Matemáticas

Tercer grado.

TELEsecundaria

Matemáticas

Tercer grado

EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

TELEsecundaria

Matemáticas. Tercer grado. Telesecundaria fue elaborado y editado por la Dirección General de Materiales Educativos de la Secretaría de Educación Pública.

Secretaría de Educación Pública
Esteban Moctezuma Barragán

Subsecretaría de Educación Básica
Marcos Augusto Bucio Mújica

Dirección General de Materiales Educativos
Aurora Almudena Saavedra Solá

Coordinación de contenidos
María del Carmen Larios Lozano

Coordinación de autores
Olga Leticia López Escudero

Autores
Hugo Hipólito Balbuena Corro, Emilio Domínguez Bravo, Fortino Escareño Soberanes, Silvia García Peña, Olga Leticia López Escudero

Supervisión de contenidos
José Alfredo Rutz Machorro, Jessica Evelyn Caballero Valenzuela, Juanita Espinoza Estrada, Esperanza Issa González, Ana Paola Hernández González, Arturo López González, Gustavo Sánchez Arellano

Revisión técnico-pedagógica
Olimpia Figueras Mourut de Montppellier

Coordinación editorial
Raúl Godínez Cortés

Supervisión editorial
Jessica Mariana Ortega Rodríguez

Editora responsable
María Guadalupe Ambriz Rivera

Corrección de estilo
Fannie Emery Othón

Producción editorial
Martín Aguilar Gallegos

Preprensa
Citlali María del Socorro Rodríguez Merino

Iconografía
Diana Mayén Pérez, Irene León Coxtinica, María del Mar Molina Aja, Magdalena Andrade Briseño, María Gabriela Bautista Rodríguez, Fabiola Buenrostro Nava

Portada
Diseño: Martín Aguilar Gallegos
Iconografía: Irene León Coxtinica
Imagen: *El tianguis* (detalle), 1923-1924, Diego Rivera (1886-1957), fresco, 4.60 × 2.37 m (panel central), ubicado en el Patio las Fiestas, planta baja, D. R. © Secretaría de Educación Pública, Dirección General de Proyectos Editoriales y Culturales/ fotografía de Gerardo Landa Rojano; D.R. © 2021 Banco de México, Fiduciario en el Fideicomiso relativo a los Museos Diego Rivera y Frida Kahlo. Av. 5 de Mayo No. 2, col. Centro, Cuauhtémoc, C. P. 06059, Ciudad de México; reproducción autorizada por el Instituto Nacional de Bellas Artes y Literatura, 2021.

Servicios editoriales
Solar, Servicios Editoriales, S. A. de C. V.

Coordinación editorial
Xiluén Yanitze Zenker de la Concha, Elizabeth González González

Formación
Rosa Virginia Cruz Cruz, Roberto Ángel Flores Angulo, Xiluén Yanitze Zenker de la Concha

Diseño
Roberto Ángel Flores Angulo

Ilustración
María Itzel Alcántara Jurado, Roberto Ángel Flores Angulo, Carolina Tovar González

Primera edición, 2021 (ciclo escolar 2021-2022)

ISBN: 978-607-551-513-7

Impreso en México
Distribución gratuita-Prohibida su venta

Agradecimientos
La Secretaría de Educación Pública (SEP) agradece a la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO) por su participación en la elaboración de este libro.

En los materiales dirigidos a las alumnas y los alumnos de Telesecundaria, la SEP emplea los términos: alumno(s), maestro(s) y padres de familia aludiendo a ambos géneros, con la finalidad de facilitar la lectura. Sin embargo, este criterio editorial no demerita los compromisos que la SEP asume en cada una de las acciones encaminadas a consolidar la equidad de género.

Presentación

Este libro fue elaborado para cumplir con el anhelo compartido de que en el país se ofrezca una educación con equidad y excelencia, en la que todos los alumnos aprendan, sin importar su origen, su condición personal, económica o social, y en la que se promueva una formación centrada en la dignidad humana, la solidaridad, el amor a la patria, el respeto y cuidado de la salud, así como la preservación del medio ambiente.

