelve problemas de multiplicación y división con números enteros, fracciones y decimales positivos y negativos.

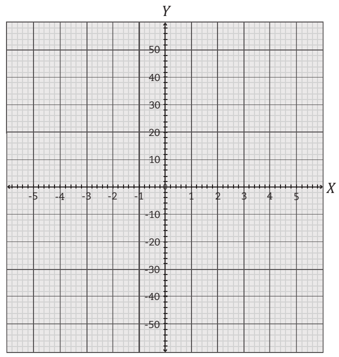
El estudio de esta secuencia se centra en la multiplicación de números enteros e inicia con una situación que puede facilitar la comprensión de la regla de los signos en la multiplicación de números enteros.

Posteriormente se recurre a la observación y análisis del patrón que siguen algunas multiplicaciones en las que deberán encontrar el factor que se desconoce o incluso la multiplicación que falta para completar la sucesión con la finalidad de que lleguen a la regla de los signos. Más adelante ubicarán los puntos que corresponden a una relación lineal de la forma $y = mx$, en la que a partir del valor que tome m y dando a x valores enteros positivos y negativos, se obtiene el valor de y.

En las sesiones 3 y 4 se incluye la representación gráfica y tabular de multiplicaciones que se pueden asociar a situaciones de relación funcional lineal estudiadas en primer grado, como una forma más de dar significado a la multiplicación de números enteros y, en particular, a la regla de los signos. A partir de la visualización y el análisis de la recta, se espera que los alumnos comprendan qué sucede con la multiplicación de números enteros y cuál es el valor del producto, pretendiendo que los alumnos puedan comprender y aplicar las reglas de los signos de la multiplicación de una manera no memorística.

1. Reúnete con un compañero y completen la siguiente tabla.

x	4	3	2	1	0	–1	–2	–3	–4
y = –6*x*									



a) ¿Cuál es la operación que se realiza entre –6 y *x*? ________________________

b) Si el valor de *x* = 3, y se sustituye en la expresión *y* = –6*x*, ¿qué valor tiene *y*? ____________

c) Dibujen en el plano cartesiano los puntos de coordenadas (*x*, *y*) correspondientes a esta tabla.

d) Si *x* = 5, ¿cuánto vale *y*? ____________

¿Cómo pueden comprobar que el resultado es correcto? ________________________

____

¿Qué material se necesita?

Hojas de papel cuadriculado, una regla y lápices de colores para la ubicación y reconocimiento de los puntos y el trazo de las rectas propuestas en la sesión 3.

En la sesión 2, se sugiere ver el informático *Multiplicación y división de números con signo*. En la sesión 3 es importante que cuando vean el audiovisual *La regla de los signos de la multiplicación de números enteros y el plano cartesiano*, tracen alguna de las gráficas que se presenten.

En la sesión 4, se sugiere utilizar el audiovisual *La regla de los signos de la multiplicación de números enteros*, con el fin de practicar la multiplicación de enteros.

De ser posible, se recomienda ver el audiovisual para el maestro, en el que conocerá parte de la historia de los números enteros y sus operaciones, con lo cual se pretende analizar algunos aspectos que es necesario considerar en el estudio de este contenido.

¿Cómo guío el proceso?

Es conveniente que usted observe previamente el audiovisual *La multiplicación y división con números enteros, fracciones y decimales positivos y negativos* para que tenga mayor información acerca del origen y desarrollo de este conjunto de números. Después de que los alumnos lean la sección "Para empezar", comente brevemente con ellos acerca del origen de los números enteros y sus operaciones. Con las actividades de la sesión 1 se espera que los alumnos observen a la multiplicación de los números enteros como una extensión de la multiplicación de los números naturales, como en el caso de las multiplicaciones:

$$4 \times (-2),\ 4 \times (-3) \text{ y } 4 \times (-4).$$

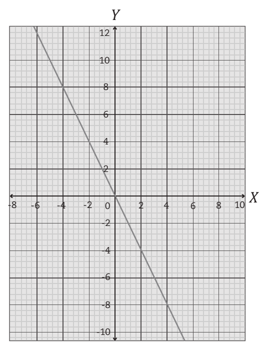
Con las actividades de la sesión 2 se espera que los alumnos observen que al multiplicar un número entero negativo por un número entero positivo su producto es negativo, independientemente de la posición del factor negativo. Desde el punto 3 de esta sesión es importante la reflexión que hagan los alumnos acerca de que un factor se conserva y va disminuyendo de uno en uno convirtiéndose después del cero en un número negativo y que, al contrario de lo que ahí sucede, el producto va creciendo hasta convertirse en número positivo. Esto es una forma de razonar el resultado de multiplicar números con signo (regla de los signos).

Al hacer la representación gráfica de la expresión $y = -6x$ en la sesión 3, se pretende que observen que los resultados de la tabla son correctos si los puntos obtenidos generan una recta que pasa por el origen. Con base en esto, se puede responder el inciso f).

En la actividad 3, es probable que los alumnos usen sólo valores positivos para x, de 0 a 5 o de 1 a 6. En caso de ocurrir así, señale que también deben considerar valores negativos e incluso, si los propusiera, pida que realicen la gráfica en su cuaderno y que consideren valores como −10, −20 o mayores con la idea de observar la regularidad.

Recuerde que deben ser los propios alumnos quienes den sus descripciones y conclusiones.

3. Observen la siguiente gráfica y completen la tabla.



x	$y =$ ______

Pautas para la evaluación formativa

Con la finalidad de apreciar en qué medida se va logrando la intención didáctica es conveniente que centre su atención en lo siguiente:

a) Ante la solicitud de expresar la multiplicación que representa la situación de Joel, ¿el alumno puede expresar el puntaje de las primeras tres rondas, es decir, $3 \times (-4)$?

b) Ante la solicitud de completar una tabla puede apreciar, por ejemplo, si el alumno identifica que los factores son negativos.

c) Ante una situación como: "Sobre el mismo plano cartesiano ubiquen los puntos de $y = 2x$ para: $x = 2$; $x = 4$; $x = -2$; $x = -4$".

¿El alumno contesta que el producto será positivo para los valores positivos de x y negativo cuando x tiene valores negativos?

¿Pasará o no por el origen la recta que tracen? ¿Por cuáles cuadrantes del plano cartesiano pasará?

d) Ante un problema como: "Cada semana Ana retira \$ 200.00 del banco durante 4 semanas, ¿cuánto dinero se retira en total?", revisar si el alumno puede expresar esa situación con la operación correspondiente o si recurre a otra estrategia. ¿Puede determinar el signo del producto?

¿Cómo apoyar?

Recuerde que esta secuencia presenta la dificultad de encontrar la relación entre los signos de los factores y el resultado de la multiplicación. Así, ante la situación: "Encontrar cinco pares de números que multiplicados den -12", aunque los alumnos ya conocen varias relaciones que se aplican en la multiplicación entre números naturales, se encontrarán con la problemática de la multiplicación de un número negativo por otro número positivo, o de dos números negativos. Algunos alumnos se apoyan en uno de los modos en los cuales se ha tratado la multiplicación con los números naturales y en las primeras dos sesiones de esta secuencia. Por ejemplo, recordando que 4×3 se define como la suma $3 + 3 + 3 + 3 = 12$ y entonces propongan 4 y (-3) como uno de los pares posibles puesto que $4 \times (-3) = (-3) + (-3) + (-3) + (-3) = -12$.

Es importante alentar este uso natural de la multiplicación, en este caso sin necesidad de explicitar que se trata de una extensión de la multiplicación ya definida en los números naturales.

5. Escribe los resultados que faltan.

4(−6) =	4(−10) =	(−16) (−4) =
3(−6) =	3(−10) =	(−16) (−3) =
2(−6) =	2(−10) =	(−16) (−2) =
1(−6) =	1(−10) =	(−16) (−1) =
0(−6) =	0(−10) =	(−16)0 =
(−1) (−6) =	(−1) (−10) =	(−16)1 =
(−2) (−6) =	(−2) (−10) =	(−16)2 =
(−3) (−6) =	(−3) (−10) =	(−16)3 =
(−4) (−6) =	(−4) (−10) =	(−16)4 =

Secuencia 4 Proporcionalidad directa e inversa

(LT, págs. 38-45)

Tiempo de realización	4 sesiones
Eje temático	Número, álgebra y variación
Tema	Proporcionalidad
Aprendizaje esperado	Resuelve problemas de proporcionalidad directa e inversa y de reparto proporcional.
Intención didáctica	Que el alumno distinga relaciones que no son de proporcionalidad de las que sí lo son, y entre éstas distinga las que son de proporcionalidad directa de las que son de proporcionalidad inversa.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisuales** • *Tablas de proporcionalidad* • *La proporcionalidad en la vida cotidiana* **Informáticos** • *Para completar tablas* • *Problemas de proporcionalidad directa e inversa*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recurso audiovisual** • *La proporcionalidad directa e inversa y el reparto proporcional* **Bibliografía** • Secretaría de Educación Pública (2018). *Matemáticas. Primer grado. Libro para el maestro. Telesecundaria,* México, SEP, pp. 49-51.

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Reconozcan algunas características que distinguen a las tablas de proporcionalidad directa de las tablas de proporcionalidad inversa.
- Sesión 2. Identifiquen cocientes constantes en tablas de proporcionalidad directa y productos constantes en tablas de proporcionalidad inversa.
- Sesión 3. Distingan tablas que no representan una relación de proporcionalidad de otras que sí representan una relación proporcional directa y una inversa.
- Sesión 4. Resuelvan problemas de valor faltante cuya resolución requiere identificar el tipo de relación implícita (proporcionalidad directa o inversa).

Acerca de...

En primaria y en primer grado de secundaria los alumnos resolvieron problemas de proporcionalidad directa e identificaron tablas donde las cantidades involucradas tienen esta relación. En segundo grado seguirán desarrollando su razonamiento proporcional al continuar el estudio de la proporcionalidad directa e iniciar con la proporcionalidad inversa.

Es importante mencionar que, al abordar problemas de proporcionalidad, los estudiantes tienen que:

- Reconocer las magnitudes implicadas en la situación planteada.
- Establecer la relación entre ellas: si una aumenta, la otra también, o si una aumenta, la otra disminuye.
- Identificar si estos aumentos o disminuciones se hacen de manera proporcional.

- Identificar la constante de proporcionalidad (cocientes constantes o productos constantes). Recurrir a tablas en esta secuencia es una forma de apoyar los aspectos anteriores.

Sobre las ideas de los alumnos

Es muy probable que los alumnos consideren que una situación determinada representa una relación de proporcionalidad si se suma o resta una cantidad (razonamiento aditivo). Un ejemplo de este tipo de razonamiento puede darse en la tabla 3 de la sesión 1 porque las cantidades disminuyen de 50 en 50; sin embargo, será necesario ayudarles a recordar a qué se le llama relación de proporcionalidad.

También es común que una vez que los alumnos aprenden a resolver problemas de proporcionalidad, generalicen erróneamente la aplicación de los procedimientos (por ejemplo, la regla de tres) para resolver otro tipo de problemas en los que no son útiles. Con el propósito de que los alumnos corrijan estos errores, a lo largo de la secuencia se introducen situaciones que no son de proporcionalidad.

¿Cómo guío el proceso?

Permita que los alumnos resuelvan los problemas con los procedimientos que elijan; puede ser de utilidad para usted consultar lo que se dice acerca de los posibles procedimientos en los problemas de proporcionalidad directa en la secuencia 7 "Variación proporcional directa 1" del libro para el maestro de primer grado.

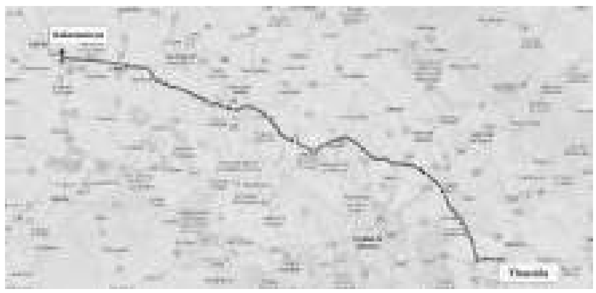
Respecto a la proporcionalidad inversa, se espera que lo primero que noten los alumnos sean las relaciones inversas entre las magnitudes de la situación, por ejemplo:

- Al aumentar los minutos de ducha, disminuye el número de duchas para las que alcanza el agua del tinaco (sesión 1, tabla 2).
- Al aumentar la velocidad, disminuye el tiempo del recorrido (sesión 2, tabla 5).
- Para mantener el área constante del rectángulo, al aumentar el largo disminuye el ancho (sesión 3, tabla 7).

Es importante que identifiquen también que esta variación inversa es proporcional. Es decir, que si en estas relaciones una cantidad aumenta al doble, la otra disminuye a la mitad, o si aumenta al triple, la otra disminuye a la tercera parte, etcétera, por ejemplo:

- Si las duchas duran 5 minutos, el agua del tinaco alcanza para 6 duchas; entonces, si duran 10 minutos, alcanzará para 3 duchas. También es importante que observen que entre los datos de este problema está la cantidad promedio de agua que se gasta por minuto para bañarse.
- En el caso del primer problema de la sesión 2, la constante es la distancia que debe recorrer Raúl, así que si el auto va a 50 km/h tardará 8 horas, pero si aumenta al doble la velocidad (100 km/h), entonces disminuirá el tiempo a la mitad (4 horas).

De viaje



1. Trabajen en pareja para resolver los siguientes ejercicios. El señor Raúl viajará de Tlaxcala a Salamanca. La distancia que va a manejar es de aproximadamente 400 kilómetros. Completen las siguientes tablas.

- En la tabla 7 de la sesión 3, la constante es el área que debe tener el jardín, por lo que deberán observar que si tiene 3 m de largo, deberá tener 20 m de ancho, y que si el largo se duplica (6 m), entonces el ancho disminuye a la mitad (10 m). Oriente a los alumnos para que noten estas relaciones.

El reconocimiento del producto constante en la proporcionalidad inversa es la base para determinar los valores faltantes. Se espera que los alumnos descubran los productos constantes desde el trabajo que se realiza en la actividad 2 de la sesión 1 (condición 6 de la tabla); enfatice esta particularidad en la puesta en común al final de la sesión 1 y pida que la comprueben en cada una de las tablas de variación que trabajen.

Una vez que reconocen el producto constante en una tabla de variación inversamente proporcional, pueden completar los valores faltantes planteando en forma verbal una ecuación, por ejemplo, en la tabla 7 de la sesión 3, ¿qué número debemos multiplicar por 4 para que nos dé 60?, o también se puede plantear de la siguiente manera: $4x = 60$.

En todo momento puede permitir el uso de la calculadora, debido a que lo importante en esta secuencia es el razonamiento proporcional y no necesariamente la operatoria.

En el primer problema de la sesión 4, es probable que los alumnos quieran apoyarse en una tabla. Si es así, déjelos que la elaboren. Al finalizar pregunte quiénes usaron alguna otra estrategia para responder y pida que la compartan con el grupo.

1. Con dos compañeros forma un equipo para resolver los siguientes problemas. Un automóvil va a la velocidad que se indica en la imagen. Si mantiene esa velocidad promedio:

a) ¿En cuánto tiempo recorrerá 500 km? ______

b) ¿Qué distancia habrá recorrido en 3 horas y cuarto? ______

c) Si su velocidad promedio aumenta 10 km/h, ¿en cuánto tiempo recorrerá los mismos 500 km? ______

El problema 2 de esta sesión puede pensarse de diferentes formas. Por ejemplo, usar 10 500 m como longitud de circuito y calcular cuántos metros representan la cuarta parte del circuito (2 625 m); así se tiene que $1\frac{1}{4}$ vueltas equivale a sumar $10\,500 + 2\,625 = 13\,125$ m, que en kilómetros son 13.125

Otra forma es pensar en multiplicar directamente las dos cantidades involucradas (longitud del circuito y número de vueltas):

$$10\frac{1}{2} \times 1\frac{1}{4} = \frac{21}{2} \times \frac{5}{4} = \frac{105}{8} = 13\frac{1}{8}$$

Si los alumnos no recurren a este procedimiento, es conveniente mostrárselo y que revisen la equivalencia en metros de las cantidades obtenidas como fracción.

Pautas para la evaluación formativa

Observe el trabajo de los alumnos para detectar si logran:

- Identificar las magnitudes involucradas en las situaciones (duchas-litros, velocidad-tiempo, etcétera).
- Establecer el tipo de variación: directa o inversa (si una aumenta, la otra también en la misma proporción; si una aumenta, la otra disminuye).
- Establecer si hay o no proporcionalidad en la variación: si una cantidad aumenta (o disminuye) n veces, la otra también disminuye (o aumenta) n veces. Esto es, hay un factor interno entre las cantidades.
- Aplicar algún procedimiento para calcular los valores faltantes, como multiplicar o dividir los valores conocidos, de acuerdo con el tipo de variación que se presenta.

¿Cómo apoyar?

Para que los alumnos identifiquen el tipo de variación (directa o inversa), puede plantear preguntas como: si aumenta la velocidad, ¿el tiempo del recorrido aumenta o disminuye?

Si lo que desea es que determinen si es proporcional, puede hacer que los alumnos noten: si el largo aumenta al doble, ¿el ancho disminuye a la mitad?

Cuando la dificultad esté en los cálculos, puede trabajar con los alumnos primero cantidades menores a las mencionadas en las sesiones y con relaciones mitad-doble, tercio-triple, cuarta parte-cuádruple, décima parte-diez veces, que intuitivamente los alumnos comprenden mejor.

¿Cómo extender?

Puede variar las cantidades en las situaciones, por ejemplo, proponer fracciones y decimales dentro del mismo problema.

Secuencia 5 Sistemas de ecuaciones 2 × 2. Método gráfico (LT, págs. 46-53)

Tiempo de realización	4 sesiones
Eje temático	Número, álgebra y variación
Tema	Ecuaciones
Aprendizaje esperado	Resuelve problemas mediante la formulación y solución algebraica de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.
Intención didáctica	Que los alumnos resuelvan situaciones que requieran el planteamiento de un sistema de ecuaciones y utilice el método gráfico para encontrar su solución.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisuales** • *¿Qué es un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas?* • *Método gráfico* **Informático** • *Solución de un sistema de ecuaciones como intersección de rectas*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recurso audiovisual** • *Métodos de resolución de sistemas de ecuaciones 2 × 2* **Bibliografía** • Secretaría de Educación Pública (2017). "Multiplicación y división", en *Aprendizajes clave para la educación integral. Plan y programas de estudio para la educación básica*, México. SEP. Disponible en https://www.aprendizajesclave.sep.gob.mx/sec-ae-pensamiento-mate2.html (Consultado el 17 de julio de 2019). • Khan Academy (2019). *Resolución de sistemas de ecuaciones por medio de gráficas*. Disponible en https://es.khanacademy.org/math/cc-eighth-grade-math/cc-8th-systems-topic/cc-8th-systems-graphically/v/solving-linear-systems-by-graphing (Consultado el 17 de julio de 2019).

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Retomen conocimientos acerca de la resolución de ecuaciones del tipo $ax + b = c$, a fin de que sirvan de base para la resolución de sistemas de ecuaciones.
- Sesión 2. Reconozcan situaciones que originan el planteamiento de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y que sepan expresar el sistema.
- Sesión 3. Conozcan y utilicen el método gráfico para la resolución de un sistema de ecuaciones lineales.
- Sesión 4. Resuelvan problemas donde apliquen el método gráfico en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

Acerca de...

En primer grado los alumnos iniciaron el estudio del álgebra y ya han resuelto ecuaciones del tipo $ax + b = c$. En esta secuencia se continúa el trabajo con el tema de ecuaciones, ahora con problemas que implican el planteamiento de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, conocidas también como sistemas de ecuaciones 2×2. Resolver estos sistemas implica, por una parte, reconocer que en el problema hay dos incógnitas y que cada una debe representarse con una literal diferente. Por otra parte, también es necesario reconocer la relación entre las incógnitas para establecer el sistema y que los valores que se obtengan satisfagan ambas ecuaciones.

Desde primer grado los alumnos saben que las incógnitas de un problema se representan con letras (literales). Aquí observarán que se usan con mayor frecuencia la x y la y. El método de solución de un sistema de ecuaciones lineales que se aborda en esta secuencia es el gráfico.

Sobre las ideas de los alumnos

Puesto que aquí empieza el estudio de los sistemas de ecuaciones, es necesario retomar el trabajo sobre ecuaciones lineales que los estudiantes vieron en primer grado y las ideas que sobre este tema construyeron. Sin embargo, deberán tener claridad sobre las diferencias entre esos problemas y los que estudiarán aquí, a fin de que no crean que estas ecuaciones se resuelven con el planteamiento de una sola ecuación, sin reparar que en el problema hay dos incógnitas y que una sola ecuación con dos incógnitas no les permitirá solucionar el problema. Los alumnos también suelen creer que siempre que se tiene una ecuación con una incógnita se debe obtener una solución, por lo que será necesario destacar que el sistema puede tener una solución, un número infinito de soluciones o no tener solución.

¿Cómo guío el proceso?

En la sesión 1, los alumnos tendrán que resolver un problema a través de una ecuación del tipo $ax + b = c$. La actividad puede servir como diagnóstico para detectar algunas dificultades en el planteamiento, escritura, interpretación y resolución de ecuaciones. Incluso da pie para recordar las propiedades de la igualdad estudiadas en primer grado con el recurso de la balanza.

En la sesión 2 se plantea un problema y una serie de preguntas para que los alumnos aprendan a identificar las incógnitas y a plantear las dos ecuaciones del sistema; también deberán observar que cada ecuación relaciona los datos del problema. Por ejemplo, la primera ecuación ($x + y = 50$) relaciona la cantidad de niños y adultos que asistieron, y la segunda ($10x + 20y = 8$), relaciona el precio del boleto por niño, el precio del boleto por adulto y la cantidad reunida.

La sesión 3 introduce el método gráfico como una forma de resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. El primer paso consiste en despejar la misma incógnita en ambas ecuaciones. El uso de las tablas permite determinar los valores que después se usarán para ubicar los puntos de la gráfica. Es importante señalar que los valores que se dan a una de las variables son arbitrarios (variable independiente) y se piensan en función del contexto del problema; los valores que se obtienen al sustituirlos en la ecuación despejada y hacer las operaciones correspondientes permiten conocer el valor de la otra variable (variable dependiente).

Para resolver el sistema

1. Trabajen en pareja para encontrar la solución del sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas de la actividad 5 de la sesión 2.

Ecuación 1: $x + y = 500$
Ecuación 2: $10x + 20y = 8000$

Donde las incógnitas son ______ y ______, y representan: ______

a) Hagan una estimación de la solución del problema, ¿cuántos niños y cuántos adultos consideran que fueron a la exposición? ______
b) ¿En qué se basa su estimación? ______
c) ¿Piensan que el valor de x y y puede ser un número decimal? Discutan en grupo y con el maestro sus ideas.

En este caso se puede permitir el uso de la calculadora, pues el énfasis está en obtener los valores faltantes y no en la operatividad.

Una vez que se tienen en cada tabla los valores de las dos columnas, se ubican los puntos (x, y) en el plano cartesiano y el resultado es una recta para cada tabla.

En el problema planteado por la exposición de artesanos, las dos rectas se intersecan (cortan) en un punto cuyas coordenadas son la solución del sistema: $x, y = 200, 300$. Es necesario que los alumnos se acostumbren a comprobar los valores en ambas ecuaciones, pues llega a suceder que se obtienen valores que hacen verdadera una ecuación, pero no la otra.

Hecho esto, es necesario interpretar los datos en función del contexto del problema: ¿qué representa x?, ¿qué representa y?, ¿cómo responden estos valores al problema?

Usted puede hacerlos reflexionar al respecto preguntando, por ejemplo: ¿piensan que el valor de x y y puede ser un número decimal? ¿Por qué?

La actividad 6 permitirá que los alumnos descubran que algunos sistemas de ecuaciones pueden tener una solución, un número infinito de soluciones o no tener ninguna. Al intentar resolverlas, se darán cuenta de que hay sistemas que no tienen solución, como es el caso del sistema de ecuaciones II:

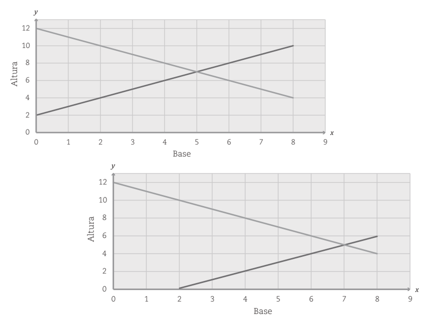
$$2x + y = 4$$
$$2x + y = 1$$

ya que representan rectas que son paralelas y nunca se cortarán; o, en el caso del sistema de ecuaciones III:

$$2x + y = 4$$
$$4x + 2y = 8$$

que tiene una infinidad de soluciones porque ambas ecuaciones representan la misma recta. Otra forma de interpretarlo consiste en decir que estas rectas se intersecan infinidad de veces, esto es, que el sistema tiene un número infinito de soluciones.

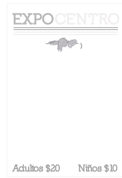
En la sesión 4, el estudiante resolverá otros problemas en los que tiene que plantear o analizar el sistema de ecuaciones que lo resuelve, así como la gráfica que le permitirá encontrar la solución del problema.


b) Encierren con un óvalo la gráfica que corresponde al sistema de ecuaciones correcto.

Pautas para la evaluación formativa

En el desarrollo de esta secuencia hay varios aspectos importantes a los cuales se debe poner atención:

- En la primera sesión conviene observar las habilidades de los alumnos para plantear ecuaciones de primer grado al traducir del lenguaje común al lenguaje algebraico, así como para operar algebraicamente y obtener el valor de la incógnita.
- En la segunda sesión es conveniente evaluar si los alumnos reconocen las incógnitas del problema y traducen del lenguaje común al lenguaje algebraico las condiciones del problema para plantear las dos ecuaciones que formarán el sistema.



1. En parejas resuelvan el siguiente problema. En una exposición para apoyar a los artesanos de Michoacán se vendieron 500 boletos, incluidos niños y adultos. Para entrar, los niños pagaron \$10 y los adultos \$20. Se obtuvo una venta por los boletos de \$8 000 pesos. ¿Cuántos niños y cuántos adultos asistieron a la exposición? Para resolver este problema contesten en su cuaderno la siguiente pregunta.
   a) ¿Cuántas y cuáles son las cantidades que se desconocen en el problema, es decir, las incógnitas del problema?
   b) Representen con las literales *x* y *y* esas incógnitas, y mencionen qué representa cada una.

Incógnita	¿Qué representa?
x	
y	

- En la tercera y cuarta sesiones conviene verificar la comprensión del método gráfico para resolver el sistema observando si los valores que asignen los alumnos a las variables dependientes tienen lógica de acuerdo con el sistema que tabulan, así como la relación de los valores de la tabla con los puntos de la gráfica. Finalmente, hay que ver cómo interpretan la solución del sistema en el contexto del problema.

¿Cómo apoyar?

Si observa que a algunos estudiantes se les dificulta plantear las ecuaciones, es decir, traducir del lenguaje común al algebraico, apóyelos analizando con ellos el texto del problema y luego modelando el planteamiento de la ecuación para que identifiquen qué partes están bien representadas.

Si los estudiantes no consiguen elaborar la gráfica, puede apoyarlos trazando usted la gráfica en el pizarrón, al mismo tiempo que ellos la hacen en su libro o cuaderno.

¿Cómo extender?

Presente a los estudiantes más problemas que impliquen el planteamiento de un sistema de ecuaciones. Cada vez, permita que vayan esbozando el sistema y elaborando las gráficas con menos ayuda. Al final de cada problema pida a los estudiantes que interpreten la respuesta con base en el contexto del problema, es decir, qué significan los valores obtenidos para las incógnitas en la situación dada.

También puede darles un sistema de ecuaciones y que ellos piensen en una situación que podría representar dicho sistema.

Secuencia 6 Sucesiones y expresiones equivalentes 1 (LT, págs. 54-59)

Tiempo de realización	3 sesiones
Eje temático	Número, álgebra y variación
Tema	Patrones, figuras geométricas y expresiones equivalentes
Aprendizaje esperado	Verifica algebraicamente la equivalencia de expresiones de primer grado formuladas a partir de sucesiones.
Intención didáctica	Que los alumnos comprendan que dos expresiones pueden escribirse de manera diferente y ser equivalentes cuando representan la misma situación.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisuales** • *Expresiones algebraicas equivalentes* • *Operaciones algebraicas*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recurso audiovisual** • *Sucesiones numéricas y expresiones equivalentes* **Bibliografía** • Matesfacil. *Progresiones o sucesiones*. Disponible en https://www.matesfacil.com/ESO/progresiones/ejercicios-resueltos-sucesiones.html (Consultado el 17 de julio de 2019). • Secretaría de Educación Pública (2001). *Libro para el maestro*. *Educación Secundaria*. *Matemáticas*, México, SEP, pp. 154-157.

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Encuentren la regla que sigue una sucesión de números y la representen con una expresión algebraica. También encuentren expresiones algebraicas equivalentes a partir de otras dadas previamente.
- Sesión 2. Determinen si dos expresiones algebraicas son equivalentes y argumenten por qué.
- Sesión 3. Encuentren la regla de sucesiones numéricas, propongan expresiones algebraicas equivalentes y verifiquen que sí lo son.

Acerca de...

En primer grado, los alumnos iniciaron el estudio del álgebra y trabajaron con sucesiones sencillas de números para observar las regularidades o patrones que siguen, a fin de obtener la regla algebraica que las origina.

En esta secuencia se continúa trabajando el tema de patrones en sucesiones numéricas, no sólo para analizar las regularidades y encontrar la regla, sino para trabajar la equivalencia de expresiones algebraicas con base en que las distintas expresiones algebraicas pueden representar la misma sucesión.

Sobre las ideas de los alumnos

Es importante considerar que esta secuencia es la primera del segundo grado que aborda el tema de expresiones equivalentes a partir de sucesiones numéricas. Por ello, se inicia con la representación del patrón que subyace a una sucesión y la forma en que se obtiene cualquiera de sus elementos. Es probable que los estudiantes tengan algunas dificultades para representar la regla con una expresión algebraica (si esto sucede, será necesario dar un espacio para volver a trabajar esto en el grupo); sin embargo, no se debe perder de vista el propósito fundamental de esta secuencia: comprender la equivalencia de expresiones algebraicas.

¿Cómo guío el proceso?

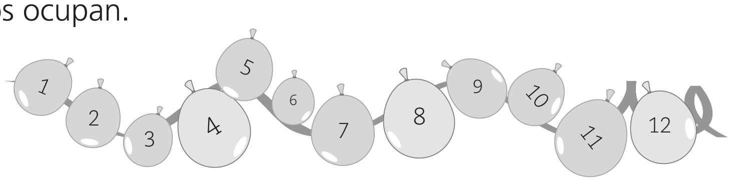
Gran parte de la primera sesión retoma el trabajo realizado en primer grado acerca de reconocer la regularidad en una sucesión y expresarla en forma algebraica. Así, en el punto 2, los alumnos tendrán que encontrar una expresión algebraica que dé lugar a la sucesión de números que corresponden a los globos azules (4, 8, 12, 16, etcétera); en este caso es $4n$ (donde n representa el lugar que le corresponde a cada globo azul). Esta sucesión se representa en la tabla del punto 4.

Es importante que los alumnos no confundan el lugar que corresponde a cada globo azul con el número que tiene en la hilera de globos. En la hilera tiene el 4, pero ocupa el lugar 1 entre los globos azules; el que tiene el 8 es el segundo de los globos azules, y así sucesivamente.

Al final se presenta una serie de expresiones para que los estudiantes identifiquen con cuáles se genera la misma sucesión. Por el formato de la tabla, es de esperar que los estudiantes sustituyan n dando los valores del 1 a 6 de acuerdo con la tabla y observen la sucesión que se forma. En esta primera actividad verán que, aunque algunas expresiones algebraicas estén escritas de diferente forma, generan la misma sucesión.

2. Reúnete con un compañero para realizar las siguientes actividades de esta secuencia.

En lugar de globos azules, Adriana y Paola utilizan números para designar el lugar que aquéllos ocupan.



a) ¿Cuál es la sucesión que se obtiene con los números de los globos azules? ____________

____

b) Escriban en su cuaderno una expresión algebraica que represente la sucesión.

En la sesión 2 se presenta una sucesión de números y se proponen cuatro expresiones algebraicas para que identifiquen la que corresponde a la sucesión.

Los alumnos no sólo tienen que reconocer y argumentar cuál es la correcta, sino decir también por qué las otras no lo son. Este puede ser un buen momento para trabajar con ellos algunas reglas de escritura y de operaciones algebraicas. Por ejemplo, una vez que los estudiantes hayan encontrado la respuesta correcta y hayan dado argumentos, se les puede explicar que la expresión $3(n+1)$ representa una multiplicación, donde el 3 multiplica todos los términos que están dentro del paréntesis, de donde se tiene que la expresión a la izquierda de signo igual es equivalente a la expresión de la derecha.

$$3(n + 1) = 3n + 3$$

Las actividades 2 y 3 también intentan hacer que los alumnos reconozcan diferentes expresiones que den lugar a la sucesión de números propuesta, por lo que el énfasis tiene que estar en las expresiones equivalentes y no en encontrar el patrón de la sucesión.

3. Trabajen en pareja las actividades de esta sesión. Encuentren la regla de la siguiente sucesión de números.

Términos de la sucesión	–10	–8	–6	–4						
Posición que ocupa el término en la sucesión	1	2	3	4	5	6	7	8	9	n

La sesión 3 propone actividades que buscan consolidar las reglas de escritura algebraica. Se inicia presentando un audiovisual que refuerza este aspecto. Enseguida, se sugiere revisar la actividad 2 de manera grupal, puesto que se dan algunos ejemplos que permiten analizar las propiedades de la igualdad y otras que pertenecen a las operaciones básicas. Es necesario comentar que no se trata de dejar a un lado el contenido principal de la secuencia para estudiar las propiedades de las operaciones y de la igualdad, sino de observarlas en la obtención de expresiones equivalentes. Por ejemplo, cuando algunos alumnos escriben $5mn$ y otros $5nm$, deberán saber que en ambos casos el producto es el mismo y las expresiones son equivalentes. Para comprobarlo, se dan valores arbitrarios a las literales y se realizan las operaciones correspondientes. Este trabajo ayudará a los estudiantes a realizar las transformaciones de expresiones algebraicas equivalentes que se proponen en actividades posteriores.

Pautas para la evaluación formativa

En este trabajo será conveniente poner atención a los siguientes aspectos:

- La habilidad para reconocer la regularidad o patrón de una sucesión de números y para expresarla algebraicamente.
- La argumentación que den al señalar que dos expresiones son equivalentes. Dicha argumentación se puede basar, en este momento, en mostrar que al sustituir las literales por un valor cualquiera, se obtiene el mismo resultado en ambas expresiones.
- El manejo de la operatividad algebraica que iniciaron desde primer grado, pero que aquí estarán aplicando continuamente.

¿Cómo apoyar?

Si observa que algunos estudiantes tienen problemas en reconocer las regularidades de las sucesiones y en expresar la regla algebraicamente, apóyelos mediante preguntas como: ¿qué le tengo que hacer al número ___ (sumar, restar, multiplicar) para obtener el número ___?

También aproveche las veces que crea conveniente el trabajo con expresiones algebraicas, las reglas para escribir y operar algebraicamente; por ejemplo, las distintas formas en que puede representarse una multiplicación: $a \times a$; $(a)(a)$; $a\,a$; $a \cdot a$.

6. Encuentren dos expresiones algebraicas equivalentes para las siguientes sucesiones de números o expresiones algebraicas.

Sucesión	Expresiones algebraicas equivalentes	
	1	2
10, 18, 26, 34, …		
70, 64, 58, 52, …		
–4, 0, 4, 8, …		
–24, –27, –30, –33, …		
$(9n - 5) + (3n + 1)$		
$(3n - 4) - (n - 2)$		

¿Cómo extender?

Presente a los estudiantes más sucesiones de números que impliquen números negativos, decimales o fracciones sencillas. También puede darles una expresión algebraica que represente una sucesión y pedir que la anoten, así como otra expresión que sea equivalente a la ya dada.

Secuencia 7 Figuras geométricas y equivalencia de expresiones 1 (LT, págs. 60-65)

Tiempo de realización	3 sesiones
Eje temático	Número, álgebra y variación
Tema	Patrones, figuras geométricas y expresiones equivalentes
Aprendizaje esperado	Formula expresiones de primer grado para representar propiedades (perímetros y áreas) de figuras geométricas y verifica equivalencia de expresiones, tanto algebraica como geométricamente (análisis de las figuras).
Intención didáctica	Que los alumnos desarrollen la habilidad de generalizar procedimientos utilizando el lenguaje algebraico para formular expresiones equivalentes con las que puedan calcular el perímetro y el área de figuras geométricas básicas.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisual** • *Figuras geométricas y expresiones equivalentes* **Informático** • *Expresiones equivalentes 1*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recurso audiovisual** • *Expresiones de primer grado para representar propiedades de figuras geométricas y equivalencia de expresiones*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Logren un acercamiento intuitivo y geométrico al concepto de equivalencia de expresiones algebraicas valiéndose del perímetro y el área de figuras geométricas. Asimismo, que conozcan que una manera de verificar la equivalencia entre dos expresiones algebraicas es asignar valores a las literales que las componen.
- Sesión 2. Transformen y manipulen expresiones algebraicas para obtener expresiones equivalentes mediante la reducción de términos semejantes.
- Sesión 3. Determinen y verifiquen si diversas expresiones algebraicas son o no equivalentes, mediante la asignación de valores a las variables y la reducción de términos semejantes.

Acerca de...

Ésta es la primera de dos secuencias dedicadas a estudiar la noción de *equivalencia de expresiones algebraicas*, valiéndose de contextos geométricos. Los estudiantes tienen como antecedente el cálculo del perímetro de polígonos y el área de triángulos y cuadriláteros. En esta secuencia se intenta que el alumno, en un primer momento, *verifique* la equivalencia de dos expresiones al asignar valores numéricos a las literales de ambas. En un segundo momento se espera que obtenga otras expresiones equivalentes al transformar y manipular las literales, los números y las operaciones que las relacionan. Lo anterior implica utilizar la reducción de términos semejantes aplicando las propiedades de la igualdad (observe el recurso audiovisual *Expresiones de primer grado para representar propiedades de figuras geométricas y equivalencia de expresiones*).

Sobre las ideas de los alumnos

En la primaria los alumnos trabajaron, aunque no de manera formal, con la equivalencia de perímetros y áreas al transformar figuras geométricas, por ejemplo, al cortarlas y reacomodarlas para obtener otras, sin que su área varíe al realizar dichas transformaciones. Asimismo, en primer grado de secundaria los alumnos continuaron familiarizándose con tal concepto al manipular figuras (Secuencia 24. "Perímetros y áreas 2").

¿Qué material se necesita?

Se sugiere observar y analizar junto con los estudiantes el recurso audiovisual *Figuras geométricas y expresiones equivalentes*, con el fin de que se les prepare para la transición de la aritmética al álgebra. También debe utilizarse al máximo el recurso informático *Expresiones equivalentes 1* para que vayan adquiriendo destreza y confianza al distinguir la equivalencia de expresiones algebraicas y dominar la manipulación algebraica básica.

¿Cómo guío el proceso?

En la sesión 1, actividad 1, se pide que los alumnos escriban dos expresiones algebraicas equivalentes para cada figura. Por ejemplo, para la figura 1: una opción es $6n$. Si los alumnos tuvieran dificultades para escribir la otra expresión, invítelos a pensar en sumar: $n + n + n + n + n + n$. Otras expresiones posibles son: $2n \times 3$ o $3n \times 2$.

Para la actividad 3, las expresiones que pueden obtener son:

3. Observen las siguientes figuras. Supongan que ambas tienen las mismas medidas.

Figura 3

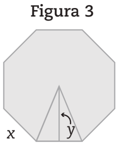


Figura 4

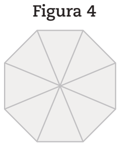


Figura 3	
$A = \frac{P \cdot a}{2}$	$A = \frac{8xy}{2}$
Figura 4	
$(\frac{xy}{2}) + (\frac{xy}{2}) + (\frac{xy}{2}) + (\frac{xy}{2}) + (\frac{xy}{2}) + (\frac{xy}{2}) + (\frac{xy}{2}) + (\frac{xy}{2}) = \frac{8xy}{2}$	

Es necesario insistir en que una forma de verificar que las expresiones algebraicas son equivalentes es asignar valores numéricos a las literales y apreciar que se consigue el mismo resultado. Para obtener expresiones algebraicas, se parte de calcular el perímetro y el área de figuras geométricas básicas y compuestas cuyas dimensiones están expresadas con literales.

En la sesión 2 se busca reafirmar la obtención de expresiones algebraicas equivalentes a partir del empleo de fórmulas para calcular áreas y perímetros. La actividad 3 se inicia con la manipulación algebraica al obtener distintas expresiones para calcular el perímetro de una figura compuesta. Dos posibles errores que los alumnos podrían cometer al resolver esta actividad son:

- Expresar áreas en vez de perímetros por influencia de la actividad anterior.
- Pensar que el perímetro de la figura compuesta se puede obtener sumando el perímetro de cada una de las figuras que lo componen, lo cual es válido para el área, no para el perímetro. Un aspecto importante por considerar, y que debe quedar muy claro para los estudiantes, es que, a diferencia del cálculo del área total de figuras compuestas, el perímetro total no se obtiene mediante la suma directa de los perímetros de las figuras que la conforman. Esto obliga a llevar a cabo un análisis más fino para encontrar dos expresiones equivalentes. Se sugiere que, en el momento en que usted lo juzgue pertinente, vean y analicen el recurso audiovisual *Figuras geométricas y expresiones equivalentes*, para enriquecer o reforzar el contenido.

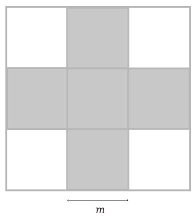
La sesión 3 se dedica a realizar manipulaciones de expresiones algebraicas equivalentes y a verificarlas numéricamente. Se trata de hacer el ejercicio contrario a lo que se había estado haciendo; es decir, se parte de una expresión algebraica y luego se pide a los alumnos que escriban expresiones equivalentes a ella; por último, que las verifiquen geométricamente, promoviendo el pensamiento reversible. En la actividad 1, una forma de ver si las expresiones son equivalentes consiste en hacer manipulaciones como:

- Sumar términos semejantes: $(x + 2) + (x + 3) + (x + 4) = 3x + 9$.
- Multiplicar el factor común por los términos que vienen entre paréntesis: $2a\ (h + 1) = 2ah + 2a$.

Expresión 1	Expresión 2
$(x + 2) + (x + 3) + (x + 4)$	$3x + 12$
$3a(x - 6 + b)$	$3ax - 9a + 3b$
$ah + ah + 2a$	$2a(h + 1)$

En el numeral 2, inciso b) algunas posibles respuestas son las siguientes:

2. La imagen está formada sólo por cuadrados que miden *m* de lado.
   a) Escriban dos expresiones equivalentes para calcular el perímetro de la cruz que se forma con los cuadrados verdes.
   ______ y ______
   b) Escriban dos expresiones equivalentes para calcular el área total de los cuadrados en color blanco. ______ y ______
   c) Verifiquen la equivalencia de todos los pares de expresiones asignando valores numéricos a las literales de las expresiones de los incisos anteriores.
   ______ y ______

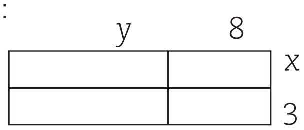


$(m \times m) + (m \times m) + (m \times m) + (m \times m)$ o $4(m \times m)$ o $4m^2$

En la actividad 4, se propone el recurso informático *Expresiones equivalentes 1*.

En la actividad 5, un posible dibujo geométrico para la expresión $(x + 3)\ (y + 8)$ es el siguiente.

Para el área:



Y una expresión algebraica que se desprende es:
$(x + 8)\ (y + 3) = xy + 8y + 3x + 24$

Para el perímetro:
$2(x + 8) + 2(y + 3) = 2x + 16 + 2y + 6$

Pautas para la evaluación formativa

El docente observará desde el inicio de esta secuencia el desarrollo de los alumnos en cuanto a su habilidad para manejar el lenguaje matemático al revisar que escriban correctamente las expresiones algebraicas; por ejemplo, que no confundan exponentes con coeficientes y, sobre todo (y más importante), que las expresiones obtenidas reflejen bien el área o perímetro de las figuras geométricas involucradas.

Asimismo, en las tres sesiones hay diversas oportunidades para observar la evolución cognitiva propuesta (abstracción). Ya desde la primera sesión se pide expresamente que los alumnos escriban en el libro lo obtenido y que argumenten en pareja sus respuestas (actividad 6 de la sesión 1).

En la sesión 2 (actividad 4a), se les pide que, una vez obtenidas las expresiones equivalentes, las relacionen y verifiquen que, efectivamente, son equivalentes. En la actividad 3 de la sesión 3 se plantea una dificultad mucho mayor, pues no sólo escribirán expresiones equivalentes, sino que también tendrán que argumentar cuál de las propuestas de dos equipos es la correcta, por lo que tendrán que justificar los procedimientos que siguieron para obtenerlas y, además, deberán comprobar que la otra equivalencia sea correcta mediante manipulación algebraica.

¿Cómo apoyar?

Si lo considera adecuado, cuando observe que los alumnos tienen dificultades para obtener expresiones algebraicas equivalentes, puede proponer más ejercicios para calcular el perímetro y el área de figuras geométricas diversas que puedan ser trazadas, recortadas y manipuladas. Con esta actividad el alumno podrá visualizar la transformación algebraica.

También resulta usual que en la manipulación algebraica los alumnos cometan errores al hacer las sustituciones con valores numéricos en las expresiones algebraicas; por ejemplo: restan mal, no agrupan las expresiones correctamente, extienden ciertas propiedades de las operaciones a otras situaciones donde no se aplica, por ejemplo, la expresión $(3 + b)a$ es equivalente a $3a + ab$, mientras que $(3 + b) + a$ no es equivalente a $3 + a + a + b$.

¿Cómo extender?

Pudiera resultar interesante para los alumnos que ya dominen con suficiencia la manipulación algebraica encontrar expresiones equivalentes para $(x + a) + (y + b)$, así como $(x - a) + (y - b)$ y $(x - a) + (y + b)$, con lo que se sentarían las bases para la introducción de los productos notables.

Secuencia 8 Polígonos 1
(LT, págs. 66-73)

Tiempo de realización	4 sesiones
Eje temático	Forma, espacio y medida
Tema	Figuras y cuerpos geométricos
Aprendizaje esperado	Deduce y usa las relaciones entre los ángulos de polígonos en la construcción de polígonos regulares.
Intención didáctica	Que los alumnos distingan las diagonales de otras líneas que se pueden trazar en un polígono. Además, que hagan razonamientos inductivos para calcular el número de diagonales en un polígono convexo o no convexo.
Materiales	• Juego de geometría • Geoplano • Hojas cuadriculadas
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	Audiovisuales • *Polígonos* • *¿Qué es una diagonal?* Informático • *Diagonales y triangulación*
Materiales de apoyo para el maestro	Recurso audiovisual • *Relaciones entre los ángulos de polígonos en la construcción de polígonos regulares* Bibliografía • López Escudero, Olga Leticia y Silvia García Peña (2011). *La enseñanza de la Geometría*, México, Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (Materiales para apoyar la práctica educativa). Disponible en https://www.inee.edu.mx/wp-content/uploads/2019/01/P1D401.pdf (Consultado el 17 de julio de 2019).

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Identifiquen polígonos en una red de polígonos y los clasifiquen en regulares e irregulares a partir de las características de sus lados y ángulos.
- Sesión 2. Establezcan qué líneas rectas o inclinadas corresponden a las diagonales de un polígono. Den argumentos para refutar un enunciado mediante contraejemplos.
- Sesión 3. Que los alumnos reconozcan los polígonos convexos y los no convexos y hagan un análisis inductivo para deducir el número de diagonales para triangular un polígono.
- Sesión 4. Que los alumnos realicen hipótesis y las validen respecto a la triangulación de polígonos convexos a partir del trazo de todas sus diagonales desde un solo vértice.

Acerca de...

Esta secuencia es la primera de tres secuencias correspondientes a los polígonos. El objetivo final es que los estudiantes construyan polígonos y aprecien las relaciones entre las características de sus lados y ángulos y deduzcan su uso.

Se pretende que los alumnos hagan razonamientos inductivos al observar las regularidades que surgen cuando se aumenta el número de lados de los polígonos, para luego intentar argumentar deductivamente y probar sus hipótesis.

Sobre las ideas de los alumnos

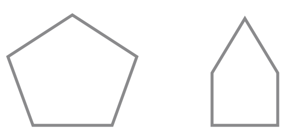
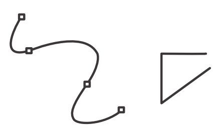
Es probable que los alumnos estén acostumbrados a identificar como polígonos únicamente a los regulares convexos, como el pentágono y el hexágono. En esta lección se enfrentarán a una diversidad de polígonos al incluir los irregulares y los no convexos.

En la literatura se conocen como *polígonos equiláteros* (los que tienen sus lados iguales entre sí), *equiangulares* (los que tienen sus ángulos iguales entre sí) y *regulares* (que tienen ángulos y lados iguales entre sí).

¿Cómo guío el proceso?

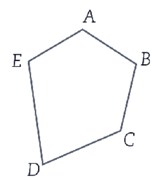
En la sesión 1 se analizarán las características de los polígonos. Se recomienda comentar con los alumnos qué es un polígono y destacar las siguientes propiedades:

1) Se forman de segmentos, es decir, fragmentos o porciones de recta.
2) Dichos segmentos son consecutivos, es decir, van uno detrás del otro.
3) Los segmentos delimitan la forma, se cierran.

Son polígonos	No son polígonos
	

Con la actividad 1 se espera que los alumnos reconozcan más fácilmente algunos polígonos regulares (sin llamarlos así todavía), como el pentágono, triángulo, rombo, entre otros. Los incisos d) y e) permiten que se representen otros polígonos menos comunes (los irregulares, sin nombrarlos así todavía), como los polígonos de 10, 15 y hasta 20 lados. Para responder el inciso e) hay varias posibilidades.

En este punto valdría la pena preguntar a los alumnos qué características tienen en común los polígonos que hallaron (las tres propiedades que se dijeron anteriormente). Los alumnos aprenderán también a etiquetar o a nombrar los polígonos por medio de sus vértices, y comprobarán que un mismo polígono se puede nombrar de diferentes maneras, por ejemplo: $ABCDE$, $DCBAE$.



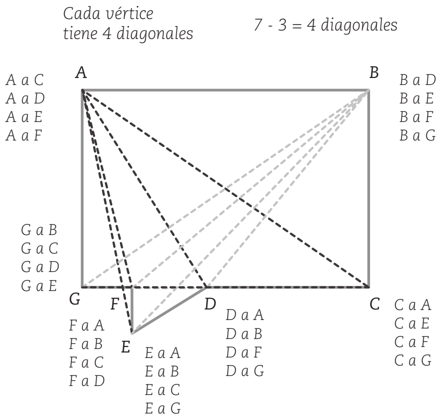
Para completar la tabla de la actividad 2 no es indispensable medir. En general se pueden identificar las características a simple vista. Aun así, podría ocurrir que algunos alumnos sientan la necesidad de medir; o bien, si ante cierta figura surgen dudas, se les puede sugerir que midan.

Hay ciertas figuras (MNL y $TKLN$) que pueden dar lugar a cierta confusión debido a que las medidas de los lados son muy cercanas, pero no iguales. Por lo anterior, la cuarta característica de la tabla puede provocar dudas. Habría que aclarar que ambos polígonos son irregulares con dos lados iguales y dos ángulos iguales.

Para revisar la tabla se sugiere armar pequeños debates. Si los alumnos no identifican los errores, puede ayudarlos mostrándoles o preguntándoles, ante determinada figura, ¿están seguros de que todos los ángulos o lados son iguales? Tras completar la tabla, se destacará que tales características corresponden a polígonos irregulares y, por contraste, los que sí tienen todos sus lados y ángulos iguales son los regulares (retomar la definición del glosario).

En la sesión 2 aprenderán a distinguir las diagonales de un polígono de otras líneas que no lo son. En la actividad 1, algunas imágenes podrían causar confusión (por ejemplo: 8, 10, 12); se espera que los alumnos argumenten valiéndose del uso del contraejemplo.

En la sesión 3, los alumnos aprenderán a triangular polígonos trazando algunas diagonales. En la actividad 2 trazarán todas las diagonales de cada vértice. Los polígonos de la fila inferior pueden resultar más complicados. El primero debe quedar así:



No convexo

Procure nombrar los vértices por medio de letras, así resultará más sencillo identificar y nombrar las diagonales que salen desde cada vértice. Para verificar que la cantidad de diagonales sea correcta, cuente el número de vértices del polígono y a ese número réstele 3 (esto, porque no se cuenta el vértice de origen y los dos vértices adyacentes), el total obtenido debe coincidir con las diagonales trazadas e identificadas por los alumnos. Esto se trabajará en la sesión 4, por lo que en esta sesión no debe decirles a los alumnos dicha fórmula.

Dado que la intención de este ejercicio es que los alumnos distingan y marquen las diagonales, surgirá la dificultad de que algunas diagonales queden encimadas, por lo que una manera fácil de organizar y nombrar las diagonales es la siguiente: *A* a *C*, *A* a *D*, etcétera.

En la actividad 4 se darán cuenta de que un polígono se puede triangular de diferentes maneras y que, en todas ellas, el número de triángulos siempre es el mismo.

En la actividad 5, si los alumnos tienen dificultades para llenar las columnas 3 y 4, puede ayudarlos trazando en el pizarrón un hexágono y pidiendo que escojan un vértice y que analicen, de los cinco vértices, a cuáles llega una diagonal del vértice que eligieron: sólo a dos vértices, y a tres no. También se aconseja que, tras llenar la tabla, si es que todavía no se han dado cuenta, se les señale que en cada caso se resta el número de lados menos 3 (por los tres vértices de los que no salen diagonales: los consecutivos y el que no se cuenta). Por último, en la sesión 4 se busca que aprecien, para el caso particular de los polígonos convexos, una triangulación más sencilla para este tipo de polígonos, esto es, trazar diagonales desde un solo vértice. Con esta triangulación es menos difícil deducir el número de diagonales para un polígono de n lados.

Pautas para la evaluación formativa

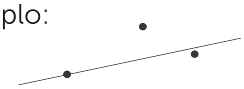
Observe las dificultades y errores que puedan tener los alumnos:

- Para reconocer las diagonales de un polígono.
- Para reconocer los polígonos convexos y no convexos.
- Para hacer generalizaciones al llenar las tablas.
- Para hacer deducciones.

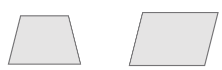
¿Cómo apoyar?

Si los alumnos tienen dificultades para hacer uso de contraejemplos, puede proponerles ejemplos adicionales. Pídales que traten de refutar las siguientes afirmaciones con un contraejemplo:

- Afirmación: Cualesquiera tres puntos siempre se encuentran alineados.
- Contraejemplo:



- Afirmación: Sea *ABCD* un cuadrilátero. Si *AB* = *CD*, entonces *ABCD* es un rectángulo.
- Contraejemplos:



¿Cómo extender?

Proponga ejercicios inversos al cálculo del número de diagonales. Por ejemplo, si un polígono se puede triangular con 14 diagonales, ¿cuántos lados tiene? ¿Y si se puede triangular con 27 diagonales? ¿Y si tiene 4857 diagonales? Esto se puede resolver con la ecuación: $n - 3$ = número de diagonales.

Secuencia 9 Conversión de medidas 1

(LT, págs. 74-81)

Tiempo de realización	3 sesiones
Eje temático	Forma, espacio y medida
Tema	Magnitudes y medidas
Aprendizaje esperado	Resuelve problemas que implican conversiones en múltiplos y submúltiplos del metro, litro, kilogramo, y de unidades del Sistema Inglés (yarda, pulgada, galón, onza y libra).
Intención didáctica	Que los alumnos identifiquen qué unidades son pertinentes para medir distancias y longitudes, así como el uso de unidades usuales del Sistema Internacional (SI) y del Sistema Inglés.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisual** • *La longitud en el Sistema Inglés* **Informático** • *Conversión de medidas de longitud*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recurso audiovisual** • *Conversión de medidas*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Desarrollen estrategias de cálculo para convertir múltiplos y submúltiplos del metro para medir y comparar longitudes.
- Sesión 2. Conozcan y usen las equivalencias entre múltiplos y submúltiplos del metro para determinar distancias y longitudes en espacios geográficos, así como algunas equivalencias con unidades del Sistema Inglés.
- Sesión 3. Usen las equivalencias entre las unidades de longitud del Sistema Internacional y las del Sistema Inglés.

Acerca de...

En la educación primaria los alumnos comenzaron a trabajar la noción de longitud y distancia, haciendo comparaciones entre objetos o mediante un intermediario; también aprendieron a usar instrumentos de medición, como el metro y la regla graduados. Usaron las unidades de medida para longitudes pequeñas y grandes en la resolución de problemas y tuvieron acercamientos a la relación entre los múltiplos y submúltiplos del metro. Ahora deberán conocer también las equivalencias de estas unidades con el Sistema Inglés, ya que es muy común encontrar productos etiquetados según uno o ambos sistemas. Por otra parte, desarrollarán estrategias de cálculo rápido para hacer conversiones, tanto dentro del Sistema Internacional como entre éste y el Sistema Inglés.

Sobre las ideas de los alumnos

Los alumnos probablemente aprendieron que cuando se convierte una unidad a otra mayor deben dividir, y cuando la conversión es de una unidad mayor a otra menor es necesario multiplicar. Esto, aprendido así, simplemente, causa confusión, y después de un tiempo ya no saben cuándo multiplicar o cuándo dividir. Por lo tanto, es necesario que comprendan esa relación asociada al sistema decimal, esto es, que analicen el número de veces que una unidad contiene a la otra.

Por otra parte, esta relación no se da de igual forma entre las unidades del Sistema Inglés, pero es importante que adquieran una noción de su equivalencia con el Sistema Internacional, pues comúnmente se encuentran productos empacados con estas unidades de medida.

¿Cómo guío el proceso?

Comience con la lectura del texto introductorio e intercambien ideas y experiencias al respecto.

Es importante que reflexionen sobre la diferencia entre las distancias que recorren la luz y el sonido en el mismo tiempo. Esto ayudará más adelante en la comprensión de por qué se usan unidades como el **año luz** para medir distancias muy grandes como las que existen entre los cuerpos celestes.

Esta secuencia también permite hacer con el grupo una reflexión sobre el porqué de múltiplos y submúltiplos del metro para medir longitudes y distancias terrestres y para medir seres muy pequeños, respectivamente. Por ejemplo, podría preguntar a los alumnos cómo se mediría la longitud de seres tan pequeños si sólo existiera el metro, o bien, cómo se podría medir con él la distancia de un punto a otro del territorio nacional. Incluso proponga que anoten en milímetros la distancia entre alguna de las ciudades que se indican en la sesión 2 o que escriban en kilómetros la longitud de alguno de los animales de la sesión 3.

En los problemas planteados en la sesión 1, aunque se habla de velocidad, no se pide que realicen la conversión entre unidades de tiempo, los cálculos se centran en las distancias y la equivalencia dentro del Sistema Internacional.

Ser vivo		 Guepardo	 Halcón peregrino	 Avestruz	 Pez espada
Distancia recorrida en una hora	km		300		
	m	120 000		65 000	100 000
Ser vivo		 Liebre	 Tintorera	 Caballo	 Ser humano (Usain Bolt)
Distancia recorrida en una hora	km	75		50	37.58
	m		7 000		

En el cálculo de distancias entre las ciudades señaladas en el mapa de la sesión 2, actividad 1, aunque se involucra el concepto de escala, ésta aparece en los datos del problema y el trabajo no se centra en ella, sino en la transformación de múltiplos y submúltiplos de la unidad de longitud.

Por otra parte, es común encontrar en revistas, documentales e información de internet, el uso de unidades de longitud del Sistema Inglés en la información que se lee acerca de la vida animal o de lugares donde se desarrollan actividades ecoturísticas o en los datos sobre el sistema solar y el universo, por lo que resulta necesario que los alumnos realicen transformaciones de un sistema al otro y comprendan la información que incluya cualquiera de estos sistemas de medida en distancias o longitudes. Es recomendable revisar el audiovisual *La longitud en el Sistema Inglés* con la finalidad de que conozcan un poco más acerca de este sistema.

Para realizar cálculos con las unidades de longitud del Sistema Internacional es importante que los alumnos sepan, por una parte, que el metro es la unidad fundamental de longitud y, por otra, su relación con los múltiplos y submúltiplos, así como la correspondencia entre todos ellos; esto es, que comprendan que el decámetro contiene diez veces al metro, pero que, a su vez, el decámetro está contenido diez veces en el hectómetro y que éste cabe diez veces en el kilómetro. Con los submúltiplos sucede algo semejante, pues cada unidad menor está contenida diez veces en su antecesor, esto es, el milímetro cabe diez veces en el centímetro; el centímetro, diez veces en el decímetro, y éste, diez veces en el metro.

Comprender estas relaciones ayudará a entender la regla de que para convertir una unidad mayor a una menor se debe multiplicar por 10, 100, 1000, etcétera, y cuando se trata de una unidad menor a una mayor, hay que dividir entre estos mismos números. Estos conceptos y procedimientos se estudiaron en las secuencias 1 y 2. Una pregunta pertinente es: ¿qué operación debes hacer si quisieras escribir en metros la longitud del murciélago abejorro? ¿Por qué?

Rana monte Iberia Eleuth (9.2 mm)	Camaleón Brookesia mínima de Madagascar (2.4 cm)	Murciélago abejorro (2.9 cm)
		

Recuerde que pedir a los alumnos que reflexionen y expliquen por qué decidieron hacer una operación u otra, por qué eligieron un procedimiento u otro, etcétera, favorece la comprensión de lo que están realizando y les ayuda a desarrollar su capacidad de argumentación.

Al término de la secuencia se propone observar el recurso informático *Conversión de medidas de longitud*, donde pondrán en práctica lo aprendido en esta secuencia.

Pautas para la evaluación formativa

Uno de los aspectos importantes en la medición es la colocación del instrumento de medida, observe si al medir los segmentos del mapa (sesión 2) los alumnos colocan la regla de manera correcta. Otro aspecto que da cuenta de que se comprende la conversión de unidades es cuando los alumnos argumentan por qué multiplican o dividen para transformar de una unidad de medida a otra, pues muchas veces sólo repiten reglas que aprendieron de memoria sin saber por qué ni cómo funcionan. También puede observar si en todos los casos realizan las operaciones por escrito o si son capaces de hacer cálculos mentales, pues en la conversión dentro del SI las operaciones de multiplicación o división son entre 10, 100, 1000, etcétera, que son aspectos trabajados desde la primaria.

Cómo apoyar

Posiblemente algunos alumnos tengan dificultades para responder problemas como calcular la altura del árbol en metros en función de la velocidad del koala, pues éste avanza 447 cm/s. En este caso se pueden apoyar en una tabla donde se anote el avance por segundo y, a la vez, su equivalente en metros:

Tiempo (s)	Longitud (cm)	Longitud (m)
1	447	4.47
2	894	8.94
3	1 341	13.41

Si lo considera necesario, revise las sesiones 1 y 2 de la secuencia 1.

Cómo extender

Pida que realicen una investigación acerca de la distancia a la que se encuentran algunas estrellas, o bien, dé usted la distancia a una, por ejemplo, la Estrella Polar, que está a 323 años luz de la Tierra, y pida que den el equivalente en kilómetros.

		
Tierra	Marte	Saturno
7 926.21	4 216.63	74 897.6

Secuencia 10 Perímetro y área de polígonos regulares

(LT, págs. 82-89)

Tiempo de realización	4 sesiones
Eje temático	Forma, espacio y medida
Tema	Magnitudes y medidas
Aprendizaje esperado	Calcula el perímetro y el área de polígonos regulares y del círculo a partir de diferentes datos.
Intención didáctica	Que los alumnos resuelvan problemas que implican calcular el perímetro y el área de polígonos regulares a partir de diferentes datos.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisual** • *El área de polígonos* **Informático** • *Área de polígonos regulares*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recurso audiovisual** • *Perímetro y área de polígonos regulares y del círculo*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Determinen el área de polígonos regulares a partir del conteo de unidades y de su descomposición en otros polígonos.
- Sesión 2. Calculen el área de polígonos regulares e irregulares a partir de su transformación en un cuadrilátero.
- Sesión 3. Deduzcan la fórmula para calcular el área de polígonos regulares.
- Sesión 4. Resuelvan problemas que impliquen el cálculo del perímetro o el área de polígonos regulares.

Acerca de...

Los alumnos han tenido contacto con la idea de perímetro y área en la primaria. En primer grado de secundaria trabajaron el cálculo de estas magnitudes en triángulos y cuadriláteros. En este segundo grado lo harán con otros polígonos.

Es importante fortalecer la parte conceptual del área, por lo que antes de abordar la deducción de la fórmula (sesión 3), en las dos primeras sesiones los alumnos calculan y ordenan áreas de polígonos a partir de otros recursos, en particular del conteo de unidades cuadradas, descomposición en otras figuras o de su transformación en cuadriláteros. Con las transformaciones de unos polígonos en otros se trabaja la conservación del área y se prepara a los alumnos para la deducción de fórmulas.

Sobre las ideas de los alumnos

Es común que los alumnos confundan el perímetro con el área. El conteo de unidades cuadradas para determinar el área es un recurso que les permite fortalecer la idea de que el área se mide en unidades cuadradas y el perímetro no, lo que ayuda a erradicar esta confusión entre perímetro y área.

Otra concepción errónea entre los alumnos es pensar que si una figura tiene mayor perímetro que otra, entonces tiene mayor área; para erradicar esta idea se propone la actividad 4 de la sesión 1.

También es importante suprimir en los alumnos la idea de que sólo con fórmulas es posible calcular áreas.

¿Cómo guío el proceso?

En la actividad 1 de la sesión 1 los alumnos utilizarán los procedimientos que consideren pertinentes para el cálculo de las áreas. Es probable que decidan contar los cuadrados que quedan dentro de las figuras y, en aquellos casos en que están incompletos, cuando sea posible, compensar unas partes con otras. Un procedimiento diferente es considerar las 16 unidades cuadradas del cuadrado completo y restar el área de las figuras que quedan fuera del polígono. Este procedimiento puede aplicarse muy bien a cualquiera de los polígonos. También es probable que dividan el polígono en otras figuras y calculen el área de cada parte, ya sea por el conteo de unidades o incluso mediante fórmulas; este procedimiento puede aplicarse en el polígono 3, que puede dividirse en un rectángulo y dos triángulos isósceles. Si cuenta con geoplanos, puede utilizarlos en esta actividad y aprovechar para proponer otras figuras diferentes que los alumnos podrán formar con ligas.

Al hacer la puesta en común de esta sesión 1, reflexione con los alumnos sobre la idea de que el octágono de la actividad 3 se dividió en polígonos de tres maneras distintas y, no obstante, el área obtenida es la misma. Esta idea que parece obvia puede no ser tan clara para algunos alumnos.

En la sesión 2, verifique que primero estimen el área de los polígonos de la izquierda y los ordenen del que tenga menor área al de mayor área. También observe que, efectivamente, calquen y recorten cada figura de la izquierda para obtener la de la derecha. El propósito es que los alumnos se formen la idea de que no es necesario saber una fórmula para calcular el área de todos los polígonos, pues pueden transformarlo en otro polígono cuya área sí sepan calcular, como los cuadriláteros que estudiaron en primer grado.

La sesión 3 inicia con el cálculo del área de un pentágono regular dadas las medidas de su lado y su apotema. Es importante que no diga a los alumnos cómo hacerlo, mucho menos que les enseñe la fórmula; precisamente se espera que, al resolver las cinco actividades de esta sesión, los alumnos deduzcan dicha fórmula $\left(A=\frac{P\times a}{2}\right)$. En las primeras dos actividades se trabajan casos particulares y en la tercera se da el caso general.

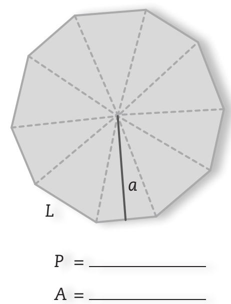
En la puesta en común de la sesión 4 (actividad 8), invite a los alumnos que hayan resuelto algún problema sin usar la fórmula a que platiquen a sus compañeros lo que hicieron. El propósito es que los alumnos noten que si bien la fórmula para el área de polígonos regulares es una herramienta muy eficaz, hay otros procedimientos que también resultan serlo; por ejemplo, la primera figura de la actividad 4 puede dividirse en un rectángulo y un triángulo y no usar la fórmula del polígono regular.

Pautas para la evaluación formativa

Observe si durante el desarrollo de las actividades de esta secuencia los alumnos:

- Distinguen el perímetro del área.
- Utilizan unidades lineales para calcular perímetros y unidades cuadradas para calcular el área.
- Utilizan diferentes procedimientos para determinar el perímetro y el área.
- Distinguen qué medidas de las figuras emplear cuando así se pide en las actividades.
- Aplican las fórmulas para calcular el área de polígonos regulares y sustituyen los valores y operan con ellos correctamente.

¿Cómo apoyar?



Si a los alumnos se les dificulta la actividad 1 de la sesión 1, proponga otros polígonos más sencillos, primero formados sólo por cuadrados, luego por cuadrados y triángulos cuya área sea la mitad de la unidad cuadrada. De ser posible, utilice geoplanos y ligas.

En las actividades donde se trabaja con literales (actividad 3, sesión 3; actividad 7, sesión 4) puede proponer que sustituyan las literales por números, y ya que hayan trabajado el caso numérico, pasar a la literal.

¿Cómo extender?

Proponga actividades de cálculo de perímetros y áreas de polígonos regulares cuyas dimensiones sean literales, por ejemplo, que sus lados midan *b* unidades y su apotema *z* unidades.

Secuencia 11 Volumen de prismas (LT, págs. 90-97)

Tiempo de realización	4 sesiones
Eje temático	Forma, espacio y medida
Tema	Magnitudes y medidas
Aprendizaje esperado	Calcula el volumen de prismas y cilindros rectos.
Intención didáctica	Que los alumnos resuelvan problemas que implican calcular el volumen de prismas.
Materiales	• Tijeras • Pegamento • Recortables de las páginas 285 y 287
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisual** • *Moldes para cajas* • *Volumen de prismas* **Informático** • *Prismas y volúmenes*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recurso audiovisual** • *El volumen de prismas y cilindros rectos* **Bibliografía** • Sáiz Roldán, Mariana (s.f.). "El volumen. ¿Por dónde empezar?". Disponible en http://www.matedu.cinvestav.mx/~maestriaedu/docs/asig4/ConfMagist.pdf (Consultado el 17 de julio de 2019).

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Construyan prismas cuya base sea un polígono regular.
- Sesión 2. Determinen el volumen de un prisma con diferentes unidades cúbicas para profundizar en la noción de volumen.
- Sesión 3. Desarrollen la fórmula para calcular el volumen de un prisma cuya base es un polígono regular.
- Sesión 4. Resuelvan problemas que impliquen el cálculo del volumen de prismas.

Acerca de...

En primer grado, los alumnos trabajaron la fórmula *Volumen = área de la base por altura* para calcular el volumen de prismas cuya base es un triángulo o un cuadrilátero. En esta secuencia determinarán si para un prisma cuya base es un polígono regular también se puede usar la misma fórmula (sesión 3).

El trabajo con cuerpos geométricos, en este caso con prismas, es un terreno fértil para desarrollar la visualización e imaginación espacial (sesión 1). Asimismo, para el tratamiento del volumen de prismas es importante que los alumnos desarrollen la habilidad de interpretar la representación plana de un prisma (dibujo en dos dimensiones); por eso, en la primera sesión se pide a los alumnos identificar el desarrollo plano (molde) para construir prismas a partir de su representación plana y después se pide que los construyan.

Recuerde que una premisa fundamental en el tratamiento didáctico del volumen es que no es adecuado trabajarlo sólo con figuras dibujadas.

Otra idea importante es explorar la unidad de medida. En la sesión 2 se trabaja con la idea de diferentes unidades de medida para determinar el volumen de un prisma.

Sobre las ideas de los alumnos

Una dificultad consiste en asociar el cuerpo geométrico con el desarrollo plano que permite construirlo. Otra dificultad se da cuando deben asociar las dimensiones de la figura con la fórmula correspondiente.

En el caso de los polígonos regulares, cuando tengan que medir la apotema, quizá no lo hagan de manera perpendicular a uno de los lados; considere esto al trabajar las actividades.

También puede pasar que no recuerden las fórmulas del área del rombo o del trapecio (sesión 3); permita que usen un formulario.

¿Cómo guío el proceso?

En la sesión 1 verifique que los alumnos trazan las pestañas antes de armar los prismas y que sean exactamente las necesarias, que no sobre ni falte alguna. Este ejercicio desarrolla su imaginación espacial. También es necesario que verifique que los alumnos sí arman los prismas, pues esto les ayudará a establecer la relación entre el desarrollo plano y su representación plana, así como la manera de interpretar dicha representación, habilidad necesaria para el trabajo con el volumen.

En la sesión 2 es importante que, al comparar los datos de la tabla, se vea la diferencia entre permitir que la unidad de volumen (en este caso los chocolates) se seccione o no. Si no se permite que se partan los chocolates, el resultado solamente podrá ser con chocolates enteros o completos, con lo que el número de chocolates que quepa será menor que si se permite que se partan, pues de esta manera cabrán más. Trabaje esto en la puesta en común al comparar los resultados.

En la sesión 3 es muy probable que los alumnos transfieran lo que aprendieron en primero y respondan que sí se usa la misma fórmula para todos los prismas: invítelos a que lo prueben con las actividades propuestas. Es muy importante que armen los prismas cuyos moldes están en su material recortable, páginas 109 y 111, y que calculen el volumen con los dos procedimientos que se indican; además de confirmar su hipótesis, seguirán practicando el cálculo de volúmenes de prismas cuya base es un triángulo o un cuadrilátero (contenido que estudiaron en primer grado).

Los problemas 2 y 4 de la sesión 4 involucran también la magnitud llamada capacidad. Si lo considera necesario, puede hacer un alto grupal para discutir acerca de la diferencia entre volumen y capacidad, y de la relación entre el decímetro cúbico y el litro.

Durante el trabajo de esta secuencia permita el uso de la calculadora; el propósito principal es el trabajo con el volumen y se espera que la operatoria no sea un obstáculo ni un aspecto al que tengan que invertirle mucho tiempo.

Pautas para la evaluación formativa

Observe si los alumnos logran:

- Identificar el desarrollo plano para construir prismas a partir de una representación plana.
- Reconocer el nombre de algunos cuerpos geométricos.
- Determinar el volumen de un prisma con diferentes unidades.
- Usar correctamente la fórmula para calcular el volumen de un prisma cuya base es un polígono regular (no necesariamente que la memorice, sino que la sepa aplicar).
- Tomar correctamente las medidas necesarias para calcular el volumen de un prisma.
- Resolver problemas que implican el cálculo del volumen de prismas cuya base es un polígono regular.

¿Cómo apoyar?

Siempre que haya dudas sobre la interpretación de un prisma dibujado, proponga su construcción.

Permita usar formularios para que los alumnos los consulten en caso necesario.

Organice discusiones grupales sobre cómo usar las fórmulas.

¿Cómo extender?

Proponga más ejercicios sobre el cálculo de volúmenes de prismas cuyas dimensiones son literales. Por ejemplo, un prisma hexagonal donde los lados de la base midan y unidades, su apotema d unidades y tenga una altura de z unidades.

Plantee otros problemas verbales donde haya que calcular alguna de las dimensiones del prisma cuando se conocen las demás y el volumen. Por ejemplo: Un recipiente en forma de prisma cuya base es un hexágono regular tiene capacidad de 15 litros. Si el lado del hexágono mide 10 cm y su apotema 8.6 cm, ¿cuánto mide la altura del prisma?

Secuencia 12 Probabilidad clásica 1 (LT, págs. 98-105)

Tiempo de realización	3 sesiones
Eje temático	Análisis de datos
Tema	Probabilidad
Aprendizaje esperado	Determina la probabilidad teórica de un evento en un experimento aleatorio.
Intención didáctica	Que los alumnos resuelvan problemas que implican determinar la probabilidad teórica de un evento.
Materiales	• Canicas, dados y urnas
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisuales** • *Los valores de la probabilidad* • *¿Qué es la probabilidad teórica?* **Informático** • *Probabilidad teórica*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recurso audiovisual** • *De la probabilidad frecuencial a la teórica*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Determinen la probabilidad teórica de un evento en un experimento aleatorio. Utilicen el modelo de urnas para obtener la probabilidad teórica de dos eventos, las comparen entre sí y las contrasten con su probabilidad frecuencial.
- Sesión 2. Comparen la probabilidad teórica a partir de la noción de probabilidad frecuencial de un evento en el que se ha considerado un número grande de ensayos.
- Sesión 3. Utilicen la fórmula para calcular la probabilidad teórica de un evento y el diagrama de árbol como recurso para enumerar todos los resultados posibles y comparar eventos equiprobables y no equiprobables.

Acerca de...

En primer grado, los alumnos comprendieron que para obtener la probabilidad frecuencial de un evento se realiza el experimento un número de veces y se compara cuántas veces se obtuvo el resultado esperado respecto al número de intentos efectuados. Ahora se conocerán y estudiarán las condiciones en que se realiza dicho experimento y cuáles son todos los resultados posibles, y a partir de ellos, contar los resultados favorables del evento de interés. Se apreciará que el cálculo de la probabilidad teórica de un evento no implica la realización del experimento, sino el conteo exhaustivo de los resultados posibles y de los favorables al evento. Para iniciar el estudio se considera una situación en la que cada evento simple tiene las mismas oportunidades de ocurrir, es decir, deben ser eventos simples equiprobables; luego se obtiene la probabilidad frecuencial para comparar sus valores y concluir que, después de muchos ensayos, ese valor se acercará al que se obtiene mediante su cálculo teórico.

Sobre las ideas de los alumnos

La noción de probabilidad teórica puede ser difícil de comprender para algunos alumnos. Es posible que tengan errores y algunas dificultades, por ejemplo, al obtener el conteo de todos los resultados posibles del experimento y el conteo de los favorables del evento. Otra dificultad es el concepto de proporción que se requiere para comparar la razón entre los resultados favorables y los posibles. Y uno más sería la habilidad de distinguir entre el azar y lo deducible. Aunque se espera que por la edad de los estudiantes ya hayan adquirido la capacidad de usar procedimientos sistemáticos para realizar el inventario de todos los resultados posibles y de las variaciones o combinaciones posibles, cierto es que dependen de la instrucción para asimilar procedimientos de conteo y combinación que les permitan desarrollar su intuición de azar y construir intuiciones secundarias. Por ejemplo, se espera que ya suceda en el caso de la interpretación de que la frecuencia relativa de un evento es su probabilidad frecuencial, más allá de que utilicen y reconozcan una fórmula para obtenerla, sino porque los alumnos tienen la convicción y evidencia de que así ocurre y, por lo tanto, la utilizan para hacer sus predicciones y es parte de su conocimiento. Se espera que en algún momento algo semejante ocurra con la probabilidad teórica y la incorporen a su conocimiento probabilístico.

¿Cómo guío el proceso?

En la sesión 1, considere cuáles son las respuestas de los estudiantes, antes de realizar ningún experimento o conteo, al "Para empezar" y a la pregunta del problema 1; es decir, cuáles son las intuiciones que los alumnos tienen y, si es posible, registre algunas de ellas para después retomarlas y revisar sus respuestas. Es necesario verificar que los alumnos cuentan con las urnas y si plantean las razones correctamente en el caso del inciso c) de la situación 1. También verifique que se conforman las urnas de la manera en que se solicita en el problema y que se realiza el experimento en las condiciones señaladas; incluso puede sugerir iniciar las primeras rondas junto con ellos para guiar el proceso del juego y el registro de los resultados.

En la actividad 2 de la sesión 1 es importante que los alumnos comprendan que mientras uno de ellos utiliza la urna A para hacer las 20 extracciones de la canica y registrar correctamente cada resultado en la tabla, el otro alumno utiliza la urna B.

Por ejemplo, los siguientes resultados corresponden al registro que hizo una pareja de estudiantes:

Abel

Urna	Color que se obtiene en cada extracción																			
A	R	A	R	A	A	A	R	R	R	A	A	R	R	A	R	A	R	R	R	R

Beatriz

Urna	Color que se obtiene en cada extracción																			
B	R	R	R	A	A	A	R	R	R	A	A	R	R	A	R	A	R	R	R	A

Posteriormente, en la actividad 3 se completará el concentrado de acuerdo con la frecuencia absoluta y relativa de cada posible evento dependiendo de la urna A o B.

	Número de extracciones	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Resultados de la urna A	Número de veces que sacas una canica azul (Frecuencia absoluta)	0	1	1	2	3	4	4	4	4	5	6	6	6	7	7	8	8	8	8	8
	$\frac{\text{Número de veces que sacas una canica azul}}{\text{Número total de veces que se saca una canica de la urna}}$ (Frecuencia relativa)	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{6}{11}$	$\frac{6}{12}$	$\frac{6}{13}$	$\frac{7}{14}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{8}{16}$	$\frac{8}{17}$	$\frac{8}{18}$	$\frac{8}{19}$	$\frac{8}{20}$
Resultados de la urna B	Número de veces que sacas una canica azul (Frecuencia absoluta)	0	0	0	1	2	3	3	3	3	4	5	5	5	6	6	7	7	7	7	8
	$\frac{\text{Número de veces que sacas una canica azul}}{\text{Número total de veces que se saca una canica de la urna}}$ (Frecuencia relativa)	$\frac{0}{1}$	$\frac{0}{2}$	$\frac{0}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{13}$	$\frac{6}{14}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{7}{17}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{7}{19}$	$\frac{8}{20}$

Se sugiere no simplificar las fracciones para que los alumnos no pierdan de vista la razón entre el número de veces que se saca una canica azul y el de las extracciones realizadas.

En la sesión 2, se reúnen los resultados del juego de la sesión 1 en un concentrado general con el propósito de representarlos gráficamente para, desde ahí, comparar la probabilidad frecuencial con la teórica y observar la tendencia de los resultados, por lo cual se requiere un número grande de resultados (de acuerdo con la ley de los grandes números). Para un mejor análisis, se recomienda concentrarlos en una tabla como la propuesta que elaboren en su cuaderno.

Se sugiere cerrar con la revisión de las respuestas de las situaciones iniciales para que los alumnos reflexionen sobre sus intuiciones y los resultados de la experimentación realizada.

En la sesión 3 se requiere que los alumnos tengan un dado no cargado para que realicen la primera parte de la sesión. Y, nuevamente, solicite que respondan desde su intuición las primeras preguntas. En la actividad 2 deben completar el diagrama de árbol propuesto como recurso para realizar la enumeración de los resultados posibles y el conteo de los resultados favorables al evento de interés.

También se aborda la manera de plantear la razón que corresponde a la probabilidad teórica, resultados favorables sobre resultados posibles.

En la actividad 3 se trata de obtener la probabilidad frecuencial de lanzar un dado y observar los eventos "obtener 3" y "obtener 6", para comparar sus probabilidades después de 24 lanzamientos. En la actividad 4 se busca contrastar los resultados esperados debido al cambio de las condiciones del dado (que es el generador aleatorio de esta situación), pues ahora estará cargado hacia una cara. El propósito es observar cuánto varían las frecuencias y qué implicaciones tendría respecto al valor de la probabilidad teórica que se calcula en condiciones ideales.

Durante el trabajo de esta secuencia puede permitir el uso de la calculadora. El propósito principal es el trabajo con la probabilidad teórica a partir de la frecuencial y se espera que la operatoria no sea un obstáculo ni un aspecto al que los alumnos tengan que invertirle demasiado tiempo.

Pautas para la evaluación formativa

Observe si los alumnos logran:

- Identificar que la frecuencia relativa de un resultado es la probabilidad frecuencial de un evento.
- Determinar el número total de resultados posibles de cada experimento.
- Determinar el número total de resultados favorables de cada evento.
- Plantear correctamente la razón que corresponde tanto a la probabilidad frecuencial como a la que corresponde a la probabilidad teórica (no necesariamente que la memoricen, sino que la sepan aplicar).
- Distinguir entre evento, espacio de resultados (espacio muestral), experimento, probabilidad frecuencial y probabilidad teórica, así como la escala de la probabilidad.
- Aplicar la fórmula para calcular la probabilidad teórica de un evento y el diagrama de árbol como recurso para enumerar todos los resultados posibles.

¿Cómo apoyar?

Se espera que los alumnos no tengan dificultades para realizar los experimentos, sin embargo, en caso necesario, puede pedir que utilicen urnas, cajas o bolsas no transparentes. Si no tienen canicas, pueden utilizar papelitos de igual tamaño y grosor que tengan la letra A (de azul) y R (de rojo), de acuerdo con el contenido de cada urna. Si no cuentan con un dado, pueden construirlo a partir del desarrollo plano de un cubo; en este caso, considere enumerar las caras opuestas así: 1-6, 2-5, 3-4.

Si observa que tienen problemas para enumerar los resultados, recomiende el uso del diagrama de árbol como un modelo que genera de forma sistemática el conteo.

Organice las discusiones grupales para revisar el registro de los resultados, con lo cual garantiza que de alguna manera sean confiables.

¿Cómo extender?

Proponga otros eventos para calcular su probabilidad teórica y compárenlos. Por ejemplo, en el caso del dado, puede proponer que determinen la probabilidad de que el número obtenido al tirarlo sea menor que 3 o mayor que 3, o bien que el número obtenido sea par o impar. Lo puede extender, retomando la situación del "Para empezar" y calcular las probabilidades teóricas de los eventos "cae 3 y 6" con respecto a "cae 3 y 3". También lo puede hacer con el problema de las urnas. Por ejemplo, sacar, sin ver, una canica y que ésta sea roja, o sacar, sin ver, dos canicas al mismo tiempo y que las canicas sean azules.

Evaluación Bloque 1

(LT, págs. 106–107)

Con el propósito de observar el avance en el logro de los aprendizajes de los estudiantes, además de las consideraciones que usted haya realizado, se presentan a continuación los resultados y orientaciones del instrumento de evaluación del bloque 1.

Reactivo 1. Multiplicación y división de decimales y fracciones. Con las diferentes operaciones que se proponen se pretende valorar en los alumnos su conocimiento y habilidad para aplicar los significados asociados a las operaciones aditivas y multiplicativas de fracciones y números decimales, así como, su comprensión de las propiedades de estas operaciones con los diferentes tipos de números. Estos aspectos son parte del desarrollo del sentido numérico de los estudiantes. En el inciso a), el cociente es un número mayor que el dividendo, 4 500.2, porque una interpretación de la situación es cuántas veces cabe un centésimo en 45 unidades con dos milésimos. La respuesta en el inciso b) es 0.0005843, un número menor que el factor 5.843, pero mayor que un diezmilésimo, y se puede interpretar como la diezmilésima parte de 5.843. En el caso del inciso c), la respuesta es: $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$, la multiplicación: $\frac{3}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Otra interpretación de esa multiplicación es obtener mitad de $\frac{3}{6}$, y dado que esa fracción es equivalente a $\frac{1}{2}$, entonces se está calculando la mitad de la mitad. En el inciso d) la respuesta es: la centésima parte del primer factor. En el inciso e), $\frac{5}{12}$ es el cociente, la división de fracciones es equivalente a la multiplicación del dividiendo por el recíproco del divisor. Y, finalmente, el inciso f) implica la división $\frac{7}{4} \div \frac{1}{4} = \frac{7}{4} \times \frac{4}{1} = \frac{28}{4} = 7$.

Reactivo 2. Proporcionalidad directa, área de figuras y volumen de prismas rectos. Con este reactivo se evalúa en los alumnos la habilidad de resolver problemas que implican la medición del área de figuras compuestas y el volumen del prisma recto. Además, la situación también implica determinar las medidas dado el factor de escala. Las medidas de los lados de la torre M´ dada la M, son:

M	20 cm	12 cm	14 cm	4 cm	10 cm	16 cm	30 cm
M´	$\frac{40}{3}$ cm	8 cm	$\frac{28}{3}$ cm	$\frac{8}{3}$ cm	$\frac{20}{3}$ cm	$\frac{32}{3}$ cm	10 cm

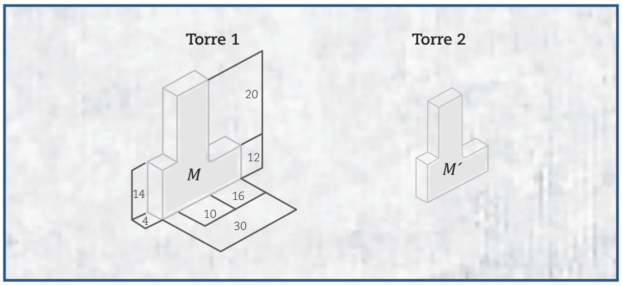
El área de la cara M´ es: $\frac{2\,272}{3}$ cm^2

Y el volumen de la torre es: $\frac{18\,176}{3}$ cm^3

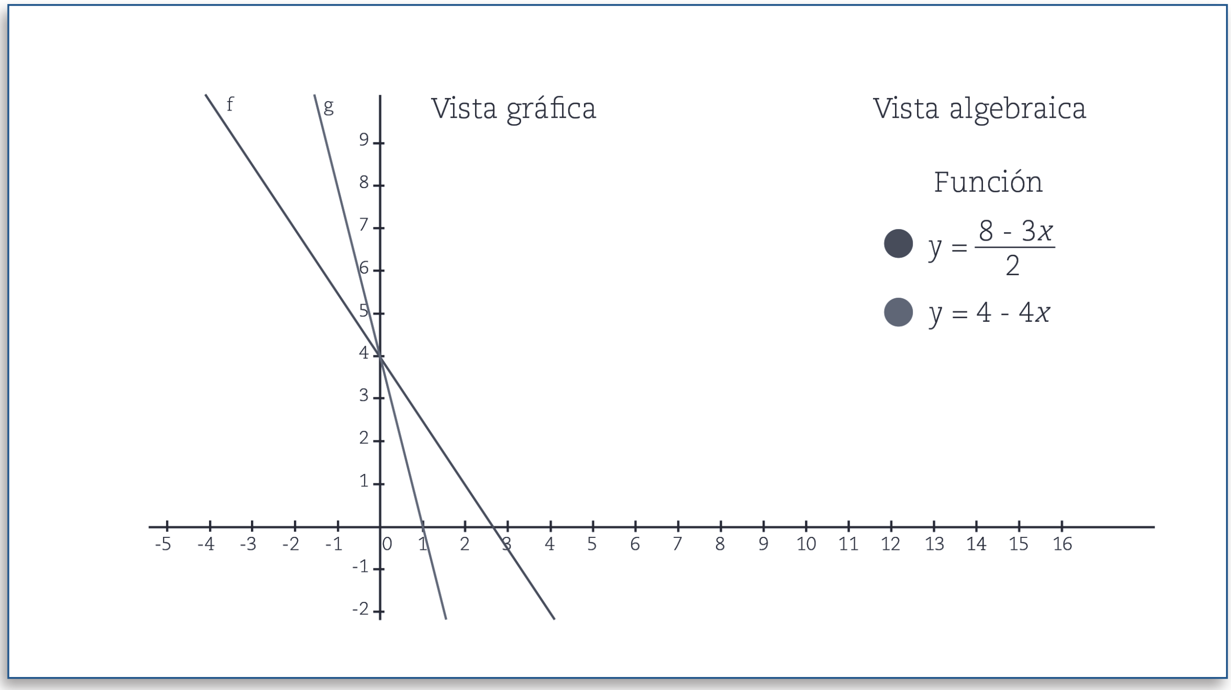
Reactivo 3. Proporcionalidad inversa. El alumno debe reconocer que las cantidades de la situación que se presentan tienen una relación de variación inversamente proporcional. Entre mayor sea el número de pasajeros, más barato cuesta el viaje.

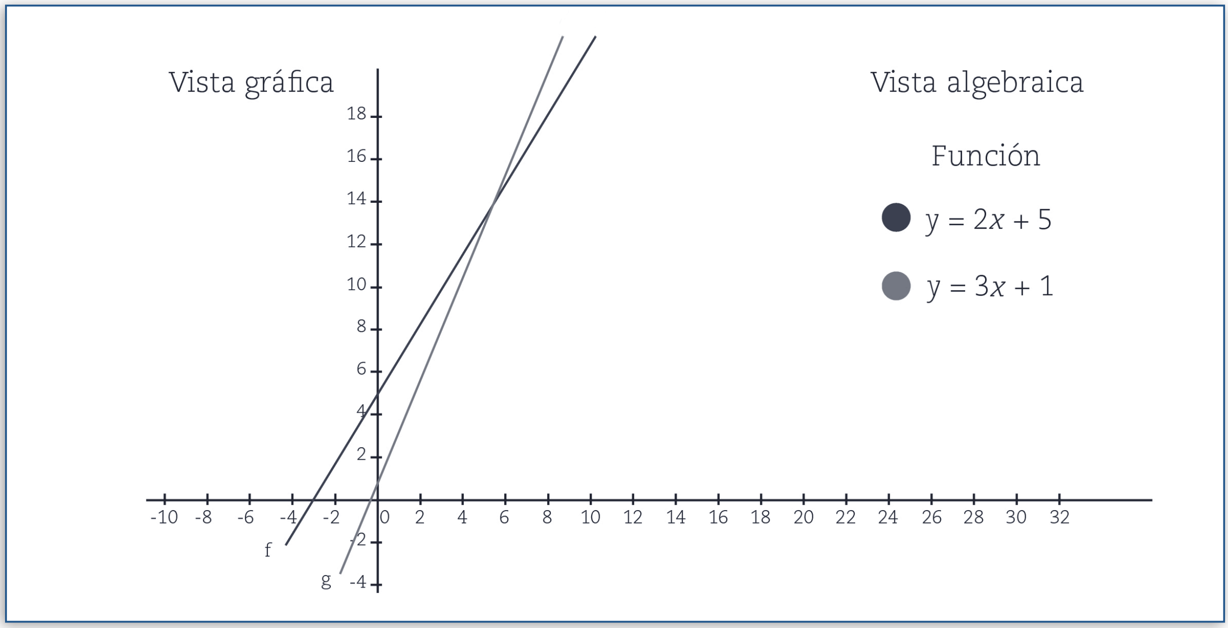
Pasajeros	4	8	10	13	16	22
Costo	$ 3 250	$ 1 625	$ 1 300	$ 1 000	$ 812.5	$ 590

Esta situación presenta una condición que pone límite al costo mínimo por pagar y es la capacidad del autobús: solamente 30 pasajeros lo pueden abordar.



Reactivo 4. Método gráfico de resolución de sistema de ecuaciones. En este reactivo se valora la capacidad del estudiante para aplicar el método gráfico e interpretar la solución. En el primer sistema es necesario despejar de ambas ecuaciones la incógnita *y*. En el caso del segundo sistema, ya están despejadas las ecuaciones, pero para encontrar la solución se requieren valores mayores que 4, y generalmente el estudiante utiliza para tabular los valores de −2 a 2, por lo que se verá en la necesidad de encontrar más puntos hasta que se intersequen las rectas.





Reactivo 5. Conversión de medidas de longitud. En este reactivo se valora la resolución de problemas de medición de longitud y área que implican la conversión entre medidas del Sistema Inglés y del Internacional.

Así, para determinar el costo de la malla que se requiere para cercar la bodega, primero se debe determinar su perímetro:

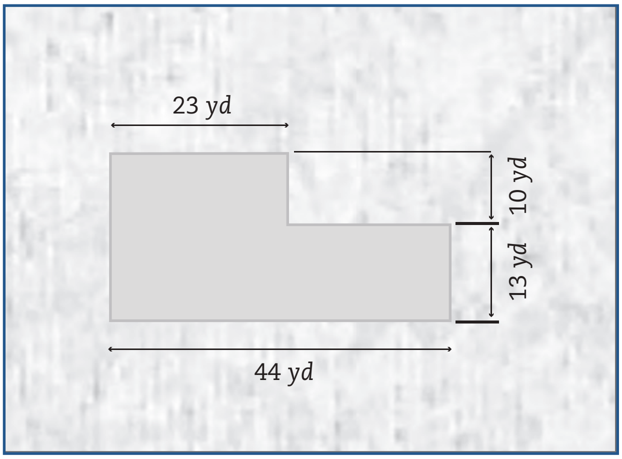
$$23 + 23 + 44 + 13 + 21 + 10 = 134 \text{ yd}$$

que en metros es:

$$134 \times 0.9144 = 122.5296$$

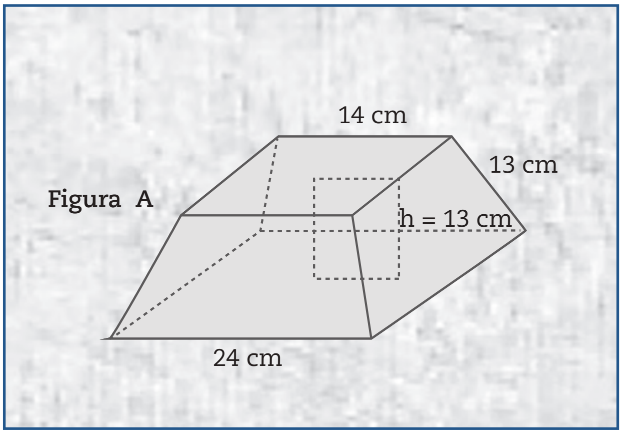
Este resultado se multiplica por el precio del metro de malla, por lo que su costo es de \$17 154.14.

Para determinar el número de losetas que cubrirán el piso de la bodega, se puede proceder determinando el área de la bodega en dos partes, una cuadrada y otra rectangular. La primera mide 13 yd por lado y la segunda es de 11 yd × 13 yd. Por lo tanto, el área es: 312 yd^2.



Reactivo 6. Sucesiones y expresiones equivalentes. Con este reactivo se valora la capacidad del alumno para expresar algebraicamente la regla que genera una sucesión y encontrar expresiones equivalentes, dando cuenta de su habilidad en la manipulación algebraica. En la primera sucesión dos expresiones equivalentes son: $6n + 1 = 3(2n + \frac{1}{3})$.

Reactivo 7. Volumen de prismas rectos. En la determinación del volumen de los cuerpos que se proponen en este reactivo se espera que el alumno muestre el desarrollo de su habilidad para representar cada volumen como la suma de los volúmenes de prismas rectos con bases triangulares y rectangulares, como se estudió en la secuencia. Además, se vincula con el planteamiento de ecuaciones que se viene desarrollando desde primer grado, al expresar las medidas del segundo cuerpo en forma algebraica. El volumen del primer cuerpo es equivalente a la suma de los volúmenes de dos prismas, uno con base rectangular ($5 \times 13 \times 14$) y el otro con base cuadrada ($14 \times 14 \times 13$). Por lo tanto, los resultados son: 910 cm^3 y 2 548 cm^3, respectivamente.



Reactivo 8. Probabilidad clásica. Con este reactivo se puede observar si el alumno determina la probabilidad clásica de un evento. Esto implica determinar el número total de casos, es decir, el espacio muestral; contar el número de casos favorables al evento que se defina y establecer la razón entre estos dos conteos. Una dificultad que tiene este reactivo es considerar que las canicas están numeradas del 0 al 9.

Las respuestas correctas son: a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{3}{5}$; c) El evento que tiene mayor probabilidad es sacar una canica con un número mayor que 3; hay 6 resultados favorables de 10 posibles.

Bloque 2

Secuencia 13 Multiplicación y división de números enteros (LT, págs. 110-115)

Tiempo de realización	3 sesiones
Eje temático	Número, álgebra y variación
Tema	Multiplicación y división
Aprendizaje esperado	Resuelve problemas de multiplicación y división con números enteros, fracciones y decimales positivos y negativos.
Intención didáctica	Que los alumnos desarrollen habilidad para multiplicar y dividir números enteros y sepan usar estas operaciones al resolver problemas.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisual** • *Multiplicación de más de dos números enteros*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recurso audiovisual** • *La multiplicación y división con números enteros, fracciones y decimales positivos y negativos* **Bibliografía** • Iriarte Bustos, M. Dolores *et al.* (1990). "Obstáculos en el aprendizaje de los números enteros", en *Suma*, 7. España.

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Consoliden su conocimiento sobre la multiplicación y la división de números enteros.
- Sesión 2. Deduzcan, mediante la observación de regularidades, que si en una multiplicación de varios factores hay un número par de factores negativos, el producto es positivo; si el número de factores negativos es impar, el producto es negativo.
- Sesión 3. Consoliden su conocimiento sobre la relación inversa entre multiplicación y división.

Acerca de...

El desarrollo de esta secuencia se inicia en la sesión 1 en el contexto de un juego de dados en el que hay puntos a favor y en contra, representados por números enteros positivos y negativos, respectivamente. Los puntos en contra son siempre el mismo número (−7), lo que posibilita el uso de la multiplicación de dos factores, uno positivo y otro negativo. Al mismo tiempo que los alumnos emplean la multiplicación de un número entero positivo por uno negativo, continúan usando la suma y la resta al tener que calcular la diferencia entre puntos a favor y puntos en contra.

Una vez que los alumnos saben calcular el producto de dos números enteros, en la sesión 2 se pasa a la multiplicación de más de dos factores con la idea de que observen que si hay un número par de factores negativos, el producto es positivo; si el número de factores negativos es impar, el producto es un número entero negativo. Para llegar a esta conclusión es necesario que apoye a los alumnos, tanto para comparar los resultados que obtienen como para analizar sus propias conclusiones.