El uso de este libro, articulado con los recursos audiovisuales e informáticos del portal de Telesecundaria, propicia la adquisición autónoma de conocimientos relevantes y el desarrollo de habilidades y actitudes encaminadas hacia el aprendizaje permanente. Su estructura obedece a las necesidades propias de los alumnos de la modalidad de Telesecundaria y a los contextos en que se desenvuelven. Además, moviliza los aprendizajes con el apoyo de materiales didácticos presentados en diversos soportes y con fines didácticos diferenciados; promueve la interdisciplinariedad y establece nuevos modos de interacción.

En su elaboración han participado alumnos, maestras y maestros, autoridades escolares, padres de familia, investigadores y académicos; su participación hizo posible que este libro llegue a las manos de todos los estudiantes de esta modalidad en el país. Con las opiniones y propuestas de mejora que surjan del uso de esta obra en el aula se enriquecerán sus contenidos, por lo mismo los invitamos a compartir sus observaciones y sugerencias a la Dirección General de Materiales Educativos de la Secretaría de Educación Pública al correo electrónico: librosdetexto@nube.sep.gob.mx.

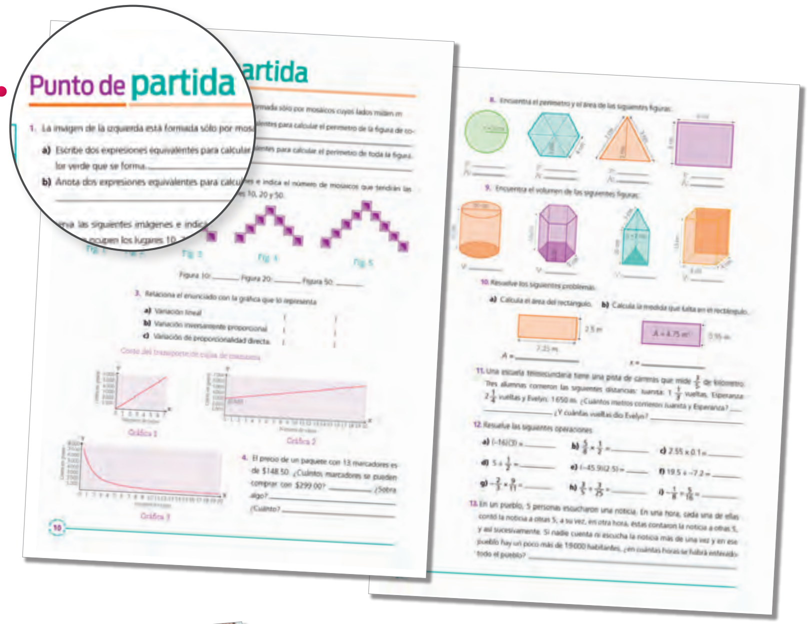
Índice

Conoce tu libro

El libro que tienes en tus manos fue elaborado especialmente para ti.

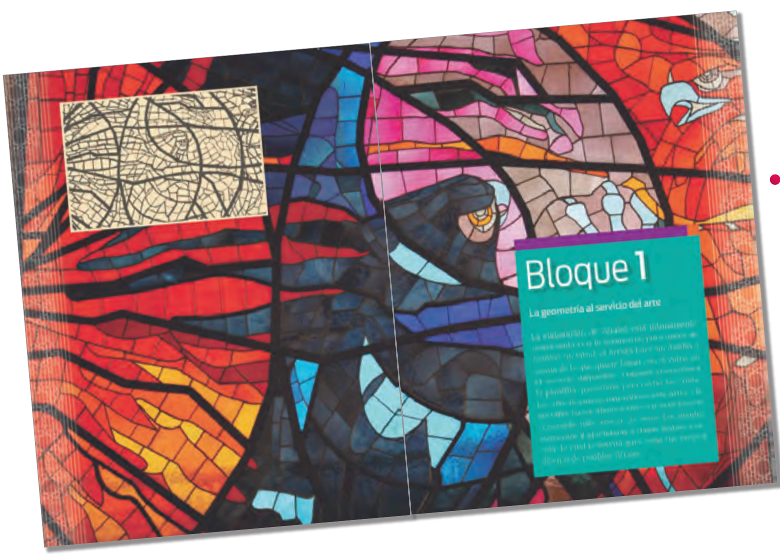
Junto con tus compañeros y el apoyo de tu maestro irás construyendo un saber matemático que se convertirá en una poderosa herramienta para que puedas resolver una diversidad de problemas cotidianos.