En la sesión 3 se retoma la división de números enteros a través de multiplicaciones en las que se conoce un factor y el producto; se espera que en la actividad 1 los alumnos usen la relación inversa entre multiplicación y división, es decir, que dividan el producto entre el factor conocido para encontrar el otro factor y que obtengan el signo a partir de su conocimiento sobre la multiplicación de números enteros.

En la actividad 2 de esta misma sesión se hace evidente que, a partir de una multiplicación de dos factores, se pueden formular dos divisiones y que la ley de los signos funciona igual para ambas operaciones. La tabla de la actividad 5 es un buen recurso para usar la relación inversa entre la multiplicación y división de números enteros.

Sobre las ideas de los alumnos

Puesto que en primer grado los alumnos ya estudiaron la suma y la resta con números enteros, es posible que confundan estas operaciones con la multiplicación y la división. Por ejemplo, que al multiplicar (–7) (–6) obtengan –13, en vez de 42. Lo mismo sucede cuando se trata de una multiplicación de más de dos factores. Por una parte, para tratar de evidenciar estos errores es conveniente plantear diferentes operaciones con los mismos números. Por ejemplo:
(–7) + (–6) =; (–7) – (–6) =; (–7) (–6) =; (–7) ÷ (–6) =, para esta última operación es necesario insistir en que el resultado puede expresarse con la fracción $\frac{7}{6}$, para contrarrestar la persistencia de usar directamente una expresión decimal como resultado, y no perder de vista ni el significado de la operación ni la aplicación de la regla de los signos.

Por otra parte, a pesar de que la relación inversa entre la multiplicación y la división se estudia desde primaria, suele no estar presente en muchos alumnos cuando se requiere para calcular un factor desconocido, por ello es necesario analizar cada resultado de la tabla de la actividad 5 de la sesión 3, e incluso agregar otros casos, como pueden ser valores de m y n de más de dos cifras, tanto positivos como negativos e incluso 0.

¿Qué material se necesita?

Si es posible vean, en la sesión 3, el audiovisual *Multiplicación de más de dos números enteros* y analicen los ejemplos que aparecen. Como apoyo al trabajo de las sesiones 1 y 2 se recomienda que los alumnos analicen la regularidad de los resultados en las sucesiones de multiplicaciones de números enteros que se presentan.

En el desarrollo de la secuencia, algunas actividades requieren de calculadora; procure que haya al menos una por pareja, pero es necesario controlar su uso. Por ejemplo, en el caso de la actividad 1 de la sesión 2, puede proponer que una pareja del grupo obtenga los valores en la calculadora y que los contrasten con los resultados obtenidos por los demás. O puede pedir que verifiquen con la calculadora los resultados de la actividad 5 de la sesión 3.

¿Cómo guío el proceso?

En la actividad "Para empezar", verifique que los alumnos se dan cuenta de que los puntos en contra siempre son múltiplos de siete y que la división de estos números entre siete es lo que permite saber cuántas veces perdió cada jugador.

Jugador	Puntos a favor	Puntos en contra	Puntuación	Jugador	Puntos a favor	Puntos en contra	Puntuación	¿Quién ganó?
A	75	8(–7) =		B	83	9(–7) =		
C	68	10(–7) =		D	40	6(–7) =		
E	59	8(–7) =		F	75	11(–7) =		
G	93	5(–7) =		H	92	2(–7) =		
I	48	12(–7) =		J	117	10(–7) =		

Una recomendación general para todas las actividades es que no les dé las respuestas a los alumnos ni los ayude a encontrarlas, permita que sean ellos quienes se comprometan a entender lo que se pregunta, a buscar y a encontrar las soluciones. En cambio, sí ayúdelos a comparar los resultados diferentes, favorezca que entre todos decidan cuáles son correctos, cuáles no y por qué.

En la actividad 1 de la sesión 1, es probable que los alumnos no tengan dificultad para encontrar los puntos en contra, pero sí para encontrar la diferencia. Si es necesario, habrá que retomar el estudio de la resta.

La actividad 1 es de práctica, con datos que provienen del mismo juego con dados. Se sugiere analizar los resultados entre todos, enfatizando el uso del paréntesis como signo de multiplicar.

La actividad 3 no sólo sirve para que los alumnos usen la multiplicación entre un número positivo y otro negativo, sino también para pensar en la operación inversa. Si se conoce el doble, el triple o la mitad de un número, ¿cómo hacer para saber de qué número se trata? Es probable que para expresar la mitad de −7 usen el decimal −3.5; en tal caso, vale la pena comentar que también se puede usar el número $-\frac{7}{2}$, de igual manera que para expresar la mitad de n se usa la expresión $\frac{n}{2}$ (n medios). Ésta es, sin duda, una ventaja de la ubicación de este contenido en segundo grado, pues es posible vincularlo con la expresión algebraica y generalizar las reglas.

La actividad 4 es la otra cara de la actividad 1, ahora se tiene el producto y hay que averiguar cuáles son los factores que generan ese producto. Un hecho interesante es que los productos tienen más de una solución entera. Por ejemplo, para −8, las multiplicaciones con números enteros pueden ser 2(–4), (–2) (4), (–8) (1), (–1) (8). Para el producto 45, las multiplicaciones pueden ser 5(9), (–5) (–9), 15(3), (–15) (–3). Se sugiere no dar esta información por anticipado, hay que esperar a que los alumnos la descubran. En caso de que no ocurra, habrá que preguntar: "¿Es la única multiplicación que hay?". Si esta pregunta no surte efecto, habrá que decirles: "Hay otras multiplicaciones que dan el mismo resultado; encuéntrenlas".

La actividad 5 es muy similar a la 4, pero ahora se trata de encontrar divisiones en vez de multiplicaciones. Se espera que los alumnos descubran que para cada cociente hay un infinito número de divisiones enteras. Por ejemplo, para −7, pueden ser: (–7) ÷ 1, 7 ÷ (–1), más todas las divisiones que se obtienen al multiplicar el dividendo y el divisor por el mismo número.

En cada fila de la actividad 6 hay una operación cuyo resultado es distinto a todos los demás, se espera que los alumnos no tengan mucha dificultad para identificarla. En la primera fila son multiplicaciones; en la segunda, divisiones, en la tercera hay ambas y en la cuarta aparecen las cuatro operaciones con los números enteros que se han estudiado.

Las actividades 1 a 4 de la sesión 2 giran en torno a las multiplicaciones de varios factores con números enteros. En un primer momento se trata de que observen las regularidades al resolver las multiplicaciones de la actividad 1, y que luego las usen en las actividades 2 y 3 al escribir multiplicaciones que cumplan con ciertas condiciones. En las actividades 4 y 5 se pretende que los alumnos expliciten en qué casos el resultado de una multiplicación de varios factores es un número positivo y cuándo dicho resultado es negativo. Se espera que después de la revisión que se sugiere en la actividad 5, los alumnos sepan determinar si será positivo o ne-

1. Trabajen en pareja. Anoten el factor que falta en las siguientes multiplicaciones.

a) 7(   ) = 56
b) (   )25 = –100
c) 8(   ) = –280
d) (   )14 = –644
e) –20(   ) = 300
f) (   ) (–75) = 1 875

Enunciado	V	F
a) Si en una multiplicación hay un número par de factores negativos, el resultado es negativo.		
b) Si en una multiplicación hay un número impar de factores negativos, el resultado es positivo.		
c) Si en una multiplicación sólo hay factores negativos, el resultado puede ser positivo o negativo.		

gativo el resultado de la multiplicación que se plantea.

En la actividad 6, la columna encabezada por abc se presta para usar la regla de los signos en multiplicaciones de más de dos factores. Conviene hacer notar que cuando hay uno o tres factores que son números enteros negativos, el resultado es un número negativo. Si hay dos, el resultado es positivo.

La columna $ac(-1)$ se presta para enfatizar que la multiplicación de un número por -1 tiene el efecto de cambiar el signo del número, es decir, obtener su simétrico. Estas situaciones son importantes de analizar porque serán utilizadas por los alumnos en la manipulación algebraica, por ejemplo, $-m = (-1)m$.

Aunque no se plantea en el libro del alumno, realice una revisión colectiva de la actividad 9, con el fin de reflexionar sobre el uso de los signos en multiplicaciones de más de dos factores.

En la actividad 1 de la sesión 3 observe si los alumnos, por cuenta propia, recurren a la división para encontrar el factor que falta. Por ejemplo, en el caso del inciso f): $(\quad)(-75) = 1\,875$, el factor que falta es igual a $1\,875 \div (-75) = -25$. La actividad 2 sirve para consolidar la idea de que con los mismos términos de una multiplicación se pueden formular dos divisiones, porque finalmente se trata de realizar operaciones inversas.

Se sugiere que revisen de manera colectiva los resultados de la tabla de la actividad 5. Asegúrese de que los alumnos tengan claro que en la primera columna y en la primera fila están los factores y en las demás casillas están los productos.

Los problemas de las actividades 7 y 8 ya han sido estudiados en primer grado; sin embago, son propicios para que los alumnos usen las operaciones con números enteros. Ayúdelos a comparar los resultados y a verificar que son correctos. Observe el tipo de procedimientos que usan, pueden ser ecuaciones, operaciones inversas, ensayo y error.

Pautas para la evaluación formativa

Con la finalidad de verificar en qué medida se va logrando la intención didáctica que aparece en la ficha descriptiva, es necesario hacer un registro de lo siguiente:

Ante una multiplicación o una división en la que hace falta uno de los tres términos, los alumnos usan la operación inversa para encontrarlo. Por ejemplo, ante la operación: $(-15)(\quad) = 75$, los alumnos hacen $75 \div (-15) = -5$.

Frente a una multiplicación de más de dos factores, los alumnos determinan rápidamente si el resultado será positivo o negativo.

Debido a la necesidad de resolver problemas como los siguientes: "Encontrar dos números que multiplicados den -20 y sumados den -8. Encontrar dos números cuyo cociente sea -5 y su diferencia sea 12", los alumnos son capaces de encontrar la solución y verificar que es correcta.

¿Cómo apoyar?

Seguramente algunos alumnos necesitarán más ejercicios de práctica que otros, averigüe quiénes son esos alumnos y déjeles trabajo extra para la casa. Es indispensable revisar puntualmente este trabajo para saber dónde están las dificultades y apreciar el avance.

¿Cómo extender?

A los alumnos aventajados pídales que inventen una o más operaciones diferentes que den el mismo resultado, o bien, que imaginen un problema que se resuelva con una operación determinada.

Secuencia 14 Multiplicación y división de números con signo (LT, págs. 116-123)

Tiempo de realización	4 sesiones
Eje temático	Número, álgebra y variación
Tema	Multiplicación y división
Aprendizaje esperado	Resuelve problemas de multiplicación y división con números enteros, fraccionarios y decimales positivos y negativos.
Intención didáctica	Que los alumnos desarrollen habilidad para multiplicar y dividir números positivos y negativos, y sepan usar estas operaciones al resolver problemas.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisual** • *Jerarquía de las operaciones* **Informático** • *Multiplicación y división de números con signo*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recurso audiovisual** • *La multiplicación y división con números enteros, fracciones y decimales positivos y negativos*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Usen la multiplicación de números positivos y negativos en el plano cartesiano en el contexto del trazo de figuras simétricas y/o semejantes.
- Sesión 2. Deduzcan que las leyes de los signos aplicables a la multiplicación y a la división con números enteros son válidas para dichas operaciones con números fraccionarios y decimales, positivos y negativos.
- Sesión 3. Usen la jerarquía de operaciones al operar con números enteros, fraccionarios y decimales positivos y negativos.
- Sesión 4. Usen la multiplicación y división de números enteros, fraccionarios y decimales, positivos y negativos al resolver problemas.

Acerca de...

En esta secuencia no sólo se amplía el estudio de la multiplicación y de la división hacia los números fraccionarios y decimales, positivos y negativos, sino también un tema que ya fue estudiado en primer grado: la jerarquía de las operaciones. Con la finalidad de darle contexto al uso de la multiplicación y de la división con números positivos y negativos, la secuencia inicia con el trazo de figuras en el plano cartesiano, donde los alumnos deberán recuperar conocimientos previos, como la ubicación de puntos y el concepto de coordenadas cartesianas, y vincularlos con lo que están aprendiendo.

Hay que tomar en cuenta que las operaciones con fracciones y decimales ofrecen mayor dificultad que las operaciones con números enteros, en cuyo caso hay que agregar el manejo de los signos y la jerarquía de las operaciones.

Los problemas que se presentan son intramatemáticos, ya que es difícil encontrar contextos reales que le den sentido al tema de estudio. No obstante, suponemos que los problemas numéricos o geométricos lograrán despertar el interés de los alumnos.

Sobre las ideas de los alumnos

Los alumnos han estudiado la construcción de figuras a escala. Es importante que tengan claridad en que, para obtener una figura a escala, es necesario que las medidas de la original se multipliquen por el factor de escala (que siempre es un número positivo) para encontrar las medidas de la copia. Las coordenadas de un punto representan distancias, del punto al eje vertical (primera coordenada) y del punto al eje horizontal (segunda coordenada). Cuando se pide a los alumnos que multipliquen una o las dos coordenadas por un número, es importante que no confundan dicho número con un factor de escala y que tracen las figuras para que vean cómo se transforman, qué relación hay entre ellas, qué se conserva y qué no.

¿Qué material se necesita?

Si es posible, vean, en la tercera sesión, el audiovisual *Jerarquía de las operaciones*; en la sesión 4 se sugiere usar el recurso informático *Multiplicación y división de números con signo*, con el fin de practicar la resolución de problemas que implican la multiplicación y división con números enteros, fraccionarios y decimales.

Algunas actividades requieren el uso de calculadora; procure que haya al menos una por pareja, pero es necesario controlar su empleo.

¿Cómo guío el proceso?

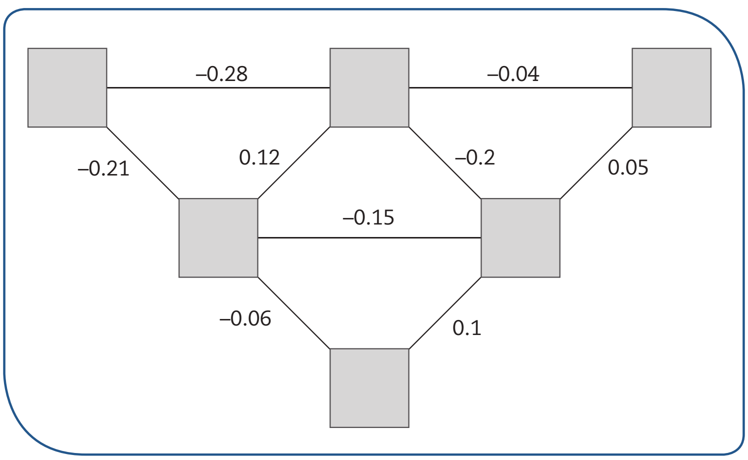
En la actividad "Para empezar", ayúdelos a recordar qué es el plano cartesiano, cuáles son los cuadrantes, qué son las coordenadas. Las actividades 1 y 2 de la sesión 1 se pueden hacer más ágilmente con GeoGebra, pero en caso de no contar con este recurso, se puede usar papel cuadriculado o milimétrico y una regla. Ayúdelos a comparar las figuras que obtuvieron y a que observen la relación que hay entre ellas.

Ponga especial atención a la actividad 4 de la sesión 2, porque las respuestas no son únicas. Observe si los alumnos usan el ensayo y error para encontrar los factores o si fijan uno y, a partir de éste, encuentran el otro. Por ejemplo, en el caso del producto $-\frac{2}{3}$, si se establece que uno de los factores es $\frac{2}{5}$, el otro es el resultado de $-\frac{2}{3} \div \frac{2}{5} = -\frac{10}{6} = -\frac{5}{3}$

Un ejemplo muy simple sobre el uso de la jerarquía de las operaciones consiste en calcular el resultado de $3 + 8 \times 2$ o $3 + 8 \div 2$. Muchos estudiantes dan como resultados 22 y 5.5, respectivamente. Incluso hay calculadoras que dan estos resultados. Sin embargo, habrá quienes digan que los resultados son 19 en el primer caso y 7 en el segundo. También hay calculadoras que arrojan estos resultados. Lo interesante de estos ejemplos es poner a discusión quiénes tienen razón y por qué, lo que da pie a comentar sobre la convención matemática llamada "jerarquía de las operaciones", que se refiere al orden que debe seguirse al efectuar cálculos que contienen varias operaciones, es decir, independientemente del orden en que están escritas.

Se sugiere realizar las actividades 1 a 4 de la sesión 3, tal como están sugeridas y ayudar a los alumnos a comparar y a validar los resultados que encuentren. Hay que destacar que el paréntesis se puede usar como signo de multiplicación y, a la vez, para encerrar operaciones que deben efectuarse antes de quitarlo. Por ejemplo, si en vez de $3 + 8 \times 2$ la expresión fuera $(3 + 8) \times 2$, tendría que hacerse primero la suma y el resultado sería 22. Así, se podría decir que la jerarquía de las operaciones establece un orden que puede alterarse con el uso de los signos de agrupación, es decir, paréntesis, corchetes y llaves.

En las actividades 5 y 6 puede haber dificultades porque es necesario establecer relaciones entre los términos de la multiplicación y los de la



división, además de que los números buscados son decimales menores que 1. No obstante, hay que dar el tiempo necesario para que los propios alumnos encuentren los resultados.

Los problemas de la actividad 1 de la sesión 4 se resuelven usando ecuaciones, pero hay otras maneras de llegar a la solución. Hay que dejar que los alumnos usen el procedimiento que prefieran y ayudarlos a analizar las diferencias en la puesta en común.

En la actividad 8 habrá muchas operaciones para revisar. Se sugiere dar prioridad a las que usen más de dos tarjetas porque es más probable que haya errores.

8. Elige dos o más de las siguientes tarjetas con números y los signos ×, ÷, =, para formar operaciones con su resultado. Tacha las tarjetas que vayas utilizando. Cuando las uses todas, habrás ganado. Anota las operaciones en tu cuaderno.

$-\frac{1}{2}$	-0.2	$\frac{3}{5}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{4}{5}$	$-\frac{3}{4}$	0.5	-34
$\frac{6}{5}$	$-\frac{2}{3}$	-4.6	$-\frac{4}{5}$	$\frac{1}{2}$	6.8	$-\frac{2}{3}$	-2.3

Pautas para la evaluación formativa

En esta secuencia los logros de los alumnos se pueden jerarquizar de la siguiente manera.

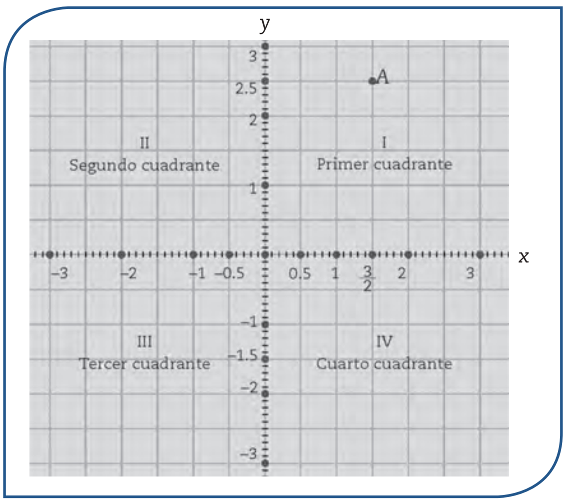
- Resuelven multiplicaciones de dos factores y divisiones. Por ejemplo, $\left(-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{2}{5}\right)$, o $2.5 \div (-3.2)$.
- Resuelven multiplicaciones de más de dos factores. Por ejemplo, $\left(-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{5}{6}\right)$.
- Resuelven operaciones combinadas de suma, resta, multiplicación y división, considerando la jerarquía de las operaciones. Por ejemplo, $2.4 + 1.5(-4.1) - (-6.8 \div 3.4)$.
- Usan correctamente la multiplicación y división de números enteros, fraccionarios y decimales, positivos y negativos al resolver problemas. Por ejemplo: “Pensé un número, lo dividí entre $-\frac{1}{3}$ y el resultado lo multipliqué por $-\frac{1}{5}$. ¿Qué número pensé?”.

¿Cómo apoyar?

Dedique 10 minutos al inicio de la clase, durante dos semanas, para que los alumnos resuelvan ejercicios de cálculo mental. Por ejemplo, -6×0.5; $4\left(-\frac{1}{3}\right)$. Esto permite que los alumnos piensen en cómo relacionar los números que intervienen en la operación.

¿Cómo extender?

Pídales que inventen números u operaciones que cumplan con las condiciones dadas. Por ejemplo, dos números que multiplicados den -3.5; una división cuyo cociente sea $-\frac{3}{5}$; una multiplicación cuyo producto sea $-3\frac{1}{2}$



Secuencia 15 Potencias con exponente entero 1

(LT, págs. 124-131)

Tiempo de realización	4 sesiones
Eje temático	Número, álgebra y variación
Tema	Multiplicación y división
Aprendizaje esperado	Resuelve problemas de potencias con exponente entero y aproxima raíces cuadradas.
Intención didáctica	Que los alumnos usen las leyes de los exponentes al realizar cálculos que implican productos de potencias y potencia de una potencia, así como cociente de potencias; que conozcan de dónde proviene el exponente negativo y cómo se transforma en positivo y utilicen e interpreten la notación científica.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisual** • *Potencias* **Informático** • *Potencias*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recurso audiovisual** • *Potencias con exponente entero y la raíz cuadrada*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Elaboren y utilicen procedimientos para calcular potencias y sus términos.
- Sesión 2. Deduzcan la regla para encontrar el producto de dos potencias de la misma base y la potencia de una potencia.
- Sesión 3. Deduzcan la regla para calcular el cociente de dos potencias de la misma base, expliquen el origen del exponente negativo y cómo éste se puede convertir en positivo.
- Sesión 4. Interpreten, expresen, comparen y operen con cantidades escritas en notación científica.

Acerca de...

El estudio de esta secuencia se inicia con un problema que permite el uso de la potenciación para encontrar el resultado. La primera sesión se centra en familiarizar a los alumnos con los términos de la potenciación y con el análisis de la relación entre dichos términos, sin entrar en el estudio de las operaciones inversas.

Enseguida se estudia la multiplicación de potencias que tienen la misma base, y para eso se recurre a las expresiones multiplicativas de las potencias con el fin de observar que, por ejemplo, $2^3 \times 2^2 = (2 \times 2 \times 2)(2 \times 2)$, es decir, $2^{3+2} = 2^5$.

El producto de potencias de la misma base sirve como apoyo para resolver potencias de potencias. Por ejemplo,

$(3^2)^3 = 3^2 \times 3^2 \times 3^2 = 3^{2+2+2} = 3^{2\times3} = 3^6$

Posteriormente, se pasa al cociente de potencias de la misma base y de allí al exponente negativo y su conversión en positivo, así como al exponente cero.

Para concluir el estudio de esta secuencia, se retoma el uso de la potenciación en la notación científica.

Sobre las ideas de los alumnos

Debido a que la potenciación es una operación que simplifica la multiplicación de factores iguales, los alumnos tienden a confundirla con la multiplicación, que simplifica la suma de sumandos iguales. Por ejemplo, confunden

$3^5 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ con

$3 \times 5 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3$.

En el primer caso, 3 se repite cinco veces como factor, mientras que en el segundo el 3 se repite cinco veces como sumando.

Los alumnos suelen aplicar la regla del producto de potencias de la misma base aun cuando las potencias no tienen la misma base, o bien suelen aplicar dicha regla a las potencias de potencias. Para eliminar esta confusión, es conveniente no limitarse a memorizar la regla, sino a analizar y desarrollar los productos o las potencias de potencias para ver de dónde surge el resultado final.

Sin duda, la división de potencias de la misma base tiene mayor dificultad que la multiplicación. Una de las complicaciones es que, cuando se usa el método de cancelación, no resulta claro por qué queda 1 (en el numerador o en el denominador) cuando se cancelan todos los factores. Por ejemplo, $\frac{2^3}{2^4} = \frac{2\times2\times2}{2\times2\times2\times2} = \frac{1}{2}$. ¿Por qué queda 1 al cancelar los tres factores que hay en el numerador? ¿Por qué $2^{-1} = \frac{1}{2}$? Son preguntas que la mayoría de los estudiantes se hacen, y si no las plantean ellos mismos, es importante que el maestro lo haga, ya que influirá en la resolución de futuras operaciones.

¿Qué material se necesita?

De ser posible vean, en la segunda sesión, el audiovisual *Potencias*. Y en la cuarta sesión se sugiere también el recurso informático *Potencias*. Algunas actividades requieren de calculadora, procure que haya al menos una por pareja, pero es necesario controlar su uso.

¿Cómo guío el proceso?

Pida a los alumnos que contesten la pregunta que aparece en "Para empezar" sin usar la calculadora. Es probable que muchos escriban la multiplicación con 12 factores iguales. Pregunte: "¿No habrá otra manera más simple de expresar esa operación?". Las respuestas y los comentarios que se hagan permitirán dar entrada a la potenciación.

Apoye a los alumnos en la actividad 3. Es probable que en el grupo haya diferentes tipos de calculadoras, y se trata de saber qué hacer con ellas para calcular potencias. Pida que se apoyen unos a otros. Observe, en esta actividad, si los alumnos son capaces de leer números del orden de los miles de millones; en caso de que no, aproveche para retomar este asunto. Observe lo que hacen en la tabla de la actividad 4, cuando saben que la base es 20 y la potencia 160 000. ¿Cómo averiguar el exponente cuando se conoce la base y la potencia? Sabemos que esta operación es la logaritmación ($\log_{20} 160\,000 = 4$), lo que significa que el exponente al que hay que elevar la base 20 para obtener 160 000 es 4. Aunque el programa no contempla el estudio de la logaritmación, los alumnos pueden entender en qué consiste el problema de averiguar el exponente cuando se conoce la base y la potencia, y resolverlo por ensayo y error.

En la actividad 6 los alumnos tienen la oportunidad de comparar y comprender lo que cada operación significa. Pregúnteles qué sucedería si el valor de la literal, en este caso n, fuera 1. ¿Seguiría produciendo el mayor número la misma expresión?

En la actividad 7 pueden generarse varias respuestas y, a partir de ellas, establecer patrones para determinar la terminación de los resultados de las potencias, considerando la última cifra del número que aparece en la base. Por ejemplo, las potencias de 1, 11, 21, 31, etcétera, terminan en 1. Como también ocurre para los números terminados en 9 (81, 361, 841, etcétera). De esta manera se promueve la comprensión del significado de la potencia.

Dé el tiempo necesario para que los alumnos resuelvan la actividad 1 de la sesión 2. Se espera que logren entender que "un número elevado al cubo, multiplicado por el mismo número elevado a la cuarta" equivale a decir "un número elevado a la séptima". Con esta base pueden, por ensayo y error, encontrar el número que elevado a la séptima da 128. El problema 1b es similar. De aquí se puede explicar que en ambos casos se trata de productos de potencias de la misma base, $a^3 \times a^4$ en el primer caso, y $a^2 \times a^3$ en el segundo caso, lo que equivale a $a^{3+4} = a^7$ y $a^{2+3} = a^5$, respectivamente.

La resolución de las tablas de las actividades 2 y 4 ayudarán a entender mejor la explicación anterior.

La actividad 7 sirve para verificar cuánto han entendido los alumnos sobre el producto de potencias de la misma base y la potencia de una potencia, pero es importante que sean ellos los que encuentren las respuestas.

Para que los alumnos entiendan que el cociente de dos potencias de la misma base es igual a la base elevada a la diferencia de los exponentes, es necesario usar el método de cancelación. Por ejemplo, $\frac{3^3}{3^4} = \frac{a \times a \times a}{a \times a \times a \times a} = \frac{1}{3} = 3^{3-4} = 3^{-1}$. Pareciera que no es tan difícil entender que si se cancelan tres factores en el numerador (dividendo) y tres en el denominador (divisor), el resultado es $\frac{1}{3}$, puesto que, en el caso del numerador, $3 \times 3 \times 3 = 3 \times 3 \times 3 \times 1$. Por otra parte, este mismo resultado se obtiene al restar al exponente del dividendo, el exponente del divisor.

Una vez que los alumnos logran formular la regla anterior, entenderán el origen del exponente negativo y su equivalencia con una fracción unitaria cuyo denominador es la misma expresión con exponente positivo.

Después de completar la tabla de la actividad 1, sesión 3, la actividad 2 es fundamental para socializar los procedimientos y resultados encontrados por los alumnos. En particular, en el caso de $\frac{18^4}{18^4}$ sería interesante pedirles que den el resultado sin hacer ningún cálculo. ¿Lograrán ver que el resultado es 1, puesto que el dividendo y el divisor son iguales? Además, vale la pena analizar que $\frac{18^4}{18^4} = \frac{18 \times 18 \times 18 \times 18}{18 \times 18 \times 18 \times 18} = \frac{1}{1} = 1 = 18^{4-4} = 18^0$, de donde se concluye que todo número elevado a la potencia cero es igual a 1.

Es probable que las actividades 1 a 3 de la sesión 4 no tengan dificultad para los alumnos, lo que significaría que han entendido la escritura y lectura de números, a lo que agregarán la notación científica. De lo contrario, habrá que regresar a revisar cómo se escriben los números con muchas cifras, del orden de los millones, miles de millones, billones, etcétera. Será necesario que se acostumbren a separar las cifras, de tres en tres, con un espacio; comente a los alumnos que no es correcto usar coma de acuerdo con las normas del Sistema Internacional de Medidas (SI).

Si lo considera necesario, agregue otros casos en la actividad 4. Por ejemplo, la deuda pública es de casi 11 billones de pesos, "¿cómo se escribe esta cantidad en notación científica?". La mayoría de las bacterias alcanzan un diámetro de un micrómetro, es decir, una millonésima parte de un metro. "¿Cómo se escribe esta cantidad en notación científica?". Al analizar estos ejemplos, debe quedar claro que la notación científica es de la forma $A \times 10^n$ y que A debe ser un número mayor o igual que 1 y menor que 10.

Pautas para la evaluación formativa

Observe si los alumnos pueden:

- Calcular potencias de exponente entero mediante cálculo mental, escrito y con calculadora.
- Calcular productos de potencias de la misma base y potencias de potencias.
- Discriminar los productos de potencias que no tienen la misma base y decidir no aplicar la regla.
- Calcular cocientes de potencias de la misma base. Discriminar cocientes de potencias que no tienen la misma base y decidir no aplicar la regla.
- Convertir exponentes negativos en positivos.
- Expresar, leer e interpretar cantidades en notación científica.

¿Cómo apoyar?

En caso de que algunos alumnos no logren usar la calculadora para calcular potencias, puede ponerlos a trabajar en pares para que socialicen sus aprendizajes. Para fortalecer el uso de las leyes de los exponentes, ponga ejercicios que les permitan distinguir cuándo son aplicables y cuándo no.

¿Cómo extender?

Plantee ejercicios en los que se deba calcular el exponente cuando se tiene la base y la potencia. Pida a los alumnos que averigüen cómo se hace con la calculadora. Plantee operaciones con literales en las que se pueda, o no, aplicar las leyes de los exponentes.

Si tienen acceso a internet, pídales que busquen cantidades muy grandes o muy pequeñas y que pasen de la escritura decimal a la notación científica, o a la inversa.

Secuencia 16 Raíz cuadrada de números cuadrados perfectos (LT, págs. 132-137)

Tiempo de realización	3 sesiones
Eje temático	Número, álgebra y variación
Tema	Multiplicación y división
Aprendizaje esperado	Resuelve problemas de potencias con exponente entero y aproxima raíces cuadradas.
Intención didáctica	Que los alumnos comprendan la relación inversa entre potenciación y radicación, y que usen la raíz cuadrada al resolver problemas.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	Audiovisual • *Raíz cuadrada de un número*
Materiales de apoyo para el maestro	Recurso audiovisual • *Potencias con exponente entero y la raíz cuadrada*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Comprendan y usen la relación inversa entre la operación de elevar un número o una expresión al cuadrado y obtener la raíz cuadrada de dicho número o expresión.
- Sesión 2. Sistematicen el procedimiento de ensayo y error para aproximar raíces cuadradas.
- Sesión 3. Usen la raíz cuadrada al resolver problemas y que se acerquen a la idea de número irracional.

Acerca de…

Las primeras actividades de esta secuencia apuntan a que los alumnos comprendan y usen la relación inversa entre elevar al cuadrado y obtener la raíz cuadrada, en particular tomando como contexto el área de diferentes cuadrados. Además, se busca que estimen la raíz cuadrada de números naturales que son cuadrados perfectos por la vía de encontrar el número que multiplicado por sí mismo produce el radicando.

En seguida se muestra una manera de sistematizar el procedimiento de ensayo y error para calcular la raíz cuadrada de números con varias cifras, por la vía de encontrar rangos cada vez más cercanos a la raíz cuadrada.

Finalmente, se plantean algunos problemas en los que los alumnos tendrán necesidad de usar la raíz cuadrada y conocerán una caracterización de los números irracionales, sólo para contrastar este tipo de números con los que son cuadrados perfectos.

Sobre las ideas de los alumnos

Elevar al cuadrado y obtener raíz cuadrada no tienen el mismo uso social que sumar y restar o multiplicar y dividir, por lo tanto los alumnos están menos familiarizados con estas operaciones y no les resulta evidente en qué tipo de problemas las pueden usar. Los casos que resuelven con menor dificultad son las raíces cuadradas de números que son cuadrados perfectos, de manera que esta secuencia se centra en el estudio de esos números.

Cuando los alumnos usan el procedimiento de ensayo y error, la mayoría lo hace al azar. Para evitar esto, resulta muy útil que se acostumbren a ordenar sus ideas. Por ejemplo, si se trata de encontrar la raíz cuadrada de 484, es muy probable que hagan varias multiplicaciones al azar, en vez de pensar que $20 \times 20 = 400$ y, por lo tanto, el resultado es cercano a 20.

Como en cualquier operación, una cosa es saber efectuarla y otra saber usarla al resolver problemas. Por eso ambos aspectos deben ir de la mano. Los alumnos necesitan tiempo para analizar y entender en qué consiste el problema, con qué información cuentan para resolverlo, cómo pueden usar esa información y cómo estar seguros de que el resultado al que llegaron es correcto, pues en él intervienen los procesos de comprobación y, por tanto, el uso de las operaciones inversas.

¿Qué material se necesita?

Algunas actividades requieren el uso de calculadora; procure que haya al menos una por pareja, pero es necesario controlar su uso. Si cuenta con el audiovisual *Raíz cuadrada de un número*, lo puede utilizar para que los alumnos conozcan más sobre esta operación.

¿Cómo guío el proceso?

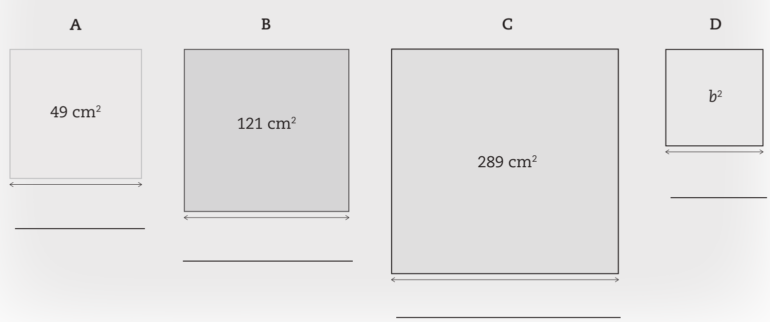
Se sugiere no permitir la calculadora en la actividad 4 de la sesión 1. Se trata de números pequeños cuya raíz cuadrada se puede encontrar sin necesidad de hacer muchas operaciones. En cambio, las actividades 4b y 4c sí requieren usar calcula dora. En la actividad 4d, es importante que los alumnos concluyan, en primer lugar, que la medida buscada es mayor que 3 cm y menor que 4 cm, lo que significa que no es una medida entera (o que corresponda a un número natural). Pídales, entonces, que busquen un número con una cifra decimal, pero que, al elevar al cuadrado, dé la medida; el resultado no debe ser mayor que 12. Llegarán a concluir que la medida es mayor que 3.4 cm, pero menor que 3.5 cm.

Pídales que busquen otra cifra decimal (la de centésimos). Se trata de que vean que, entre más cifras decimales tiene la medida buscada, se acercan más a 12. Pregunte entonces: "Si seguimos buscando más cifras decimales, ¿llegaremos a obtener 12?". Si los alumnos dicen que sí, déjelos que prueben hasta que se convenzan de que no es posible llegar a 12, de manera que hay que optar por dar una medida aproximada, o expresarla como $\sqrt{12}$ cm, que se lee, "raíz cuadrada de doce centímetros". Este caso se plantea sólo para que los alumnos vean que hay otro tipo de números además de los que son cuadrados perfectos. En especial en la actividad 6, las dos últimas raíces permitirán a los alumnos reflexionar sobre el hecho de que la operación inversa a elevar al cuadrado es la raíz cuadrada y como resultado queda el número 5 o a.

Las actividades 1 y 2 de la sesión 2 son complementarias. Una vez que los alumnos realizan el procedimiento propuesto, se espera que logren explicar en qué consiste. Se sugiere leer en voz alta algunas explicaciones para socializar que la idea central es ir "encerrando" la raíz para tener una aproximación cada vez más precisa. Es importante observar si, en las actividades que siguen, los alumnos usan este recurso y, en todo caso, tenerlo presente cuando la situación se preste. Precisamente la actividad 3 puede resolverse de manera más ágil con el procedimiento de las aproximaciones sucesivas.

Observe cómo se desenvuelven los alumnos en la actividad 6 y brinde la ayuda necesaria, preferentemente durante la puesta en común. En teoría, no debería haber problema para resolver lo que se pide, pero, así como algunos alumnos tienen dificultad para formular dos divisiones con los mismos términos de una multiplicación, también puede haber dificultad en el caso de estas operaciones.

4. Calculen la medida de un lado de cada cuadrado y anótenla donde corresponda. Después hagan lo que se indica.



Dé el tiempo necesario para que resuelvan los problemas 1a y 1b de la sesión 3, y después ayúdelos a analizar los procedimientos y resultados encontrados. Se espera que la mayoría logre encontrar el valor de a y el de b, puesto que conocen el área de los cuadrados que se forman.

La diagonal del cuadrado

1. Trabajen en equipo. Resuelvan los siguientes problemas.
   a) El área del cuadrado cuyo lado mide *a* es 2 500 cm². El área del cuadrado cuyo lado mide *b* es 1 600 cm².
   - ¿Cuál es el valor de *a*? ____________________
   - ¿Cuál es el valor de *b*? ____________________
   - ¿Cuál es el área de uno de los rectángulos azules? ________________
   - ¿Cuáles son las dimensiones de uno de los rectángulos azules?
     Largo: __________ Ancho: __________

Observe si se percatan de que deben calcular la raíz cuadrada de 2500 y de 1600, respectivamente. Contenga sus ansias de decirles cómo hacerlo. Deje que disfruten de su propio mérito.

Calcular el área del rectángulo azul no es una tarea simple, porque antes hay que averiguar sus dimensiones y para ello hay que hacer inferencias. La primera inferencia es que si $a = 50$ cm y $b = 40$ cm, los 10 cm de diferencia se reparten a la derecha y a la izquierda del cuadrado rojo, de manera que el ancho del rectángulo azul es 5 cm. La otra inferencia es que si a a se le restan los 5 cm de la izquierda, quedan 45 cm de los que, repartidos en tres rectángulos azules, le tocan 15 cm a cada uno, por lo que el largo mide 15 cm.

Observe si en el problema 1b los alumnos convierten $21\frac{1}{8}$ a decimal, pues esto les facilitará calcular el área del rectángulo y, posteriormente, la medida de un lado del cuadrado.

Lea junto con ellos la información del recuadro y aclare las dudas que surjan o plantee preguntas adicionales para asegurarse de que han entendido. Sólo si lo considera necesario, explique la diferencia entre número irracional y número racional. Algunos racionales como $\frac{1}{6} = 1.166\ldots$, tienen una parte decimal infinita, pero hay una cifra (en este caso el 6), o un grupo de cifras que se repiten. En los irracionales no sucede lo mismo, no hay una cifra ni un grupo de cifras que se repitan. Por ejemplo, $\sqrt{12} = 1.414213562\ldots$ Estos números no pueden expresarse mediante una razón $\frac{a}{b}$.

Para contestar la pregunta 3b), los alumnos deben averiguar que el cuadrado azul se forma con cuatro triángulos que son la mitad del área del cuadrado rojo; por lo tanto, el cuadrado azul es dos veces el área del cuadrado rojo. Una vez resuelto este paso, pueden averiguar cuánto miden los lados del cuadrado azul.

Pautas para la evaluación formativa

Use las actividades que considere convenientes para verificar si los alumnos son capaces de:

- Calcular la medida de un lado de un cuadrado conociendo el área y calcular la raíz cuadrada de números que son cuadrados perfectos.
- Usar, en caso necesario, la relación inversa entre elevar al cuadrado y obtener raíz cuadrada.
- Resolver problemas que requieran el uso de la raíz cuadrada.

¿Cómo apoyar?

A los alumnos que muestren dificultad propóngales ejercicios para que usen el cálculo mental, tanto de elevar al cuadrado, como de obtener raíz cuadrada. Cuando se trate de resolver problemas, sugiérales que tracen las figuras que puedan servirles como apoyo gráfico.

¿Cómo extender?

Pida a los alumnos que usen la calculadora para aproximar raíces cuadradas hasta con dos cifras decimales.

Propóngales expresiones como $2^3 = 8$; $3^4 = 81$, y pídales que, en cada caso, usen los mismos términos para escribir la operación inversa.

Pídales que inventen un problema que se pueda resolver utilizando la raíz cuadrada.

Secuencia 17 Reparto proporcional

(LT, págs. 138-143)

Tiempo de realización	3 sesiones
Eje temático	Número, álgebra y variación
Tema	Proporcionalidad
Aprendizaje esperado	Resuelve problemas de proporcionalidad directa e inversa y de reparto proporcional.
Intención didáctica	Que los alumnos resuelvan problemas que implican un reparto proporcional.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisual** • *¿Cuánto le toca a cada quién?* **Informático** • *Repartos proporcionales*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recurso audiovisual** • *La proporcionalidad directa e inversa y el reparto proporcional*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Resuelvan problemas de reparto proporcional de cantidades continuas (rectángulo que representa un terreno).
- Sesión 2. Resuelvan problemas de reparto proporcional de cantidades discretas (cantidad de nueces o almendras).
- Sesión 3. Resuelvan problemas diversos que implican repartos proporcionales.

Acerca de...

En primaria y en primer grado de secundaria los alumnos trabajaron con problemas de proporcionalidad directa. En el bloque 1 de este segundo grado se iniciaron en el trabajo con la proporcionalidad inversa. En esta secuencia seguirán profundizando su estudio en este tema al resolver problemas de reparto proporcional, por ejemplo, distribuir proporcionalmente la ganancia de un negocio entre varias personas que hayan hecho aportes diferentes para la inversión inicial.

Es importante mencionar que en este tipo de problemas se integran varios contenidos, en particular el uso de fracciones y de la fracción como operador, ya que para resolverlos los alumnos tienen que:

1) Determinar qué parte de una cantidad es otra, por ejemplo, ¿qué parte de 12 es 8? En este caso, 8 es $\frac{2}{3}$ de 12.
2) Determinar el valor de cierta fracción de número, por ejemplo, cuánto es $\frac{3}{5}$ de 20.

Los alumnos podrían intuir que un reparto justo es un reparto proporcional. Supongamos que se quiere repartir nueces a dos equipos con distinta cantidad de integrantes. Una primera idea es que el equipo que tiene más integrantes debería recibir más nueces. Y la segunda es que se requiere calcular cuántas nueces más deben recibir. No obstante, la idea de reparto proporcional implica que los alumnos no sólo determinen quiénes recibirán más nueces, sino también que calculen cuántas más. En algunos casos es sencillo: si un equipo tiene la mitad del número de integrantes que otro equipo, al hacer un reparto proporcional el primero recibirá la mitad de lo que reciba el segundo. Y en otros puede resultar más complicado: si un equipo tiene 3 integrantes y el otro 5, ¿cómo repartir 16 nueces proporcionalmente al número de integrantes?

Las razones implícitas en los repartos proporcionales son equivalentes. En el problema anterior, al primer equipo se le darán 6 nueces y al segundo 10, y la igualdad de las razones de alumnos a nueces queda expresada por:

$$\frac{3}{6} = \frac{5}{10}$$

Sobre las ideas de los alumnos

La manera en que los alumnos resuelven los problemas de reparto puede verse influida por el contexto. Por ejemplo, puede pasar que entre varios alumnos compren algo y no se fijen en quién aportó más y luego repartan lo comprado por partes iguales, es decir, hacen un reparto equitativo. En cambio, cuando se les plantea la situación de cuánto dinero deben recibir varias personas por su trabajo, pueden reconocer que lo justo es que se le pague más a quien trabajó más.

¿Cómo guío el proceso?

En la actividad 1 de la primera sesión permita que los alumnos dividan los rectángulos sin decirles cómo. Los repartos planteados van aumentando en complejidad. En el primero sólo deben dividir a la mitad el rectángulo porque cada persona puso la misma cantidad. El reparto del terreno 2 implica la mitad y dos cuartos. El reparto del terreno 3 es más complejo, quizá los alumnos no tengan problemas en determinar que a Jessica le corresponde la mitad del terreno, pero en cuanto a la otra mitad, tendrán que averiguar: ¿qué parte de \$30000 es \$20000?, esto es, $\frac{2}{3}$ le tocan a Christian y $\frac{1}{3}$ a Laura. Indique que no es necesario que los trazos sean muy precisos, pero sí que permitan apreciar en la figura que la parte de Christian es, aproximadamente, el doble de la que le corresponde a Laura.

El reparto más complejo es el del terreno 6. Los alumnos tienen que determinar qué parte de 60000 son 20000, 12000, 24000 y 4000. Para hacerlo, pueden seguir varios procedimientos. Uno de ellos es dividir cada cantidad entre 60000.

A Lourdes le toca $\frac{20\,000}{60\,000} = \frac{1}{3}$, es decir, la tercera parte del terreno.

A Blanca le toca $\frac{12\,000}{60\,000} = \frac{1}{5}$, o sea, la quinta parte del terreno.

Como Andrés cooperó con el doble de lo de Blanca, se espera que los alumnos noten que le toca el doble, es decir, $\frac{2}{5}$ partes del terreno.

Con Guillermo pueden proceder de varias maneras, por ejemplo:

a) Con la división:

$$\frac{4\,000}{60\,000} = \frac{1}{5}$$

b) Guillermo puso la tercera parte de lo que puso Blanca, le toca la tercera parte de $\frac{1}{5}$, es decir $\frac{1}{15}$

c) Al repartir lo de Lourdes, Blanca y Andrés se tiene:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{5}{15} + \frac{3}{15} + \frac{6}{15} = \frac{14}{15}$$

Lo que queda del terreno es $\frac{1}{5}$

Observe que, en general, los problemas de repartos proporcionales son una buena oportunidad para recordar y practicar el trabajo con fracciones. Indique a los alumnos que, en algunos casos, es mejor trabajar con fracciones para no tener que hacerlo con decimales periódicos.

Sugerencia: en la puesta en común enfatice que si dos personas compran un pastel, pero una de ellas sólo coopera con la tercera parte del costo, obtendrá un tercio del pastel y la otra los otros dos tercios. En cambio, si cada una cooperara con la mitad, obtendría $\frac{1}{2}$ del pastel.

Esta idea acerca del doble, la tercera, cuarta o quinta parte debe ser recurrente a lo largo del trabajo con esta secuencia.

En la sesión 2 es probable que algunos alumnos piensen que tienen que averiguar desde el principio la cantidad que les toca de nueces, almendras y pistaches a cada equipo. Aclare que eso lo harán hasta la actividad 3.

Se pretende que los alumnos continúen trabajando con la idea de repartos proporcionales. Si un equipo tiene el doble (triple, cuádruple, etcétera) de integrantes que otro equipo, al primero le toca el doble (triple, cuádruple, etcétera) de nueces, almendras y pistaches que al segundo.

Además de trabajar las ideas expuestas anteriormente, es importante que enfatice que la suma de lo que recibe cada equipo debe coincidir con el total de lo que se repartió. La tabla

3. Si va a repartir también 200 gramos de piñones y 250 gramos de cacahuates, escriban lo que debe darle a cada equipo.

Equipo / Semilla	1	2	3	4	5	Total
Piñones (gramos)						200
Cacahuates (gramos)						250

de la actividad 3 permitirá trabajar esta idea al indicar el total; pida que se verifique si al sumar se obtiene el total de gramos de piñones y de cacahuates. Relacione esta idea con la sesión anterior: el terreno se repartía completo entre todos los que lo compraron.

Un procedimiento que puede surgir en los problemas de reparto de la sesión 2 es el cálculo de lo que le toca a un alumno. Por ejemplo, en total hay 25 alumnos y 75 nueces, por lo tanto, a cada alumno le tocan tres nueces, entonces al equipo 1 le darán 6 × 3 = 18 nueces, al equipo 2 le darán 5 × 3 = 15 nueces, etcétera.

En la sesión 3, con el fin de que practiquen los alumnos, se recomienda resolver los problemas del recurso informático *Repartos proporcionales*.

Pautas para la evaluación formativa

Observe el trabajo de los alumnos para detectar si:

- Identifican la variable independiente de los problemas (cantidad que aportó cada quien para comprar el terreno, número de integrantes del equipo, horas trabajadas, cantidad de pared que pintaron, etcétera).
- Identifican la variable dependiente (la cantidad de terreno que les toca depende de lo que aportaron; la cantidad de nueces depende del número de integrantes; la ganancia depende de las horas trabajadas o de la cantidad de pared que pintaron, etcétera).
- Determinan qué fracción de una cantidad es otra: qué fracción de 60 000 son 20 000 (por ejemplo).
- Pueden calcular determinada fracción de una cantidad: ¿cuánto es $\frac{3}{5}$ de 75?

¿Cómo apoyar?

Estos problemas pueden resultar complejos para los alumnos porque involucran varios contenidos matemáticos trabajados con anterioridad y también requieren desarrollar un razonamiento proporcional.

Si observa que les cuesta trabajo, puede apoyarlos con algunas preguntas que los hagan reflexionar y analizar las situaciones:

- ¿De qué depende la parte del terreno que le toca a cada uno?
- ¿Cómo podrías determinar esa parte?, ¿crees que te pueden ayudar las fracciones?, ¿cómo?, ¿cómo puedes saber qué parte de 60000 es 12000?

Si los alumnos tienen dificultad para trabajar con fracciones en alguno de los problemas, puede hacer un alto y repasar en grupo lo que les esté costando trabajo.

¿Cómo extender?

Solicite que inventen un problema de reparto proporcional. Elija algunos y plantéelos al grupo para resolverlos y discutirlos.

Secuencia 18 Figuras geométricas y equivalencia de expresiones 2 (LT, págs. 144-149)

Tiempo de realización	3 sesiones
Eje temático	Número, álgebra y variación
Tema	Patrones, figuras geométricas y expresiones equivalentes
Aprendizaje esperado	Formula expresiones de primer grado para representar propiedades (perímetros y áreas) de figuras geométricas, y verifica equivalencias de expresiones, tanto algebraica como geométricamente (análisis de las figuras).
Intención didáctica	Que los alumnos ensayen, manipulen y validen diferentes representaciones algebraicas de primer grado que son equivalentes para obtener el perímetro de una figura geométrica o de su área.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisuales** • *Expresiones algebraicamente equivalentes* • *Otras expresiones algebraicamente equivalentes* **Informático** • *Expresiones equivalentes 2*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recurso audiovisual** • *Expresiones de primer grado para representar propiedades de figuras geométricas y equivalencia de expresiones*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Manipulen expresiones algebraicas para encontrar expresiones equivalentes que corresponden al perímetro de figuras geométricas o de su área.
- Sesión 2. Transformen expresiones algebraicas en otras que sean equivalentes, empleando propiedades de la igualdad que les permiten garantizar que son equivalentes.
- Sesión 3. Apliquen la noción de equivalencia para obtener expresiones algebraicas equivalentes a partir de expresiones determinadas o al calcular el perímetro y el área de composición de figuras geométricas.

Acerca de...

Ésta es la segunda de dos secuencias dedicadas a fortalecer la noción de equivalencia de expresiones algebraicas en el contexto de obtener el perímetro y el área de figuras geométricas mediante transformaciones algebraicas. Las expresiones algebraicas que se obtienen son, generalmente, las fórmulas para calcular el perímetro y el área de las figuras geométricas; sin embargo, el trabajo se centra en buscar expresiones equivalentes a esas fórmulas a partir de las distintas medidas y características de las figuras o de la composición de figuras que se proponen, lo cual implica para el alumno la necesidad de manipular y transformar las expresiones algebraicas. Si bien aún se sigue recurriendo a contextos geométricos, se dejarán gradualmente para dar paso a situaciones algebraicas, como ocurre en la sesión 3.

La equivalencia de expresiones algebraicas es una idea matemática fundamental en este grado y en el nivel de secundaria, sustentada en las propiedades de la igualdad. En particular, las actividades propuestas en esta secuencia, junto con las de la secuencia 7 y las secuencias 6 y 19 (que forman el trayecto formativo relacionado con sucesiones), se complementan para que los alumnos logren la noción de equivalencia y puedan luego asimilar procesos como la factorización de expresiones algebraicas, así como comprender y manipular los procedimientos que se les presentarán en la resolución de ecuaciones y funciones.

Los alumnos deben comprender que una solución puede obtenerse de diversas maneras, siempre y cuando se apliquen correctamente las reglas y propiedades de la igualdad. Para ello se propone verificar la equivalencia asignando valores numéricos, lo cual, de ningún modo, representa una demostración matemática; hay que señalar de manera enfática que es sólo eso: una verificación de casos particulares.

Sobre las ideas de los alumnos

Desde primer grado los alumnos han tenido experiencias sobre lo que significa que dos expresiones algebraicas sean equivalentes. Sin embargo, es posible que aún tengan dificultades respecto a la manipulación algebraica y consideren que expresiones de suma como, por ejemplo, $\frac{5a}{2} + \frac{5a}{2}$ es equivalente a $\frac{10a}{4}$, y no visualicen que se trata de la suma de la mitad de $5a$ dos veces. O que $\frac{5a}{2} + \frac{5a}{2} = 5a$. Precisamente la obtención del perímetro de la figura que presenta esas medidas les ayuda a comprender el resultado de la suma algebraica.

Los alumnos deben comprender de qué manera se utilizan las literales para referirse a la medida de un lado de las figuras. Por ejemplo, en el caso de la actividad 3 de la sesión 2, la medida del largo del rectángulo rosa es $x + 2$. Así que si tuvieran que obtener su perímetro, sería equivalente a la suma $2(x + 2) + 2h$ y su área será igual al producto $h(x + 2)$, lo que es equivalente a $hx + 2h$, pero no a $hx + 2$, ya que la medida del largo es $x + 2$, y no sólo x, como algunos alumnos pueden considerar.

¿Qué material se necesita?

Para esta secuencia se han diseñado dos audiovisuales y un recurso informático. Los audiovisuales complementarán estrategias y procedimientos para la manipulación algebraica y la obtención de expresiones equivalentes. El recurso informático *Expresiones equivalentes 2* proporcionará más actividades para que el alumno adquiera mayor destreza y soltura en la manipulación algebraica.

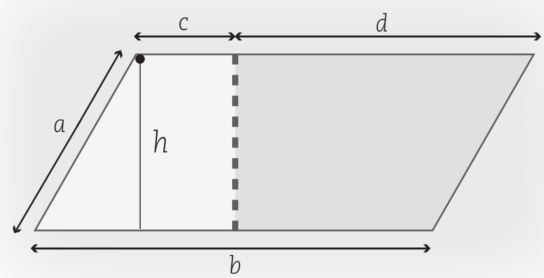
Posiblemente se necesite calcar o copiar las figuras geométricas propuestas para manejarlas físicamente y así los alumnos tengan una mayor comprensión de lo que implica la manipulación algebraica.

¿Cómo guío el proceso?

En la primera actividad de la sesión 1, los alumnos revisan y aplican los conocimientos y estrategias adquiridos en la secuencia 7 del bloque 1. En la actividad 2, la figura es un romboide que se puede transformar, a partir del corte que se indica, en un trapecio o en un rectángulo. Esas transformaciones geométricas requieren plantear nuevas expresiones algebraicas que representen el área de cada figura y se deberá verificar si son equivalentes o no. Una de las medidas implica la fracción $\frac{1}{2}$ con el propósito de que los alumnos comiencen a manipular este tipo de números en expresiones algebraicas.

En la actividad 3 se pide verificar la equivalencia de las expresiones que corresponden al área de las figuras dando valores numéricos a las literales que representan las medidas de las bases y alturas. En la actividad 4 se solicita identificar cuáles de las expresiones propuestas también son equivalentes a la que encontraron. Tal vez algunos alumnos hayan planteado ya alguna de las propuestas anteriormente, lo interesante será analizar que las tres expresiones son equivalentes y justificar por qué lo son, en cuyo caso se centra en el trabajo algebraico.

En la sesión 2, la primera actividad consiste en pasar del álgebra a la geometría al proporcionar expresiones algebraicas que corresponden a las áreas de dos rectángulos, que a su vez componen otro. Habrá que pedirles a los alumnos que representen geométricamente la composición



correspondiente. Para lograrlo, los alumnos deben considerar que cada expresión algebraica es el modelo de un rectángulo y tendrán que determinar la manera en que es conveniente disponer del largo y ancho para que conformen la figura resultante, que también es un rectángulo. Esto está determinado por las reglas algebraicas que deberán reconocer los estudiantes para trazar así cada figura. En la segunda actividad, el trabajo se centra en verificar la igualdad entre las expresiones algebraicas, lo que requiere de la destreza de los estudiantes para manipular las expresiones; éste es el trabajo esencial de la secuencia y por eso es importante que algunos alumnos partan del lado izquierdo de la igualdad y otros desde el lado derecho, como se indica en la instrucción de la actividad.

Las actividades 3 y 4 implican utilizar expresiones algebraicas de la forma $(x + a)$, tanto para multiplicar como para sumar.

Para terminar, en la primera actividad de la sesión 3, los alumnos deben transformar expresiones algebraicas en otras equivalentes, ya sin el contexto de obtener el perímetro o el área de figuras.

Pautas para la evaluación formativa

Observe si los alumnos logran:

- Transformar figuras geométricas mediante el planteamiento de nuevas expresiones algebraicas que representan el área de figuras, y verificar si son equivalentes o no.
- Utilizar fracciones en expresiones algebraicas.
- Usar la equivalencia de las expresiones que corresponden al área de las figuras dando valores numéricos a las literales que representan las medidas de las bases y las alturas.
- Identificar y justificar cuáles son las expresiones equivalentes.
- Pasar del álgebra a la geometría luego de proporcionarles las expresiones algebraicas que corresponden a las áreas de dos rectángulos que componen otro; representar geométricamente una composición.
- Reconocer las reglas algebraicas para trazar cada figura geométrica.
- Reconocer la igualdad entre las expresiones algebraicas.
- Utilizar expresiones algebraicas de la forma $x + a$, tanto para multiplicar como para sumar.
- Transformar expresiones algebraicas en otras equivalentes para obtener el perímetro o el área de figuras.
- Comprender la equivalencia de expresiones algebraicas y de transformación cuando sólo un dato corresponde a una literal.
- Convertir expresiones algebraicas en otras equivalentes, para lo cual aplican propiedades de la igualdad que les permiten responder que son equivalentes.
- Emplear la noción de equivalencia para obtener expresiones algebraicas equivalentes a partir de expresiones determinadas o al calcular el perímetro y el área de composición de figuras geométricas.
- Obtener expresiones algebraicas equivalentes para calcular el perímetro de una figura y verificar su equivalencia.

¿Cómo apoyar?

Es probable que algunos alumnos aún tengan dificultades para pasar de lo geométrico a lo algebraico; una manera de ayudarlos es mediante el manejo directo de las figuras geométricas; es decir, quizá resulte conveniente trazar y recortar las figuras para que los alumnos puedan manipularlas y comprobar de manera concreta y directa que, al cambiar la disposición de las figuras, no se altera su área, pero que la nueva configuración da origen a nuevas expresiones algebraicas.

También recuerde a los estudiantes las reglas y manipulaciones algebraicas que aprendieron en la secuencia 6 al trabajar con sucesiones.

¿Cómo extender?

En el caso de la actividad 3 de la sesión 2 puede pedir que obtengan el perímetro de cada rectángulo que aparece y lo comparen con el perímetro del rectángulo rojo. Observarán que la suma de los perímetros de los rectángulos rosa, verde y azul no es equivalente al del rectángulo rojo, pida entonces que justifiquen por qué.

Secuencia 19 Sucesiones y expresiones equivalentes 2

(LT, págs. 150-155)

Tiempo de realización	3 sesiones
Eje temático	Número, algebra y variación
Tema	Patrones, figuras geométricas y expresiones equivalentes
Aprendizaje esperado	Verifica algebraicamente la equivalencia de expresiones de primer grado, formuladas a partir de sucesiones.
Intención didáctica	Que los alumnos transformen una expresión algebraica en otra equivalente utilizando como contexto matemático las sucesiones numéricas.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisual** • *Operaciones algebraicas* **Informático** • *Sucesiones de números*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recurso audiovisual** • *Sucesiones numéricas y expresiones equivalentes* **Bibliografía** • Pérez Carrizales, César O. (s.f.). “Sucesiones numéricas”, en *Asesoría secundaria 1*. Disponible en http://recursos.salonesvirtuales.com/wp-content/uploads/bloques/2012/06/Susesionesnumericas.pdf (Consultado el 10 de julio de 2019). • Ramírez G., Paola, “Actividades: sucesiones numéricas”. Disponible en https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-21363_recurso_pdf.pdf (Consultado el 10 de julio de 2019).

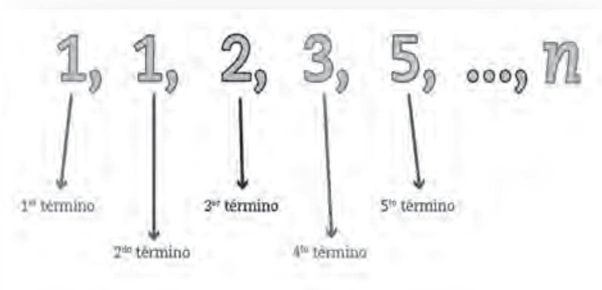
¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Escriban expresiones algebraicas en otras formas equivalentes, utilizando como contexto sucesiones de números.
- Sesión 2. Obtengan expresiones algebraicas equivalentes a partir de una sucesión de números decimales o fraccionarios, y argumenten por qué las expresiones algebraicas obtenidas son equivalentes.
- Sesión 3. Encuentren expresiones algebraicas equivalentes que impliquen fracciones.

Acerca de...

En esta secuencia se continúa trabajando el tema de patrones en sucesiones numéricas, no sólo para analizar las regularidades y encontrar la regla, sino para practicar la equivalencia de expresiones algebraicas con base en que éstas representan la misma sucesión. Esta secuencia es continuación de la número 6; así, el alumno sigue, por un lado, analizando sucesiones de números y encontrando la regla y, por otro lado, determinando expresiones equivalentes. El manejo de la sintaxis algebraica, el uso de paréntesis, el trabajo con números con signo, así como el manejo de números decimales y fraccionarios son puntos importantes para encontrar dichas expresiones, y se practicará a lo largo de la secuencia.



Sobre las ideas de los alumnos

Es probable que los estudiantes continúen teniendo dificultades para reconocer un patrón, y más aún para representar con una expresión algebraica la regla que sigue una sucesión de números; sin embargo, el propósito fundamental en esta secuencia es comprender la equivalencia de expresiones algebraicas. El grado de complejidad se incrementa al trabajar sucesiones con fracciones y con números decimales, por lo que el acompañamiento que pueda proporcionarles para el reconocimiento del patrón que sigue la sucesión es fundamental.

¿Cómo guío el proceso?

En la sesión 1, los alumnos empiezan buscando expresiones equivalentes a $n + n + 1$, que pueden ser: $2n + 1$; $n + (n + 1)$, y es posible que hasta aparezcan las expresiones $2(n + 0.5)$ o $2(n + \frac{1}{2})$. Si las dos últimas no aparecen, puede proponerlas y promover la discusión de si son equivalentes o no.

En las actividades de "Manos a la obra", después de encontrar la regla de la sucesión dada $3n - 2$, enfoque los esfuerzos en obtener todas las expresiones equivalentes posibles; por ejemplo, se pueden escribir las siguientes:

$$n + n + n - 2;\ 2n + n - 2;\ 2n - 2 + n;$$
$$2(n - 1) + n;\ 3(n - \tfrac{2}{3})$$

Si la última expresión no surge, usted puede proponerla y pedir a los estudiantes que verifiquen si es equivalente.

Posteriormente, se presentan sucesiones que involucran enteros negativos: sucesión III, cuya regla puede expresarse como $-4n$, y en la sucesión IV, como $12n - 3$. En ambas, el manejo de los números con signo es fundamental para encontrar las expresiones equivalentes.

En la sesión 2, se parte de una sucesión de números decimales. Encontrar la regla de la sucesión $(\frac{n}{2} + 0.5)$ puede ser difícil, por lo que tendrá que apoyar a sus alumnos para que lo logren. Ponga especial interés en promover que los estudiantes utilicen las expresiones decimal y fraccionaria de un número cuando sea posible.

En la sesión 2, actividad 2, se presenta la sucesión $\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{18}, \frac{1}{24}, \ldots$ cuya regla puede expresarse como $\frac{1}{6n}$, donde la tarea principal es trabajar con expresiones algebraicas que involucran fracciones. El acompañamiento es fundamental para encontrar las expresiones equivalentes. Una opción es revisar esta actividad de manera grupal, una vez que los estudiantes traten de resolverla en pareja. Compruebe con el grupo si las expresiones que se presentan en el punto a) son equivalentes. Los puntos b) y c), donde se pide que verifiquen que la fracción $\frac{1}{300}$ forma parte de la sucesión y que encuentren formas equivalentes de expresar las fracciones de la sucesión, es un buen momento para verificar si tienen alguna dificultad para operar fracciones y apoyarlos en este aspecto.

Se sugiere lo mismo para la actividad 4 que presenta la sucesión $\frac{3}{4}, \frac{3}{2}, \frac{9}{4}, 3, \frac{15}{4}, \frac{9}{2}, \ldots$, donde la regla puede expresarse como $\frac{3}{4}n$. Es importante que los alumnos se den cuenta de que algunos términos de la sucesión están expresados con fracciones equivalentes, ya que al utilizar la regla $\frac{3}{4}n$ se genera la sucesión $\frac{3}{4}, \frac{6}{4}, \frac{9}{4}, \frac{12}{4}, \frac{15}{4}, \ldots$

3. Completen las siguientes sucesiones de números y escriban una expresión algebraica que las genere.

Sucesión	Posición del término						n (regla de la sucesión)
	1ro	2do	3ro	4to	5to	6to	
III	–4	–8		–16		–24	
IV	–9		–3	0	3		

2. Completen la siguiente sucesión de números y escriban una expresión algebraica que la genere.

Posición del término	1^{ro}	2^{do}	3^{ro}	4^{to}	5^{to}	6^{to}	n (regla de la sucesión)
Sucesión VI	$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{24}$		$\frac{1}{36}$	

a) Marquen con una palomita (✓) las expresiones algebraicas equivalentes a la expresión que encontraron para la sucesión 6 y, en su cuaderno, expliquen por qué lo son.

☐ $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3n}\right)$ ☐ $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2n}\right)$ ☐ $\frac{6}{n}$

☐ $\frac{n}{6}$ ☐ $0.6n$ ☐ $\frac{n^{-1}}{6}$

La sesión 3 presenta más sucesiones con expresiones algebraicas con fracciones. La primera $\frac{1}{4n} + \frac{1}{8}$, genera la sucesión $\frac{1}{4} + \frac{1}{8}$, $\frac{1}{8} + \frac{1}{8}$, $\frac{1}{12} + \frac{1}{8}$, $\frac{1}{16} + \frac{1}{8}$, $\frac{1}{20} + \frac{1}{8}$,..., donde los estudiantes pueden escribir los resultados de cada suma como otra forma de escribir la sucesión; sin embargo, el énfasis debe ponerse en encontrar expresiones equivalentes, como $\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\right)$, $\frac{1}{4} \times \left(n^{-1} + \frac{1}{2}\right)$. Expresiones del tipo n^{-1} como una expresión equivalente a $\frac{1}{4}$, deben ser reforzadas siempre que sea necesario.

Pautas para la evaluación formativa

Los alumnos, en la primera sesión:

- Reconocen las regularidades de una sucesión de números y pueden expresar la regla mediante una expresión algebraica.
- Escriben expresiones equivalentes y argumentan por qué son equivalentes.

En la segunda y tercera sesión:

- Manejan y determinan expresiones equivalentes con fracciones o números decimales.
- Utilizan alguna estrategia para encontrar expresiones equivalentes con números enteros, decimales y fraccionarios.

¿Cómo apoyar?

Si observa que algunos estudiantes siguen teniendo problemas para reconocer las regularidades de las sucesiones y expresar la regla algebraicamente, apóyelos para que lo consigan. Ésta es una habilidad que se consolidará después de realizar muchas actividades de este tipo.

También aproveche todas las actividades para reforzar la operación de las expresiones algebraicas, principalmente cuando involucran fracciones y decimales. Siempre que lo crea conveniente, revise las actividades de manera grupal.

¿Cómo extender?

La sesión 3 es la forma de extender el trabajo de expresiones equivalentes. Puede presentar otras, pero siempre considerando que los estudiantes requerirán más apoyo y que es un aprendizaje que no debe ser consolidado en este momento.

Secuencia 20 Sistemas de ecuaciones. Métodos de igualación y de sustitución (LT, págs. 156-161)

Tiempo de realización	3 sesiones
Eje temático	Número, álgebra y variación
Tema	Ecuaciones
Aprendizaje esperado	Resuelve problemas mediante la formulación y solución algebraica de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.
Intención didáctica	Que los alumnos resuelvan situaciones que requieran el planteamiento de un sistema de ecuaciones y utilicen los métodos de igualación y sustitución para encontrar su solución.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisuales** • *Operaciones algebraicas 2* • *Métodos de igualación y sustitución para resolver sistemas de ecuaciones* **Informático** • *Métodos de resolución de sistemas de ecuaciones 1*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recurso audiovisual** • *Métodos de resolución de sistemas de ecuaciones 2 x 2*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Resuelvan una situación problemática que implica plantear un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas utilizando el método gráfico y, a partir de él, introducir un nuevo método de resolución: el de igualación.
- Sesión 2. Conozcan y utilicen el método de sustitución a partir de los métodos gráfico y de igualación, para continuar resolviendo problemas que implican plantear un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.
- Sesión 3. Resuelvan otros sistemas de ecuaciones lineales utilizando los métodos aprendidos: igualación y sustitución.

Acerca de...

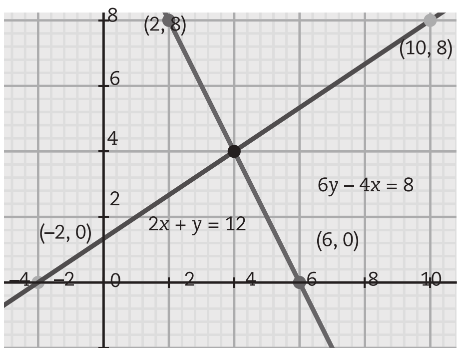
En esta secuencia los alumnos continúan trabajando en el tema de ecuaciones y, en particular, con sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas como se inició en la secuencia 5, donde el método utilizado para resolverlos fue el gráfico. Ahora se introducen dos métodos algebraicos: el de igualación y el de sustitución.

Es importante señalar que, para que un estudiante adquiera destreza en el uso de estos métodos de resolución de problemas, es necesario que domine la manipulación simbólica y aprecie el valor que tiene, así que es un buen momento para poner énfasis en este aspecto del álgebra adquirido en las secuencias 18 y 19 de este bloque, así como también en la 5, 6 y 7 del bloque 1.

Sobre las ideas de los alumnos

Aunque esta secuencia continúa lo aprendido en la secuencia 5, es importante retomar algunas de las concepciones o ideas que puedan tener los alumnos al trabajar con ecuaciones y, en especial, con sistemas de ecuaciones. Por ejemplo, indague si tratan de resolver el problema planteando una sola ecuación, sin reparar en que hay dos incógnitas, y si perciben que plantear una sola ecuación con dos incógnitas no les permitirá encontrar una solución. Por ello, antes de elegir el método por el cual han de resolver el sistema de ecuaciones, hay que plantear el sistema.

Es indispensable asegurarse de que los alumnos comprenden que cada una de las literales (incógnitas) de las ecuaciones del sistema representan la misma cantidad desconocida en ambas. Esto significa que el valor de x es el mismo en la primera y en la segunda ecuación; lo mismo ocurre con el valor de y. Por lo anterior, se debe enfatizar la diferencia entre la solución de una ecuación lineal con una incógnita y la solución de un sistema 2×2, recalcando que los valores numéricos obtenidos para las incógnitas deben satisfacer simultáneamente ambas ecuaciones. Esto lo observaron en el método gráfico como el punto de intersección entre ambas líneas rectas. De ahí que se apoyen en el uso de ese método para comprender qué se busca con la aplicación de los nuevos métodos que van a estudiar.



¿Cómo guío el proceso?

En la sesión 1, los alumnos tendrán que resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, primero por el método gráfico y luego igualando las ecuaciones que corresponden al despeje de y. El trabajo en pareja permite que primero, entre compañeros, se apoyen en aspectos como el despeje de literales y la obtención de la gráfica.

Una vez resuelto el sistema, retome los despejes de la incógnita y que realizaron para elaborar la tabla de valores. Enfatice que la solución del sistema, es decir, que el punto (x, y) es común en ambas rectas, y sus valores hacen verdaderas las dos ecuaciones, por lo que las expresiones que se obtienen al despejar y en ambas ecuaciones representan el mismo valor y, por lo tanto, pueden igualarse. Éste es el fundamento del método de igualación. Posteriormente, los estudiantes resolverán otro problema de manera guiada por el proceso que se presenta, para que vayan identificando paso a paso en qué consiste dicho método. Es conveniente que al terminar la actividad discutan en grupo las dificultades que se presentaron y se aclaren las dudas, ya sea en el planteamiento de las ecuaciones, en la manipulación simbólica o en la interpretación de la solución.

Destaque que el despeje de la literal no siempre tiene que ser la incógnita y, también pueden despejar x y aplicar el método de igualación. Si lo cree adecuado en este momento, pida a los alumnos que resuelvan de nuevo el problema despejando inicialmente la incógnita x. Recuerde resaltar por qué este método se llama de igualación: se despeja cualquiera de las incógnitas en ambas ecuaciones y se igualan las expresiones que se obtienen. Estas ideas resultan claves para entender e identificar los métodos.

En la sesión 2 se propone un problema en que el sistema presenta ecuaciones con coeficientes decimales que corresponden a la expresión de porcentajes. De nuevo se parte de la solución del sistema por el método gráfico. Apoye lo necesario a los alumnos si presentan alguna dificultad en la manipulación simbólica durante el proceso de resolución. Señale que también pueden iniciar despejando la incógnita y en cada ecuación lineal; guíelos para que identifiquen los pasos del método de sustitución y reconozcan algunas de las propiedades de la igualdad que se aplican.

$x + y = 30$ $x + y = 26$	$x + y = 26$ $0.25x + 0.75y = 30$
$x + y = 30$ $0.75x + y = 26$	$x + y = 26$ $0.75x + 0.25y = 30$

En la actividad 2 los alumnos resolverán un sistema de ecuaciones cuyas incógnitas son coeficientes fraccionarios. Posiblemente la manipulación simbólica todavía se les dificulte en la resolución del problema, por lo que será necesario acompañar a los alumnos en el proceso, resaltando lo que sucede al despejar la misma incógnita en ambas ecuaciones y lo que pasa con sus coeficientes. Si lo considera conveniente, realice los despejes de la incógnita en cada ecuación de manera grupal para que los estudiantes puedan expresar sus dudas.

En la actividad 3, se solicita a los estudiantes que, en equipos, analicen los métodos de igualación y sustitución para llegar a los mismos procedimientos de manera grupal.

En la sesión 3 se continúan resolviendo sistemas de ecuaciones mediante los tres métodos trabajados hasta ahora; por un lado, para que los estudiantes reconozcan que, por cualquier método, el resultado tiene que ser el mismo y, por otro, para que determinen en qué tipo de ecuaciones les parece más adecuado o más fácil aplicar un método u otro.

El problema que se propone en la actividad 1 implica ecuaciones con coeficientes decimales, por lo que será necesario el acompañamiento para que puedan llegar a plantear el sistema:

$$0.5x + 0.8y = 24$$
$$0.75x + 0.7y = 26$$

Resolver el problema por el método gráfico es una forma de validar los resultados obtenidos a partir de los métodos algebraicos.

¿Cuál es el método más conveniente?

1. Trabajen en pareja el siguiente problema.

   En el grupo 2° B, han aprobado la asignatura de Inglés 50% de las alumnas y 80% de los alumnos, mientras que Matemáticas la aprobó 75% de las alumnas y 70% de los alumnos. Calculen el número de alumnas y de alumnos que hay en el grupo si el total de aprobados es 24 en Inglés y 26 en Matemáticas. Analicen y contesten las siguientes preguntas para resolver el problema:

Le recomendamos acostumbrar a los alumnos a que, una vez que obtengan los valores de las incógnitas, comprueben que, en efecto, son la solución del sistema al sustituir sus valores en ambas ecuaciones para verificar que las hacen verdaderas.

Pautas para la evaluación formativa

Los propósitos didácticos de esta secuencia están centrados en el aprendizaje de métodos algebraicos para resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, por lo que en este proceso formativo será conveniente observar si los alumnos logran:

- Plantear sistemas de ecuaciones lineales que resuelven un problema, traduciendo del lenguaje común al lenguaje algebraico.
- Obtener el valor de las incógnitas siguiendo los pasos del método de igualación o el de sustitución.

Es importante señalar que no es motivo de evaluación que los estudiantes aprendan de memoria los pasos de cada método, ya que una vez comprendidas las ideas principales que implica cada uno, el alumno puede omitir pasos o hacer dos en uno, lo cual es válido, pues significa que ha comprendido el método.

En la tercera sesión es conveniente valorar si los métodos y las diferencias sustanciales entre ellos han sido comprendidos por los estudiantes. En el momento en que se plantea un problema y se les pide que lo resuelvan por el método que crean más conveniente, lo que hay que evaluar es que lleguen a la solución, no tanto el método utilizado.

¿Cómo apoyar?

Si ve que algunos estudiantes tienen problemas para plantear el sistema de ecuaciones, es decir, comprender el problema y traducirlo del lenguaje común al lenguaje algebraico, apóyelos analizando con ellos el texto del problema y las ecuaciones que plantean para que identifiquen qué partes no están bien representadas, sobre todo cuando hay involucrados coeficientes fraccionarios o decimales.

Si los estudiantes presentan dificultades para operar algebraicamente en cualquiera de los métodos, éste es un buen momento para recordar cómo sumar, restar, dividir y multiplicar algebraicamente. Dedique el tiempo necesario para que no queden dudas al respecto.

¿Cómo extender?

Presente a los estudiantes algunos problemas que impliquen el planteamiento de un sistema de ecuaciones. Elija problemas que requieran el uso de números fraccionarios o decimales, ya que operar con ellos presenta mayor dificultad. Recuerde que la adquisición de la destreza en la manipulación algebraica es una de las intenciones didácticas.

Secuencia 21 Relación funcional 1

(LT, págs. 162-167)

Tiempo de realización	3 sesiones
Eje temático	Número, álgebra y variación
Tema	Funciones
Aprendizaje esperado	Analiza y compara situaciones de variación lineal y proporcionalidad inversa, a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica. Interpreta y resuelve problemas que se modelan con este tipo de variación, incluyendo fenómenos de la física y otros contextos.
Intención didáctica	Que los alumnos estudien fenómenos de variación inversamente proporcional mediante sus representaciones tabular, gráfica y algebraica vinculadas a la noción de proporcionalidad inversa que ya conocen.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisual** • *Diversos tipos de variación* **Informático** • *Problemas de distintos tipos de variación*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recurso audiovisual** • *La variación lineal y de proporcionalidad inversa*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Reconozcan algunas características cualitativas de la lectura de gráficas que representan relaciones de variación entre dos cantidades. Grafiquen relaciones de proporcionalidad directa.
- Sesión 2. Distingan y analicen la representación gráfica de situaciones que implican variación lineal e inversamente proporcional. Obtengan la expresión algebraica de una relación de variación inversamente proporcional.
- Sesión 3. Analicen situaciones que corresponden a una relación de variación inversamente proporcional mediante la visualización matemática en las representaciones tabular, gráfica y algebraica.

Acerca de...

En los últimos grados de primaria y en primero de secundaria los alumnos analizaron y resolvieron problemas que implican la relación entre cantidades que varían de forma directamente proporcional, reconocieron la expresión algebraica general que la representa ($y = kx$), y la representaron en una tabla y en gráficas; también analizaron la relación funcional lineal.

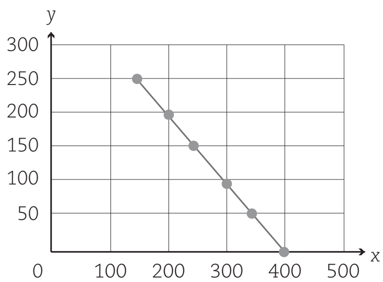
En segundo grado, los estudiantes profundizan en este tipo de relaciones y avanzan en ellas al estudiar situaciones que implican variación inversamente proporcional, tema que empezaron a revisar desde la secuencia 4, cuando aprendieron las propiedades aritméticas de la proporcionalidad inversa.

Ahora se espera que articulen las diversas representaciones que tiene una relación inversamente proporcional y las diferencien de los otros tipos de relaciones que ya han estudiado, para continuar así con el proceso de construcción del concepto de función. En esta secuencia los alumnos deberán identificar y analizar el tipo de relación funcional que hay entre las cantidades que se presentan en cada situación. Por ejemplo, determinar si una cantidad aumenta y la otra aumenta o disminuye, si el aumento o la disminución se hace de manera proporcional y cuál es la constante de proporcionalidad, ya sea a partir del cociente o del producto entre las cantidades. Estos aspectos deberán identificarse y visualizarse en los diferentes tipos de representación, tanto algebraica como gráfica y tabular.

Sobre las ideas de los alumnos

Muchos alumnos no distinguen entre una gráfica que representa cualquier relación lineal y la que representa una relación de proporcionalidad directa, pues en ambos casos la gráfica es una línea recta, pero la diferencia principal es que la última pasa por el origen.

En el caso de una relación inversamente proporcional, los alumnos pueden pensar que la expresión algebraica general asociada es $y = -kx$ y, por lo tanto, que la gráfica es una línea recta con pendiente negativa, como se observa en la siguiente imagen:



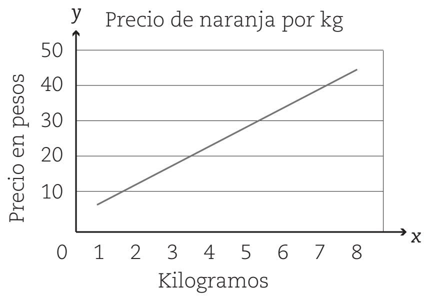
Para contrarrestar estas ideas e intuiciones que algunos pudieran tener, se propone el análisis de este tipo de relaciones y su representación gráfica. Quizá algunos alumnos requieran que se trace la línea recta en el plano y no consideren que una sucesión de puntos alineados también puede representar un tipo de relación de variación, pero con valores discretos.

¿Cómo guío el proceso?

En la actividad 1, inciso a), deje que los alumnos indentifiquen a qué frutas corresponden los puntos de la gráfica mediante el procedimiento que se les facilite; no es necesario que todos sigan un mismo camino. En el inciso b) tendrán la oportunidad de confrontar su interpretación de la información que presenta la tabla y la forma en que determinaron a qué correspondía cada punto. En cuanto a la actividad 2, identificarán que la fruta más vendida es la naranja (vendió 40 kg) y deberán elaborar una tabla de precios como la siguiente:

Kg	1	2	3	4
Precio	\$5.50	\$11.00	\$16.50	\$22.00

La gráfica asociada, una vez que se unen los puntos, es:



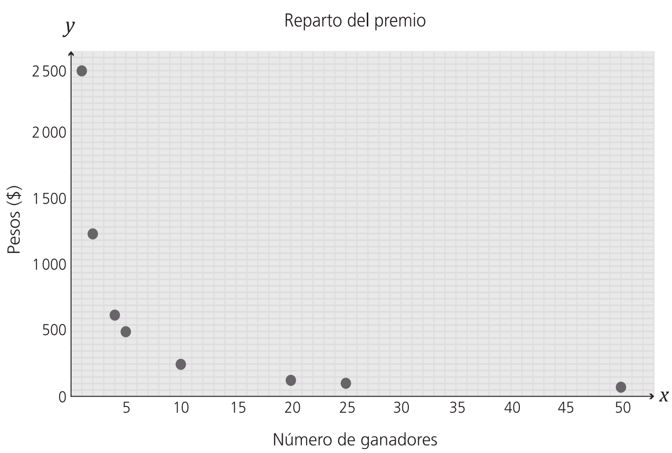
Se espera que no tengan dificultades para visualizar las preguntas de los incisos b) y c), pues la variación es directamente proporcional y en la gráfica, al prolongarse la recta pasa por el origen, lo que significa que 0 kg equivalen a 0 pesos, siendo 5.5 la constante (k) de proporcionalidad. Para responder el inciso d) pueden proceder de diferentes maneras. Por ejemplo, pueden prolongar la línea recta de la gráfica y ubicar el valor de $y = 275$ o expresar algebraicamente la relación como $275 = 5.5x$, al despejar se tiene $x = \frac{275}{5.5} = 50$.

Es importante promover en los alumnos la articulación entre las distintas representaciones; de hecho, la actividad pretende generar el análisis de la relación entre éstas. Si en la clase no surgen diferentes procedimientos, deberá pedirles que verifiquen sus respuestas utilizando las gráficas, la tabla y la expresión algebraica. De este modo se espera que desarrollen habilidades para visualizar matemáticamente el comportamiento de una relación funcional y reconozcan sus características.

En la actividad 1 de la sesión 2, los alumnos deberán reconocer cuál es la gráfica que corresponde a la situación planteada. En ella hay una relación de variación que corresponde a una función lineal, y la expresión algebraica que representa el costo del transporte de las cajas de manzanas es $y = 15x + 300$. En este caso, los alumnos deberán identificar que la gráfica corresponde a una línea recta que cruza el eje de las ordenadas (el eje y) en 300, pero que representa un aumento. La segunda situación (actividad 2) plantea determinar el costo de transportar una caja de manzanas dadas las condiciones de pago. La relación de variación es inversamente proporcional, y al graficar los valores se observa una sucesión de puntos que no es lineal y va decreciendo. Si se toman dos puntos cualesquiera, se observa que el producto de los valores de las coordenadas (x, y) son iguales para cada punto. Por ejemplo, si se consideran $(1, 700)$ y $(2, 350)$, el producto es 700 porque $1 \times 700 = 700$ y $2 \times 350 = 700$. De ahí que la expresión algebraica es $700 = xy$, que es equivalente a $y = \frac{700}{x}$

En la sesión 3, actividad 1, se presentan dos situaciones que corresponden a una relación de variación inversamente proporcional en un contexto geométrico. Este caso se puede aprovechar para discutir en el grupo si se podrían dar valores negativos a la base o a la altura del rectángulo. Es probable que algunos alumnos respondan que sí y hasta calculen el segundo valor en función del valor asignado al primero. Sin embargo, esto puede dejarse como tarea para investigación, y centrarse en el análisis y comparación entre los datos y la gráfica que los representa.

Finalmente, la situación de repartir el premio entre los ganadores si éstos aumentan, también corresponde a una situación de variación inversamente proporcional. Se recomienda analizar y comparar en el grupo los aspectos que se indican en la actividad 3, para reconocer las características de las diferentes representaciones que tienen: por ejemplo, que la gráfica es una curva llamada hipérbola, que decrece, y el producto de las coordenadas es una constante.



Pautas para la evaluación formativa

Observe el trabajo de los alumnos para ver si logran:

- Leer e interpretar los puntos ubicados en un plano y reconocer que entre más a la derecha se ubica un punto, mayor es el valor de la abscisa, y entre más arriba se encuentre, mayor es el valor de su ordenada.
- Identificar que las magnitudes en las situaciones corresponden a un tipo de relación funcional, esto es, una está en función de la otra.
- Establecer el tipo de variación que se da en los problemas planteados en la secuencia: directa, inversa o lineal, y si hay o no proporcionalidad en la variación.

Lo anterior es a partir del análisis de las representaciones tabular, gráfica y algebraica.

- Reconocer las características de la gráfica y de la expresión algebraica en una variación inversamente proporcional.

¿Cómo apoyar?

Para que identifiquen el tipo de variación, puede pedir que revisen las situaciones de la secuencia 4 y grafiquen los valores. También puede pedir que las gráficas elaboradas en las diferentes actividades de la secuencia se plasmen en cartulina, papel bond o en hojas cuadriculadas para tenerlas como un catálogo y analizarlas juntas para observar las semejanzas y diferencias en relación con sus representaciones algebraica y tabular.

En todo momento puede permitir el uso de la calculadora debido a que lo importante en esta secuencia es el razonamiento proporcional y no necesariamente la operatoria.

¿Cómo extender?

Puede variar las cantidades involucradas en las situaciones, por ejemplo, poner fracciones o decimales.

Proponga actividades conocidas o realizadas por ellos, en las que se establezcan relaciones de proporcionalidad directa o inversa.

También se les puede pedir que escriban algunos problemas de variación que impliquen una constante fraccionaria o decimal.

Secuencia 22 Polígonos 2

(LT, págs. 168-177)

Tiempo de realización	4 sesiones
Eje temático	Forma, espacio y medida
Tema	Figuras y cuerpos geométricos
Aprendizaje esperado	Deduce y usa las relaciones entre los ángulos de polígonos en la construcción de polígonos regulares.
Intención didáctica	Que los alumnos resuelvan problemas de construcción de figuras geométricas.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisuales** • *Ángulos internos y externos de un polígono* • *Ángulos centrales de un polígono regular*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recurso audiovisual** • *Relaciones entre los ángulos de polígonos en la construcción de polígonos regulares*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Deduzcan una fórmula para calcular la suma de los ángulos internos de un polígono.
- Sesión 2. Analicen la relación entre los ángulos internos y externos de un polígono para determinar el valor de la suma de cada tipo de ángulos.
- Sesión 3. Analicen y determinen la medida del ángulo central de un polígono regular.
- Sesión 4. Resuelvan problemas que implican determinar y usar las medidas de los ángulos interno, central y externo de un polígono y establezcan sus relaciones.

Acerca de...

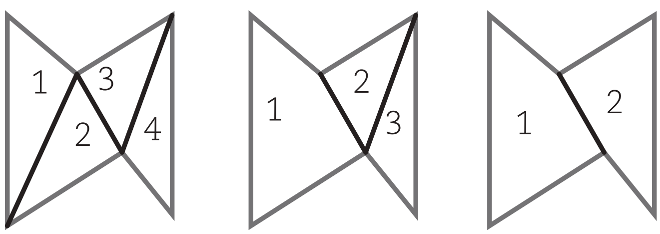
Esta secuencia es la segunda de tres que apuntan al desarrollo de los conocimientos y habilidades que permitan a los estudiantes deducir y usar las relaciones entre los ángulos de polígonos en la construcción de polígonos regulares. Se proponen actividades para que los alumnos continúen explorando algunas regularidades de los polígonos relacionadas con sus ángulos central, internos y externos. En particular, en el caso de los ángulos internos de un polígono regular, se espera que expresen de manera general el valor de su suma y, como ellos puedan, explicarlo sin llegar a una expresión algebraica.

Sobre las ideas de los alumnos

Los alumnos ya justificaron las relaciones entre las medidas de los ángulos internos de los triángulos y los paralelogramos, y es importante que lo tengan claro, ya que ahora se trata de que utilicen ese conocimiento para establecer la relación que hay entre los ángulos internos de cualquier polígono. En particular, las primeras dos actividades de la sesión 1 recuperan lo estudiado en la secuencia 8, y se espera que los alumnos apliquen la triangulación de las figuras tanto para verificar como para transferir a otras relaciones. Al reconocer que la suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180°, podrían establecer la fórmula de la suma de los ángulos internos de los polígonos. De ese modo también pueden ver las relaciones entre las medidas de los ángulos externos y la del central. Tal vez a algunos alumnos se les dificulte utilizar los instrumentos geométricos; es conveniente que los apoye y, si es necesario, pida que observen videos que muestren la manera en que se utilizan. Por ejemplo, en la actividad 3 de la sesión 1, los alumnos deberán medir los ángulos internos de diferentes polígonos, y en algunos casos tendrán que prolongar los lados para realizar la medición. Otras relaciones que deben reconocer son las de los ángulos complementarios y suplementarios.

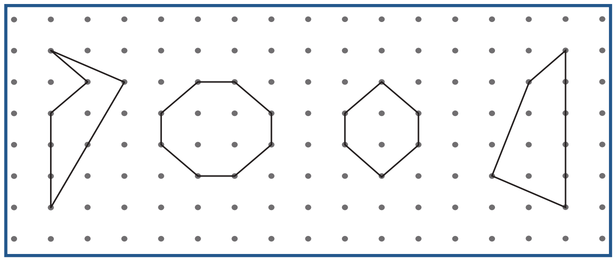
¿Cómo guío el proceso?

En el caso de la actividad 3 de la sesión 1, tal vez en algunos casos obtengan valores diferentes de la suma de los ángulos internos por error en el manejo del transportador al medir algunos ángulos. De ocurrir lo anterior, pídales que propongan una manera de verificar las medidas que han obtenido a partir de los conocimientos geométricos que ya estudiaron. Por ejemplo, en la secuencia 8 aprendieron a trazar y determinar las diagonales de un polígono y a triangularlo, se espera que en este caso propongan, como modo de verificación, triangular los polígonos; de no surgir la idea, exprésela usted. En cuanto a los polígonos no convexos que aparecen en la tabla, pida que expliquen de qué manera los triangularon para determinar el valor de la suma de los ángulos internos. Es posible que algunos alumnos realicen diferentes combinaciones al momento de formar triángulos y paralelogramos para determinar la suma de los ángulos internos de los polígonos no convexos. La siguiente imagen ilustra lo anterior:



$$4 \times 180° = 2 \times 180° + 360° = 2 \times 360° =$$

En el dibujo de los polígonos irregulares que se indica en la actividad 4, solicite que también incluyan polígonos no convexos. En la retícula pueden construir polígonos irregulares sin mayor dificultad; sin embargo, para los polígonos regulares es probable que algunos utilicen los puntos y midan igual las distancias entre los puntos de manera horizontal, vertical y diagonal. Asegúrese de que no cometan ese error al trazar los lados de los polígonos regulares.

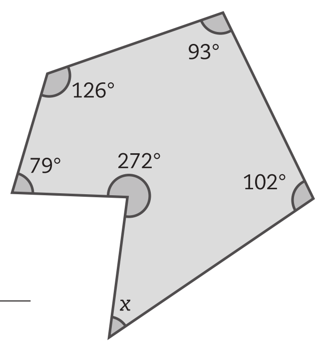


De ocurrir esto, invite a los alumnos a buscar otros caminos para construirlos, considerando sus conocimientos previos en cuanto a las características de los polígonos regulares, una de las cuales es que sus lados tienen la misma medida.

En la actividad 6 pida que expliquen de qué manera determinaron la suma de los ángulos en el caso de los polígonos regulares e irregulares y, particularmente, que muestren algunos ejemplos cuando el polígono es no convexo. Esta acción permite que los alumnos no sólo trabajen con figuras prototipo, sino que desarrollen sus habilidades de visualización, construcción y comunicación. Vincule lo comentado en las actividades 5 y 6 con la fórmula que se señala en la actividad 7.

En la sesión 2, actividad 1, se retomará la fórmula establecida al final de la sesión 1. En la actividad 2, los alumnos tendrán que deducir la manera de determinar la medida de un ángulo interno desconocido; para ello les resultará útil la fórmula.

$$180° (n - 2) = x - (79° + 126° + 93° + 102° + 272°)$$
$$180° (6 - 2) = x - 672°$$
$$180° (4) - 672° = x$$
$$720 - 672 = x$$
$$48° = x$$



$x =$ ____48°____

En la actividad 3 la incógnita cambia, pues sabiendo la suma de los ángulos internos, ahora se pregunta por el número de lados del polígono. Para esto resultará útil la fórmula, por ejemplo:

$$(n-2)\,180 = 21\,060$$

$$n-2 = \frac{21\,060}{180}$$

$$n-2 = 117$$

$$n = 117 + 2 = 119$$

$$n = 119$$

Comprobación:

$$(119-2)\,180 =$$

$$117 \times 180 = 21\,060$$

Además, a partir de esa deducción es posible establecer la relación entre el ángulo interno de un vértice del polígono y los ángulos externos que le corresponden, de la cual se deduce que son suplementarios. En las actividades 5 y 6, los alumnos analizarán lo que ocurre con la suma de los ángulos externos del polígono. Se sugiere que para dar respuesta al inciso b) de la actividad 8, se utilice alguno de los polígonos de la actividad 3 de la sesión anterior para analizar y establecer las relaciones que encuentran de un tipo de polígono a otro y determinar en cada caso que el valor de la suma de los ángulos externos, uno por cada vértice, es de 360°. Recuerde que no se debe dar por sentada una propiedad o característica a partir de un par de ejemplos, sino de proponer conjeturas y probarlas, es decir, desde un razonamiento deductivo. Parte de ese razonamiento implica visualizar, clasificar y probar.

En la sesión 3 los alumnos aprenderán que cada polígono regular se puede circunscribir, y a partir de ahí establecer relaciones con su ángulo central, ángulos internos y externos que le permitirán comprender el proceso de construcción de los polígonos regulares por medio de ese procedimiento.

Para terminar, en la sesión 4, los alumnos deberán resolver problemas que requieren la aplicación de las relaciones y propiedades estudiadas en las sesiones anteriores. Pida siempre justificar sus respuestas con argumentos geométricos, es decir, que aludan a las relaciones, características y propiedades que se han estudiado para desarrollar su habilidad de comunicación y de razonamiento deductivo.

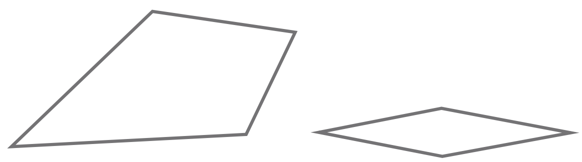
Pautas para la evaluación formativa

Observe el trabajo de los alumnos para ver si logran:

- Establecer la relación entre los ángulos internos de los polígonos y, en el caso de polígonos regulares, expresar la forma general de calcular la suma total.
- Establecer la relación entre un ángulo interno y los ángulos externos que le corresponden a cada vértice de un polígono. El ángulo interno y uno de los ángulos externos al vértice suman 180°. En el caso de la actividad 9 de la sesión 2, al justificar la respuesta, puede observar este aspecto.
- Establecer la medida del ángulo central de un polígono regular.

¿Cómo apoyar?

Si observa que los alumnos tienen dificultades para medir los ángulos internos de los polígonos y encontrar una relación, proponga que midan polígonos regulares de 4, 5 y 6 lados, y particularmente en el caso de los cuadriláteros sugiera que midan los siguientes:



En general, pida que copien los polígonos que se presentan en la actividad, pero utilizando una escala que les permita ampliar y reducir las medidas originales para que prueben si las medidas de los ángulos internos, externos y central son iguales o cambian, y de esta manera también se desarrollen las habilidades de dibujo y visualización.

Otra actividad de apoyo que puede proponer es que los alumnos escriban una lista de palabras del vocabulario geométrico que conocen, y que agreguen un ejemplo para ilustrar cada palabra. De este modo también desarrollan sus habilidades de dibujo y comunicación.

¿Cómo extender?

En la sesión 1 puede pedir que dibujen polígonos de siete, ocho, doce y más lados que sean irregulares y algunos no convexos para sumar los ángulos internos con el propósito de establecer las relaciones y generalizar inductivamente, para luego hacerlo de manera deductiva a partir del análisis de las características y establecer relaciones y probarlas.

Secuencia 23 Conversión de medidas 2

(LT, págs. 178-183)

Tiempo de realización	3 sesiones
Eje temático	Forma, espacio y medida
Tema	Magnitudes y medidas
Aprendizaje esperado	Resuelve problemas que implican conversiones en múltiplos y submúltiplos del metro, litro, kilogramo y de unidades del Sistema Inglés (yarda, pulgada, galón, onza y libra).
Intención didáctica	Que los alumnos desarrollen la habilidad para establecer equivalencias entre los múltiplos y submúltiplos del kilogramo y del litro, que son las unidades de masa y capacidad del Sistema Internacional de Unidades, así como la conversión entre unidades del Sistema Inglés más usuales y el Internacional a partir de la estimación de magnitudes cercanas a su entorno.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisuales** • *Unidades de masa (peso) en el Sistema Inglés* • *El volumen de los líquidos en el Sistema Inglés*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recurso audiovisual** • *Conversión de medidas*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Desarrollen estrategias de cálculo para convertir medidas de masa del Sistema Internacional que corresponden al peso de personas, animales y objetos, apoyándose en la relación de proporcionalidad directa.
- Sesión 2. Conviertan de kilogramo a libra, de libra a kilogramo, de gramo a onza y viceversa, estableciendo relaciones de proporcionalidad directa entre ellas. Además, que estimen medidas de capacidad que corresponden a diversas situaciones expresadas en múltiplos y submúltiplos del litro, y desarrollen procedimientos para convertir cantidades en múltiplos y submúltiplos del litro.
- Sesión 3. Establezcan estrategias para convertir de litro a galón, de litro a onza y viceversa. Apliquen los conocimientos adquiridos para calcular las equivalencias entre unidades de medida de masa y capacidad de los dos sistemas que les permitan resolver diversas situaciones.