Tu libro está organizado de la siguiente manera:



Punto de partida

Es una oportunidad para que identifiques los conocimientos matemáticos con que cuentas y que te van a ser de utilidad para empezar este ciclo.



Entrada de bloque

Al inicio de cada bloque se presenta una ilustración o fotografía, acompañada de un texto, que aluden a la importancia de los conocimientos matemáticos que estudiarás en diversos ámbitos de la vida.

Para empezar

Te proporciona un acercamiento a los conocimientos que aprenderás, mediante situaciones matemáticas o cotidianas.

Manos a la obra

Te ofrece una serie de actividades que te permitirán trabajar y adquirir los aprendizajes esperados.

Para terminar

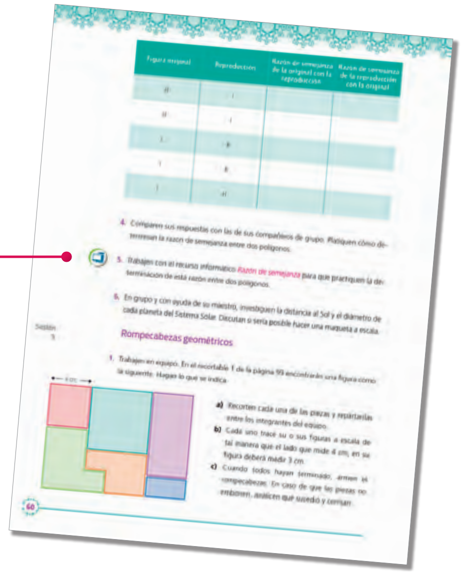
Contiene actividades para reflexionar, revisar, recuperar y hacer conclusiones sobre los temas estudiados.

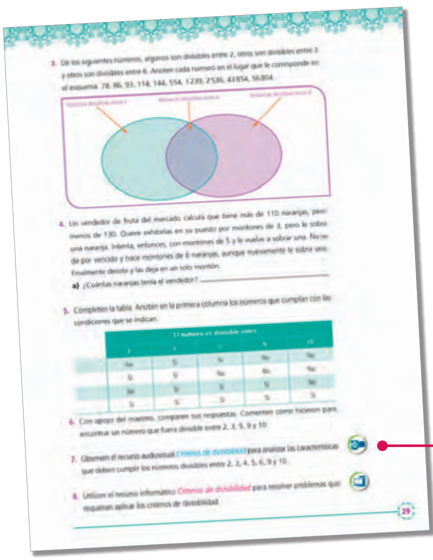
Evaluación

Al final de cada bloque se presentan actividades de evaluación que te ayudarán a valorar el logro de tus aprendizajes.

Recursos informáticos

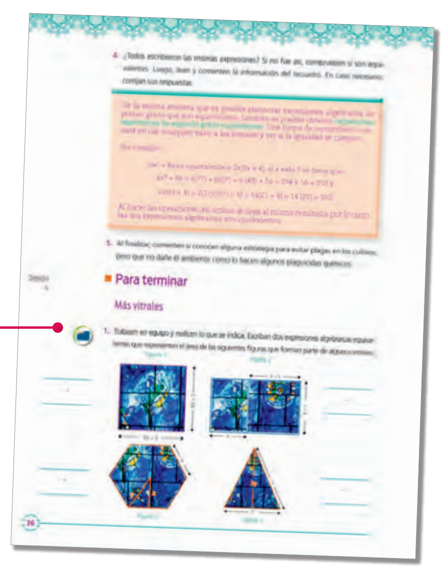
Con esta herramienta tendrás oportunidad de practicar los procedimientos y aplicar los conceptos que aprendiste, a través de un ambiente digital interactivo.





Recursos audiovisuales

Te permiten profundizar, complementar e integrar lo que estás estudiando. Para verlos sólo tienes que conectarte a tu portal de Telesecundaria.



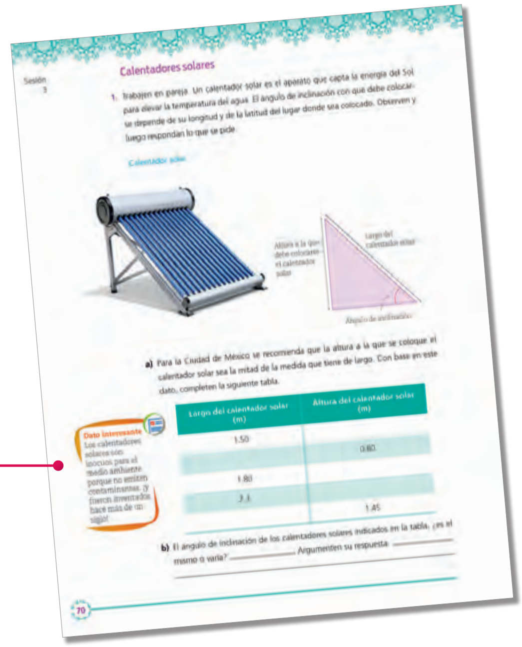
Carpeta

A lo largo del libro hay determinados ejercicios que se señalan con este ícono, a fin de que tengas un registro de tu avance en el dominio y conocimiento de los temas de la asignatura.

Secciones de apoyo

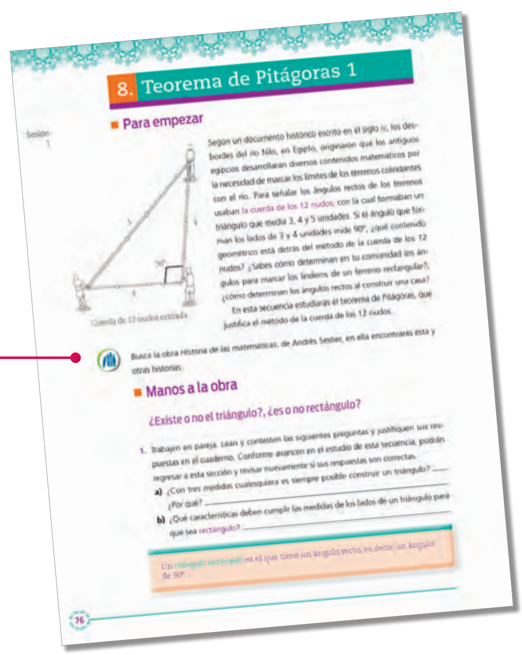
Se trata de textos breves que te ofrecen información que enriquece el contenido del libro o que te ayudarán a comprenderlo mejor:

Vínculo con...



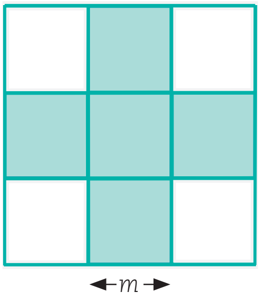
Dato interesante

Glosario



Visita la biblioteca

Punto de partida



1. La imagen de la izquierda está formada sólo por mosaicos cuyos lados miden m.
   - **a)** Escribe dos expresiones equivalentes para calcular el perímetro de la figura de color verde que se forma. ______________________________
   - **b)** Anota dos expresiones equivalentes para calcular el perímetro de toda la figura. ______________________________

2. Observa las siguientes imágenes e indica el número de mosaicos que tendrán las figuras que ocupen los lugares 10, 20 y 50.