Acerca de...

Además del acercamiento que puedan tener algunos alumnos a las unidades de capacidad y masa (peso) desde experiencias externas a la escuela, a lo largo de la primaria los alumnos realizaron actividades en las que fue necesario utilizar algunas de las unidades del Sistema Internacional para expresar la cantidad de masa (peso) de un cuerpo o producto, así como la capacidad que tienen algunos recipientes y contenedores. En este grado usarán dicho conocimiento para resolver problemas de conversión entre múltiplos y submúltiplos de las unidades de masa y capacidad del Sistema Internacional. También realizarán conversiones de las unidades de un sistema a otro, ya que, actualmente, la información sobre el contenido y capacidad de la mayoría de los productos que se adquieren empacados se expresa en ambos sistemas. Es importante hacer las siguientes consideraciones:

- La masa es la cantidad de materia que contiene un cuerpo y nunca cambia; la unidad básica para medirla es el kilogramo. El peso es la acción que ejerce la fuerza de gravedad sobre cualquier cuerpo en la Tierra, y cambia si el cuerpo está en la Luna o en otro lugar del espacio. Coloquialmente, llamamos peso de los cuerpos u objetos a lo que en estricto sentido es su masa.

- La medición de la capacidad mantiene una relación estrecha con la medición del volumen. Ambos cálculos corresponden a medir un espacio. En el caso del volumen se trata del espacio que ocupa un cuerpo, mientras que en el de la capacidad se trata del espacio que hay en el interior del cuerpo.

Sobre las ideas de los alumnos

La idea de que el tamaño de un objeto lo hace más pesado que otro que ocupa menos espacio es común entre los alumnos. Por ejemplo, la clásica adivinanza de "¿qué pesa más, un kilogramo de plumas o un kilogramo de plomo?", recibe muchas veces la respuesta de que pesa más el kilogramo de plumas, pues los estudiantes imaginan el volumen que ocupa en contraposición al espacio que ocupa esa cantidad de plomo. Por esto, desde la primaria se plantean actividades que permiten desechar la idea de que el volumen está directamente asociado al peso o a la forma de los objetos; sin embargo, en muchas personas es difícil cambiar esa idea. Por otra parte, la noción acerca de las unidades está poco desarrollada en muchos de ellos, de ahí la importancia de que hagan estimaciones y, cuando sea posible, las comprueben.

¿Cómo guío el proceso?

El contexto con que se introduce la secuencia invita a los alumnos a comentar y así recuperar lo que conocen del tema, ya sea porque tienen hermanos pequeños o porque conocen a alguien que los tenga.

Esto permite también que relacionen el desarrollo de los niños con una alimentación adecuada, que conozcan el uso indistinto de unidades del Sistema Internacional y de unidades del Sistema Inglés, y que establezcan estrategias y procedimientos para hacer las conversiones a partir de sus equivalencias.

En la actividad 1 de la sesión 1, en los ejercicios de elegir la unidad que consideren adecuada para medir la masa (el peso) o la capacidad, se presenta la oportunidad de que comenten si lo que eligieron es la única opción o puede expresarse mediante alguna otra. Por ejemplo, por lo general el peso de un elefante se indica en toneladas; sin embargo, es usual que se indique en kilogramos. Lo que resultaría desatinado es darlo en gramos, aunque esto pueda proponerse como un ejercicio de conversión.

a) El peso aproximado de un colibrí es de:

☐ 0.0120 toneladas ☐ 0.120 kilogramos ☐ 12 gramos ☐ 1 200 miligramos

b) El peso aproximado de un elefante es de:

☐ 5 toneladas ☐ 500 kilogramos ☐ 50 000 gramos ☐ 500 hectogramos

c) El peso aproximado del libro de Matemáticas 2 de Telesecundaria es de:

☐ 450 decigramos ☐ 0.450 kilogramos ☐ 450 gramos ☐ 4 500 miligramos

d) La **dosis** de un medicamento en cápsula es de:

☐ 20 decigramos ☐ 0.200 kilogramos ☐ 2 000 gramos ☐ 2 miligramos

Es importante comentar con los alumnos acerca de las ventajas que da internet para obtener información de cualquier país y sobre gran cantidad de temas. La información puede incluir unidades de medida del Sistema Internacional o del Sistema Inglés, por lo tanto, es importante que los alumnos conozcan ambas y puedan establecer equivalencias entre ellas.

En las actividades 5 de la sesión 1 y 9 de la sesión 2 procure que los alumnos observen la relación entre las unidades del Sistema Internacional que consiste en que los múltiplos de la unidad básica aumentan en potencias de 10 ($10^1 = 10$, $10^2 = 100$, $10^3 = 1000$, etcétera) y los submúltiplos disminuyen en potencias de 10 ($10^{-1} = \frac{1}{10}$, $10^{-2} = \frac{1}{100}$, $10^{-3} = \frac{1}{1000}$, etcétera), y cómo se les asocian los prefijos *deca*, *hecto*, *kilo*, *deci*, *centi* y *mili*.

Tonelada métrica	Quintal métrico	Kilogramo	Hectogramo	Decagramo	Gramo	Decigramo	Centigramo	Miligramo
T	Q	kg	hg	dag	g	dg	cg	mg
1 000 kg	100 kg	1 000 g	100 g	10 g	1 g	0.1 g	0.01 g	0.001 g

Recuerde a los alumnos que en secuencias anteriores analizaron cómo obtener el producto de cualquier número por dichas potencias, así que es conveniente resaltar esos vínculos. Asimismo, ya trabajaron el tema de la variación proporcional directa que les permite usarla como estrategia de cálculo para encontrar la equivalencia entre las unidades de capacidad y masa del Sistema Internacional y el Sistema Inglés.

En la sesión 3 se recurre al contexto de la construcción, donde se combinan las unidades de masa (peso) y de capacidad de ambos sistemas de medición. El propósito central de este trabajo no consiste en que los alumnos memoricen la equivalencia entre las unidades del Sistema Inglés y las del Sistema Internacional, por lo que puede elaborarse una tabla con las equivalencias en una cartulina y dejarla a la vista de todos para que la consulte quien lo necesite, como en el caso en que se usan onzas para indicar masa (peso) y onzas para capacidad, por lo que el primer paso es discriminarlas.

Por una parte, es necesario que sepan cómo relacionar las cantidades y qué operación permite conocer la equivalencia entre ambos sistemas y pasar de un múltiplo a un submúltiplo y viceversa. Además, es indispensable que los alumnos adquieran la noción de las unidades que están estudiando, por ejemplo, que si se habla de una onza de leche puedan imaginar que es una cantidad mucho menor que un litro, o bien, que si algo pesa una libra, significa que su peso es casi de medio kilogramo. Para completar los valores de las tablas en la primera sesión, deberán decidir si multiplican o dividen los valores dados y recordar que para convertir de una unidad menor a una mayor se divide, y para convertir de unidades mayores a otras menores, se multiplica.

En el primer problema de la actividad 7 de la sesión 3 se puede recurrir a dividir $1000\ kg$ entre 150 varillas, o bien, $2500\ kg$ entre 375 varillas; en ambos casos se obtiene el mismo resultado que corresponde al decimal periódico 6.6666, habrá que aprovechar esto para que los alumnos comenten qué consideran que sea mejor: truncar (6.66) o redondear la cantidad (6.7 o 7) y por qué. Es posible hacer un análisis interesante acerca de las situaciones en que redondear la cantidad afecta o no el resultado; por ejemplo, ¿es igual redondear en una dosis de medicamento que en el agua contenida en una cubeta de agua?, o bien, ¿redondear el peso de una varilla o el peso de un artículo de oro?

En los siguientes problemas, además de hacer conversiones, los alumnos deberán recurrir a otros conocimientos que ya han adquirido, como el cálculo de áreas o el uso de expresiones del tipo $y = 10x$ o $\frac{x}{10}$, donde x es la cantidad conocida y y representa la solicitada.

Pautas para la evaluación formativa

Se deberá observar la estrategia que siguen los alumnos para determinar qué hacer cuando convierten unidades de medida dentro del Sistema Internacional. Por ejemplo, un aumento de ceros o recorrido del punto decimal cuando se hace necesario al multiplicar o dividir por 10, 100, 1000, etcétera. Observe que plantean correctamente las relaciones de proporcionalidad entre los elementos que tienen y los que van a calcular. También es necesario que los alumnos muestren claridad y certeza acerca de por qué eligen una determinada operación para obtener la respuesta a los problemas. Así como el uso de expresiones ya estudiadas: $y = ax$ o $y = \frac{x}{a}$ para expresar de manera general el procedimiento de conversión.

¿Cómo apoyar?

Es importante que los alumnos reflexionen acerca de que convertir una unidad menor a una mayor consiste en ver cuántas veces cabe ésta en la unidad pequeña, por lo que hay que dividir, y que cuando se convierte una unidad mayor a una menor, significa saber cuántas veces cabe ésta en la unidad mayor, por lo que habrá que multiplicar. Un recurso que puede ayudar es que los alumnos analicen la relación metro-centímetro-milímetro para convertir de uno a otro, pues son unidades que se usan con frecuencia.

¿Cómo extender?

Solicite a los alumnos realizar una pequeña investigación acerca de qué unidades de capacidad y de masa (peso) se usan en algunas regiones de México. También podrían investigar acerca de la medida llamada *pinta* (cuya capacidad de medida equivale a 16 onzas, si se trata de la estadounidense, mientras que la pinta del Reino Unido equivale a 20 onzas) que aún se usa. Cuando los problemas requieren sólo la conversión entre unidades del mismo sistema, solicite que obtengan la equivalencia en el otro sistema. Asimismo, pida que vinculen las conversiones con lo estudiado en la secuencia de potencias; por ejemplo, que represen ten los múltiplos y submúltiplos de una unidad de la forma: $0.01 = \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2} = 10^{-2}$.

Secuencia 24 Área del círculo

(LT, págs. 184-189)

Tiempo de realización	3 sesiones
Eje temático	Forma, espacio y medida
Tema	Magnitudes y medidas
Aprendizaje esperado	Calcula el perímetro y área de polígonos regulares y del círculo a partir de diferentes datos.
Intención didáctica	Que el alumno resuelva problemas que implican calcular el área del círculo a partir de diferentes datos.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisual** • *El área del círculo* **Informático** • *Cálculo del área del círculo según Arquímedes*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recurso audiovisual** • *Perímetro y área de polígonos regulares y del círculo*

¿Qué busco?

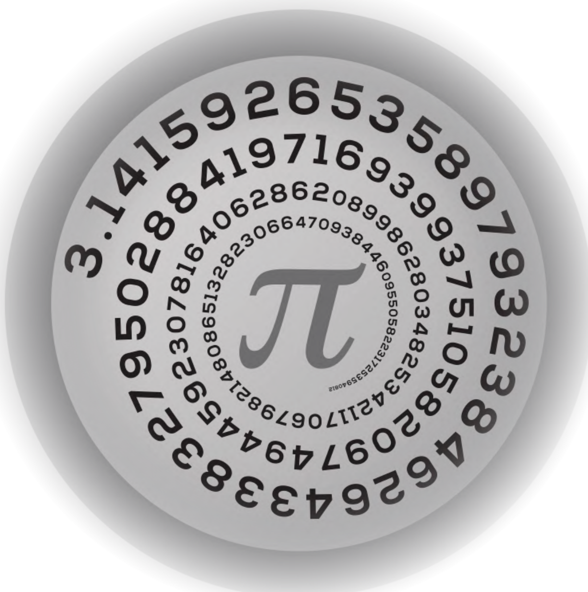
Que los alumnos:

- Sesión 1. Determinen el área aproximada de círculos a partir del conteo de unidades cuadradas.
- Sesión 2. Deduzcan la fórmula para calcular el área del círculo.
- Sesión 3. Resuelvan problemas que impliquen calcular el área de círculos a partir de diferentes datos.

Acerca de...

Los alumnos han estudiado en otros grados escolares cómo calcular el área de diferentes polígonos. En este segundo bloque se enfrentarán al problema de calcular, por primera vez, el área de una figura con lado curvo: el círculo. Tienen como antecedente el conocimiento del número π, que usaron para calcular el perímetro del círculo.

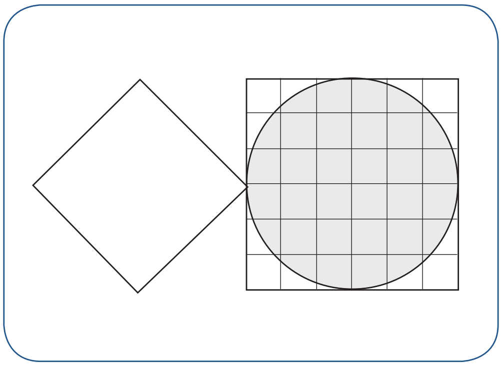
Es importante seguir reforzando la parte conceptual del área, por lo que antes de abordar la deducción de la fórmula (sesión 2), en la primera sesión se pide a los alumnos que calculen el área del círculo a partir del conteo de unidades cuadradas. Asimismo, las actividades de conteo les permitirán construir la idea de que no es posible calcular el área del círculo de manera exacta, incluso aunque conozcan y usen la fórmula. Ellos saben que el valor de 3.14 asignado a π es aproximado, ya que se trata de un número irracional (es decir, es un decimal infinito sin periodo). Sin embargo, también deberán concluir que, para cuestiones prácticas, este valor es aceptable.



¿Cómo guío el proceso?

Es importante que en la sesión 1 permita que los alumnos traten de calcular el área de los círculos con sus propios recursos y no proporcione la fórmula. Si llegara a haber algún alumno que ya la conozca, permítale usarla, y en la puesta en común se mostrará como un procedimiento más; también servirá para comparar con los resultados que encuentren por otros métodos.

En la actividad 1 es probable que decidan contar los cuadrados de color que forman parte del círculo y, en aquellos casos en que están incompletos, compensar de manera aproximada unas partes con otras. Otro procedimiento es considerar el área del cuadrado completo y restar el área de las partes que quedan fuera del círculo. También es probable que dividan el círculo en otras figuras y calculen el área de la figura y luego aumenten, aproximadamente, el área de las partes que quedan fuera. Por ejemplo, para el círculo:



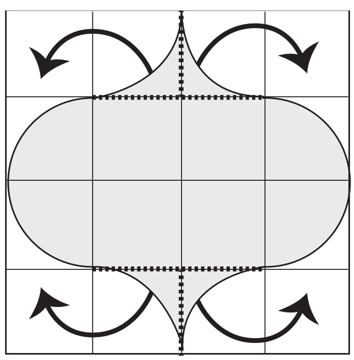
Por conteo los alumnos pueden calcular el área del cuadrado (18 unidades cuadradas) y sumarla con el área de las figuras que quedan fuera; se observa que de una de las partes son casi 2.5 unidades cuadradas, así que de las cuatro son 10 unidades cuadradas, por lo que el área aproximada del círculo es 28 unidades cuadradas.

En la puesta en común de la actividad 4 ponga especial énfasis en los argumentos que den los alumnos para explicar la opción que hayan subrayado en la actividad 2, se espera que se den cuenta de que el área del círculo está entre tres y cuatro veces el cuadrado del radio; esta idea es un buen recurso para estimar el área de círculos y, además, prepara a los alumnos para comprender la fórmula que estudiarán en la sesión 2. Con la resolución de las actividades llegarán a darse cuenta de que el área del círculo está más cerca de tres veces el cuadrado del radio que cuatro veces (lo que equivale aproximadamente a 3.14 veces el cuadrado del radio).

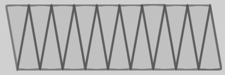
En la sesión 2, las preguntas los guiarán a la deducción de la fórmula. En la actividad 4, en la puesta en común, invite a los estudiantes que hayan comprendido a que expliquen alguno de los procedimientos trabajados, tanto el del paralelogramo como el de los polígonos regulares cuyos lados van en aumento. Se sugiere que para la actividad 1 los alumnos tracen un círculo y lo dividan en varios sectores circulares a fin de que formen una figura similar al paralelogramo y noten que, entre más sectores obtengan, la figura que puede formarse se acercará más a un paralelogramo, sin llegar a serlo exactamente. Este procedimiento también es útil para enfatizar que no es posible calcular el área exacta del círculo.

En la sesión 3, los alumnos podrán seguir diferentes procedimientos para calcular el área de las figuras propuestas. Quienes lo deseen, podrán hacer uso del conteo de unidades cuadradas, usar la fórmula que trabajaron en la sesión 2 y, en algunos casos, observar que es más sencillo trabajar por compensación: imaginar que se corta la figura de alguna manera, y el sobrante se coloca en un lado donde embona bien y permite calcular con mayor exactitud. Por ejemplo, en la figura siguiente se puede formar un rectángulo si se recorta por las líneas punteadas y las partes resultantes se colocan donde indican las flechas. El área de esta figura es 8 unidades cuadradas.

Si en la puesta en común no surgen diferentes procedimientos después de que los alumnos expongan los propios, usted puede sugerir otros.



Si pudiéramos dividir un círculo en más partes y formar una figura como la siguiente:



Observaríamos que cada vez se parece más a un romboide cuya área es:

$$A = base \times altura$$

Como la base del romboide es la mitad del perímetro del círculo, entonces: $\frac{P}{2} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{2} = \pi \cdot r$ y la altura del romboide corresponde al radio del círculo; por lo tanto, el área del círculo es:

$$A = \pi \cdot r \cdot r, \quad \text{o bien,} \quad A = \pi \cdot r^2$$

Pautas para la evaluación formativa

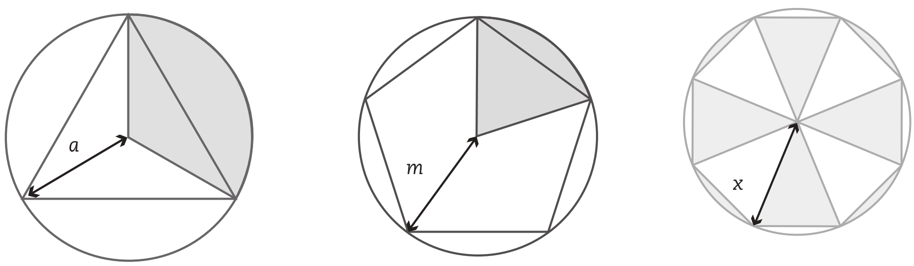
Observe si durante el trabajo con esta secuencia los alumnos:

- Utilizan diferentes procedimientos para determinar el área de las figuras y no se limitan sólo al uso de fórmulas.
- Aplican correctamente la fórmula ya establecida y en ella sustituyen los valores y los operan de forma adecuada.
- Operan de manera correcta con números naturales, fracciones o decimales que surgen en los cálculos que deben realizar.

En caso de que note que el problema está en la operatoria, sobre todo al trabajar con medidas que implican decimales o fracciones, puede recordar en grupo la manera de resolver las operaciones que estén obstruyendo su avance.

Si lo considera pertinente, también puede recordarle al grupo lo que es el área (es decir, una medida de superficie) y cómo se calcula en las figuras trabajadas con anterioridad: rectángulos, paralelogramos, cuadrados, triángulos, polígonos regulares; sobre todo cómo obtener el área de los romboides y de los polígonos regulares, porque se requieren para trabajar la sesión 2.

e) Los polígonos de las siguientes imágenes son regulares. Anota la expresión que corresponde al área de la parte de color.



Área = ____________ Área = ____________ Área = ____________

¿Cómo apoyar?

Si a los alumnos se les dificulta el cálculo por conteo de unidades, puede hacer un alto y resolver en grupo los dos primeros casos.

¿Cómo extender?

Proponga que calculen el área de círculos cuyo radio sea, por ejemplo: x, $2a$, $5m$... o cuyo diámetro sea z, $2a$, $7m$, etcétera.

Secuencia 25 Medidas de tendencia central y de dispersión 1 (LT, págs. 190-199)

Tiempo de realización	3 sesiones
Eje temático	Análisis de datos
Tema	Estadística
Aprendizaje esperado	Usa e interpreta las medidas de tendencia central (moda, media aritmética y mediana), el rango y la desviación media de un conjunto de datos y decide cuál de ellas conviene más en el análisis de los datos en cuestión.
Intención didáctica	Que los alumnos interpreten la información estadística presentada en sitios oficiales y la utilicen para analizar y comparar la distribución de conjuntos de datos considerando la tendencia central, así como su dispersión a partir del rango y desviación media.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisual** • *Cómo obtener la desviación media de un conjunto de datos*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recurso audiovisual** • *Lectura de gráficas estadísticas*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Interpreten información estadística obtenida de fuentes oficiales que implican a las medidas de tendencia central y rango. Asimismo, que utilicen la información estadística como referente para deducir y analizar conjuntos de datos y determinen cuáles son las medidas que conviene usar como representativas de la situación.
- Sesión 2. Analicen la dispersión entre los datos de un conjunto respecto a la media aritmética, obteniendo así la desviación media del conjunto.
- Sesión 3. Recolecten y registren datos obtenidos mediante una encuesta, los organicen y obtengan las medidas de tendencia central y de dispersión para analizar y comparar con los valores de otros conjuntos. Analicen la variación y la tendencia central de pares de conjuntos de datos que corresponden a diferentes situaciones y tomen decisiones pertinentes.

Acerca de...

Ésta es la primera de dos secuencias en las que los alumnos de segundo grado estudiarán las medidas de tendencia central, el rango y la desviación media. Desde tercero de primaria los alumnos estudian las medidas de tendencia central y, a partir de sexto grado, se explicita el estudio de la primera de las medidas de dispersión: el rango. Estos contenidos se ubican en el tema de Estadística del eje Análisis de datos. Este eje tiene entre sus propósitos propiciar que los estudiantes adquieran conocimientos y desarrollen habilidades propias de un pensamiento estadístico y probabilístico (llamado *pensamiento estocástico*).

Dichos conocimientos y habilidades no deben concebirse sólo como una manera de comunicar la información, sino como un instrumento útil para la búsqueda de argumentos, del pensamiento crítico que se puede reflejar en ejercer una ciudadanía libre y crítica. De ahí que la propuesta de actividades para esta secuencia se centre en valorar si la información obtenida de una fuente pública oficial es representativa o no del entorno inmediato de los estudiantes.

Es importante que los alumnos comprendan que las medidas de variación (o dispersión) complementan las de tendencia central para caracterizar una distribución de datos. El primer contacto con la idea de dispersión se da cuando el interés por realizar un estudio estadístico se reduce a analizar un conjunto de datos sin pretender generalizar los resultados del análisis (que es descriptivo). Luego, formalmente, la primera medida de dispersión que estudian es el rango, fácil de calcular e interpretar. En esta secuencia (en la sesión 2) se les presenta a los alumnos el problema de medir la dispersión respecto a una medida de posición central (media aritmética); posteriormente, se reformula en la comparación de dos distribuciones considerando su dispersión. En ambos problemas se abordan los conceptos de desviación respecto a la media, y una de sus propiedades es que no puede tomar valores negativos.

Otro aspecto fundamental en el estudio de la estadística es el paso de lo particular a lo general, y en secundaria se fomenta su logro mediante el cálculo de medias aritméticas y de las medidas de variación, como la desviación media. En el desarrollo de la secuencia se solicita obtener las diferentes medidas, tanto de tendencia central como de dispersión, para que analicen y comparen el comportamiento de cada distribución, aprendan a reconocer la implicación que tiene cada medida y logren determinar cuál es la más conveniente de utilizar ante una determinada necesidad de información.

Sobre las ideas de los alumnos

Tal vez los alumnos crean que el estudio de las medidas de tendencia central, rango y desviación media se limita a conocer sus procedimientos rutinarios de cálculo; sin embargo, no es así, sino encontrar medios que ayuden a comprender, interpretar, analizar e inferir las distribuciones de los datos a partir de referentes como la media aritmética, la moda, la mediana, el rango y la desviación media, para ser capaz de analizar con rigor las situaciones, interpretar argumentos, manipular los datos, ser críticos y tomar decisiones.

¿Cómo guío el proceso?

En la construcción del concepto de dispersión, antes de abordar la fórmula para calcular la desviación media (sesión 2), es importante que en la sesión 1 permita que los alumnos, con sus propios recursos, traten de deducir de qué manera consideran que se obtuvo la información presentada en el portal de *Cuéntame*, es decir, a quiénes se les preguntó y cuántas personas participaron. Es posible que algunos alumnos contesten que todas las personas del país fueron encuestadas; tal vez otros digan que sólo los adultos o mayores de 18 años; en cualquier caso, considere la información que aparece en el recuadro de "Dato interesante" y destaque la frase de *una población determinada*. Si le es posible, después de las deducciones que den los alumnos, consulten la Encuesta intercensal de 2015 para conocer de manera específica los detalles. El propósito de la actividad 1 es que los alumnos aprendan a cuestionarse acerca de la información planteada en diversas fuentes, tanto en aspectos de obtención y tratamiento de datos, así como de su representatividad, es decir, qué tanto se consideran incluidos o qué tanto dicha información corresponde a lo que observan en su entorno. De ahí que se proponga trabajar a partir de las preguntas que Emma se plantea: ¿Cuál es el grado de escolaridad más frecuente?, ¿cuál es el grado promedio de escolaridad (media aritmética)? y ¿cuál es el grado máximo y mínimo de escolaridad?

Dichas preguntas presentan una propuesta de conjunto de datos para recordar, reflexionar y analizar el significado, la representación y la manera de obtener las medidas de tendencia central y del rango.

En la sesión 2, apoyados con la representación gráfica de la sesión anterior, los alumnos deberán dar con la diferencia de cada dato respecto al valor de la media aritmética, y luego de las distancias (porque implica obtener el valor absoluto de las diferencias) para conocer el valor de la desviación media; con este fin deberán comprender que ese valor es positivo, y entre más cercano a cero implica que los datos están alrededor del valor de la media aritmética. Por ejemplo:

Dato	Diferencia con respecto a la media aritmética	
0	0 – (*media aritmética*) =	
1	1 – (*media aritmética*) =	
2	2 – (*media aritmética*) =	

En la gráfica de barras de la actividad 3 se representa otro conjunto de datos que corresponde a las respuestas de 30 personas más; los alumnos deberán leerla e interpretarla. Un aspecto importante de este conjunto es que hay dos personas que no tienen ningún grado de estudio. Los alumnos deberán considerar cómo afecta esta situación y recordar que en el cálculo de la media aritmética se divide la suma de los valores entre el total de los datos.

Podrán observar, además, que el valor del rango de este conjunto es igual que el del anterior, pero los datos son diferentes. Es importante destacar cuáles son los valores que influyen en el cálculo de la desviación media, tanto para el caso de un valor de la desviación media alrededor de 0 o un valor muy grande.

Finalmente, en la sesión 3 los alumnos deberán definir a qué personas deben encuestar para reunir y organizar los datos en el plano. Es probable que, por el entorno donde se ubican las telesecundarias, los valores de los datos sean menores que 10, y contrastarán con los obtenidos por Joel y Emma. Si ocurriera esta situación, debe considerar que la estadística también implica incertidumbre. De ahí que un aspecto importante es la comparación de los conjuntos a partir de sus medidas de tendencia central y de dispersión y así sacar conclusiones, como en el caso de la actividad 7.

Pautas para la evaluación formativa

Observe si, durante el trabajo con esta secuencia, los alumnos:

- Utilizan los procedimientos para determinar las medidas de tendencia central de un conjunto de datos y del rango.
- Aplican correctamente el procedimiento para obtener la desviación media de un conjunto de datos (no dan resultados negativos, sustituyen los valores y los operan correctamente).
- Representan correctamente los datos, las frecuencias y los valores de las medidas de tendencia central y de dispersión que se les indica.
- Interpretan correctamente los datos que se presentan en tablas y gráficas.

¿Cómo apoyar?

Si a los alumnos se les dificulta el cálculo de alguna de las medidas de tendencia central o del rango, pueden consultar las secuencias 26, 36 y 37 del libro de primer grado y los recursos audiovisuales correspondientes. Se espera que las preguntas de la actividad 2 sean lo suficientemente claras para que recuerden y distingan cómo obtener e interpretar cada una de las medidas de tendencia central. En el caso de la desviación media, primero se obtienen las diferencias respecto a la media aritmética, y luego la distancia; la primera acepta resultados positivos y negativos, y la segunda sólo positivos. Destaque que un dato puede tener valor 0, y se debe considerar en el conteo del total de los datos. Los valores atípicos (o muy grandes o pequeños) influyen en el cálculo de la media aritmética y, por lo tanto, de la desviación media.

¿Cómo extender?

Pida reunir los datos recolectados en la encuesta que realizaron para obtener las medidas de tendencia central y variación para comparar con los otros conjuntos de datos y la información publicada en el portal del Inegi. ¿Es aceptable la información del portal como representativa del grado de escolaridad promedio en el país?

Secuencia 26 Histogramas y polígonos de frecuencia (LT, págs. 200-209)

Tiempo de realización	5 sesiones
Eje temático	Análisis de datos
Tema	Estadística
Aprendizaje esperado	Recolecta, registra y lee datos en histogramas, polígonos de frecuencias y gráficas de línea.
Intención didáctica	Que los alumnos lean, interpreten y presenten información estadística en histogramas y polígonos de frecuencia.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisuales** • *Histograma* • *Polígonos de frecuencia* **Informático** • *Polígonos de frecuencia*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recurso audiovisual** • *Análisis de datos*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Lean e interpreten la información presentada en histogramas para conocer sus elementos y analizar la forma que tienen.
- Sesión 2. Analicen los intervalos en que se agrupan los datos para elaborar e interpretar histogramas.
- Sesión 3. Construyan histogramas a partir de tablas de frecuencia de datos agrupados en intervalos. Interpreten la información que presenta un histograma respecto a los intervalos en que se organizan los datos.
- Sesión 4. Construyan e interpreten polígonos de frecuencias a partir de su representación tabular e histograma.
- Sesión 5. Reconozcan los tipos de gráficos estadísticos que conviene utilizar cuando los datos están agrupados o sin agrupar.

Acerca de...

En esta secuencia los alumnos aprenderán a elaborar, leer e interpretar histogramas y polígonos de frecuencias. La característica principal de estos tipos de gráficos estadísticos es que los datos están organizados en intervalos. Desde primaria los alumnos han interpretado y presentado información en gráficas de barras y de pastel que implican datos numéricos sin agrupar o datos categóricos (por ejemplo: ¿cuál es el color de ojos de las personas?, ¿cuál es el deporte favorito?, etcétera). A partir de esta secuencia, los alumnos aprenderán a organizar los datos en tablas de frecuencia agrupados en intervalos de igual tamaño y a presentarlos en histogramas y polígonos de frecuencia.

Una de las principales tareas en esta secuencia es analizar y aprender a organizar los datos en intervalos de igual tamaño y a determinar el punto medio de ese intervalo, mediante el cual es posible construir las gráficas. También es importante que los alumnos comprendan que la altura de la barra de cada histograma corresponde a la frecuencia del intervalo (expresada en frecuencias absolutas o relativas o en porcentaje). Estas representaciones gráficas permiten visualizar la variabilidad de los datos, así como la tendencia central, por eso se vinculan con la secuencia anterior. La diferencia ahora es que están agrupados en intervalos debido a que es posible presentar grandes cantidades de datos y, en el caso de los polígonos de frecuencias, es posible mostrar en un mismo plano dos o más conjuntos de datos y realizar comparaciones. De este modo, los alumnos adquieren conocimientos y desarrollan habilidades propias de un pensamiento estadístico y probabilístico (cuya representación en histogramas y polígonos de frecuencias es utilizada para exponer resultados de experimentos aleatorios cuando se tiene una gran cantidad de ensayos). Con esto se espera que fortalezcan los recursos que tienen para analizar y comprender la información que los rodea. En el siguiente bloque aprenderán a elaborar e interpretar gráficas de línea.

Sobre las ideas de los alumnos

Los alumnos pueden considerar que las gráficas de barra y los histogramas son el mismo tipo de gráficas estadísticas. Se espera que al finalizar la secuencia los alumnos reconozcan las diferencias entre ambos. Por ejemplo, en un histograma, el ancho de las barras corresponde al tamaño de los intervalos. Si dichos intervalos tienen el mismo tamaño, entonces la anchura de las barras es la misma en todo el gráfico y se dibujan sin dejar espacios entre ellas. Además, en un histograma hay tantas barras como intervalos se definan, mientras que en una gráfica de barras cada barra corresponde a un dato o categoría sin importar el ancho de la barra.

En cuanto al polígono de frecuencias se refiere, en lugar de barras, las frecuencias de cada intervalo se representan con un punto, que parte del punto medio del intervalo y se coloca a la altura de la frecuencia del mismo. Los alumnos deberán comprender que al agrupar los datos en intervalos se pierde de vista la frecuencia de un dato específico, tanto en el histograma como en el polígono de frecuencias; en este último caso, por ejemplo, habrá que insistir en que no es correcto darle significado a la línea que une los puntos consecutivos del polígono, porque solamente se está representando la frecuencia (absoluta o relativa, o porcentaje) por intervalo y no por cada valor del intervalo.

¿Cómo guío el proceso?

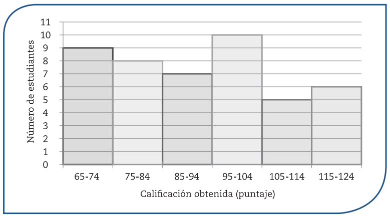
La secuencia se inicia proporcionando un conjunto de datos que corresponden a las respuestas de una encuesta. Los alumnos deberán organizarlos y presentarlos en las gráficas de acuerdo con el criterio que indicaron.

Se espera que la mayoría de los estudiantes utilice gráficas de barras y represente los datos sin agrupar, y que no tengan dificultades para realizar y contestar lo solicitado en los incisos d) al g). En particular porque en la secuencia anterior obtuvieron las medidas de tendencia central de otros conjuntos. El propósito es que trabajen con datos sin agrupar y elaboren una gráfica que utilizarán para comparar y contrastar con el histograma que se presenta en la actividad 2, destacando las características de una y otra. Se espera que al ubicar la media aritmética del conjunto de datos en el histograma, observen que ahora en el eje horizontal están representados intervalos y que deberán aproximar su ubicación, además de que la frecuencia del intervalo equivale a la suma de las frecuencias de todos los datos que están en ese intervalo. Sin embargo, la tendencia central de los datos se debe observar en la gráfica que ellos construyeron. El análisis entre una gráfica y otra se debe hacer vis a vis, es decir, comparando los ejes horizontales, luego los verticales, las barras de una y otra gráfica, etcétera.

Posteriormente, se sugiere comentar y analizar la información del recuadro para identificar las partes que integran un histograma. En la sesión 2, la atención se centra en los intervalos. Se estudia el caso de los intervalos de igual tamaño. Hay que aclarar que es posible construir histogramas con tamaños de intervalo diferentes, como los que se muestran en el Inegi o en otros sitios, generalmente el primero o el último intervalo son de diferente tamaño, como en la gráfica de la actividad 2 (Fuente: Encuesta Nacional de Hábitos, Prácticas y Consumo Culturales, octubre 2018. En http://www.conaculta.gob.mx/encuesta_nacional.php).

Es importante que los alumnos aprendan que los intervalos se pueden representar por su punto medio y, a partir de él, también construir las gráficas. Reflexione con ellos: es posible que ninguno de los datos originales sea igual al valor del punto medio del intervalo; sin embargo, es un representante de todos los datos que pertenecen a ese intervalo. Si lo considera necesario, también cuestione el tipo de información que se muestra en el eje vertical de las gráficas: frecuencias, frecuencias relativas o porcentajes.

En la sesión 3, los alumnos elaborarán histogramas y completarán las tablas de frecuencias de las situaciones que se presentan. En la sesión 4, los alumnos aprenderán a trazar el polígono de frecuencias a partir del histograma. Y también reflexionarán sobre el número de intervalos que conviene definir y el rango de los valores.



En la sesión 5, se propone completar la tabla de frecuencias de una situación que implica intervalos con valores decimales. Se recomienda resaltar que una característica más de estos nuevos gráficos es que se pueden representar datos continuos y no sólo discretos, como ocurre en la gráfica de la actividad 2 de la sesión 2, que corresponde al número de libros que se tienen en casa. Aunque estadísticamente podemos obtener la marca de clase del intervalo de 1-10 libros (5.5 libros), lo cierto es que el contexto sólo acepta un número exacto de libros.

En el caso de la sesión 3, actividad 1, los alumnos aprenderán que en un plano es posible presentar dos o más polígonos de frecuencias referidos a dos o más conjuntos de datos que corresponden a la misma situación, lo que hace que sea posible su comparación.

Finalmente, en la actividad 4 de la sesión 5, se pretende que los estudiantes sean capaces de leer e interpretar el tipo de información que representa cada gráfica y que la relacionen con la correspondiente de forma correcta.

Pautas para la evaluación formativa

Observe si durante el trabajo con esta secuencia los alumnos:

- Elaboran histogramas y polígonos de frecuencias con precisión (incluyen título del gráfico, escala de los ejes, rótulos).
- Interpretan de forma adecuada los datos que se presentan en tablas y gráficas.
- Obtienen y representan correctamente datos, frecuencias y valores de las medidas de tendencia central que se les indica.
- Aplican de manera apropiada el procedimiento para obtener el punto medio de cada intervalo y determinan el número de intervalos en que es adecuado organizar un conjunto de datos.
- Relacionan acertadamente el tipo de gráfica estadística con la información que presentan.

¿Cómo apoyar?

Si los alumnos tienen dificultades para comprender que se pierde precisión al indicar la frecuencia de un dato en particular, pida que consideren las actividades 1 y 2 de la sesión 1, específicamente el caso de las personas que asignaron 10 como puntaje, donde observarán que ese dato tiene una frecuencia de 2, es decir, dos personas de las treinta que contestaron asignaron 10 puntos como grado de satisfacción.

Sin embargo, en el caso del histograma de la actividad 2, no aparece explícitamente el 10, pero se sabe que ese dato se encuentra en el intervalo 9-11 y que la frecuencia del intervalo es 5, la cual engloba a las personas que dieron como puntaje 9, 10 u 11. Además, si nos referimos a ese intervalo por su punto medio (o marca de clase), diremos que es 10 y la frecuencia, 5. De tal manera que es importante que los estudiantes sean conscientes de cuál es el procesamiento que se da a los datos.

Un conjunto con una gran cantidad de datos permite comprender mejor su tendencia y distribución al agruparlos en intervalos y presentarlos por medio de un histograma o polígono de frecuencias, pero se pierde precisión sobre un dato en particular.

¿Cómo extender?

Pida que elaboren la tabla de frecuencias y el histograma de los datos de la actividad 2 de la sesión 1, de la secuencia 25 (los datos que Joel obtuvo en la encuesta). Luego pida que ubiquen las medidas de tendencia central que obtuvieron, compárenlas con la gráfica de la actividad 3 de esa sesión y observen los cambios entre una y otra gráfica. ¿Cuántos intervalos consideraron?, ¿de qué tamaño son?

También pueden elaborar en un mismo plano los polígonos de frecuencias que corresponden a los 3 conjuntos de datos que se obtienen de la encuesta de Joel, de Emma y del grupo, y observar su distribución respecto al valor del grado de escolaridad promedio de México.

Evaluación Bloque 2

(LT, págs. 210– 211)

Con el propósito de observar el avance en el logro de los aprendizajes de los estudiantes, además de las consideraciones que usted haya realizado, se presentan a continuación los resultados y orientaciones del instrumento de evaluación del bloque 2.

Reactivos 1, 2 y 3. Multiplicación y división de números enteros, fracciones y decimales. Con estos reactivos se valora el desarrollo de los alumnos respecto a su sentido numérico y su manejo de las operaciones de multiplicación y división. Más allá de proponer operaciones en las que deben obtener los resultados correctos, se plantean situaciones en las que los alumnos movilizan sus habilidades para mostrar la comprensión del significado e interpretación de las operaciones básicas de números enteros, fracciones y decimales negativos y positivos.

Reactivo 1. Valora los conocimientos y habilidades de los alumnos respecto a la aplicación de las reglas de los signos de números enteros. Cuando se indica que la suma de los números es -12 puede implicar que ambos números son negativos o de diferente signo, siendo el negativo de mayor valor absoluto. Al considerar la segunda condición, el cociente es -5, se determina que los números son de diferente signo, debido a que el cociente es negativo. La respuesta correcta es -15 y 3, porque $-15 + 3 = -12$ y $-15 \div 3 = -5$.

Reactivo 2. Valora el conocimiento de las fracciones y la división con este tipo de número. Particularmente, la tarea implica reversibilidad del pensamiento, pues dado el cociente, se debe determinar el dividendo y el divisor, además de aplicar la regla de los signos en la división. Partiendo de este aspecto, se puede determinar uno de los dos elementos: dividendo -3 y divisor 4 (o dividendo 3 y divisor -4).

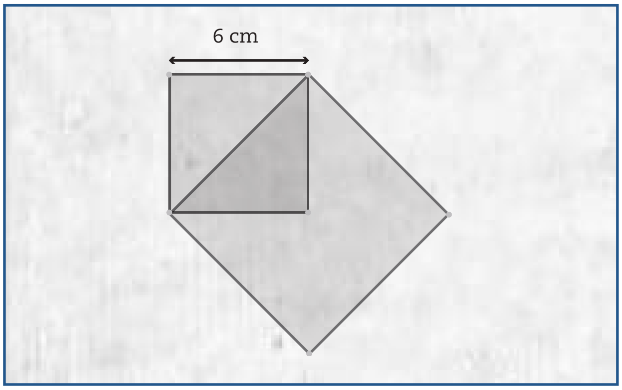
Reactivo 3. Permite observar el aprendizaje que han obtenido de la multiplicación con decimales. Como primer paso, los factores son de diferente signo. Hay un conjunto de respuestas correctas posibles. Si se considera la multiplicación como una suma repetida, uno de los factores puede ser -1.5 y el otro 3, o 1.5 y -3. Otro par de factores posibles es -0.5 y 9 (o 0.5 y -9). También puede ser 0.75 y 6. Si se considera que el producto es el resultado de dos factores y su operación inversa es la división, al dividir el producto -4.5 entre 1, se obtiene -4.5, que es otra combinación posible y denota también el desarrollo del sentido numérico. Es recomendable pedir a los estudiantes que justifiquen sus respuestas.

Reactivo 4. Potencias de exponente entero y conversión de medidas de masa (peso). De acuerdo con lo que establece la base del reactivo, la expresión que permite saber cuánto dinero se obtendrá de la venta es $50^3 = 125\,000$, y 5.51 lb es el peso promedio de un pollo de los que transporta el camión y es equivalente a 2.5 kg. Se debe considerar que 1 lb $= 0.454$ kg.

Reactivo 5. Notación científica. Se evalúa que los alumnos comprendan la manera de operar y expresar la notación científica. En la situación presentada ambas expresiones tienen la misma potencia, entonces la respuesta implica la diferencia entre los factores que no son potencia: $2.5 - 1.9 = 0.6$.

Y aplicando las reglas de la notación decimal, la diferencia es: 6×10^4. Tal vez, algunos alumnos anoten como respuesta 0.6×10^5, pero no están considerando la regla de la escritura de la notación científica: el primer factor debe tener un dígito entero.

Reactivo 6. Aproximación a la raíz cuadrada. Se espera que los alumnos apliquen alguna de las estrategias estudiadas en la secuencia para aproximar raíces cuadradas y determinen el valor de la medida del lado del cuadrado naranja. Dada la figura, los alumnos pueden establecer que uno de los lados del cuadrado naranja es la diagonal del cuadrado menor, en el que cada lado mide 6 cm. Así, la medida del lado del cuadrado naranja es aproximadamente: $\sqrt{2} \times 6 \approx 8.48$ cm.



Reactivo 7. Reparto proporcional. Los alumnos deben comprender que el monto total de utilidades se debe repartir entre todos los alumnos de la escuela. Así, el primer paso es determinar cuántos alumnos hay. Como resultado de sumar la cantidad de alumnos que hay en cada grado se sabe que son 106: $(20 \times 2) + 18 + (16 \times 3) = 40 + 18 + 48 = 106$. En este punto de la resolución puede ocurrir que algunos alumnos se equivoquen.

En la siguiente parte del proceso de resolución, se divide el monto de las utilidades entre el número total de alumnos, el cociente es 23 y representa la cantidad de dinero que cada alumno de la escuela recibirá. Finalmente, se determina el monto por grado y la tabla completa es la siguiente:

Primero	Segundo	Tercero	Cuarto	Quinto	Sexto
\$ 460	\$ 460	\$ 414	\$ 368	\$ 368	\$ 368

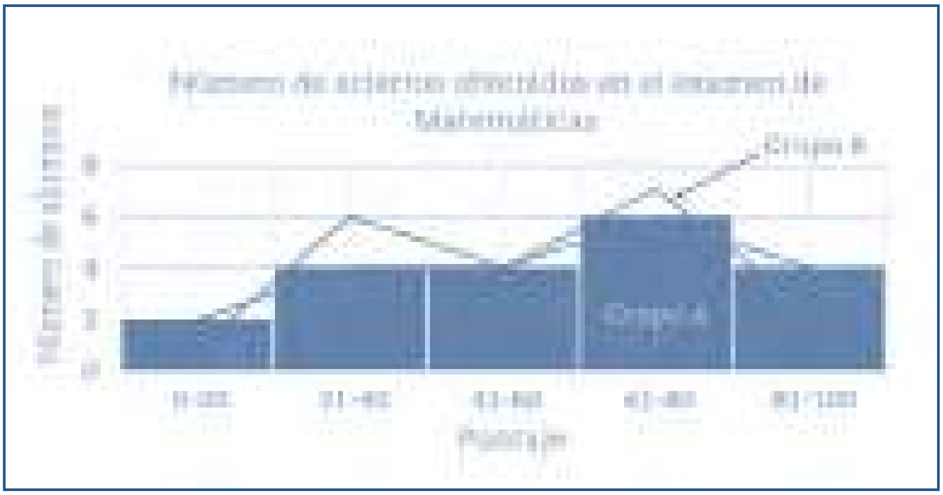
Reactivo 8. Área del círculo. Valora la manera en que reconocen y aplican el cálculo del área del círculo en una situación de la vida real. En este caso, para conocer el área del mantel circular, debe obtener la medida del radio o considerar la mitad de la medida del diámetro. El área del mantel es mayor que un metro cuadrado, pero menor que dos; sin embargo, deberá comprar dos madejas de estambre y le sobrará un poco.

Área del mantel	Número de madejas de estambre
1 m^2	1
$A = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \pi r^2 = \pi(0.75)^2 = \pi(0.5625) = 1.76625$	2

Reactivo 9. Medidas de tendencia central y de dispersión, histograma y polígonos de frecuencias. Evalúa el aprendizaje del estudiante respecto a conocimientos y habilidades que le permitan analizar, comprender e interpretar mejor una situación. No se evalúa solamente si saben calcular los valores de las medidas estadísticas ni de construir las gráficas. Para contestar el inciso a) se requiere calcular la media aritmética y la desviación media de cada grupo.

Grupo	Media aritmética	Desviación media
A	58.5	19.95
B	55.25	20.025

Con estos valores se observa que el grupo con mejor desempeño es el A, tanto porque tiene mejor valor en la media aritmética como por tener menor desviación media. En cuanto al inciso b) el histograma puede estar formado de 4 a 5 columnas, lo importante es que estén claramente identificados los intervalos y se respeten las principales características de un histograma. Por ejemplo, las barras van continuas y el eje vertical representa la frecuencia, en este caso, el número de alumnos que obtuvieron los puntos señalados en cada intervalo.



Y en el caso del inciso c), se pide el trazo de los polígonos de frecuencias a partir del primer histograma mostrado, derivando en el segundo.

La segunda parte de los reactivos son de opción múltiple.

Reactivo 1. Multiplicación de números enteros, fraccionarios y decimales. Valora el aprendizaje de la generalización de la aplicación de la regla de los signos en la multiplicación de números con signo. La respuesta correcta es el inciso b): Uno, tres o cinco.

Reactivos 2 y 3. Sucesiones de figuras y números y expresiones equivalentes. Evalúa la capacidad para reconocer expresiones algebraicas equivalentes que generen una sucesión de números determinada. En el caso del reactivo 2, las respuestas correctas son los incisos b) $\frac{1}{2}(n+1)$, e) $0.5n + 0.5$ y f) $\frac{1}{2}n + 0.5$. Tal vez algunos alumnos consideren como correcta las opciones de los incisos a) y c). Si eso ocurre, los alumnos aún no aplican la distribución de la multiplicación respecto de la suma, porque la expresión equivalente es $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$. En el caso de seleccionar el inciso d), la expresión equivalente es $x + \frac{1}{2}$. En el reactivo 3, las respuestas correctas son los incisos b) $\frac{1}{2}n$ y g) $0.5n$.

Reactivo 4. Sistemas de ecuaciones. Método de igualación. En el inciso a) se valora que los alumnos comprendan el procedimiento que se sigue al aplicar el método de igualación. La respuesta correcta es: $4x + 3x = 7 + 28$.

Método de sustitución. En el inciso b) se valora que comprendan y apliquen el procedimiento que se sigue con el método de sustitución. La respuesta correcta es: $-7y = 14 - 42$.

Bloque 3

Secuencia 27 Potencias con exponente entero 2

(LT, págs. 214-221)

Tiempo de realización	4 sesiones
Eje temático	Número, álgebra y variación
Tema	Multiplicación y división
Aprendizaje esperado	Resuelve problemas de potencias con exponente entero y aproxima raíces cuadradas.
Intención didáctica	Que los alumnos reconozcan la potenciación como una operación, que expliquen sus propiedades básicas y la sepan usar al resolver problemas.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	Recurso audiovisual • *Crecimiento exponencial* Informático • *Crecimiento exponencial*
Materiales de apoyo para el maestro	Recurso audiovisual • *Potencias con exponente entero y la raíz cuadrada*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Se familiaricen con los términos de la potenciación y usen el cálculo mental al efectuar operaciones con potencias y raíces cuadradas.
- Sesión 2. Distingan el crecimiento exponencial y usen las leyes de los exponentes al resolver cálculos más complejos.
- Sesión 3. Amplíen sus conocimientos sobre las leyes de los exponentes y los usen al resolver problemas.
- Sesión 4. Apliquen sus conocimientos sobre la notación científica.