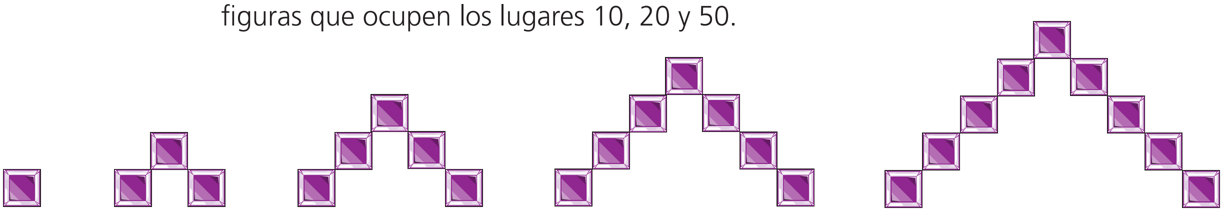
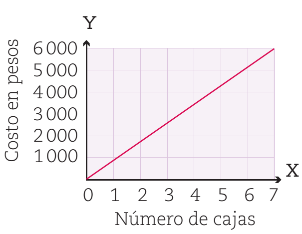


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3 Fig. 4 Fig. 5

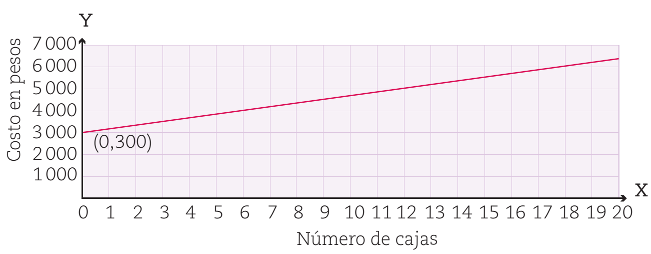
Figura 10: ________ Figura 20: ________ Figura 50: ________

3. Relaciona el enunciado con la gráfica que lo representa.
   - **a)** Variación lineal ( )
   - **b)** Variación inversamente proporcional ( )
   - **c)** Variación de proporcionalidad directa ( )

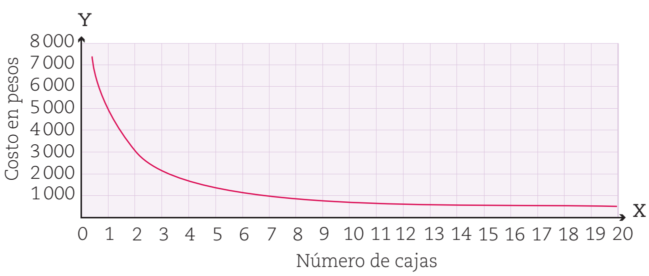
Costo del transporte de cajas de manzana



Gráfica 1



Gráfica 2

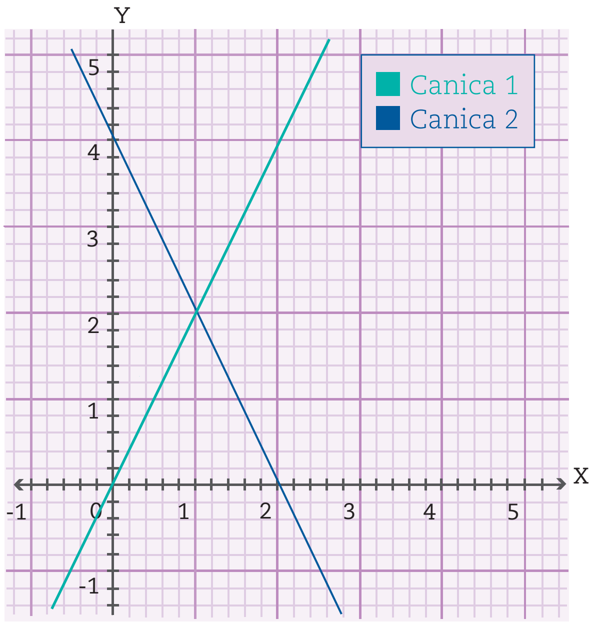


Gráfica 3

4. El precio de un paquete con 13 marcadores es de \$148.50. ¿Cuántos marcadores se pueden comprar con \$299.00? ____________ ¿Sobra algo? ______________________ ¿Cuánto? ______________________

5. En un grupo de telesecundaria hay 15 alumnos en total: 10 son mujeres y los demás son hombres. Si seleccionan uno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea un hombre? ____________ ¿Y de que sea una mujer?