Acerca de...

Esta secuencia contiene actividades que permitirán a los alumnos profundizar y ampliar lo que estudiaron en la secuencia 15. En cada sesión se privilegia un aspecto central, pero las actividades son diversas y no necesariamente están vinculadas una con otra. Por ejemplo, "Manos a la obra" inicia con una actividad en la que los alumnos analizarán dos sucesiones de potencias para determinar en qué cifra termina una potencia dada.

En la actividad 3 se pide que usen el cálculo mental. Se trata de operaciones aparentemente complicadas, pero al verlas con detenimiento, se da uno cuenta de que se pueden resolver mentalmente.

La actividad 6 implica armar expresiones exponenciales, seleccionando adecuadamente los tres términos de cada expresión. En la sesión 2 se retoma el estudio del producto de potencias con la misma base, con casos en los que hace falta uno de los términos del producto. Se distingue el crecimiento exponencial de otro tipo de crecimiento y se relaciona la potenciación con un problema en el que se analiza cómo varía la capacidad de una caja sin tapa, en función de su altura, manteniendo fija el área lateral. Se recomienda revisar el recurso audiovisual *Crecimiento exponencial* para conocer y analizar otras situaciones con este tipo de crecimiento.

En la sesión 3, a manera de juegos con números, se plantean varios casos en los que se trata de expresar el mayor valor posible, por ejemplo, utilizando únicamente tres doses. También se retoma el estudio del cociente de potencias de la misma base en operaciones a las que les falta uno de los tres términos. Se analizan casos más complejos con exponentes negativos y se generalizan los casos de base 1, exponente 1 y exponente cero.

En la sesión 4 se retoma el estudio de la notación científica y se establece la diferencia respecto a la notación decimal y la notación exponencial. Se plantean algunos problemas en los que se opera con la notación científica.

Sobre las ideas de los alumnos

A simple vista, algunas operaciones pueden parecer complicadas para los alumnos, como en $(12 - x)^2 = 49$, de la sesión 1, actividad 3, en la que seguramente intentarán desarrollar el binomio al cuadrado cuando no es necesario. En el caso de los productos en los que falta uno de los factores, para muchos alumnos no es evidente que el factor desconocido se obtiene al dividir el producto entre el factor conocido.

En la sesión 2 hay una actividad que permite entender en qué consiste el crecimiento exponencial, sólo se pretende mostrar que la potenciación es útil en este tipo de problemas, pero es probable que necesiten ayuda, o que requieran otros ejemplos, como explicar el crecimiento de una población de 10 bacterias que cada hora se reproducen partiéndose en dos (bipartición).

En las divisiones a las que les falta el dividendo o el divisor, puede surgir una dificultad similar a la de las multiplicaciones a las que les falta un factor; sin embargo, son ejercicios útiles para que los alumnos usen las leyes de los exponentes.

Si una regla funciona para un caso, es normal que los alumnos piensen que funciona para todos los casos. Algunos de los problemas numéricos que se plantean en la sesión 3 permiten darse cuenta de que eso no siempre sucede. Por ejemplo, ¿cuál es el mayor valor posible que se puede expresar con tres veces el 2? Aunque no a las primeras de cambio, los alumnos podrán encontrar que es 2^{22}. ¿Y con tres veces el 3? Sin pensarlo mucho dirán que 3^{33} y tendrán razón, pero, ¿y con tres cuatros? Siguiendo la misma lógica, seguramente responderán que 4^{44}. Sin embargo, resulta que en este caso, el mayor valor es 4^{4^4}, mismo que equivale a 4^{256}.

En muchos casos, lo que permite a los alumnos tener claridad sobre un concepto es contrastarlo con un caso que sea falso o incorrecto. Por ejemplo, identificar entre varias expresiones cuál corresponde a la notación científica. En la sesión 4 los alumnos podrán entender mejor en qué consiste esta forma de expresar números y, sobre todo, de operar con ella al resolver problemas.

¿Qué material se necesita?

Algunas actividades requieren del uso de calculadora; procure que haya al menos una por pareja, pero es necesario controlar su uso.

¿Cómo guío el proceso?

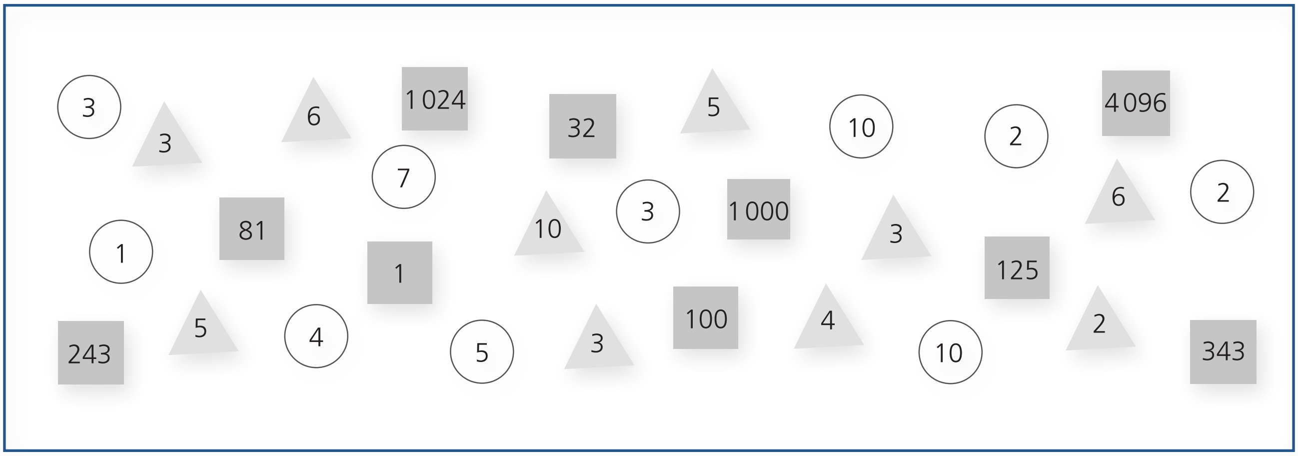
Organice la lectura en voz alta del “Para empezar” y plantee algunas preguntas sobre su contenido. Por ejemplo, ¿cómo se escribe, con cifras, once billones? ¿Cómo se escribe siete mil millones? ¿Cómo ayuda la potenciación en la escritura de números muy grandes o muy pequeños?

En la actividad 1 de la sesión 1 se espera que los alumnos descubran en qué cifras terminan las potencias enteras de 4 y de 7. Para el caso del 4, sólo son dos cifras: 4 o 6. Y para el caso de 7 son: 9, 3, 1, 7; según se trate de exponente impar o par, de manera que tal vez los alumnos no tengan dificultad en resolverla, para luego responder la pregunta de la actividad 2: ¿Las potencias de una misma base tienden a generar un patrón?

En la actividad 3 insista en la indicación de resolver mentalmente las operaciones y en la necesidad de pensar estrategias para llegar más fácilmente al resultado. Por ejemplo:

$$(8 + 3)^2 = 11^2$$
$$11 \times 11$$
$$11 \times 10 = 110$$
$$11 \times 1 = 11$$
$$110 + 11 = 121$$

Las ecuaciones $(3 + x)^2 = 25$ y $(12 - x)^2 = 49$ se resuelven fácilmente al obtener la raíz cuadrada en ambos miembros de la ecuación. En la primera queda $3 + x = 5$ y en la segunda, $12 - x = 7$, que los alumnos podrán solucionar mentalmente.



La actividad 6 es laboriosa, pero se espera que ayude a los alumnos a distinguir claramente los tres términos de la potenciación y a relacionarlos adecuadamente. Sugiérales que al formar las expresiones vayan tachando los números que utilizan para que no se confundan y permítales usar la calculadora. Adviértales que no sobran ni faltan números.

Los problemas de la sesión 2 son para entrar en materia y, seguramente, no serán difíciles de resolver por la mayoría de los alumnos. Aunque algunos problemas dan lugar a ecuaciones de segundo y tercer grado, se espera que sólo usen el procedimiento de ensayo y error para resolverlos. Es probable que en el problema del inciso b) encuentren el cinco sin mucha dificultad, puesto que $5 + 25 = 30$. Si no surge de los alumnos, hay que decirles que el 5 no es el único número que cumple con la condición, que encuentren el otro. Se trata del -6, pues $-6 + 36 = 30$. En el problema del inciso c) tampoco les resultará complicado averiguar que el 3 cumple con la condición, pues $3 + 3^3 = 30$. ¿Es 3 el único número que cumple con la condición? Permita que sean ellos mismos quienes concluyan que es el único, puesto que $-3 + (-3)^3 = -3 + (-27) = -30$. Si no llegaran a esta conclusión, usted puede proponerles que hagan la operación y digan qué sucede.

En los dos últimos problemas tal vez sea necesario aclarar qué números son enteros consecutivos y cuáles enteros impares consecutivos. Sugiera el uso de la calculadora y observe si primero calculan los cuadrados y luego restan. Por ejemplo:

$$19^2 = 361$$
$$18^2 = 324$$
$$361 - 324 = 37$$

O bien, si cuentan con calculadoras científicas, sugiérales que resten directamente las potencias para abreviar los cálculos. Por ejemplo, $19^2 - 18^2 = 37$.

En la actividad 3 observe si, para encontrar el factor faltante, dividen el producto entre el otro factor. Por ejemplo:

$$3^5 \times \square^{\square} = 3^7$$
$$\frac{3^7}{3^5} = 3^{7-5} = 3^2$$

En caso de que no usen ese procedimiento, es conveniente recordarles que ésa es la manera directa de encontrar el término faltante.

En esa misma actividad se proponen operaciones de más de dos factores; en caso de que los alumnos requieran ayuda, sólo hay que decirles que se trata de productos de potencias de la misma base y que el procedimiento para resolverlas es el mismo que cuando se trata únicamente de dos factores.

Las actividades 5, 6 y 7 corresponden al mismo problema de la caja. La actividad 5 trata de un caso particular en el que los cuadrados que se recortan en las esquinas miden 1 cm. En cambio, la actividad 7 es un problema de variación en el que se quiere averiguar qué medida deben tener los cuadrados que se recortan para que el volumen de la caja sea el máximo. Un probable error que pueden cometer los alumnos consiste en descontar de los 20 cm que mide la hoja sólo la medida de un cuadrado en vez de dos, puesto que se recorta uno de cada esquina.

Los tres elementos de la potenciación son:

Exponente

Base $x^a = b$ Potencia

La raíz cuadrada es la *operación inversa* de elevar al cuadrado una cantidad llamada base.

Índice

$\sqrt[a]{b} = x$ Raíz

Radical

Radicando

Cuando se trata de la raíz cuadrada, el índice (2) no se escribe.

La sesión 3 se inicia con algunos juegos con números para darle sentido a las operaciones, en especial a la potenciación. Otra manera de expresar el 10 con cinco nueves es la siguiente:

$\frac{9}{9} \times \frac{9}{9} + 9 = 10$. Otra puede ser: $9^{\frac{9}{9}} + \frac{9}{9} = 10$.

Si no surgen en el grupo, propóngalas.

En el inciso b), ante las propuestas de los alumnos, es necesario insistir en las condiciones del problema. Por ejemplo, no se vale $\frac{1}{1}$ por dos razones. La primera es que deben ser cifras diferentes, y la segunda, que no se debe usar ningún otro signo y la rayita de fracción cuenta como signo de división. Los alumnos caerán en la cuenta de que el menor valor entero positivo es el 1 y que éste puede expresarse como 1^0. De esta manera se usan dos cifras diferentes y ningún otro signo.

En el inciso c) hay varias maneras de que los alumnos logren lo que se pide. Una que puede parecer simple, pero da cuenta de un buen manejo de la potenciación es la siguiente: $123\,456\,789^0 = 1$.

En el inciso d) se espera que los alumnos no tengan problema en expresar el mayor valor posible con cuatro unos, 11^{11}, que es del orden de los miles de millones.

En los incisos e) y f) se sugiere dar el tiempo necesario para que los alumnos, con su ayuda, analicen todas las propuestas que surjan de la clase y logren encontrar la expresión que produce el mayor valor. Un dato interesante es que, para tres números dos, la expresión 2^{22} produce el mayor valor, pero, para tres cuatros, no es 4^{44}, sino $4^{4^4} = 4^{256}$.

En la actividad 5 se trata de encontrar el término faltante en una división de potencias de la misma base. Ahora se espera que usen la multiplicación cuando falta el dividendo o el divisor. En caso de ser necesario, se puede sugerir este recurso. Los incisos k) y l) pueden tener diferentes resultados correctos.

La actividad 7 puede resultar extraña para algunos alumnos. Son cuatro operaciones que ya tienen el resultado y lo que se pide es el procedimiento para encontrarlo. Se sugiere que los alumnos muestren cada procedimiento en el pizarrón para que verifiquen si el resultado es correcto o incorrecto. Si es necesario, ayúdelos a ver que dos resultados son correctos y dos incorrectos.

Las actividades 9 y 10 son complementarias y se espera que no ofrezcan dificultad para obtener las conclusiones respecto al exponente cero, exponente uno y base uno.

En la sesión 4, actividad 1, observe si los alumnos se dan cuenta de que cada número de la primera columna tiene tres ceros más que el anterior. Es probable que algunos no sepan escribir más allá del millón y ésta es una buena oportunidad para aclararlo. Un millón es la unidad seguida de seis ceros, equivale a mil millares, es como si tuviéramos mil billetes de a mil. Un billón es la unidad seguida de 12 ceros, equivale a un millón de millones. Un trillón es la unidad seguida de 18 ceros, equivale a un millón de billones. Un cuatrillón es la unidad seguida de 24 ceros. Pídales que vayan completando renglón por renglón y observe si se dan cuenta de que el exponente de la notación exponencial coincide con la cantidad de ceros que tiene el número escrito en notación decimal. Resalte que una de las ventajas de la notación exponencial es que requiere mucho menos espacio.

La actividad 2 sirve para precisar la forma general de la notación científica, $a \times 10^n$ en la que el coeficiente a debe ser mayor o igual que uno y menor que 10, y n debe ser un número entero. Ayude a los alumnos a recordar este conocimiento estudiado en la secuencia 15 y pídales que argumenten por qué es o no notación científica cada caso que se presenta.

La actividad 4 es para que los alumnos usen los criterios revisados en la actividad 3 y traten de formular otros que resulten prácticos para pasar de la notación científica a la decimal o viceversa. Éstos se refieren a la relación entre el exponente y la cantidad de cifras que hay a la derecha o a la izquierda del punto decimal, según se trate de un exponente positivo o negativo.

Dé el tiempo necesario para que los alumnos resuelvan los problemas de la actividad 5. Como en cualquier problema, lo importante es que piensen qué pueden hacer con los datos disponibles para contestar las preguntas que se plantean. Por ejemplo, en el inciso a), la primera pregunta implica comparar 1.082×10^8 km y 1.49×10^8 km. ¿Cuál de las dos cantidades es menor? Observe si los alumnos perciben que sólo hay que comparar 1.082 y 1.49, puesto que las potencias de 10 son iguales.

Para contestar la segunda pregunta es necesario calcular la diferencia entre las mismas cantidades. En el caso de que las potencias de 10 no fueran iguales, habría que hacer lo necesario para igualarlas y después comparar. Por ejemplo, $1.082 \times 10^8 = 10.82 \times 10^7 = 108.2 \times 10^6$. Apóyelos para que analicen cada problema, comparen sus resultados e identifiquen los posibles errores.

Pautas para la evaluación formativa

Con la finalidad de verificar en qué medida se va logrando la intención didáctica que aparece en la ficha descriptiva, es necesario hacer un registro de lo siguiente.

- Ante un problema como: "El resultado de 398^2, ¿es mayor, menor o igual que $160\,000$?". El alumno es capaz de argumentar que es menor, puesto que 300^2 es igual a $160\,000$.
- Ante un problema como: "¿En qué cifra termina el resultado de 18^2?¿Y el resultado de 18^4?". ¿El alumno es capaz de argumentar que el primero termina en 4 y el segundo termina en 6, puesto que $18^4 = 18^2 \times 18^2$. Si 18^2 termina en 4, ¿$18^2 \times 18^2$ debe terminar en 6?
- Los alumnos son capaces de resolver problemas en los que interviene la potenciación, como los que se plantean en las sesiones 2 y 3 de esta secuencia.
- Los alumnos son capaces de expresar números indistintamente en notación decimal, notación exponencial y notación científica.

¿Cómo apoyar?

Muchos de los problemas que se plantean en esta secuencia se resuelven haciendo inferencias del tipo “si esto sucede, entonces debe suceder esto otro”. Es probable que algunos alumnos tengan dificultad al hacer estos razonamientos. La manera de apoyarlos es desmenuzando los cálculos para que observen y traten de entender de dónde proviene cada resultado.

¿Cómo extender?

Pídales que inventen operaciones o problemas similares a los que se plantean. Proyecte ejercicios que tengan más de una solución correcta. Por ejemplo, si la potencia es 16, ¿cuáles son la base y el exponente?

Secuencia 28 Raíz cuadrada de números positivos

(LT, págs. 222-227)

Tiempo de realización	3 sesiones
Eje temático	Número, álgebra y variación
Tema	Multiplicación y división
Aprendizaje esperado	Resuelve problemas de potencias con exponente entero y aproxima raíces cuadradas.
Intención didáctica	Que los alumnos aproximen la raíz cuadrada de un número y usen esta operación al resolver problemas.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisual** • *La raíz cuadrada*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recurso audiovisual** • *Potencias con exponente entero y la raíz cuadrada*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Resuelvan problemas que involucran la raíz cuadrada de números que son cuadrados perfectos y números que no lo son.
- Sesión 2. Usen la noción de operación inversa en el despeje de incógnitas elevadas al cuadrado.
- Sesión 3. Conozcan y apliquen un procedimiento para calcular la parte entera de la raíz cuadrada de un número.

Acerca de...

En esta secuencia, que es continuación de la secuencia 16, los alumnos profundizan su conocimiento sobre la raíz cuadrada al vincularlo con otros conocimientos, como la resolución de ecuaciones cuadráticas y el cálculo del radio de un círculo en el que se conoce su área.

El trabajo se inicia con una actividad en la que los alumnos distinguen números que son cuadrados perfectos de los que no lo son. Se introduce la idea de resto como complemento de la raíz entera de un número.

La sesión 2 se centra en el uso de la raíz cuadrada como operación inversa de elevar al cuadrado. Se analiza el caso de los números negativos que, a diferencia de los positivos, al elevarse al cuadrado y obtener la raíz cuadrada del resultado, no se vuelve al punto de partida. Por ejemplo, $(-7)^2 = 49$; $\sqrt{49} = 7$. Como se ve, no se regresa a –7.

Finalmente, en la sesión 3 se introduce un procedimiento para calcular la parte entera de la raíz cuadrada de un número. Se apoya en la manipulación algebraica de expresiones que representan números de una cifra (a); de dos cifras ($10a + b$); de tres cifras $100a + 10b + c$.

Sobre las ideas de los alumnos

Cuando se pregunta por los cuadrados perfectos que hay entre 1 y 100, muchos alumnos no tienen claro que son los que resultan de elevar al cuadrado los números naturales del 1 al 10 y, por lo tanto, son 10. Y cuando se pregunta: ¿cuántos cuadrados perfectos hay de 101 a 200? La pregunta llevará a los alumnos a pensar que son los que resultan de elevar al cuadrado 11, 12, 13,..., pero en este caso ya no son 10, porque 15^2 se pasa de 200.

Cuando resuelven divisiones no exactas, los alumnos saben que hay un resto o residuo, diferente de cero, que debe ser menor que el divisor. En el caso de la raíz cuadrada de números que no son cuadrados perfectos o que no tienen raíz exacta, también hay un resto diferente de cero. Para muchos alumnos no resulta claro por qué algunas medidas se expresan en metros (m), otras en metros cuadrados (m^2) y otras en metros cúbicos (m^3). En gran parte, a eso se debe que no le den importancia a escribir la unidad de que se trata. El estudio de esta secuencia es un buen momento para aclarar este aspecto.

¿Qué material se necesita?

Algunas actividades requieren el uso de la calculadora; procure que haya al menos una por pareja, pero es necesario controlar su uso.

¿Cómo guío el proceso?

En la actividad 1 de la sesión 1, es probable que algunos alumnos vayan directamente a los números que resultan de elevar al cuadrado los números naturales del 1 al 10 y contesten rápidamente que hay diez cuadrados perfectos entre 1 y 100. Esto reflejaría un buen proceso de abstracción que, si surge, vale la pena socializar. En la pregunta 1b algunos alumnos contestarán que sí, pero pronto se darán cuenta de que no es cierto, pues 15^2 es mayor que 200, de manera que sólo hay cuatro cuadrados perfectos, los que resultan de 11^2, 12^2, 13^2 y 14^2.

Si observa que la mayoría de los alumnos tiene dificultad para resolver el problema 2a, es necesario hacer una puesta en común, sin esperar hasta el final de la sesión. Los alumnos se darán cuenta de que algunos problemas pueden resolverse mediante la raíz cuadrada, aunque no se trate de cuadrados perfectos. En este caso, la solución (13) es la parte entera de la raíz cuadrada de 172 y los rosales que sobran son el resto: $172 - 13^2 = 3$.

En la actividad 3 se pretende que los alumnos comprendan la relación que hay entre el radicando, la parte entera de la raíz y el resto, que se puede enunciar de la siguiente manera: radicando = parte entera de la raíz, al cuadrado, más resto. Una vez que se tiene el radicando, se puede verificar si la parte entera de la raíz es correcta. Por ejemplo, en el primer caso, $7^2 + 14 = 63$ y, efectivamente, la parte entera de la raíz cuadrada de 63 es 7, puesto que 8^2 es mayor que 63. Sin embargo, no ocurre lo mismo en el tercer caso, pues $15^2 + 32 = 257$, pero la parte entera de la raíz cuadrada de 257 no es 15, sino 16, puesto que $16^2 = 256$. Se trata de algo similar a lo que ocurre con la división cuando el residuo es mayor que el divisor. El resto, también en el caso de la raíz cuadrada, tiene un límite, y 32 lo rebasa.

La actividad 4 es un juego que involucra las operaciones que se estudian en esta secuencia. Se trata de "adivinar" el número que pensó el compañero después de realizar una serie de operaciones y conocer el resultado al que llegó. Si las condiciones del grupo lo permiten, pueden averiguar la explicación del juego. Se piensa un número x, se eleva al cuadrado (x^2), se suma el doble del número pensado ($x^2 + 2x$), y finalmente se suma 1 ($x^2 + 2x + 1$). Esta expresión es un trinomio cuadrado perfecto, es decir, es el resultado de elevar un binomio al cuadrado. En este caso, la expresión $x^2 + 2x + 1$, resulta de $(x + 1)^2$, por lo tanto, el número pensado (x) se obtiene de extraer la raíz cuadrada al resultado final, menos 1.

En la actividad 1 de la sesión 2, pida a los alumnos que resuelvan el problema de la cisterna con el procedimiento que crean conveniente y, cuando terminen, que analicen y completen el procedimiento descrito en el libro. Ayúdelos a poner en evidencia los aspectos que se han estudiado. Por ejemplo, para cualquier valor de r, $\sqrt{r^2} = r$. Observe si los alumnos son capaces de resolver el problema de la actividad 4 y apóyelos para que comparen sus procedimientos y resultados.

Al hacer la puesta en común en la actividad 6, observe si los alumnos lograron concluir que el único enunciado verdadero es el a) y anímelos a que argumenten por qué b) es falso. Pídales que den ejemplos.

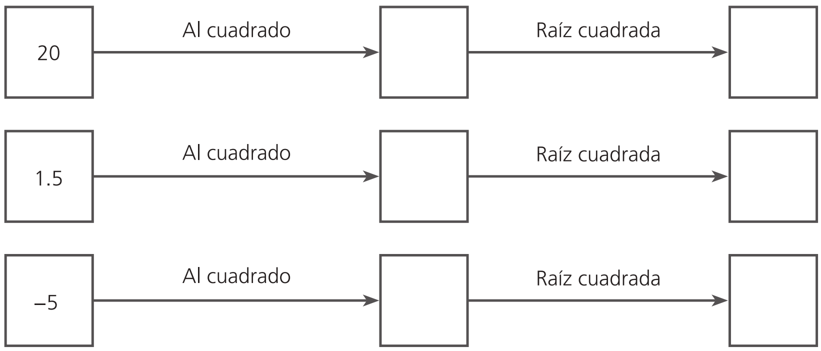
Antes de analizar, junto con los alumnos, el procedimiento que se describe en la actividad 1 de la sesión 3, es necesario aclarar nuevamente cuál es la parte entera de la raíz cuadrada. Ponga algunos ejemplos resueltos con calculadora:

$$\sqrt{8} = \mathbf{2}.828427125$$
$$\sqrt{150} = \mathbf{12}.24744871$$
$$\sqrt{12\,847} = \mathbf{113}.3446073$$

En el primer caso, la parte entera es 2 y tiene una cifra. En el segundo caso, la parte entera es 12, tiene dos cifras, y en el tercero la parte entera es 113, que tiene tres cifras. Una vez aclarado este punto, se sugiere acompañar a los alumnos en el análisis del procedimiento sugerido y detenerse cada vez que surja alguna duda.

Si un número es menor que 100, su raíz cuadrada debe tener una cifra entera, porque el menor número natural de dos cifras es 10 y $10^2 = 100$. Si el número es igual o mayor que 100, pero menor que 10 000, la parte entera de su raíz cuadrada debe

5. Trabajen en pareja. Anoten los números que faltan en el esquema.



tener dos cifras, porque el menor número natural de tres cifras es 100 y $100^2 = 10\,000$. Este mismo razonamiento se puede continuar para números iguales o mayores que 10 000.

Las expresiones de la forma:

$$a,\ 10a + b,\ 100a + 10b + c$$

permiten expresar de manera general números de una, dos o tres cifras, respectivamente. Con ellas se puede operar para resolver problemas que implican encontrar el valor de cada literal. Por ejemplo:

$$5;\ 10(2) + 3 = 23;$$
$$100(5) + 8(10) + 7 = 500 + 80 + 7 = 587,$$

respectivamente.

En la actividad 4, apoye a los alumnos para que comparen sus procedimientos y resultados. Un camino posible para resolverlo es el siguiente:

- El área de cada loseta es 200 cm², de manera que el área total que se tiene con las 4 865 losetas, es $4\,865 \times 200 = 973\,000$ cm².
- La parte entera de la raíz cuadrada de 973 000 es 986. Ésta es la mayor medida entera, en centímetros, de un lado del cuadrado que se puede construir. Pero, para no romper losetas, se necesita una medida, la mayor posible, que sea múltiplo de 10 y de 20. Ésta es 980 cm, de manera que, puestas a lo largo, habría $980 \div 20 = 49$ losetas, y a lo ancho, el doble, 98 losetas.
- El área del mayor cuadrado que se puede construir es $(980\text{ cm})^2 = 960\,400\text{ cm}^2$
- Un lado mediría 980 cm y se utilizarían $49 \times 98 = 4\,802$ losetas.
- Sobrarían $4\,865 - 4\,802 = 63$ losetas.

Pautas para la evaluación formativa

Con la finalidad de verificar en qué medida se va logrando la intención didáctica de esta secuencia, es necesario hacer un registro para saber si el alumno:

- Aproxima la raíz cuadrada de números positivos que no son cuadrados perfectos. Por ejemplo:

  $\sqrt{56}$ $\sqrt{875}$ $\sqrt{4\,592}$

- Resuelve problemas que implican el uso de la raíz cuadrada. Por ejemplo: "Un terreno cuadrado mide 476 m². ¿Cuánto mide un lado del terreno?".

¿Cómo apoyar?

Proponga ejercicios que los alumnos puedan resolver mentalmente y poco a poco aumente el rango de los números, por ejemplo, $\sqrt{25}$, $\sqrt{81}$, $\sqrt{49}$, $\sqrt{100}$, $\sqrt{121}$, $\sqrt{144}$, $\sqrt{10\,000}$, ... incluso hay números cuya raíz es un dígito y se memoriza fácilmente, aunque no se trata de que lo memoricen sin comprender de dónde se obtienen. Trate de que cada alumno disponga de una calculadora para que verifique sus resultados. Plantee indistintamente ejercicios de potenciación y de raíz cuadrada, como 6^2, entonces $\sqrt{36}$; 10^2, entonces $\sqrt{100}$; 11^2, entonces $\sqrt{121}$.

¿Cómo extender?

Pídales que formulen una explicación sobre la actividad 6 de la sesión 2. Solicite que inventen un problema en el que sea necesario usar la raíz cuadrada para resolverlo.

Secuencia 29 Sistemas de ecuaciones 2 × 2. Método de suma y resta (LT, págs. 228-233)

Tiempo de realización	3 sesiones
Eje temático	Número, álgebra y variación
Tema	Ecuaciones
Aprendizaje esperado	Resuelve problemas mediante la formulación y solución algebraica de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.
Intención didáctica	Que los alumnos conozcan y apliquen el método de suma y resta para resolver un sistema de ecuaciones 2 × 2 y lo comparen con los métodos estudiados, a fin de decidir cuál es el más conveniente de acuerdo con los coeficientes que presentan las ecuaciones.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisual** • *Método de suma y resta, otra opción para resolver sistemas de ecuaciones* **Informático** • *Métodos de resolución de sistemas de ecuaciones 2*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recurso audiovisual** • *Métodos de resolución de sistemas de ecuaciones 2 × 2*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Utilicen la reducción de términos semejantes e identifiquen expresiones equivalentes a fin de que apliquen los pasos del método de suma y resta para resolver un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas.
- Sesión 2. Resuelvan problemas que dan origen a un sistema de ecuaciones lineales 2 × 2 con el método de suma y resta; además, reflexionen que, para determinar qué incógnita les conviene igualar, es necesario analizar los coeficientes que tienen en las dos ecuaciones.
- Sesión 3. Establezcan un criterio que les permita determinar cuál es el método de solución más adecuado para resolver un sistema de ecuaciones lineales 2 × 2, basado en los coeficientes de las incógnitas.

Acerca de...

El método que se estudia en esta secuencia pone en juego los conocimientos algebraicos que los alumnos han aprendido desde el primer grado de secundaria y a lo largo de los dos bloques anteriores. Por ello es necesario que observe si tienen claridad en la suma y resta de términos semejantes, así como en la obtención de expresiones algebraicas equivalentes. Otro aspecto importante es que los alumnos manejen adecuadamente las propiedades de la igualdad, pues en este caso, al multiplicar por un número cualquiera para igualar algún coeficiente, deberán tener presente que deben multiplicar todos los términos de la ecuación en ambos miembros para que la igualdad se conserve.

Con esta secuencia se pretende que los alumnos no sólo aprendan un método más, sino que establezcan algunos criterios para determinar qué método consideran más conveniente, para lo cual deben tener dominio de todos ellos.

Sobre las ideas de los alumnos

Al estudiar este método de solución para un sistema de ecuaciones, en muchas ocasiones se verán en la necesidad de multiplicar una o ambas ecuaciones por un determinado número. Es común que los alumnos se olviden de multiplicar ambos miembros de la ecuación y sólo lo realicen en uno de ellos. Por ejemplo, si se tiene la ecuación: $3x - 2y = -4$ y tienen que multiplicarla por 5, hacen esto:

$$15x - 10y = -4$$ ✗

En lugar de:

$$15x - 10y = -20$$ ✓

Otro aspecto que muchas veces olvidan los alumnos es que el valor de las incógnitas de un sistema de ecuaciones debe satisfacer las dos ecuaciones, esto significa que, al sustituir su valor en ambas, la igualdad se debe cumplir.

¿Cómo guío el proceso?

En la actividad 1 de la sesión 1 se incluyen ejercicios que permiten a los alumnos analizar y discutir por qué son equivalentes o no dos expresiones algebraicas. Aquí es donde reafirmarán lo que se señalaba antes: para obtener una expresión equivalente a una ecuación determinada, lo que se haga de un lado de la igualdad deberá hacerse del otro lado también para que ésta no se altere. Si ve que los alumnos cometen omisiones como las que se mencionaron anteriormente, puede recurrir al esquema de la balanza de platillos para la solución de ecuaciones, donde lo que se hace en uno de los platillos (aumentar o disminuir una cantidad) se debe hacer en el otro, a fin de conservar el equilibrio de la balanza. Posteriormente, se pide que resuelvan un sistema de ecuaciones por el método gráfico con la finalidad de reforzar que, al graficar cualquier sistema, si las rectas se intersecan en un punto, las coordenadas (x, y) de éste representan la solución del sistema. Enseguida se presentan los pasos del método de suma y resta para resolver un sistema 2×2. En este caso se recomienda que los alumnos justifiquen cada paso. Por ejemplo, ¿por qué al sumar las ecuaciones en el resultado no aparece b? ¿Por qué el coeficiente de a pasó como denominador al segundo miembro de la igualdad?

Se recomienda que no salten el punto 5, pues ésta es la mejor forma de comprobar que se puede buscar la eliminación de cualquiera de las dos incógnitas y se obtiene el mismo resultado.

5º Finalmente, se comprueba que los valores obtenidos sirven para hacer verdaderas ambas ecuaciones:

Ecuación 1: $3a + b = 22$	Ecuación 2: $4a - 3b = -1$
$3(5) + (7) = 22$	$4(5) - 3(7) = -1$
$15 + 7 = 22$	$20 - 21 = -1$
$22 = 22$	$-1 = -1$

¿Los valores de a y de b son los mismos que los que obtuvieron por el método gráfico? ____________

La reflexión que los alumnos hagan sobre las preguntas de la actividad 6 les ayudará más adelante a determinar cuándo les conviene usar este método de solución u otro de los que ya estudiaron. Al realizar la lectura del recuadro en el punto 7, y como una forma de reforzar los pasos de este método, se sugiere que les proponga asociar cada paso con el procedimiento que realizaron en la actividad 5.

En la sesión 2 se presentan problemas que originan un sistema de ecuaciones. En cada uno, lo primero que deben hacer es asociar los datos del problema con el sistema de ecuaciones que le corresponde; esto es con el fin de que se acostumbren a la necesidad de establecer cuáles son las incógnitas y de qué manera están relacionadas. Tal vez los alumnos tengan problema para encontrar la segunda ecuación, pues están acostumbrados a que se presente de un lado del signo igual solamente un número, pero en este caso la ecuación está dada por el valor de una pulsera en función del valor de la otra: $4y = x$. En el segundo problema se pide que expliquen por qué los dos sistemas que desecharon no representan el problema; esto lleva implícita la justificación de por qué decidieron que uno de ellos era correcto.

Otro aspecto importante consiste en analizar qué incógnita dejan y cuál eliminan. Si los alumnos no proponen una estrategia, usted puede decirles que una consiste en analizar los coeficientes y ver con cuál se puede hacer menos operaciones. Por ejemplo, en el sistema $4x - y = 9$; $3x + 5y = 1$, si se decide eliminar y, sólo habría que multiplicar la primera ecuación por 5; en cambio, si deciden eliminar x, tendrán que multiplicar la primera ecuación por 3 y la segunda ecuación por 4, para que sus coeficientes se igualen.

Para resolver un sistema de ecuaciones por el método de reducción, o de suma y resta, se multiplica una o las dos ecuaciones por un número que permita obtener coeficientes simétricos de cualquiera de las dos literales.

Después, se suman miembro a miembro las ecuaciones y se reducen los términos semejantes. El propósito es obtener una ecuación de primer grado, o lineal, con una sola incógnita.

El valor obtenido se sustituye en cualquiera de las dos ecuaciones originales para obtener el valor de la otra incógnita.

En la sesión 3 se plantea otra característica de un sistema de ecuaciones lineales que los alumnos pueden considerar para elegir este método de solución. Consiste en que en ocasiones ya está igualado el coeficiente de una de las incógnitas y además son simétricos, por lo que, de entrada, se puede eliminar una literal para continuar con los demás pasos de este método.

5. En equipo, analicen los siguientes problemas. Decidan qué método les parece más adecuado y expliquen por qué. Después, resuelvan en su cuaderno el sistema de ecuaciones y anoten la respuesta de cada problema.

a) La suma de las edades de Edna y Juan es 82. Edna es mayor que Juan por 18 años.

Edad de Edna: ____________

Edad de Juan: ____________

b) El museo de la caricatura tuvo 440 visitantes el día de hoy (hombres y mujeres). Si la razón entre hombres y mujeres es de $\frac{3}{5}$, ¿cuántos hombres y cuántas mujeres asistieron?

Pautas para la evaluación formativa

El primer aspecto que debe observar es qué tan fácil o difícil resulta a los alumnos representar un problema con un sistema de ecuaciones.

También observe el manejo que tienen de las operaciones algebraicas, por ejemplo, ¿saben reducir términos semejantes?, ¿tienen claridad sobre el manejo de los signos?, ¿no confunden las operaciones de suma o resta con las de división y multiplicación?

¿Cómo apoyar?

La traducción del lenguaje oral del problema al lenguaje algebraico resulta difícil para muchos estudiantes, en cuyo caso es fundamental apoyarlos para que desglosen el problema en sus diferentes partes y se analice la relación que hay entre ellas. Ayúdelos a identificar qué partes no están bien representadas, sobre todo cuando están involucrados coeficientes con fracciones o decimales.

Si los estudiantes presentan dificultades para operar algebraicamente en cualquiera de los métodos, éste es un buen momento para recordar cómo sumar, restar, dividir y multiplicar algebraicamente. Dedique el tiempo necesario para que no queden dudas al respecto.

¿Cómo extender?

Pida a los alumnos que resuelvan algunos sistemas de ecuaciones que incluyan números decimales o fraccionarios, que elijan el método que prefieran para resolverlos y que expliquen por qué lo eligieron.

Secuencia 30 Relación funcional 2

(LT, págs. 234-239)

Tiempo de realización	3 sesiones
Eje temático	Número, álgebra y variación
Tema	Funciones
Aprendizaje esperado	Analiza y compara situaciones de variación lineal y proporcionalidad inversa a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica. Interpreta y resuelve problemas que se modelan con este tipo de variación, incluyendo fenómenos de la física y otros contextos.
Intención didáctica	Que los alumnos resuelvan problemas que impliquen representar tabular, gráfica y algebraicamente fenómenos con variación lineal y de proporcionalidad inversa.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisual** • *Tablas, expresiones algebraicas y gráficas* **Informático** • *Leyendo gráficas*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recurso audiovisual** • *La variación lineal y de proporcionalidad inversa*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Representen tabular, gráfica y algebraicamente situaciones que presentan variación lineal o de proporcionalidad inversa; analicen las gráficas correspondientes a este tipo de situaciones.
- Sesión 2. Representen tabular, gráfica y algebraicamente situaciones que presentan variación lineal o de proporcionalidad inversa; obtengan información a partir de la representación gráfica de la proporcionalidad inversa.
- Sesión 3. Resuelvan diversos problemas que impliquen la representación tabular, gráfica o algebraica de situaciones lineales o de proporcionalidad inversa.

Acerca de…

Esta secuencia complementa el trabajo realizado en la secuencia 21 del bloque 2, a partir de la cual se promueve el desarrollo de una de las principales competencias a desarrollar en los alumnos de educación básica: la comunicación de información matemática con diferentes representaciones: verbal, tabular, gráfica y algebraica.

El paso de un tipo de representación a otra no es un asunto trivial para los alumnos. Por ejemplo, para pasar de la representación tabular a la algebraica es necesario que analicen la relación que hay entre cada pareja de números de la tabla y verifiquen que esa relación que encuentran se cumple para todas las parejas de la tabla. Una vez verificado esto, tendrán que usar las reglas de sintaxis para escribir correctamente con símbolos matemáticos esa relación.

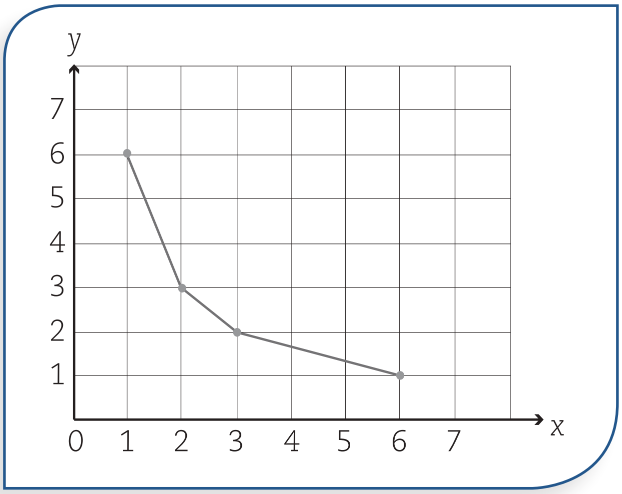
El paso de la tabla a la gráfica implica que los alumnos localicen los puntos que corresponden a las parejas ordenadas de la tabla y que decidan si estos puntos van unidos (magnitudes continuas: litros, horas, metros, gramos…) o no van unidos (magnitudes discretas: personas, canicas, casas, entre otros). En caso de que vayan unidos, deben analizar si la unión es con una línea recta o curva.

El paso de la expresión algebraica a la gráfica suele implicar primero la elaboración de una tabla en la que se asignan valores a la variable independiente y se calculan los valores de la variable dependiente. Cuando se tiene más experiencia es posible pasar de la expresión algebraica a la gráfica; no obstante, es probable que los alumnos de segundo de secundaria aún necesiten construir la tabla y después la gráfica.

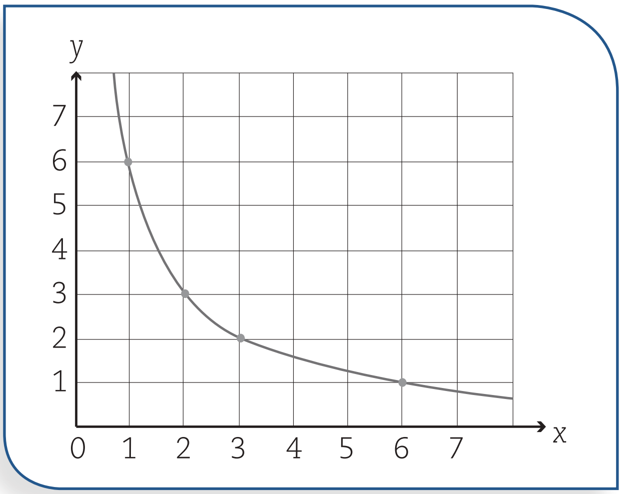
Sobre las ideas de los alumnos

Después de ubicar varios puntos en un plano cartesiano a partir de una tabla de proporcionalidad inversa, es probable que los alumnos tiendan a unirlos con segmentos de recta, obteniendo una línea quebrada en lugar de una curva (la hipérbola).

Por ejemplo, que hagan esto:



En lugar de esto:



En este caso es importante analizar con los alumnos que, cuando se trata de proporcionalidad inversa, la variación entre un punto y otro no es lineal. De ser necesario, repase las lecciones correspondientes a la variación lineal de primer grado para que identifiquen las características de la misma.

¿Cómo guío el proceso?

Dos de los aspectos fundamentales que se trabajan en esta secuencia consisten en encontrar la expresión algebraica que relaciona las dos variables de una tabla y trazar la gráfica en el plano cartesiano de todas las situaciones presentadas en las tablas.

Para la proporcionalidad inversa es muy probable que los alumnos escriban expresiones algebraicas como la siguiente: $vt = 417$.

Esta expresión muestra una característica importante de la proporcionalidad inversa: *El producto de las dos magnitudes involucradas es constante*. No obstante, para completar tablas que posteriormente podrán servir para graficar, es necesario que los alumnos despejen la variable cuyos valores necesitan calcular, en el ejemplo anterior quedaría:

$$v = \frac{417}{t}$$

Es importante que observen que ambas expresiones son correctas y que expliquen por qué.

También es importante que analice con los alumnos que en la segunda expresión ($v = \frac{417}{t}$) se puede notar que la variación es inversa, porque a mayor valor de t el resultado de la división disminuye, lo que se traduce en que a menor velocidad, mayor tiempo.

Otro aspecto importante trabajado en esta sesión se refiere al análisis de las gráficas (actividad 3, sesión 1). A partir de la representación gráfica se espera que los alumnos analicen el crecimiento o decrecimiento de la gráfica en determinados intervalos, su intersección con los ejes y qué significa esta información en el contexto en que están trabajando. En la puesta en común, ponga especial énfasis en que los alumnos traduzcan la información de la gráfica al contexto de tiempo, velocidad y distancia; asimismo, en el inciso e) pida que argumenten cómo supieron si se trataba de una relación proporcional directa o inversa, o bien, si no era proporcional.

El contexto trabajado en la sesión 2 es menos conocido por los alumnos; tome en cuenta esto al apoyarlos durante el trabajo. Se puede vincular esta sesión con los contenidos de Ciencias y Tecnología. Física.

Se sugiere organizar una discusión grupal acerca de lo que son los circuitos y plantear preguntas como:

- Consideran que siempre que se coloca en el circuito una misma resistencia, si el voltaje aumenta, ¿la intensidad de corriente aumenta o disminuye?, ¿la relación entre voltaje e intensidad de corriente es directa o inversa?
- Siempre que se aplica el mismo voltaje a un circuito, si aumentan el valor de la resistencia, ¿la intensidad de la corriente aumenta o disminuye?, ¿la relación entre la resistencia y la intensidad de corriente es directa o inversa?

De manera intuitiva los alumnos podrán plantear la hipótesis de que a mayor voltaje habrá mayor intensidad de corriente eléctrica (relación directa) y de que a mayor resistencia, menor intensidad de corriente eléctrica (relación inversa). No obstante, es muy poco probable que consideren que estas relaciones son de proporcionalidad, pues no tienen elementos para saberlo, por eso en la sesión se presentan las tablas de valores con mediciones para que, a partir de ellas, establezcan la proporcionalidad.

En la actividad 4 de la sesión 3 se incorporan los números negativos en el plano cartesiano, por ello aparecen las dos ramas de la hipérbola. Si bien el programa no indica que deban tratarse las dos ramas, usted puede considerarlo como una breve aportación a lo que los alumnos estudiarán más adelante y trabajarlo con ellos para que tengan la idea de que la curva que estudiaron tiene dos ramas y no sólo una. En la actividad 6 se recomienda revisar el recurso informático *Leyendo gráficas* para profundizar en la construcción de gráficas que representen diferentes tipos de variación.

Pautas para la evaluación formativa

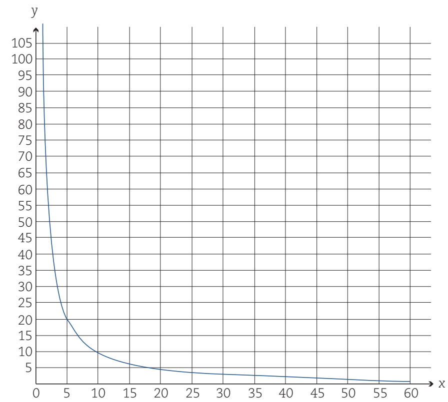
Observe el trabajo de los alumnos para detectar si:

- Analizan de forma adecuada las tablas para encontrar la expresión algebraica correspondiente.
- Utilizan las reglas de escritura correctas en las expresiones algebraicas.
- Identifican las variables en una tabla, en una gráfica y en una expresión algebraica.
- Identifican la relación entre las variables que intervienen en la situación.
- Leen correctamente las gráficas de los planos cartesianos (identifican la abscisa, la ordenada y lo que cada una representa; identifican las coordenadas de un punto y cómo interpretarlas).

¿Cómo apoyar?

Utilice números de menor valor para hacer tablas y gráficas con el fin de que los alumnos identifiquen rápidamente la relación entre las variables.

Repase con los alumnos los aspectos principales sobre la variación lineal y la proporcionalidad inversa. Especialmente, podría proponer una actividad como ésta:



Con base en la gráfica anterior, hagan lo que se indica.

a) Anoten si la gráfica representa una relación proporcional o no. En caso de que sí lo sea, anoten de qué tipo es y argumenten.
b) Si en el eje x se ubicó el tiempo en horas que un automóvil tardó en recorrer una distancia, ¿qué magnitud corresponde al eje y? ¿Cuál es la expresión algebraica que corresponde a la gráfica?
c) El punto (0.25, 400) ¿corresponde a la gráfica? Justifiquen su respuesta.

¿Cómo extender?

Proponga que encuentren en las gráficas trabajadas en la lección puntos con coordenadas que sean fracciones o números decimales. Por ejemplo, en la actividad 4 de la sesión 2, se puede pedir a los alumnos que, a partir de la gráfica, respondan aproximadamente:

- ¿Cuál es la intensidad de la corriente eléctrica para una resistencia de 3.25 ohmios?
- ¿Qué resistencia hay que colocar en el circuito para obtener una corriente eléctrica de $9\frac{3}{4}$ amperes?

Secuencia 31 Polígonos 3

(LT, págs. 240-247)

Tiempo de realización	4 sesiones
Eje temático	Forma, espacio y medida
Tema	Figuras y cuerpos geométricos
Aprendizaje esperado	Deduce y usa las relaciones entre los ángulos de polígonos en la construcción de polígonos regulares.
Intención didáctica	Que los alumnos resuelvan problemas que implican la construcción de polígonos regulares.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisual** • *Construcciones de polígonos regulares* **Informático** • *Teselados*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recurso audiovisual** • *Relaciones entre los ángulos de polígonos en la construcción de polígonos regulares*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Resuelvan problemas que impliquen la construcción de polígonos regulares a partir de diferentes datos.
- Sesión 2. Resuelvan problemas que impliquen la reproducción de polígonos regulares e irregulares dentro de una configuración.
- Sesión 3. Resuelvan problemas que impliquen la construcción de polígonos regulares e irregulares dentro de una configuración.
- Sesión 4. Analicen la característica de los polígonos regulares que cubren completamente (teselan) el plano y dibujen teselados diversos.

Acerca de...

Los alumnos han construido figuras y configuraciones geométricas desde primaria y lo han hecho con diferentes recursos (armando rompecabezas, cortando o doblando papel, con el uso del geoplano y de retículas, con instrumentos geométricos). En este grado continuarán trabajando la construcción de figuras geométricas, principalmente con polígonos regulares de cinco o más lados.

La construcción de triángulos equiláteros y cuadrados se estudió en primer grado de secundaria; ahora ampliarán sus conocimientos al trazar otros polígonos regulares como pentágonos, hexágonos, heptágonos, octágonos, etcétera.

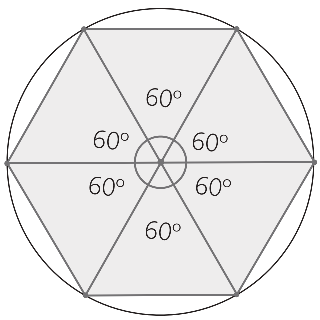
Sobre las ideas de los alumnos

Los conocimientos adquiridos en las secuencias 8 y 22 son las herramientas y antecedentes con los que los alumnos cuentan para realizar las construcciones de esta secuencia. En particular, la medida del ángulo central de un polígono regular resulta importante para trazar polígonos regulares inscritos en una circunferencia, y la medida del ángulo interior de un polígono regular también será útil cuando se da la medida del lado. No obstante, es probable que los alumnos recurran a otros procedimientos, sobre todo para trazar el triángulo equilátero y el cuadrado.

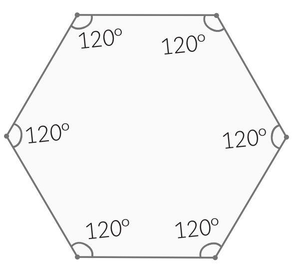
También es muy probable que los alumnos tracen líneas "a ojo", sin medir. Por ejemplo, al trazar un cuadrado puede que marquen una perpendicular sin que realmente lo sea, lo mismo sucedería con otros polígonos regulares. Se espera que al trazar una configuración se den cuenta de que sin el conocimiento de algunas técnicas, difícilmente obtendrán la figura que necesitan.

¿Cómo guío el proceso?

En la sesión 1, actividad 1, invite a los alumnos a que discutan en equipo cómo trazar los polígonos pedidos, y después lleven a cabo su plan. Probablemente los alumnos todavía no hagan uso de los aprendizajes de las secuencias anteriores y tracen los polígonos por ensayo y error. En un segundo momento, puede ayudarles a que los construyan mejor usando los siguientes caminos: por ejemplo, para el hexágono regular que se pide en el inciso a), pueden usar lo que saben del ángulo central, esto es, que en dicho hexágono el ángulo central mide 60° (360° ÷ 6 = 60°); después trazar una circunferencia y dividirla en seis ángulos centrales de igual medida, cuyos lados toquen la circunferencia, y enseguida unir los puntos que están sobre ella para obtener el hexágono.



Otro procedimiento consiste en recurrir a la medida del ángulo interno de un hexágono regular (120°). Se traza un lado de la figura y, a partir de ella, se tranzan ángulos de 120°, cuidando siempre que éstos tengan la misma



medida y que el lado de uno de los ángulos sea parte del siguiente ángulo.

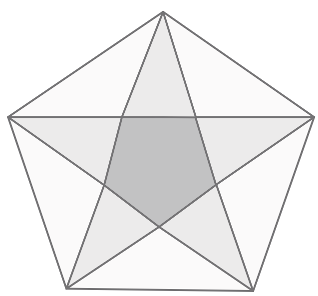
Es probable que algunos alumnos sepan que en un hexágono regular se puede trasladar la medida del radio sobre la circunferencia y que ésta queda divida en seis partes iguales, con lo que se puede trazar el hexágono regular. Los procedimientos anteriores son útiles en los trazos de los demás polígonos regulares.

Es muy importante que se haga una puesta en común donde los alumnos expongan los procedimientos que siguieron para construir los polígonos regulares; esto les servirá para las siguientes tres sesiones de esta secuencia.

Para la construcción de las configuraciones de la sesión 2, los alumnos podrán seguir diferentes procedimientos. Dependiendo de cómo visualicen los diseños, podrían empezar por las figuras exteriores o bien por las del centro. Por ejemplo, para la primera figura, algunos alumnos pueden trazar el cuadrado mayor, localizar los puntos medios de cada lado y unirlos para obtener la figura.

Otra forma consiste en trazar el cuadrado menor y sobre cada lado de éste construir un triángulo isósceles. O también, trazar el cuadrado central y sobre cada lado trazar una perpendicular mediatriz (perpendicular que corta a un segmento en dos partes iguales); posteriormente, trazar los segmentos iguales que forman los dos lados restantes de cada triángulo.

Las configuraciones van aumentando en grado de complejidad. En la última figura ya no hay líneas interiores, por lo que se espera que los alumnos visualicen el polígono que la contiene, o bien, el polígono que se forma al centro (pentágono regular).

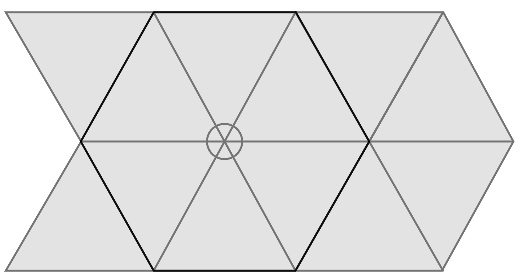


Observe que la instrucción dice “aproximadamente del mismo tamaño”, y esto obedece a que es difícil, muchas veces, que quede exactamente del mismo tamaño porque la punta de su lápiz es gruesa o porque no tienen un compás de precisión o una regla bien graduada, lo que también se conoce como *error en la medición*. Pídales que investiguen acerca de esto o hágales comentarios al respecto si lo considera conveniente.

En la sesión 3 los alumnos construirán configuraciones de diferente medida a la que aparece en el libro. Se trata de problemas similares a los de la sesión 2, pero no iguales, pues no es lo mismo reproducir que construir con otras medidas. La idea de pedir que ellos pongan las pestañas donde haga falta tiene el propósito de desarrollar la imaginación espacial de los alumnos, Pida que primero hagan una hipótesis sobre dónde deben llevar pestañas (sin que sobren ni falten) y después comprueben su hipótesis al armar las cajitas.

La decoración de las cajitas puede quedar de tarea si el tiempo no permite hacerlo en clase. De ser posible, organice una exposición con los trabajos de los alumnos, esto los motivará a que se esmeren para realizar los trazos y sus construcciones.

Finalmente, en la sesión 4 los alumnos seguirán profundizando en sus conocimientos sobre polígonos regulares al analizar cuál es la característica que permite que un polígono regular cubra (tesele) el plano. Se espera que al completar la tabla de la actividad 2 se den cuenta de que el ángulo interno debe ser un divisor de 360º para que los polígonos regulares se puedan colocar sin encimarse y sin que dejen huecos. Si esto no ocurre, ayúdelos a examinar algunos de los teselados. Pídales que analicen la medida de los ángulos cuyos vértices convergen en un punto y cuánto suman todos.



En la imagen se observa que en cada vértice convergen seis triángulos. Para averiguar, en este caso, cuánto miden los ángulos que convergen, la respuesta se obtiene dividiendo 360° entre el número de ángulos cuya convergencia está en ese punto. Por lo tanto, la medida de cada ángulo es un divisor de 360°. Después pueden ir a la tabla a verificar que esto se cumpla.

Para los teselados trazados, entre los diferentes procedimientos que puedan usar, está permitido que los alumnos decidan trazar los polígonos regulares y los utilicen como plantilla.

Pautas para la evaluación formativa

Observe el trabajo de los alumnos para detectar si:

- Usan sus instrumentos geométricos correctamente.
- Hacen sus construcciones usando instrumentos geométricos y no los hacen "a mano alzada" o "a ojo".
- Usan lo que saben sobre las medidas de los ángulos centrales e internos de los polígonos regulares.

¿Cómo apoyar?

Si nota que tienen problemas con el uso de alguno de los instrumentos geométricos (regla, escuadras, compás, transportador), haga una pausa y recuerde cómo se usan, por ejemplo, el trazo de:

- Una circunferencia, dada la medida del radio.
- Un ángulo, dada su medida.
- Paralelas o perpendiculares con escuadras, con regla y compás, con regla y transportador.

¿Cómo extender?

- Plantee problemas respecto a las medidas de los ángulos. Por ejemplo: pida que sin medir determinen la medida de los ángulos de los rombos del teselado de la actividad 4 de la sesión 4.
- Pida que inventen otros teselados donde ocupen dos o más polígonos diferentes, ya sea polígonos regulares o irregulares.

Secuencia 32 Conversión de medidas 3

(LT, págs. 248-253)

Tiempo de realización	3 sesiones
Eje temático	Forma, espacio y medida
Tema	Magnitudes y medidas
Aprendizaje esperado	Resuelve problemas que implican conversiones en múltiplos y submúltiplos del metro, litro, kilogramo y de unidades del Sistema Inglés (yarda, pulgada, galón, onza y libra).
Intención didáctica	Que los alumnos conozcan unidades de medida de uso común en contextos marítimos y de producción de hidrocarburos. Que pongan en práctica conocimientos adquiridos en secuencias anteriores, como el cálculo de porcentajes y de conversiones, tanto del Sistema Internacional como del Sistema Inglés, al resolver situaciones en varios contextos.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisual** • *Más sobre las unidades de medidas* **Informático** • *Conversión de unidades de medida*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recurso audiovisual** • *Conversión de medidas*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Conozcan unidades de longitud usuales en la navegación marítima y aérea, así como unidades de capacidad utilizadas en la producción de petróleo y que las apliquen para realizar cálculos y conversiones al resolver problemas relacionados con estos contextos.
- Sesión 2. Establezcan relaciones entre las unidades de longitud y de peso del Sistema Internacional y del Sistema Inglés para resolver problemas.
- Sesión 3. Realicen conversiones entre las unidades de capacidad, longitud y peso del Sistema Inglés y del Sistema Internacional.

Acerca de...

En primaria los alumnos trabajaron con diversas unidades de medida del Sistema Internacional; en este grado se incorpora el estudio del Sistema Inglés. Como logro de este aprendizaje esperado se quiere que dominen formas más eficientes y rápidas de convertir unidades, tanto en un mismo sistema como entre unidades de los dos sistemas. Para ello pueden recurrir a las estrategias estudiadas para multiplicar o dividir rápidamente por potencias de 10 cuando se trata de convertir unidades de medida dentro del Sistema Internacional, y a las relaciones de proporcionalidad, cuando tengan que convertir unidades dentro del Sistema Inglés, o bien, de un sistema a otro.

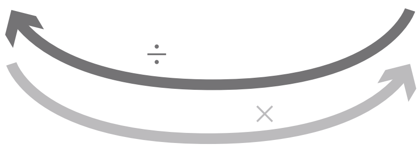
Por otra parte, los alumnos no pueden sustraerse en la actualidad a la importancia de las fuentes energéticas, en especial de las no renovables como el petróleo, y a la gran cantidad de información en torno al tema. En este sentido es importante que conozcan la unidad que se usa a nivel mundial para medir la producción del petróleo y la forma de comercializarlo, ya que en su transportación entran en juego unidades como los nudos y la milla marina, lo que brinda la oportunidad de seguir poniendo en práctica sus conocimientos sobre las estrategias para hacer cálculos y conversiones con diversas unidades de medida entre los dos sistemas.

La reflexión acerca de la relación velocidad, tiempo y distancia que han trabajado permitirá conceptualizar más fácilmente las nuevas unidades que aquí se les presentan (milla marina como unidad de longitud y nudo como unidad para medir la velocidad de navegación).

Sobre las ideas de los alumnos

Al llegar al estudio de esta secuencia, se espera que los alumnos tengan una idea clara acerca de que, en el Sistema Internacional, la relación entre las unidades de medida y sus múltiplos y submúltiplos se basa en la estructura del sistema decimal, y que para convertir de una unidad grande a una más pequeña, se multiplica, y para convertir de una unidad pequeña a una grande, se divide.

(10^3)	(10^2)	(10^1)	base	(10^{-1})	(10^{-2})	(10^{-3})
1 000	100	10	↓	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1\,000}$
km	hm	dam	m	dm	cm	mm



Asimismo, deberán saber cómo se relacionan las medidas para hacer conversiones entre las unidades del Sistema Inglés y de un sistema a otro.

¿Cómo guío el proceso?

La primera sesión invita a los alumnos a reflexionar acerca de las operaciones que han venido realizando para hacer conversiones entre unidades de medida. Por ejemplo, en el inciso a) de la actividad 1 los alumnos deberán tener claridad de que la operación que les permite responder la pregunta es una multiplicación entre la cantidad de galones y su equivalencia en litros, sin importar el orden en que aparezcan los factores, por lo que tendrán dos opciones correctas. Otros podrían pensar en establecer una relación de proporcionalidad como: $\frac{1g}{42g} = \frac{3.785\,l}{x}$ y llegar a los productos cruzados: (42) (3.785); otros más podrían verla como una ecuación lineal con una incógnita: $x(1) = (42)(3.785) \rightarrow x = (42)(3.785)$.

En la actividad 2, la relación se basa en calcular el tanto por ciento que corresponde a cada producto obtenido del petróleo, por lo que deberán recordar que el tanto por ciento de una cantidad se representa como $\frac{n}{100}$. Deberán usar esa relación para realizar sus cálculos, ya sea convirtiéndola en número decimal o usando la fracción para multiplicar la cantidad de litros por el tanto por ciento. Por ejemplo: para calcular los litros de nafta que se obtienen de un barril de petróleo, se pueden realizar las siguientes operaciones:

$$\frac{10}{100} \times 159 = \frac{1\,590}{100} = 15.9 \text{ litros,}$$
$$\text{o bien, } 159 \times 0.10 = 15.9 \text{ litros}$$

Aunque no se solicita, usted puede pedirles que sumen los porcentajes obtenidos para que verifiquen que se obtiene el total de litros de petróleo que contiene un barril. Es necesario usar las cantidades hasta milésimos para obtener 159 litros, pues si dejan sólo dos cifras decimales la cantidad obtenida será un poco menor.

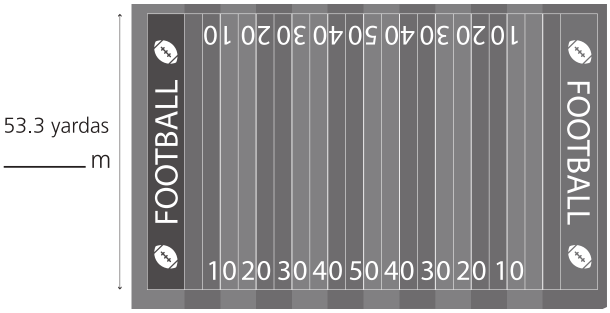
En esta sesión también se retoma la relación velocidad, distancia y tiempo al pedirles, en la actividad 3 inciso b), que calculen cuánto tarda el buque en llegar de un punto a otro, conocidas la distancia y la velocidad promedio. La expresión que los relaciona es: $d = \frac{v}{t}$, lo que lleva a la operación $5\,063.175 \div 19 = 266.48$

Como la velocidad está dada en relación con una hora, entonces el resultado es el número de horas que tarda. Aunque esto no se pide en la sesión, usted puede preguntarles a cuántos días equivale ese tiempo, para lo cual tendrán que dividir esa cantidad entre 24 (número de horas que tiene un día). Incluso, podría pedirles que antes de hacer cualquier operación, digan una cantidad que consideren aproximada.

No omita comentar con los alumnos el dato donde se señala que en muchos países se usa la coma decimal en lugar del punto decimal, cuya función es la misma.

La sesión 2 se basa en el futbol americano. Para iniciar, se puede platicar con los alumnos acerca de cómo se juega este deporte, sobre todo para aquellos alumnos que no conocen sus reglas básicas.

A lo largo de la sesión, los alumnos tendrán que ir y venir entre las conversiones de unidades de longitud y de peso del Sistema Inglés y del Sistema Internacional, para lo cual deberán usar las equivalencias y relaciones estudiadas en las secuencias anteriores. En la actividad 2 se plantea un aspecto que relaciona la imaginación espacial con la representación plana de los cuerpos. Los alumnos tendrán que imaginar el balón ovalado y la circunferencia central, de la cual se da la medida del diámetro.



Un ejercicio interesante es pedirles que imaginen el corte del balón sobre el diámetro mayor, que es precisamente el marcado en las acotaciones, y después solicitar que imaginen los círculos si los cortes se hacen más alejados del centro. Otro planteamiento relacionado con la imaginación espacial consiste en que digan la forma que se obtendría si se cortara el balón de punta a punta, ¿sería también un círculo?

La tercera sesión plantea conversiones entre los dos sistemas de unidades de medida que se han estudiado. En ésta se presentan datos interesantes acerca del cuerpo humano. También permite reflexionar acerca de las relaciones entre algunos animales de gran tamaño y su alimentación, así como el tamaño de sus crías y la cantidad de alimento que consumen.

Todo este trabajo se basa principalmente en que los alumnos identifiquen la relación y, por lo tanto, la operación que les permite pasar de una unidad de medida mayor a una menor, o de una menor a una mayor dentro del mismo sistema de unidades, así como de una unidad del Sistema Internacional a otra del Sistema Inglés o viceversa. Como ya han trabajado con esto, se espera que sin dificultad establezcan las relaciones de proporcionalidad directa que permiten resolver los problemas y las equivalencias entre la representación fraccionaria y decimal del tanto por ciento en los problemas que lo requieren.

Seguramente, al cabo de usar constantemente las equivalencias entre ambos sistemas de unidades, habrán memorizado algunas equivalencias, pero de no ser así, se puede dejar que las consulten o tener a la vista una tabla con todas ellas.

Pautas para la evaluación formativa

Observe si los alumnos comprenden los problemas y su traducción al lenguaje matemático; el manejo que tengan de estrategias de cálculo mental y de estimación de los resultados, por ejemplo: si se pide que calculen a cuántos días equivalen 266.48 horas, los alumnos deberán estimar que son más de 10 (pues $24 \times 10 = 240$), pero menos de 12 (pues $24 \times 12 = 288$). De igual forma, observe si tienen claridad acerca de que, para convertir unidades menores a unidades mayores, se multiplica, y cuando convierten de unidades menores a mayores, se divide.

¿Cómo apoyar?

Un problema que se puede presentar en esta secuencia es la interpretación de las cantidades de tanto por ciento que aparecen en la imagen de la primera sesión, pues tienen punto decimal. En este caso, habrá que recordarles a los alumnos que el tanto por ciento representa una cantidad de cada cien ($\frac{n}{100}$), así que si se tiene 1.8%, para convertirlo en número decimal es necesario dividirlo entre 100, de donde se tiene que: $1.8\% = 0.018$

Otra situación que podría ocurrir es que se olviden de la unidad con la que están trabajando y la unidad que les piden en la respuesta, ya que se dan medidas en unidades de ambos sistemas. Si esto ocurre, es importante que de principio no se tome como un error, será mejor hacer cuestionamientos al respecto. Por ejemplo, para responder cuántas pulgadas mide la circunferencia mayor del balón, se debe observar que la medida del diámetro está en centímetros y se pide que respondan en pulgadas, por lo tanto, será necesario que hagan una conversión antes de efectuar otras operaciones. Aquí, en lugar de error, puede ser distracción, pues el largo del balón está dado en pulgadas.

¿Cómo extender?

Se puede pedir que investiguen acerca de qué es un área y una hectárea, unidades que aún se usan en la agrimensura, que significa técnica de medir tierras.

También pueden investigar qué significan los prefijos *micro*, *nano*, *pico*, *mega*, *giga*, *tera* y su equivalencia en potencias de 10 (10^{-6}, 10^{-9}, 10^{-12}, 10^{6}, 10^{9}, 10^{12}), respectivamente, así como algunas unidades que los contengan y que ellos conozcan.

Secuencia 33 Volumen de cilindros rectos

(LT, págs. 254-259)

Tiempo de realización	3 sesiones
Eje temático	Forma, espacio y medida
Tema	Magnitudes y medidas
Aprendizaje esperado	Calcula el volumen de prismas y cilindros rectos.
Intención didáctica	Que los alumnos resuelvan problemas que implican calcular el volumen de cilindros rectos.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisual** • *Volumen de cilindros* **Informático** • *Cilindros y volúmenes*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recurso audiovisual** • *El volumen de prismas y cilindros rectos* **Bibliografía** • Sáiz Roldán, Mariana (s. f.) "El volumen. ¿Por dónde empezar?" Disponible en http://www.matedu.cinvestav.mx/~maestriaedu/docs/asig4/ConfMagist.pdf (Consultado el 24 de julio de 2019)

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Construyan cilindros rectos y comparen el volumen de cilindros con procedimientos propios.
- Sesión 2. Desarrollen la fórmula para calcular el volumen de cilindros rectos.
- Sesión 3. Resuelvan problemas que impliquen el cálculo del volumen de cilindros rectos.

Acerca de...

En el bloque 1 de segundo grado, los alumnos resolvieron problemas de cálculo de volumen de prismas cuya base era un polígono regular.

En esta secuencia determinarán que para calcular el volumen de un cilindro también tienen que multiplicar el área de la base por la altura. En el caso del cilindro, la base es un círculo, su área es πr^2 y, por lo tanto, el volumen es $V = \pi r^2 h$.

Al igual que con los prismas, el trabajo con cilindros permite desarrollar la visualización e imaginación espacial. Por ello, en la primera sesión se pide a los alumnos identificar el desarrollo plano (molde) que permite construir cilindros y después se les pide que los construyan para que comprueben sus hipótesis de manera empírica.

Es importante que los alumnos noten que no están aprendiendo una nueva fórmula, sino que es la misma que usaron para calcular el volumen de los prismas.

Sobre las ideas de los alumnos

Recuerde que la noción de volumen es compleja para los alumnos. En esta secuencia tendrán la oportunidad de seguir profundizando en el estudio de esta magnitud. Al trabajar con los cilindros, reflexionarán acerca de la imposibilidad de saber con exactitud el volumen de estos cuerpos, debido a que se usa un valor aproximado de π (el cual es un número irracional cuya expresión decimal es infinita y no periódica).

Entre los errores más comunes se encuentra omitir las unidades al dar los resultados, los alumnos sólo dan el dato numérico. También es un error frecuente que olviden que la unidad (mm, cm, dm, m, etcétera) debe estar expresada al cubo. Por ello es importante que, al trabajar esta secuencia, continuamente se haga referencia a la unidad que están usando, así como que noten la diferencia entre cm, cm^2 y cm^3.

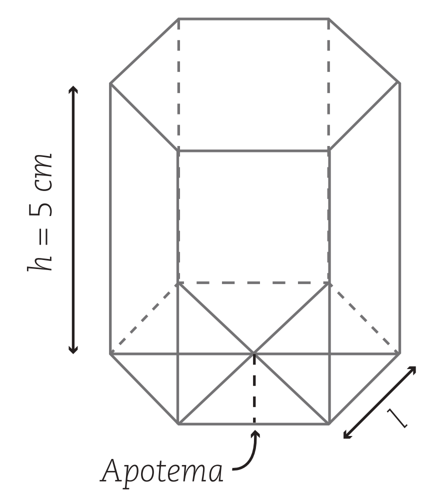
¿Cómo guío el proceso?

En la sesión 1, actividad 1, indique que, antes de armar los cilindros, primero estimen y le expliquen a su compañero con qué desarrollos planos consideran que es posible construir un cilindro. Para realizar la actividad 2, es conveniente que encargue con anticipación el material necesario para que los alumnos calquen y construyan los cinco cilindros indicados. En la actividad 4 se espera que los alumnos concluyan que una manera de saber, a simple vista, que un desarrollo plano permite armar un cilindro es que el lado del rectángulo que va pegado al círculo debe medir π veces el diámetro del círculo, es decir, tres veces y un poco más (aproximadamente 3.14 veces). Si nota que se les dificulta deducir y explicitar dicha idea, puede apoyarlos con algunas preguntas: ¿cuál lado del rectángulo va pegado al círculo?, ¿en qué parte del círculo se pega?, ¿cómo tendría que ser la medida de ese lado? Si lo considera necesario ayúdelos a recordar cómo determinar la medida de la circunferencia (π × diámetro).

Es muy probable que los alumnos piensen que el desarrollo plano morado no permite construir un cilindro o que crean que el cilindro que resulta con ese desarrollo es oblicuo. Deje que hagan sus hipótesis, y más adelante, en el inciso a) de la actividad 3, podrán comprobar si fueron verdaderas o falsas.

En la actividad 2 se espera que observen que hay dos medidas que entran en juego: la altura del cilindro y el diámetro (o radio) de su base. Por el momento es suficiente con que noten esto, en la siguiente sesión desarrollarán la fórmula.

En la sesión 2 se toma como punto de partida lo que los alumnos trabajaron en el bloque 1, tanto la construcción de prismas cuya base es un polígono regular como la fórmula para calcular su volumen. Es probable que algunos alumnos lleguen a confundir la altura del prisma con el apotema; para obtener dicha medida deben medir directamente sobre la base del prisma. Para que resulte más sencillo, sería conveniente indicarles que encuentren el centro de la base desde el desarrollo plano (para el caso de los prismas hexagonal y octagonal).



Para obtener el volumen del prisma octagonal es necesario calcular primero el área de la base:

$$A_B = \frac{8\,(l \times apotema)}{2}$$

Y después el del volumen:

$$V = A_B \times h$$

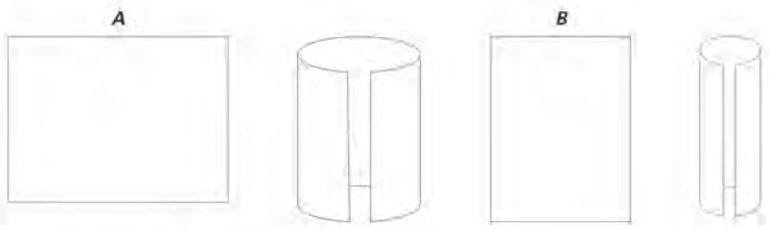
Se espera que los alumnos noten que el cilindro puede considerarse como un prisma con base circular y que, por lo tanto, su volumen se calcula aplicando la fórmula que ya conocen: $V = \pi r^2 h$.

2. Completen la siguiente tabla. En el caso del cilindro anoten el volumen aproximado.

Nombre	Volumen (cm^3)
Prisma triangular	
Prisma cuadrangular	
Prisma hexagonal	
Prisma octagonal	
Cilindro	

En los problemas de la sesión 3 también trabajarán con la capacidad. Recuerde que es importante que los alumnos noten que la *capacidad* (lo que le cabe a un recipiente) es diferente al *volumen* (cantidad de espacio que ocupa); ambas magnitudes guardan una relación tan estrecha que es posible calcular la capacidad de un recipiente calculando el volumen del cuerpo que cabe dentro de él. Esto lo trabajarán al resolver los problemas 2 y 4, en los que es necesario recordar que un decímetro cúbico equivale a un litro.

3. Se tiene una tarjeta rectangular que mide 8 cm de largo y 6 cm de ancho. Si esta tarjeta se usa como cara lateral de un cilindro puede usarse de dos maneras.



a) ¿Con cuál se obtiene un cilindro de mayor volumen? ____________

Durante el trabajo de esta secuencia permita el uso de la calculadora; el propósito principal es el trabajo con el volumen y se espera que la operatoria no sea un obstáculo ni un aspecto al que tengan que invertirle mucho tiempo.

Pautas para la evaluación formativa

Observe si los alumnos logran:

- Identificar el desarrollo plano de un cilindro.
- Determinar que para calcular el volumen de un cilindro se usa la misma fórmula que para calcular el volumen de un prisma: área de la base por altura.
- Usar correctamente la fórmula para calcular el volumen del cilindro.
- Tomar correctamente las medidas necesarias para calcular el volumen de un cilindro.
- Resolver problemas que implican el cálculo del volumen de cilindros.

¿Cómo apoyar?

Pida a los alumnos que hagan un formulario de perímetros, áreas y volúmenes y permita que lo consulten todas las veces que sea necesario.

Repase con ellos las ideas trabajadas en el bloque 1 acerca del volumen de prismas, esto constituye la base para el trabajo con el volumen del cilindro.

Pida a los alumnos que construyan un decímetro cúbico y comprueben que su capacidad es un litro.

Si se les dificulta el problema 4 de la sesión 3, puede pedir que construyan las latas con las medidas propuestas y buscar la manera de comprobar que su capacidad es un litro.

¿Cómo extender?

Proponga más ejercicios sobre el cálculo de volúmenes cuya altura y radio están expresadas con literales.

Secuencia 34 Gráficas de línea

(LT, págs. 260-267)

Tiempo de realización	4 sesiones
Eje temático	Análisis de datos
Tema	Estadística
Aprendizaje esperado	Recolecta, registra y lee datos en histogramas, polígonos de frecuencia y gráficas de línea.
Intención didáctica	Que los alumnos lean, interpreten, comparen y elaboren gráficas de línea que representan situaciones diversas.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisual** • *Gráficas de línea* **Informático** • *Gráficas de línea*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recurso audiovisual** • *Lectura de gráficas estadísticas*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Identifiquen las diferencias entre el polígono de frecuencia y la gráfica de línea.
- Sesión 2. Analicen una situación a partir de leer, interpretar y comparar la información que se presenta en diferentes gráficas.
- Sesión 3. Reconozcan cuando diferentes gráficas de línea presentan la misma información al establecer relaciones entre los valores de los datos, de las escalas de los ejes y otras convenciones precisas y propias de ese tipo de gráficas.
- Sesión 4. Comparen y analicen dos o más gráficas de línea en un mismo plano o en planos diferentes.

Acerca de...

Un aspecto básico del pensamiento estadístico es describir e interpretar la información mostrada en sus representaciones gráficas, tabulares o numéricas; esto implica la lectura correcta de los datos y las convenciones gráficas. Asimismo conlleva reconocer si diferentes representaciones de la información muestran los mismos datos al establecer relaciones numéricas precisas entre esas representaciones.

En esta secuencia los alumnos aprenderán a leer, interpretar, elaborar, comparar y analizar gráficas de línea. Una característica de este tipo de gráfica estadística es que muestra los cambios de una situación a través del tiempo. Para ello se presentan unidades de tiempo en el eje horizontal: fechas, años, meses, días, horas, entre otros; mientras que en el eje vertical se presentan los valores del aspecto de la situación que se observa y registra, por ejemplo, precios, porcentajes, población.

En la sesión 1 se propone comparar e identificar las diferencias entre una gráfica de línea respecto a un polígono de frecuencias. Luego, en la sesión 2, los estudiantes deberán leer, interpretar y comparar diferentes gráficas de línea referidas a una misma situación: el tipo de cambio del dólar en pesos a la venta. En la sesión 3, los estudiantes deberán reconocer cuáles son las representaciones correctas y equivalentes de los datos mostrados entre algunas de las gráficas de la segunda y tercera sesión.

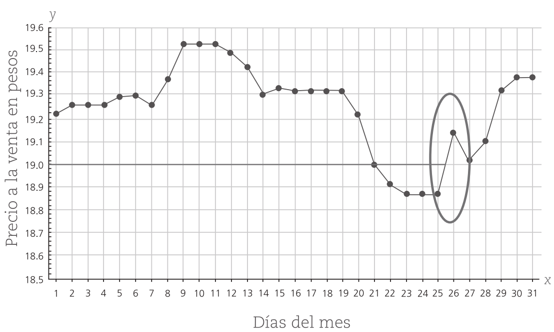
En el pensamiento estadístico, analizar los datos es una de las actividades más complejas; con su análisis se pueden identificar las tendencias que muestran, elaborar posibles inferencias y predicciones a partir de diagramas, tablas o gráficos estadísticos y de los valores de las medidas de tendencia central y de dispersión.

Las gráficas de línea son utilizadas en reportes, informes y presentaciones en diversos medios de comunicación porque permiten comparar dos o más conjuntos de datos que corresponden a un mismo aspecto de una situación. Por ejemplo, en la actividad 4 de la sesión 3, el aspecto común es el precio máximo de la caja de tomate tipo *saladette*, y cada conjunto de datos corresponde a los diferentes valores que ha tenido durante un mes en los estados indicados.

Sobre las ideas de los alumnos

En el bloque 2 de este grado los alumnos estudiaron histogramas y polígonos de frecuencia, y en primer grado vieron gráficas de barras y circulares. Por lo anterior, se espera que en el desarrollo de las actividades propuestas en esta secuencia ya puedan identificar tareas de descripción y análisis de la información recurrente, como leer, interpretar, comparar, organizar, representar y concluir. Sin embargo, es posible que los alumnos tengan dificultades para reconocer algunas de las características y convenciones propias de una gráfica de línea; por ejemplo, en el eje vertical puede representarse un intervalo de valores discretos o continuos y cambiarse de escala; mientras que en el eje horizontal, pueden ser sólo valores discretos —es decir, que son puntuales, no continuos— como en el caso de fechas o días de la semana, donde es evidente que entre una fecha y otra no se registra ningún dato a pesar de que los puntos de los valores de los datos estén unidos con un segmento, como se destaca entre el día 25 y 26 de marzo en la gráfica 2. Tipo de cambio del dólar en pesos durante el mes de marzo de 2019.

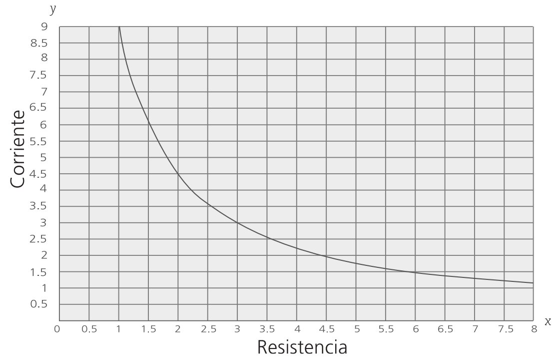
Gráfica 2 | Tipo de cambio del dólar en pesos durante el mes de marzo 2019



Fuente: Banco de México, "Mercado cambiario (tipos de cambio)", 2019.

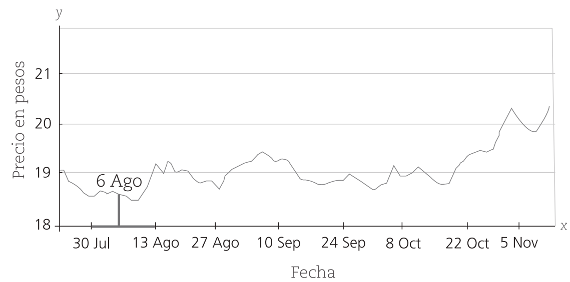
En este caso es posible aceptar la afirmación de que hay un aumento mayor que 20 centavos del tipo de cambio del dólar entre los días 25 y 26, pero es incorrecto afirmar que en el transcurso de un día a otro el tipo de cambio fue de $19.00

Generalmente, los segmentos de línea marcan una tendencia: aumentar o disminuir, pero no siempre implican valores intermedios entre dos datos, como puede ocurrir en el caso de una gráfica de una función lineal o de proporcionalidad inversa. Por ejemplo, en la actividad 4 de la sesión 2 de la secuencia 30, "Relación funcional 2", sí tiene sentido considerar los puntos (6, 1.5), (6.25, 1.44), (6.5, 1.38), pues la gráfica representa valores continuos.



Salvo el caso de la gráfica 4, "Tipo de cambio del dólar en pesos del 20 de julio de 2018 al 9 de noviembre de 2018", en la que algunos puntos intermedios sí pueden corresponder a una fecha si se realiza una división proporcional entre la distancia que hay entre una y otra de las fechas indicadas en el eje horizontal para ubicar un día en particular.

Gráfica 4 | Tipo de cambio del dólar en pesos del 20 de julio de 2018 al 9 de noviembre de 2018



Otras características que se deben destacar de una gráfica de línea es que no son líneas cerradas como los polígonos de frecuencias, lo que significa que no se inicia ni termina necesariamente con frecuencia cero, ni que forzosamente corte el eje horizontal.

¿Cómo guío el proceso?

Las actividades de la sesión 1 están encaminadas a comparar el polígono de frecuencia y la gráfica de línea en una situación en la que ambas representan el tipo de cambio del dólar a la venta en pesos durante un mes. El polígono de frecuencias muestra el número de días del mes (frecuencia absoluta) que presentó el tipo de cambio del dólar a la venta en pesos promedio en cada intervalo. En el caso de la gráfica de línea se muestra el precio a la venta del dólar en pesos diariamente.

La primera actividad es un ejemplo de leer los datos y "entre los datos", es decir, un ejemplo de inferir información. Así, el inciso b) se contesta directamente con la gráfica 1. Basta con identificar el punto más alto del polígono de frecuencias para conocer la mayor frecuencia y ubicar el valor correspondiente del eje horizontal (moda o intervalo modal). Mientras que en el caso de la gráfica 2, se requiere contar, uno a uno, cuántos días se repite cada valor del eje vertical. Hay algunos incisos que se pueden contestar directamente en ambas gráficas; como en el inciso d), si se considera que en el polígono de frecuencias el tipo de cambio del dólar más caro en el mes es $19.08 (valor medio del último intervalo) mientras que si se considera la gráfica de línea es $19.52 (punto más alto de la gráfica). Las actividades 2 de las sesiones 1 y 2 pretenden que los alumnos conozcan las convenciones de representación de una gráfica de línea; la mayoría son comunes a las otras gráficas estadísticas: título de los ejes y de la gráfica, entre otras. Se espera que los alumnos reconozcan la principal convención de una gráfica de línea: que el título y escala de valores del eje horizontal corresponde a unidades de tiempo. Otra de las actividades que promueven el desarrollo del pensamiento estadístico es la reorganización de la información, y dos de sus principales tareas son:

- Elaborar una representación que muestre el mismo conjunto de datos de manera gráfica o tabular, como se propone en las actividades 3 y 4 de la sesión 1.
- Mostrar la misma información utilizando otra escala numérica, como se propone en las actividades 1 a 3 de la sesión 3.

Una tarea relacionada con el análisis de datos que los alumnos deben realizar es la elaboración de afirmaciones verdaderas que implican comparar y combinar datos. Ejemplo de lo anterior es la actividad 3 de la sesión 2. Una vez que la realicen, pida a los alumnos que copien en su cuaderno el recuadro para hacer un ejercicio semejante con los datos que muestran las gráficas 4 y 5. Finalmente, en la sesión 4 los alumnos recolectan y registran datos de situaciones que pueden ser presentadas en gráficas de línea. Motive a los alumnos a que no se limiten sólo a recolectar datos de las situaciones propuestas en el libro, sino de diversos contextos, por ejemplo, registro del crecimiento de un ser vivo (planta, animal) que les permita usar diferentes unidades de tiempo. En esta última sesión los alumnos también deberán comparar dos o más conjuntos de datos en un mismo plano e interpretar si es posible hacer predicciones.

Pautas para la evaluación formativa

Observe si durante el trabajo con esta secuencia los alumnos:

- Leen e interpretan la información presentada en una gráfica de línea.
- Reorganizan los datos a partir de cambios de escala en los valores del eje vertical o de mostrar los datos en otro tipo de representación.
- Identifican los conjuntos de datos que corresponden a cada gráfica de línea presentadas en un mismo plano.
- Elaboran correctamente gráficas de línea para mostrar los datos que recolectaron y registraron.

¿Cómo apoyar?

Si a los alumnos se les dificulta reconocer las características y convenciones de una gráfica de línea, pida que elaboren la representación tabular de cada gráfica.

Si es posible, pida que visiten el sitio del Banco de México (http://www.banxico.org.mx/tipcamb/main.do?page=tip&idioma=sp) para que analicen la manera en que se utilizan las gráficas de línea en los reportes que elaboran y publican.

¿Cómo extender?

Pida reunir los carteles que elaboraron en la actividad 1 de la sesión 4 y realice un concurso en el que voten por el cartel que esté mejor elaborado; deberán calificar los aspectos técnicos relacionados con las gráficas de línea que se indicaron en la actividad 2 de la sesión 1.

Secuencia 35 Medidas de tendencia central y de dispersión 2 (LT, págs. 268-273)

Tiempo de realización	3 sesiones
Eje temático	Análisis de datos
Tema	Estadística
Aprendizaje esperado	Usa e interpreta las medidas de tendencia central (moda, media aritmética y mediana), el rango y la desviación media de un conjunto de datos y decide cuál de ellas conviene más en el análisis de los datos en cuestión.
Intención didáctica	Que los alumnos analicen diversas situaciones en las que se usan e interpretan conjuntos de datos y valores de la media aritmética y de la desviación media.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisual** • *Aplicación de la estadística* **Informático** • *Estadística*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recurso audiovisual** • *Análisis de datos*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Comparen conjuntos de datos y obtengan los valores de su media aritmética y la desviación media para analizar la situación que presentan.
- Sesión 2. Analicen una situación usando e interpretando los valores de la media aritmética y la desviación media.
- Sesión 3. Obtengan e interpreten los valores de la media aritmética y la desviación media referidos a procesos de verificación de medidas para tomar decisiones.

Acerca de...

En esta secuencia, los alumnos de segundo grado analizarán información a partir de la comparación de dos o más conjuntos de datos, de los valores de la media aritmética y de la desviación respecto a la media. Se espera que, a partir de este análisis, puedan tomar decisiones en situaciones que implican resultados deportivos y procesos de verificación en investigación de mercados. De este modo se pretende que conozcan la relevancia de la formación estadística, y en particular que logren percibir la variabilidad de los datos y que reconozcan su presencia y aplicación en el mundo que los rodea.

En la secuencia 25 los alumnos aprendieron a calcular la desviación media como el promedio de las diferencias absolutas de los datos respecto al valor de la media aritmética. En esta secuencia también deben calcularla y, además, analizar su relación con la dispersión de los datos para dar conclusiones y tomar decisiones. Particularmente en la sesión 3 se pretende dar a conocer a los alumnos ejemplos de la aplicación de la desviación media. En esa sesión se ilustra la manera de realizar un proceso de verificación, que implica hacer varias pruebas en las que se pueden obtener medidas diferentes de un mismo objeto; lo que conlleva a obtener errores de medida, los cuales influyen en el proceso. La precisión de un instrumento o de un método de medida está relacionada con la desviación media que se obtiene en cada proceso de medida.

Sobre las ideas de los alumnos

Tal vez algunos alumnos todavía no comprendan por qué las medidas de tendencia central y las de dispersión se complementan. En parte puede deberse al proceso de enseñanza, pues primero se proponen situaciones que se centran en el cálculo de las medidas de tendencia central y luego en las medidas de dispersión, y no siempre se entiende que la variabilidad de los datos es transversal. De ahí que sea importante que los alumnos aprendan a interpretarlas, compararlas y generar posibles valores de los datos que conforman el conjunto, como ocurre en la sesión 2.

¿Cómo guío el proceso?

Desde "Para empezar" se hace presente la importancia del registro de datos y, a lo largo de la secuencia, también se resaltan y señalan otros ejemplos de situaciones en que interviene. Promueva entre los alumnos una discusión al respecto y pida que den ejemplos de situaciones en las que también sea necesario el registro de datos. En la actividad 1 de la sesión 1, los alumnos deben leer e interpretar tablas para comparar los conjuntos de datos registrados. Estos datos corresponden a diferentes resultados obtenidos en las tres temporadas de participación de un equipo de basquetbol profesional. Se pretende que el análisis de los datos permita a los alumnos argumentar si jugar como local influye en el desempeño del equipo. Después, en la actividad 2, deberán calcular la media aritmética y la desviación media de algunos de los conjuntos de datos para compararlos y contestar las preguntas planteadas en los incisos siguientes. En este caso, observarán que son mejores los resultados obtenidos cuando se juega como local, además de que se obtiene un mayor promedio de puntos anotados y la dispersión es menor, lo que se puede traducir como una mayor consistencia en los resultados.

	Promedio de puntos anotados (media aritmética)	Desviación media	Promedio de puntos en contra (media aritmética)	Desviación media	Rango
Como visitante					
Como local					

En la sesión 2, los alumnos deben interpretar los valores de la media aritmética y la desviación media para completar la tabla del inciso b). Deberán hacer cálculos como los siguientes:

Número	Visitante	
	Juegos ganados	Juegos perdidos
Mínimo	13 – 2.6 = 10.4	6.333 – 3.111 = 3.222
Máximo	13 + 2.6 = 15.6	6.333 + 3.111 = 9.444

Se espera que noten que es posible hacer afirmaciones como la de Manuel (inciso c)), ya que el promedio de juegos perdidos es 3 y la desviación media 0.6, entonces se puede decir que el número mínimo de partidos perdidos es 2 —aunque el resultado exacto es 2.4, pero en el contexto de la situación no se pierde parte de un partido— y el número máximo es 4 —porque el valor es $3.6 \approx 4$.

Para que los alumnos realicen deducciones como las anteriores, apóyelos con preguntas como las siguientes: ¿es posible perder 2.4 partidos?, ¿qué significaría perder 2.4 partidos? Es importante que los estudiantes comprendan que los valores de las medidas de tendencia central y de dispersión son referentes que resumen al conjunto de datos y que, como en todo resumen, se pierde precisión en algunos datos (por ejemplo, no se puede saber en cuál temporada se obtiene el puntaje mínimo). En el inciso f) los alumnos deben completar la conclusión, actividad que recurrentemente se propone a los alumnos como parte del desarrollo del pensamiento estadístico, el cual va más allá de calcular medidas estadísticas. Otra actividad periódica es la recolección y registro de datos por parte de ellos, como se propone en la actividad 4. Posteriormente, deberán organizar, describir y analizar los resultados para presentarlos o darlos a conocer, en este caso, por medio de carteles.

En la sesión 3, los alumnos conocerán una situación cotidiana en la que se usa una norma que implica el registro de datos y el cálculo de promedios y errores de medición.

	Promedio de juegos ganados	Promedio de juegos perdidos	Promedio de puntos anotados	Promedio de puntos en contra	Promedio de puntos anotados por partido	Promedio de puntos en contra por partido
Como local	16.333	3	1 661.333	1 483.666	85.9	76.61
Desviación media (DM)	0.4	0.6	87.555	115.111	0.6	2.518
Como visitante	13	6.333	1 596.666	1 477.333	82.65370	76.38
Desviación media (DM)	2.6	3.111	61.555	80.22	0.660	2.5024

Esta situación les ayudará a darse cuenta de que el uso de la estadística es cotidiano y que se aplica en diversas situaciones. Se pretende que los alumnos reconozcan que la estadística permite tener argumentos para sustentar una declaración o una conclusión antes del momento de tomar decisiones. También es importante que los alumnos comprendan que entre mayor número de datos tengan, es más conveniente trabajar con los valores de las medidas de tendencia central y de dispersión.

Pautas para la evaluación formativa

Observe si durante el trabajo con esta secuencia los alumnos:

- Utilizan los procedimientos correctos para calcular la media aritmética, el rango y la desviación media de los conjuntos de datos.
- Realizan la búsqueda y recopilación de datos de manera eficiente y eficaz.
- Organizan y analizan los datos y valores de los promedios y dispersión.
- Presentan afirmaciones y conclusiones correctas en las que utilizan los valores de la media, rango y desviación media.

¿Cómo apoyar?

En caso de que los alumnos tengan dificultades para obtener los valores de la media aritmética y la desviación media, pida que revisen la secuencia 25 para recordar cómo se calcula la desviación media. Luego, pida que en grupo realicen un ejemplo de la manera en que se obtienen los resultados, como se presenta a continuación:

	Promedio de puntos anotados (media aritmética)
Como visitante	$\frac{1854 + 1744 + 1358}{3} = 1652$

Desviación media
$\frac{\lvert 1\,854 - 1\,652\rvert + \lvert 1\,744 - 1\,652\rvert + \lvert 1\,358 - 1\,652\rvert}{3} = 196$

De manera semejante podrán obtener los otros valores de las medidas de los otros conjuntos.

¿Cómo extender?

Pida a los alumnos analizar los conjuntos de datos que corresponden al precio de la gasolina o de alguno de los productos señalados en las sesiones 3 y 4 de la secuencia 34 para obtener el precio promedio y su desviación media.

Secuencia 36 Probabilidad clásica 2
(LT, págs. 274-279)

Tiempo de realización	3 sesiones
Eje temático	Análisis de datos
Tema	Probabilidad
Aprendizaje esperado	Determina la probabilidad teórica de un evento en un experimento aleatorio.
Intención didáctica	Que los alumnos calculen la probabilidad frecuencial y clásica de algunos eventos y determinen qué es un evento complementario y cómo se calcula su probabilidad.
Recursos audiovisuales e informáticos para el alumno	**Audiovisual** • *Evento complementario* **Informático** • *Probabilidad clásica vs. probabilidad frecuencial*
Materiales de apoyo para el maestro	**Recurso audiovisual** • *De la probabilidad frecuencial a la teórica*

¿Qué busco?

Que los alumnos:

- Sesión 1. Comparen la probabilidad teórica y frecuencial de un evento para compararlas y utilicen la simulación.
- Sesión 2. Conozcan y calculen la probabilidad teórica de eventos complementarios.
- Sesión 3. Resuelvan problemas que implican calcular la probabilidad teórica de eventos.

Acerca de...

En esta secuencia los alumnos continuarán con el estudio de la probabilidad teórica de diversos eventos que se inició en la secuencia 12. Probabilidad clásica, del bloque 1. En la sesión 1 de esta secuencia se propone calcular las probabilidades teóricas de los eventos y obtener su probabilidad frecuencial a partir de simular las situaciones. Los alumnos deberán pensar de qué manera pueden simular una situación. Para ello requieren identificar todos los resultados posibles y cuáles son los favorables de los eventos definidos, ya que la situación que simula la original debe ser equivalente. Además, al realizar la simulación se espera que comprendan que la probabilidad frecuencial de un evento es resultado de llevar a cabo la situación, y que si la repitieran el mismo número de veces, podrían obtener o no ese mismo valor; si la repitieran una gran cantidad de veces, se irían aproximando al valor de la probabilidad teórica, la cual está relacionada con la proporción entre el número de casos favorables de un evento y el total de casos que hay sin que ocurra la situación. Se insiste en que el valor de la probabilidad de un evento está entre 0 y 1.

En la sesión 2 se introduce el concepto de evento complementario, aprovechando que se identifican y cuentan los resultados favorables de un evento. En la sesión 3 se presentan situaciones relacionadas con el control de calidad de algunos productos para calcular la probabilidad teórica.

Sobre las ideas de los alumnos

Se espera que los alumnos no tengan problema para distinguir entre la probabilidad teórica de un evento y la frecuencial, ni para reconocer que el valor máximo de la probabilidad de un evento es 1 y el mínimo es 0.

Un aspecto que puede generar dificultades a los estudiantes es el uso de expresiones decimales para referirse a la probabilidad teórica, ya que aparecen números decimales periódicos. En caso de ocurrir, pida también que utilicen fracciones y comparen los resultados.

Por ejemplo, en la actividad 2 de la sesión 1 las probabilidades teóricas de los eventos son:

Color	Probabilidad de seleccionar un alumno que le guste	
Azul	$\frac{1}{2}$	0.5
Verde	$\frac{1}{4}$	0.25
Rosa	$\frac{1}{6}$	0.1666…
Morado	$\frac{1}{12}$	0.08333…

La probabilidad de seleccionar al azar a un alumno que no prefiera el color azul es igual a la probabilidad de que prefiera verde o rosa o morado. Si se expresa con números decimales, se obtiene:

0.25 + 0.1666 + 0.08333 = 0.4999 mientras que si utilizan fracciones se obtiene:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{1}{2}$$

Por ello es importante que los alumnos comprendan que es conveniente expresar las probabilidades con fracciones.

Otro aspecto que los alumnos deben comprender es que las situaciones aleatorias pueden implicar eventos no equiprobables, como ocurre en la actividad 1 de la sesión 1, en la que quizás algunos consideren que la probabilidad de seleccionar a una mujer (o a un hombre) es $\frac{1}{2}$, sin considerar que el número de alumnas es el doble del de alumnos, es decir, dos terceras partes de la cantidad total de alumnos son mujeres y un tercio son hombres.

¿Cómo guío el proceso?

En "Para empezar" conviene destacar las características de las situaciones y fenómenos aleatorios que se señalan e insistir en ellas en el desarrollo de la secuencia. En la sesión 1, actividad 1, incisos a) y b), los alumnos deben calcular la probabilidad teórica, mientras que en la actividad 1 inciso c) deben calcular la probabilidad frecuencial. Es importante que al comparar los resultados de ambas probabilidades se insista en que la probabilidad frecuencial puede ser distinta a la teórica, pues es resultado de lo que ocurre al realizar el experimento o llevar a cabo la situación. Si lo considera conveniente, puede pedir que reúnan los resultados de los equipos para calcular la probabilidad frecuencial del evento en el grupo, y compararla con la teórica. Es posible que puedan observar que, cuando el número de repeticiones crece, la probabilidad frecuencial tiende a acercarse a la teórica.

Probabilidad clásica vs. probabilidad frecuencial

1. Trabajen en pareja.

En un grupo de telesecundaria hay 24 alumnos en total: 16 son mujeres y los demás son hombres. Si se selecciona un alumno al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea un hombre?

P(A: el alumno seleccionado al azar es un hombre) = ________________

b) ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar al azar a una mujer?

P(B: el alumno seleccionado al azar es una mujer) = ________________

Si los alumnos utilizan números decimales para expresar los valores de las probabilidades, tendrán menor precisión que si usan fracciones. No les prohíba el uso de los decimales, pero en las puestas en común pida que los expresen también con fracciones y hágales notar que estas últimas son más precisas.

2. Los alumnos del grupo de telesecundaria señalaron su color preferido. La siguiente tabla muestra sus preferencias.

Color	Azul	Verde	Rosa	Morado
Número de alumnos	12	6	4	2

a) Si se selecciona un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que prefiera el color azul?

P(C: el alumno seleccionado al azar prefiere el color azul) = ______

b) ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar un alumno al azar que prefiera el color verde o el rosa?

P(D: el alumno seleccionado al azar prefiere el color verde o rosa) = ______

c) ¿Es mayor la probabilidad de elegir un alumno que prefiera el color azul o uno que no lo prefiera? Justifiquen su respuesta. ______

En la sesión 2 conviene elaborar diagramas de árbol para enumerar todos los resultados posibles (espacio muestral) y determinar las probabilidades de los eventos que se indican. Esto también ayudará a ilustrar el concepto de evento complementario.

En la resolución de los problemas de la sesión 3 recomiende a los alumnos utilizar estrategias de conteo para determinar los espacios muestrales y obtener las probabilidades teóricas, como el diagrama de árbol, tablas o listas donde aparezcan todos los resultados posibles.

Pautas para la evaluación formativa

Observe si durante el trabajo con esta secuencia los alumnos:

- Utilizan los procedimientos para determinar los espacios muestrales.
- Usan la simulación para representar la situación o el fenómeno aleatorio.
- Utilizan fracciones o decimales correctamente para expresar el valor de las probabilidades.

a) A una tienda le surten un lote de 20 artículos sin defectos, 10 artículos con defectos mínimos y 2 con defectos graves. Si el supervisor elige un artículo al azar, cuál es la probabilidad de que:

- El artículo no tenga defectos: ______
- El artículo tenga un defecto mínimo: ______
- El artículo sea defectuoso: ______

b) El supervisor de la tienda decide elegir dos artículos al mismo tiempo para revisarlos. ¿Cuál es la probabilidad de los siguientes eventos?

- Que ninguno de los dos artículos esté defectuoso: ______
- Que ambos artículos estén defectuosos: ______
- Que uno de ellos esté defectuoso: ______
- Que uno de ellos tenga defectos graves: ______

c) Se sabe que, en un lote de 1 600 pantallas, el 20% son defectuosas.

- ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar al azar una pantalla que no esté defectuosa? ______
- ¿A cuántas pantallas equivale? ______
- ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar al menos un radio? ______

d) En una urna hay 10 fichas numeradas del 1 al 10. Un jugador extrae, sin ver, dos fichas y suma los números que traen. No regresa las fichas a la urna. Gana si la suma de los números es 10.

- ¿Cuál es la probabilidad de que las fichas sumen 10? ______
- ¿Cuál es la probabilidad de que no sumen 10? ______

2. En grupo, verifiquen sus respuestas y comenten la manera en que determinaron cada probabilidad. Para comprender mejor de qué trata la situación o apreciar cuáles pueden ser los resultados posibles, simulen alguna de las situaciones.

3. Utilicen el recurso informático *Probabilidad clásica vs. probabilidad frecuencial* para interpretar y analizar los resultados que arrojan ambas probabilidades en diversos experimentos aleatorios.

¿Cómo apoyar?

En caso de que los alumnos tengan dificultades para comprender la actividad 1 de la sesión 1, plantee la situación considerando el número de alumnos y alumnas que hay en su grupo, de manera que puedan representar concretamente la situación.

¿Cómo extender?

Pida a los alumnos que utilicen la hoja de cálculo electrónica para generar los resultados aleatorios de las actividades propuestas en el inciso c) de la actividad 1 de la sesión 1, y la actividad 3 de la sesión 2.

Evaluación Bloque 3
(LT, págs. 280-281)

Con el propósito de observar el avance en el logro de los aprendizajes de los estudiantes, además de las consideraciones que usted haya realizado, se presentan a continuación los resultados y orientaciones del instrumento de evaluación del bloque 3.

Reactivos 1 a 4. **Potencia con exponente entero y aproximación de raíces cuadradas.** Con la resolución de estos reactivos, los alumnos calculan productos y cocientes de potencias enteras de la misma base, potencias de potencias y raíz cuadrada.

Reactivo 1. Es posible valorar las habilidades de cálculo de los alumnos respecto a la interpretación del significado de la potencia y, además de reconocer las regularidades que se generan en potencias de la misma base, permite apreciar el desarrollo del sentido numérico que se espera de los alumnos, ya que: $3^9 = 3^3 \times 3^3 \times 3^3 = (3^3)^3$.

Los alumnos no necesitan calcular el valor total de la potencia, basta comprender, dada la información que presenta la base del reactivo, que:

$3^9 = 27 \times 27 \times 27 = (20 + 7) \times (20 + 7) \times (20 + 7)$ y una parte de los cálculos implica que: $7 \times 7 \times 7 = 343$. Por lo que la respuesta a la pregunta es: 3.

Reactivo 2. La situación corresponde a una aplicación de la potencia: el cálculo del volumen de un cubo. Los alumnos deben considerar que en un cubo la medida de los lados es igual, por lo que el volumen implica calcular la potencia al cubo de la medida del lado (arista), esto es: $l^3 = 125 \text{ cm}^3$.

En este caso no es necesario calcular la medida del lado, pues implicaría calcular la raíz cúbica de 125 para conocer la medida de la arista y después duplicarla para calcular el nuevo volumen; posteriormente habría que analizar la relación entre 125 y el nuevo volumen obtenido. Por lo que puede seguirse esta estrategia para conocer la respuesta: Si se duplica la medida de cada lado y se eleva al cubo, se tiene:

$(2\,l)^3 = \mathbf{8}\, l^3 = \mathbf{8} \times 125 \text{ cm}^3$. Por lo tanto, la respuesta es 8 veces.

Reactivo 3. Implica la aproximación de una raíz cuadrada entera y determinar el residuo. Se espera que los alumnos utilicen alguna de las estrategias estudiadas en las secuencias para determinar la mayor medida del lado del cuadrado que se puede formar con las 300 losetas. La medida es 17^2 losetas por lado, pues $17^2 = 289$ y sobran 11.

Reactivo 4. Los alumnos ponen en juego sus conocimientos sobre el significado e interpretación de la potencia y su operación inversa, la raíz cuadrada. La expresión $(x - 5)^2 = 144$ es una representación de cómo el cuadrado de la diferencia de dos números es 144; esto significa que la diferencia es 12, ya que $12^2 = 144$.

Por lo tanto, el número que al restar 5 unidades da 12, es 17. Otra manera de resolver la situación es la siguiente:

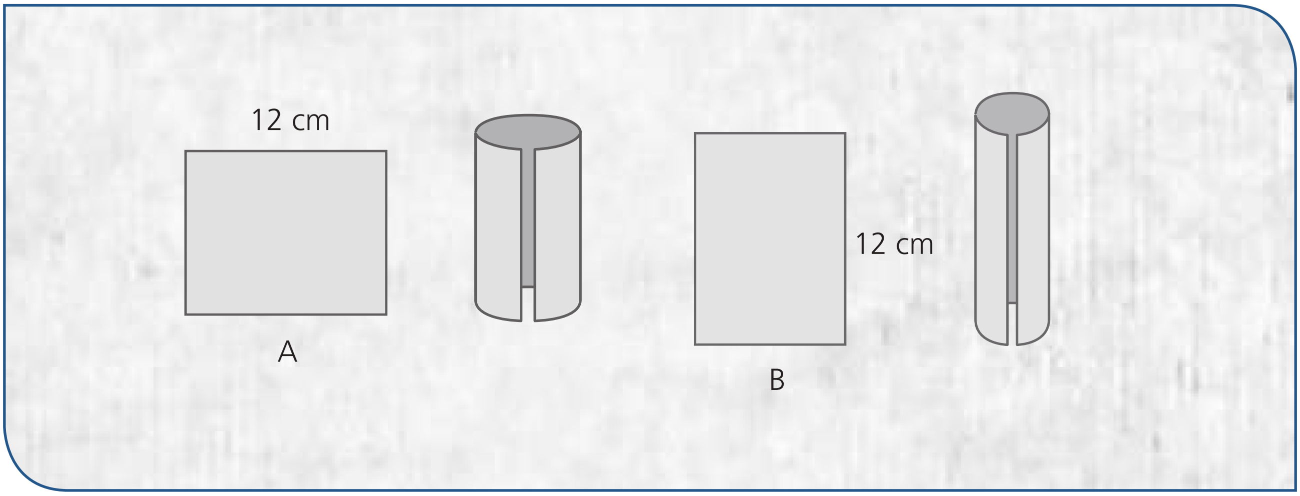
$$\begin{aligned}
(x - 5)^2 &= 144 \\
(x - 5) &= \sqrt{144} \\
(x - 5) &= 12 \\
x &= 12 + 5 \\
x &= 17
\end{aligned}$$

Reactivo 5. **Volumen del cilindro.** Con este reactivo se valora la aplicación de la fórmula para obtener el volumen de un cilindro: $V = \pi r^2 h$.

En el caso del cilindro A, la circunferencia que se genera es $12 = \pi d$, de donde $d = \frac{12}{\pi}$, aproximadamente, y $d = 3.82$, por lo que su radio = 1.91 y su volumen = 103.09 cm^3.

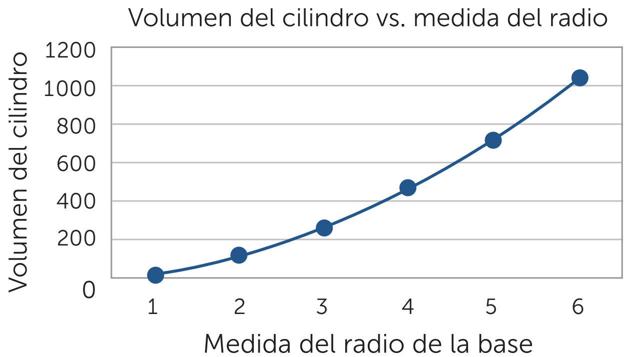
El caso del cilindro B, la circunferencia que se genera es $9 = \pi d$, de donde $d = \frac{9}{\pi}$, aproximadamente, y $d = 2.86$, por lo que su radio = 1.43 y su volumen = 77.05 cm^3

Al comparar ambos volúmenes, se espera que identifiquen que el mayor es el del cilindro A.



Reactivo 6. Variación lineal. En este caso, se espera que los alumnos identifiquen que sí hay una relación de variación entre el volumen y el radio del cilindro, pero no es proporcional ni lineal. La relación que tienen es exponencial (cuadrática), aunque no se espera que ésta sea la respuesta que den los alumnos. Tal vez algunos consideren que es proporcional, porque si el radio crece, el volumen también, pero el incremento es exponecial y la gráfica que representa esa relación es una curva como se muestra a continuación.

h	*r*	*v*	r^2
9	1	28.26	1
9	2	113.04	4
9	3	254.34	9
9	4	452.16	16
9	5	706.5	25
9	6	1017.36	36



La segunda parte de los reactivos son de opción múltiple.

Reactivos 1 y 2. Sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas. En el primer reactivo se evalúa la resolución de sistemas de ecuaciones de 2 × 2, y particularmente la interpretación de los resultados al identificar el valor de la incógnita por la que se pregunta. El precio de un flan es $20. Dependiendo del sistema de ecuaciones que planteen, puede ocurrir que encuentren primero el valor del precio de una gelatina, y es posible que los alumnos consideren erróneamente ese precio como la respuesta correcta.

En el segundo reactivo se evalúa el planteamiento del sistema de ecuaciones que corresponde a la situación de la base del reactivo. La respuesta correcta es:

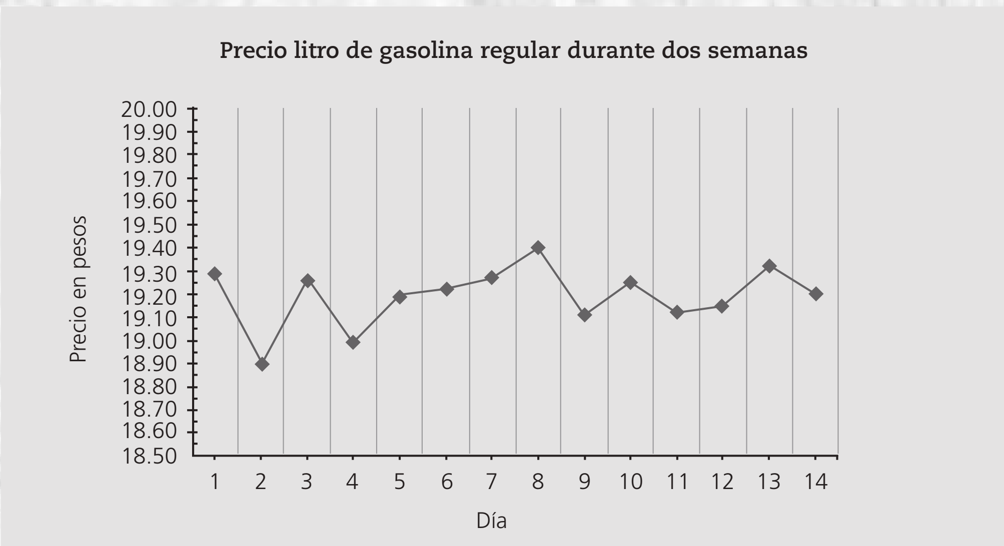
$$20x + 10y = 500$$
$$40x - 50y = 300$$

Reactivo 3. Conversión de medidas de peso. Con la respuesta de este reactivo se valora en los alumnos su dominio en la forma de convertir medidas de peso expresadas en los sistemas internacional e inglés. La expresión correcta de las operaciones es: $89 - (0.454 \times 10)$. Tal vez, algunos alumnos consideren como correcta la expresión: $89 - (454 \times 10)$, olvidando convertir el valor de las libras a kilogramos.

Reactivo 4. Conversión de medidas de capacidad. Este reactivo permite valorar la habilidad de convertir medidas de capacidad del Sistema Internacional de manera eficiente, así como de interpretar la situación que se presenta: $5 \times 1000 \times 0.22$. Es importante que los alumnos se den cuenta de que se pregunta por la cantidad de mililitros, lo que justifica multiplicar por 1000.

Reactivo 5. Probabilidad clásica. Con este reactivo se valora si los alumnos comprenden el significado de la probabilidad clásica y la manera de calcularla. Hay un solo resultado favorable de los 12 posibles, de ahí que la probabilidad es un doceavo.

Reactivo 6. Gráfica de línea. Con este reactivo se evalúa la lectura e interpretación de gráficas de línea, se espera que los alumnos sean capaces de leer directamente los datos y entre datos. De ahí que la respuesta correcta es la segunda opción.



Recursos audiovisuales e informáticos

Recursos audiovisuales e informáticos

Aprendizajes esperados	Clave
1. Resuelve problemas de multiplicación y división con fracciones y decimales positivos.	AE1
2. Resuelve problemas de multiplicación y división con números enteros, fracciones y decimales positivos y negativos.	AE2
3. Resuelve problemas de potencias con exponente entero y aproxima raíces cuadradas.	AE3
4. Resuelve problemas de proporcionalidad directa e inversa y de reparto proporcional.	AE4
5. Resuelve problemas mediante la formulación y solución algebraica de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.	AE5
6. Analiza y compara situaciones de variación lineal y proporcionalidad inversa a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica. Interpreta y resuelve problemas que se modelan con este tipo de variación, incluyendo fenómenos de la física y otros contextos.	AE6
7. Verifica algebraicamente la equivalencia de expresiones de primer grado formuladas a partir de sucesiones.	AE7
8. Formula expresiones de primer grado para representar propiedades (perímetros y áreas) de figuras geométricas y verifica equivalencia de expresiones, tanto algebraica como geométricamente (análisis de las figuras).	AE8
9. Deduce y usa las relaciones entre los ángulos de polígonos en la construcción de polígonos regulares.	AE9
10. Resuelve problemas que implican conversiones en múltiplos y submúltiplos del metro, litro, kilogramo y de unidades del Sistema Inglés (yarda, pulgada, galón, onza y libra).	AE10
11. Calcula el perímetro y el área de polígonos regulares y del círculo a partir de diferentes datos.	AE11
12. Calcula el volumen de prismas y cilindros rectos.	AE12
13. Recolecta, registra y lee datos en histogramas, polígonos de frecuencia y gráficas de línea.	AE13
14. Usa e interpreta las medidas de tendencia central (moda, media aritmética y mediana), el rango y la desviación media de un conjunto de datos y decide cuál de ellas conviene más en el análisis de los datos en cuestión.	AE14
15. Determina la probabilidad teórica de un evento en un experimento aleatorio.	AE15

Bloque 1

Recursos audiovisuales						
Secuencia didáctica	**Nombre de la sesión**	**Clave**	**Tema**	**Finalidad**	**Función didáctica**	**Título**
1. Multiplicación y división de números decimales positivos	1. Multiplicaciones por 10, por 100 y por 1 000	AE1	Multiplicación y división	Desarrollar habilidades para multiplicar números decimales y usar dicha operación al resolver problemas.	Comprender la técnica para multiplicar números decimales por 10, 100 o 1 000 y su justificación.	*Multiplicaciones por 10, por 100, por 1 000*
	2. Divisiones por 10, por 100 y por 1 000			Desarrollar habilidades para dividir números decimales y usar dicha operación al resolver problemas.	Comprender la técnica para dividir números decimales por 10, 100 o 1 000 y su justificación.	*División por 10, por 100, por 1 000*
2. Multiplicación y división de fracciones positivas	1. La pista de carreras	AE1	Multiplicación y división	Desarrollar habilidades para multiplicar y dividir números fraccionarios y usar dichas operaciones al resolver problemas.	Analizar problemas que originan el cálculo de la fracción de un número entero.	*Una vuelta y media*
	4. El factor recíproco				Analizar situaciones que originan una multiplicación de dos factores y en la que se recurre a la división del recíproco de un factor.	*Multiplicar, a veces, también es dividir*
3. Multiplicación de números enteros	3. Las reglas de los signos de la multiplicación	AE1	Multiplicación y división	Desarrollar habilidades para multiplicar números enteros y usar dicha operación al resolver problemas.	Comprender la regla de los signos en la multiplicación de números enteros y su representación en el plano cartesiano a través de la relación $y = mx$.	*La regla de los signos de la multiplicación de números enteros y el plano cartesiano*
	4. Aplica la regla				Observar situaciones que permiten obtener el producto de números enteros.	*La regla de los signos de la multiplicación de números enteros*

Recursos audiovisuales						
Secuencia didáctica	Nombre de la sesión	Clave	Tema	Finalidad	Función didáctica	Título
4. Proporcionalidad directa e inversa	2. De viaje	AE4	Proporciona-lidad	Distinguir las relaciones que son de proporcionalidad directa de las que son de proporcionalidad inversa y de las que no son de proporcionalidad.	Distinguir entre situa-ciones de proporcionalidad directa e inversa a través del análisis de tablas.	*Tablas de proporcionalidad*
	4. Problemas diversos				Observar situaciones comunes donde se den relaciones de proporcionalidad inversa y de proporcionalidad directa.	*La proporcionalidad en la vida cotidiana*
5. Sistemas de ecuaciones 2 × 2. Método gráfico	2. ¿Cuántos niños y cuántos adultos?	AE5	Ecuaciones	Resolver situaciones que requieran el planteamiento de un sistema de ecuaciones y utilizar el método gráfico para encontrar su solución.	Analizar situaciones que originan un sistema de ecuaciones y enfatizar la relación entre las ecuaciones que lo componen.	*¿Qué es un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas?*
	4. Resolvamos otro problema				Observar el uso del método gráfico para encontrar la solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas.	*Método gráfico*
6. Sucesiones y expresiones equivalentes 1	2. La tarea de matemáticas	AE7	Patrones, figuras geométricas y expresiones equivalentes	Encontrar expresiones algebraicas equivalentes utilizando como contexto matemático sucesiones numéricas y de figuras.	Observar las expresiones algebraicas equivalentes que surgen de sucesiones numéricas.	*Expresiones algebraicas equivalentes*
	3. Más sucesiones				Recordar cómo se realizan algunas operaciones algebraicas para obtener expresiones equivalentes.	*Operaciones algebraicas*

Recursos audiovisuales						
Secuencia didáctica	Nombre de la sesión	Clave	Tema	Finalidad	Función didáctica	Título
7. Figuras geométricas y equivalencia de expresiones 1	2. Expresiones equivalentes para perímetros y áreas	AE8	Patrones, figuras geométricas y expresiones equivalentes	Desarrollar habilidades para generalizar procedimientos utilizando el lenguaje algebraico para formular expresiones equivalentes con las que se pueda calcular el área y el perímetro de figuras geométricas básicas.	Analizar diferentes expresiones algebraicas equivalentes que representan el perímetro y el área de figuras geométricas.	*Figuras geométricas y expresiones equivalentes*
8. Polígonos 1	1. La red de polígonos	AE9	Figuras y cuerpos geométricos	Distinguir las diagonales de otras líneas que se pueden trazar en un polígono, además de hacer razonamientos inductivos para lograr calcular el número de diagonales en un polígono convexo o no convexo.	Recordar las características y algunas propiedades de los polígonos regulares y los irregulares.	*Polígonos*
	2. ¿Qué línea sí es diagonal?				Analizar el concepto de diagonal tanto en polígonos convexos como en polígonos no convexos y conocer la relación entre las diagonales de un polígono y el número de lados que lo forman.	*¿Qué es una diagonal?*
9. Conversión de medidas 1	2. Cimas y simas de México	AE10	Magnitudes y medidas	Identificar unidades para medir distancias y longitudes, así como el uso de unidades usuales del Sistema Internacional (SI) y del Sistema Inglés.	Conocer el sistema de medición inglés y la relación entre sus unidades con respecto a las del Sistema Internacional.	*La longitud en el Sistema Inglés*

Recursos audiovisuales						
Secuencia didáctica	Nombre de la sesión	Clave	Tema	Finalidad	Función didáctica	Título
10. Perímetro y área de polígonos regulares	2. Transformación de figuras	AE11	Magnitudes y medidas	Resolver problemas que implican calcular el perímetro y el área de polígonos regulares a partir de diferentes datos.	Estudiar distintas maneras de calcular el área de un polígono regular o irregular.	*El área de polígonos*
11. Volumen de prismas	1. Cajas de cartón	AE12	Magnitudes y medidas	Resolver problemas que implican calcular el volumen de prismas.	Aprender a relacionar cuerpos geométricos con los desarrollos planos que permiten construirlos.	*Moldes para cajas*
	3. ¿Será la misma fórmula?				Identificar y comprender la fórmula para calcular el volumen de prismas.	*Volumen de prismas*
12. Probabilidad clásica 1	1. Urnas	AE13	Estadística	Resolver problemas que implican determinar la probabilidad teórica de un evento.	Comprender la noción de probabilidad teórica.	*Los valores de la probabilidad*
	2. ¿Cuál conviene elegir?					*¿Qué es la probabilidad teórica?*

Bloque 2

Recursos audiovisuales						
Secuencia didáctica	**Sesión**	**Clave**	**Tema**	**Finalidad**	**Función didáctica**	**Título**
13. Multiplicación y división de números enteros	3. Por cada multiplicación, dos divisiones	AE2	Multiplicación y división	Resolver problemas que impliquen la multiplicación o la división de más de dos factores que son números enteros.	Analizar ejemplos que impliquen multiplicar más de dos números enteros.	*Multiplicación de más de dos números enteros*
14. Multiplicación y división de números con signo	3. ¿En qué orden se hacen?	AE2	Multiplicación y división	Profundizar en el significado de la multiplicación y la división de números con signo.	Analizar el signo del producto de multiplicar varios factores al realizar operaciones con números enteros, fracciones y números decimales positivos y negativos.	*Jerarquía de las operaciones*
15. Potencias con exponente entero 1	2. Leyes de los exponentes I	AE3	Multiplicación y división	Estudiar la potenciación y algunas leyes de los exponentes.	Estudiar las leyes de los exponentes.	*Potencias*
16. Raíz cuadrada de números cuadrados perfectos	3. La diagonal del cuadrado	AE3	Multiplicación y división	Estudiar los aspectos básicos de la raíz cuadrada.	Repasar los aspectos básicos de la raíz cuadrada.	*Raíz cuadrada de un número*
17. Reparto proporcional	2. Nueces, almendras y pistaches	AE4	Proporcionalidad	Resolver problemas de reparto proporcional.	Mostrar algunos valores faltantes en una relación de proporcionalidad, por ejemplo, contextos de reparto de inversión-utilidades, tiempo-ganancias.	*¿Cuánto le toca a cada quién?*
18. Figuras geométricas y equivalencia de expresiones 2	2. Un paso adelante	AE5	Ecuaciones	Verificar algebraicamente que dos expresiones son equivalentes mediante su evaluación numérica.	Mostrar cómo se aplican las propiedades de la igualdad para obtener expresiones algebraicas equivalentes.	*Expresiones algebraicamente equivalentes*
	3. Para ejercitar aún más					*Otras expresiones algebraicamente equivalentes*

Recursos audiovisuales						
Secuencia didáctica	Sesión	Clave	Tema	Finalidad	Función didáctica	Título
19. Sucesiones y expresiones equivalentes 2	2. Sucesiones de números decimales y fraccionarios	AE7	Patrones, figuras geométricas y expresiones equivalentes	Verificar la equivalencia algebraica de expresiones de primer grado que generan sucesiones de números enteros y números fraccionarios y decimales con signo.	Identificar algunas reglas de escritura y de cómo operar con las literales y expresiones algebraicas.	*Operaciones algebraicas*
20. Sistemas de ecuaciones. Métodos de igualación y de sustitución	1. Igualar ecuaciones	AE5	Ecuaciones	Ampliar los conocimientos para resolver sistemas de ecuaciones de dos incógnitas con el empleo de algunos métodos algebraicos.	Mostrar la manipulación algebraica para despejar una variable en una ecuación.	*Operaciones algebraicas 2*
	3. ¿Cuál es el método más conveniente?				Identificar las diferencias y similitudes entre los métodos de igualación y sustitución para resolver sistemas de ecuaciones.	*Métodos de igualación y sustitución para resolver sistemas de ecuaciones*
21. Relación funcional 1	2. Más variaciones sobre un mismo tema	AE6	Funciones	Estudiar situaciones que correspondan a variación lineal e inversamente proporcional a partir de su representación gráfica, tabular y algebraica.	Mostrar los diversos tipos de variación (proporcionalidad directa e inversa) y explicar las diferencias que existen entre ellas.	*Diversos tipos de variación*
22. Polígonos 2	2. Ángulos internos y externos de un polígono	AE9	Figuras y cuerpos geométricos	Estudiar algunas relaciones entre los ángulos de los polígonos.	Mostrar las características y propiedades de los ángulos internos y externos de un polígono.	*Ángulos internos y externos de un polígono*
	3. Ángulo central y relaciones entre los demás				Presentar los ángulos centrales de un polígono regular y los elementos que lo forman y cómo calcular su medida.	*Ángulos centrales de un polígono regular*

Recursos audiovisuales						
Secuencia didáctica	**Sesión**	**Clave**	**Tema**	**Finalidad**	**Función didáctica**	**Título**
23. Conversión de medidas 2	2. Cuidados maternos	AE10	Magnitudes y medidas	Trabajar con equivalencias entre unidades de peso del Sistema Internacional y del Sistema Inglés.	Mostrar cómo surgen las unidades de masa (peso) en el Sistema Inglés.	*Unidades de masa (peso) en el Sistema Inglés*
	3. Alimentación y material de construcción			Trabajar con equivalencias entre unidades de capacidad del sistema Internacional y del Sistema Inglés.	Mostrar cómo surgen las unidades de capacidad en el Sistema Inglés.	*El volumen de los líquidos en el Sistema Inglés*
24. Área del círculo	3. Las partes coloreadas	AE11	Magnitudes y medidas	Calcular el área del círculo a partir de diferentes datos.	Indicar los procedimientos para calcular el área del círculo que permiten resolver problemas cotidianos.	*El área del círculo*
25. Medidas de tendencia central y de dispersión 1	2. Comparando conjuntos	AE13	Estadística	Estudiar las medidas de tendencia central y dispersión; en particular, aprender qué es la desviación media y cómo se obtiene.	Indicar los procedimientos para obtener la desviación media de un conjunto de datos.	*Cómo obtener la desviación media de un conjunto de datos*

Recursos audiovisuales						
Secuencia didáctica	Sesión	Clave	Tema	Finalidad	Función didáctica	Título
26. Histogramas y polígonos de frecuencia	3. Elaboración de más histogramas	AE14	Estadística	Conocer y utilizar dos tipos de gráficas estadísticas que permiten organizar y presentar datos agrupados en clases o intervalos.	Mostrar que el histograma es un tipo de gráfica estadística que permite organizar y presentar datos agrupados en clases o intervalos, y destacar la información que se requiere para su construcción.	*Histograma*
	4. Gráficas poligonales de frecuencias				Mostrar que el polígono de frecuencia es un tipo de gráfica estadística que permite organizar y presentar datos agrupados en clases o intervalos, y destacar la información que se requiere para su construcción.	*Polígonos de frecuencia*

Bloque 3

Recursos audiovisuales						
Secuencia didáctica	Sesión	Clave	Tema	Finalidad	Función didáctica	Título
27. Potencias con exponente entero 2	2. Crecimiento exponencial	AE3	Multiplicación y división	Resolver problemas en los que una o varias cantidades crecen exponencialmente.	Comprender la regla para obtener el cociente de dos potencias cuando la base y los exponentes son números enteros positivos.	*Crecimiento exponencial*
28. Raíz cuadrada de números positivos	2. La medida del radio	AE3	Multiplicación y división	Profundizar los conocimientos sobre la raíz cuadrada, tanto para efectuar la operación como para usarla al resolver problemas.	Estimar el valor de la parte entera al calcular la raíz cuadrada.	*La raíz cuadrada*
29. Sistemas de ecuaciones 2 × 2. Método de suma y resta	3. Más problemas con sistemas de ecuaciones	AE5	Ecuaciones	Resolver problemas que implican sistemas de ecuaciones lineales mediante el método de suma y resta.	Resolver problemas que impliquen un sistema de ecuaciones con dos incógnitas por el método de suma y resta.	*Método de suma y resta, otra opción para resolver sistemas de ecuaciones*
30. Relación funcional 2	1. A mayor velocidad, menor tiempo	AE6	Funciones	Estudiar diferentes tipos de variación a partir de sus tablas, gráficas y expresiones algebraicas.	Explicar a través de la resolución de problemas lo que implican situaciones de variación lineal.	*Tablas, expresiones algebraicas y gráficas*
31. Polígonos 3	1. Construcción de polígonos	AE9	Figuras y cuerpos geométricos	Aplicar las construcciones geométricas para trazar polígonos regulares.	Analizar algunas relaciones entre los ángulos de los polígonos para construir polígonos regulares y realizar algunas aplicaciones, como el recubrimiento de un plano.	*Construcciones de polígonos regulares*

Recursos audiovisuales						
Secuencia didáctica	**Sesión**	**Clave**	**Tema**	**Finalidad**	**Función didáctica**	**Título**
32. Conversión de medidas 3	2. Un deporte rudo	AE10	Magnitudes y medidas	Conocer, calcular y resolver problemas que implican conversiones en múltiplos y submúltiplos del metro, del kilogramo y del litro, así como de sus equivalentes en el Sistema Inglés.	Explicar lo que implican las conversiones entre el sistema decimal y unidades del Sistema Inglés (yarda, pulgada, galón, onza y libra).	*Más sobre las unidades de medidas*
33. Volumen de cilindros rectos	2. ¿Cuál es la fórmula?	AE12	Magnitudes y medidas	Resolver problemas que implican el volumen de cilindros rectos.	Utilizar la relación entre decímetros cúbicos y litros en el contexto de cisternas.	*Volumen de cilindros*
34. Gráficas de línea	2. El precio del dólar a través del tiempo	AE13	Estadística	Trabajar con gráficas de línea y polígonos de frecuencia.	Recolectar, registrar y leer datos en gráficas de línea.	*Gráficas de línea*
35. Medidas de tendencia central y de dispersión 2	3. Litros de a litro	AE14	Estadística	Trabajar con las medidas de tendencia central y de dispersión, como la desviación media, en contextos de distribución de cantidades de productos y resultados deportivos.	Decidir las medidas de tendencia central y de dispersión que conviene utilizar para el análisis de los datos.	*Aplicación de la estadística*
36. Probabilidad clásica 2	2. Complementos	AE15	Probabilidad	Trabajar con diferentes situaciones aleatorias para calcular la probabilidad frecuencial y clásica de algunos eventos y aprender qué es un evento complementario y cómo se calcula su probabilidad.	Determinar la probabilidad clásica de los eventos de una situación de azar.	*Evento complementario*

Recursos informáticos

Bloque 1

Recursos informáticos						
Secuencia didáctica	Nombre de la sesión	Clave	Tema	Finalidad	Función didáctica	Título
2. Multiplicación y división de fracciones positivas	5. Rompecabezas	AE1	Multiplicación y división	Desarrollar habilidades para multiplicar y dividir números fraccionarios y usar dichas operaciones al resolver problemas.	Practicar multiplicaciones y divisiones de fracciones.	*Multiplicar por el recíproco*
3. Multiplicación de números enteros	2. Más sobre la multiplicación	AE1	Multiplicación y división	Desarrollar habilidades para multiplicar números enteros y usar dicha operación al resolver problemas.	Analizar las regularidades en las multiplicaciones de números con signo.	*Multiplicación y división de números con signo*
4. Proporcionalidad directa e inversa	2. De viaje	AE4	Proporcionalidad	Distinguir las relaciones que son de proporcionalidad directa de las que son de proporcionalidad inversa y de las que no son de proporcionalidad.	Completar tablas de valores faltantes en relaciones de proporcionalidad inversa y proporcionalidad directa.	*Para completar tablas*
	4. Problemas diversos				Practicar la resolución de problemas de proporcionalidad directa y de proporcionalidad inversa.	*Problemas de proporcionalidad directa e inversa*

Recursos informáticos						
Secuencia didáctica	Sesión	Clave	Tema	Finalidad	Función didáctica	Título
5. Sistemas de ecuaciones 2 × 2. Método gráfico	4. Resolvamos otro problema	AE5	Ecuaciones	Resolver situaciones que requieren el planteamiento de un sistema de ecuaciones y utilizar el método gráfico para encontrar su solución.	Resolver sistemas de ecuaciones a través del método gráfico.	*Solución de un sistema de ecuaciones como intersección de rectas*
7. Figuras geométricas y equivalencia de expresiones 1	3. Problemas diversos	AE8	Patrones, figuras geométricas y expresiones equivalentes	Desarrollar habilidades para generalizar procedimientos utilizando el lenguaje algebraico para formular expresiones equivalentes con las que puedan calcular el área y el perímetro de figuras geométricas básicas.	Resolver problemas que implican obtener expresiones algebraicas equivalentes.	*Expresiones equivalentes 1*
8. Polígonos 1	4. Triangulación de polígonos convexos	AE9	Figuras y cuerpos geométricos	Distinguir las diagonales de otras líneas que pueden trazarse en un polígono, además de hacer razonamientos inductivos para lograr calcular el número de diagonales en un polígono convexo o no convexo.	Usar el concepto de diagonal para realizar triangulaciones que permitan resolver problemas de medidas de ángulos en polígonos regulares.	*Diagonales y triangulación*
9. Conversión de medidas 1	3. Unidades grandes y pequeñas	AE10	Magnitudes y medidas	Identificar unidades para medir distancias y longitudes, así como el uso de unidades usuales del Sistema Internacional (SI) y del Sistema Inglés.	Practicar la conversión de medidas de longitud.	*Conversión de medidas de longitud*

Recursos informáticos						
Secuencia didáctica	Sesión	Clave	Tema	Finalidad	Función didáctica	Título
10. Perímetro y área de polígonos regulares	3. Hacia la fórmula	AE11	Magnitudes y medidas	Resolver problemas que implican calcular el perímetro y el área de polígonos regulares a partir de diferentes datos.	Aplicar la fórmula para calcular el área de polígonos regulares.	*Área de polígonos regulares*
11. Volumen de prismas	4. Resolvamos problemas	AE12	Magnitudes y medidas	Resolver problemas que implican calcular el volumen de prismas.	Practicar el cálculo del volumen de prismas.	*Prismas y volúmenes*
12. Probabilidad clásica 1	3. Dado legal, dado cargado	AE13	Estadística	Resolver problemas que implican determinar la probabilidad teórica de un evento.	Determinar la probabilidad clásica de eventos de otros experimentos aleatorios.	*Probabilidad teórica*

Bloque 2

Recursos informáticos						
Secuencia didáctica	Sesión	Clave	Tema	Finalidad	Función didáctica	Título
14. Multiplicación y división de números con signo	4. Tarjetas con números	AE2	Multiplicación y división	Resolver problemas que impliquen multiplicar y dividir números enteros, fraccionarios y decimales positivos y negativos.	Ejercitar y resolver problemas que impliquen multiplicar y dividir números enteros, fraccionarios y decimales positivos y negativos.	*Multiplicación y división de números con signo*
15. Potencias con exponente entero 1	4. La notación científica	AE3	Multiplicación y división	Resolver problemas que impliquen potenciación y otras operaciones que se pueden realizar con potencias.	Practicar las operaciones con potencias.	*Potencias*
17. Reparto proporcional	3. Ser justos al repartir	AE4	Proporcionalidad	Resolver problemas de reparto proporcional.	Practicar la resolución de problemas con repartos proporcionales.	*Repartos proporcionales*
18. Figuras geométricas y equivalencia de expresiones 2	3. Para ejercitar aún más	AE5	Ecuaciones	Verificar algebraicamente que dos expresiones son equivalentes mediante su evaluación numérica.	Practicar la manipulación de expresiones algebraicas.	*Expresiones equivalentes 2*
19. Sucesiones y expresiones equivalentes 2	3. Más expresiones algebraicas	AE7	Patrones, figuras geométricas y expresiones equivalentes	Verificar la equivalencia algebraica de expresiones de primer grado que generan sucesiones de números enteros y números fraccionarios y decimales con signo.	Practicar la manipulación algebraica con expresiones obtenidas de sucesiones numéricas.	*Sucesiones de números*

Recursos informáticos						
Secuencia didáctica	Sesión	Clave	Tema	Finalidad	Función didáctica	Título
20. Sistemas de ecuaciones. Métodos de igualación y de sustitución	3. ¿Cuál es el método más conveniente?	AE5	Ecuaciones	Ampliar los conocimientos para resolver sistemas de ecuaciones de dos incógnitas con el empleo de algunos métodos algebraicos.	Practicar los métodos de igualación y sustitución para resolver sistemas de ecuaciones.	*Métodos de resolución de sistemas de ecuaciones 1*
21. Relación funcional 1	3. Otras situaciones semejantes	AE6	Funciones	Estudiar situaciones que correspondan a variación lineal e inversamente proporcional a partir de su representación gráfica, tabular y algebraica.	Identificar los tipos de variación, lineal, directa e inversa.	*Problemas de distintos tipos de variación*
24. Área del círculo	2. ¿Y cuál es la fórmula?	AE11	Magnitudes y medidas	Calcular el área del círculo a partir de diferentes datos.	Practicar los procedimientos para calcular el área del círculo que permiten resolver problemas.	*Cálculo del área del círculo según Arquímedes*
26. Histogramas y polígonos de frecuencia	5. Interpretación de gráficas estadísticas	AE14	Estadística	Conocer y utilizar dos tipos de gráficas estadísticas que permiten organizar y presentar datos agrupados en clases o intervalos.	Practicar y analizar distintas situaciones en las que es posible organizar y presentar los datos mediante polígonos de frecuencia.	*Polígonos de frecuencia*

BLOQUE 3

Recursos informáticos						
Secuencia didáctica	Sesión	Clave	Tema	Finalidad	Función didáctica	Título
27. Potencias con exponente entero 2	4. ¿Cuántos ceros después del uno?	AE3	Multiplicación y división	Resolver problemas en los que una o varias cantidades crecen exponencialmente.	Comprender la regla para obtener el cociente de dos potencias cuando la base y los exponentes son números enteros positivos.	*Crecimiento exponencial*
29. Sistemas de ecuaciones 2 × 2. Método de suma y resta	3. Más problemas con sistemas de ecuaciones	AE5	Ecuaciones	Resolver problemas que implican sistemas de ecuaciones lineales mediante el método de suma y resta.	Resolver problemas que impliquen un sistema de ecuaciones con dos incógnitas, por el método de suma y resta.	*Métodos de resolución de sistemas de ecuaciones 2*
30. Relación funcional 2	3. Diversos tipos de variación	AE6	Funciones	Estudiar diferentes tipos de variación a partir de sus tablas, gráficas y expresiones algebraicas.	Ejercitar, a través de la resolución de problemas, situaciones de variación lineal.	*Leyendo gráficas*
31. Polígonos 3	4. Mosaico de polígonos	AE9	Figuras y cuerpos geométricos	Aplicar las construcciones geométricas para trazar polígonos regulares.	Deducir y usar algunas relaciones entre los ángulos de los polígonos para construir polígonos regulares y realizar algunas aplicaciones, como el recubrimiento de un plano.	*Teselados*
32. Conversión de medidas 3	3. Cuestión de vida	AE10	Magnitudes y medidas	Conocer, calcular y resolver problemas que implican conversiones en múltiplos y submúltiplos del metro, del kilogramo y del litro, así como de sus equivalentes en el Sistema Inglés.	Practicar y resolver problemas que implican conversiones entre el sistema decimal y unidades del Sistema Inglés (yarda, pulgada, galón, onza y libra).	*Conversión de unidades de medida*

Recursos informáticos						
Secuencia didáctica	Sesión	Clave	Tema	Finalidad	Función didáctica	Título
33. Volumen de cilindros rectos	3. Resolvamos problemas	AE12	Magnitudes y medidas	Resolver problemas que implican el volumen de cilindros rectos.	Utilizar la relación entre decímetros cúbicos y litros en el contexto de cisternas.	*Cilindros y volúmenes*
34. Gráficas de línea	4. Gráficas en mi comunidad	AE13	Estadística	Trabajar con gráficas de línea y polígonos de frecuencia.	Recolectar, registrar y leer datos en gráficas de línea.	*Gráficas de línea*
35. Medidas de tendencia central y de dispersión 2	2. Otras estadísticas deportivas	AE14	Estadística	Trabajar con las medidas de tendencia central y de dispersión, como la desviación media, en contextos de distribución de cantidades de productos y resultados deportivos.	Decidir las medidas de tendencia central y de dispersión que conviene utilizar para el análisis de los datos.	*Estadística*
36. Probabilidad clásica 2	3. Control de calidad	AE15	Probabilidad	Trabajar con diferentes situaciones aleatorias para calcular la probabilidad frecuencial y clásica de algunos eventos y aprender qué es un evento complementario y cómo se calcula su probabilidad.	Determinar la probabilidad clásica de los eventos de una situación de azar.	*Probabilidad clásica vs. probabilidad frecuencial*

Bibliografía

Block Sevilla, David *et al.* (2010). *¿Al doble le toca el doble? La enseñanza de la proporcionalidad en la educación básica*, México, Ediciones SM (Somos maestr@s).

Centeno Pérez, Julia (1997). *Números decimales. ¿Por qué? ¿Para qué?*, Madrid, Síntesis.

Díaz Godino, Juan *et al.* (1996). *Azar y probabilidad*, Madrid, Síntesis.

Itzcovich, Horacio (2005). *Iniciación al estudio didáctico de la geometría. De las construcciones a las demostraciones*, Buenos Aires, Libros del Zorzal.

Secretaría de Educación Pública (1999). *Libro para el maestro. Matemáticas. Educación secundaria*, México, SEP.

__________ (2018). *Matemáticas. Primer grado. Libro para el maestro. Telesecundaria*, México, SEP.

Sessa, Carmen (2008). *Iniciación al estudio didáctico del álgebra. Orígenes y perspectivas*, México, SEP / Libros del Zorzal.

Ursini, Sonia *et al.* (2005). *Enseñanza del álgebra elemental. Una propuesta alternativa*, México, Trillas.

Referencias electrónicas

Espinosa Pérez, Hugo *et al.* (2000). *Fichero de actividades didácticas. Matemáticas. Educación secundaria*, 2ª ed., 2ª reimp., México, SEP. Disponible en https://www.uv.mx/personal/grihernandez/files/2011/04/ficheroactividades.pdf (Consultado el 12 de julio de 2019).

Gallardo, Aurora y Abraham Hernández (s. f.). "Emergencia de los números enteros". Disponible en http://www.matedu.cinvestav.mx/~maestriaedu/docs/asig5/Agallardo.pdf (Consultado el 12 de julio de 2019).

García Peña, Silvia y Olga Leticia López Escudero (2008). *La enseñanza de la Geometría*, México, Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (Materiales para apoyar la práctica educativa). Disponible en https://local.inee.edu.mx/images/stories/2014/Publicaciones_CONPEE/pdf/geometriacompleto.pdf (Consultado el 12 de julio de 2019).

Grimaldi, Verónica *et al.* (2017). *Ecuaciones. Aportes para el debate acerca de su enseñanza*, Buenos Aires, Santillana (Cuadernos de apoyo didáctico. Secundaria básica y últimos años de la primaria). Disponible en https://wcarpre.s3.amazonaws.com/2_Ecuaciones.pdf (Consultado el 12 de julio de 2019).

Iriarte Bustos, M. Dolores *et al.* (1991). "Obstáculos en el aprendizaje de los números enteros", en *Suma*, núm. 7, pp. 13-18. Disponible en https://revistasuma.es/IMG/pdf/7/013-018.pdf (Consultado el 12 de julio de 2019).

Pérez Carrizales, César O. (s. f.). "Sucesiones numéricas", en *Asesoría secundaria 1.* Disponible en http://recursos.salonesvirtuales.com/wp-content/uploads/bloques/2012/06/Susesionesnumericas.pdf

Sáiz Roldán, Mariana (s. f.). "El volumen. ¿Por dónde empezar?". Disponible en http://www.matedu.cinvestav.mx/~maestriaedu /docs/asig4/ConfMagist.pdf (Consultado el 10 de julio de 2019).

Secretaría de Educación Pública (2017). *Matemáticas. Secundaria. 2°.* Disponible en https://www.aprendizajesclave.sep.gob.mx/sec-ae-pensamiento-mate2.html (Consultado el 11 de julio de 2019).

Créditos iconográficos

Ilustración
Roberto Ángel Flores Angulo: **pp.** 11, 48, 53, 57, 93 y 108.
David Núñez Bahena: **p.** 139.

Fotografía
p. 8: fotografía de Ana Laura Delgado Rannauro/Archivo iconográfico DGME-SEB-SEP; **p. 10:** kiosco de Chignahuapan, Puebla, © fernando blancas santos/Shutterestock.com; **p. 11, 17 y 25:** fotografías de Martín Córdova Salinas/Archivo iconográfico DGME-SEB-SEP; **p. 26:** *Collage*: fotografías de Martín Córdova Salinas y Ana Laura Delgado Rannauro/Archivo iconográfico DGME-SEB-SEP; **p. 28:** adornos geométricos estilo boho, © amirage/Fotosearch LBRF/Photo Stock; **p. 29:** (de izq. a der.) murciélago abejorro o nariz de cerdo de Kitti, Curiosoando.com, bajo licencia CC BY-SA 4.0; *Sphaerodactylus macrolepis*, también conocido como gecko, Sara Lovotti, bajo licencia CC BY 4.0; colibrí abeja, Pixabay 2366009; **p. 30:** fotografía de Ana Laura Delgado Rannauro/Archivo iconográfico DGME-SEB-SEP; **p. 31:** fotografías de Martín Córdova Salinas/Archivo iconográfico DGME-SEB-SEP; **p. 47:** ruta de Tlaxcala a Salamanca, Guanajuato, Google Maps; **p. 62:** (arr.) Pico de Orizaba, Pixabay 4049768; (de izq. a der. de arr. a ab.) guepardo, Sudáfrica, © jspix/imageBROKER/imageBROKER/Photo Stock; halcón peregrino, fotografía de Juan Lacruz, bajo licencia CC BY-SA 3.0; avestruz, fotografía de copper, bajo licencia CC BY-NC 4.0; pez espada, Freepng.es; liebre, fotografía de Donna Pomeroy, bajo licencia CC BY-NC 4.0; tiburón azul, fotografía de Mark Conlin/NMFS, bajo licencia CC0; purasangre, Pexels 1996333; Usain Bolt, fotografía de Fernando Frazão/Agencia Brasil, bajo licencia BR CC BY 3.0; **p. 63:** (centro de izq. a der.) ranita monte Iberia, fotografía de jpgalvan, bajo licencia CC BY-NC 4.0; camaleón Brookesia Mínima de Madagascar, fotografía de Frank Glaw, Jörn Köhler, Ted M. Townsend, Miguel Vences, bajo licencia CC BY 4.0; murciélago abejorro o nariz de cerdo de Kitti, Curiosoando.com, bajo licencia CC BY-SA 4.0; (ab. de izq. a der.) imagen del centro de vuelo espacial Goddard de la NASA por Reto Stöckli/MODIS; planeta Marte, NASA/JPL-Caltech/Universidad de Arizona; planeta Saturno, NASA/JPL-Caltech/Space Science Institute; **p.153:** fotografía de Martín Córdova Salinas/Archivo iconográfico DGME-SEB-SEP.

Matemáticas. Segundo grado.
Telesecundaria. Libro para el maestro
se imprimió por encargo
de la Comisión Nacional de
Libros de Texto Gratuitos, en los
talleres de , con domicilio en
en el mes de de 201 .
El tiraje fue de ejemplares.