____



6. El movimiento de dos canicas sobre un plano cartesiano se describe por las dos rectas de la derecha, cuyas ecuaciones son $y - 2x = 0$ y $2y + 4x = 8$, respectivamente.

¿En qué punto del plano cartesiano se van a cruzar ambas canicas? ____________________

7. Se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{Bmatrix} 2x + 3y = 10 \\ -6x + y = 20 \end{Bmatrix}$$

Encierra en un círculo la respuesta correcta.

a) Si se resuelve por el método de igualación, ¿cuál es la igualdad que resulta si se despeja la variable y de ambas ecuaciones?

- $10 + 2x = 60 + 18x$
- $10 - 2x = 60 - 18x$
- $10 - 2x = 60 + 18x$
- $10 + 2x = 60 - 18x$

b) Si se resuelve por el método de sustitución, ¿cuál es la expresión que resulta si se despeja la variable y de la segunda ecuación y se sustituye en la primera?

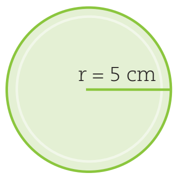
- $-20x = 10 - 60$
- $20x = 10 - 60$
- $-20x = 10 + 60$
- $20x = 10 + 60$

c) Si se resuelve por el método de suma y resta, ¿cuál es la igualdad que resulta si se elimina la variable x de ambas ecuaciones?

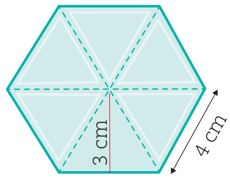
- $10y = 50$
- $10y = -50$
- $-10y = 50$
- $-10y = -50$

d) ¿Cuál es la solución del sistema de ecuaciones? $x =$ __________ $y =$ __________

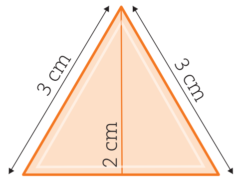
8. Encuentra el perímetro y el área de las siguientes figuras:



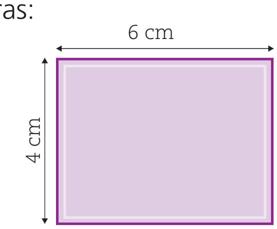
P: ____________
A: ____________



P: ____________
A: ____________

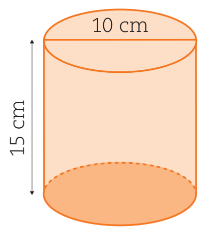


P: ____________
A: ____________

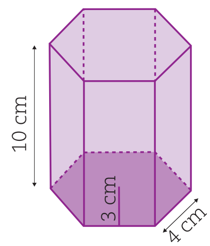


P: ____________
A: ____________

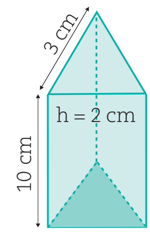
9. Encuentra el volumen de las siguientes figuras:



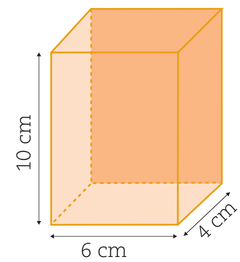
V: ____________



V: ____________



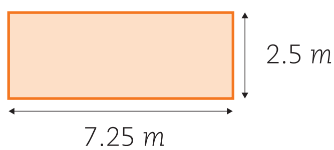
V: ____________



V: ____________

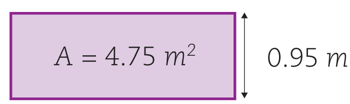
10. Resuelve los siguientes problemas.

a) Calcula el área del rectángulo.



$A =$ ____________________

b) Calcula la medida que falta en el rectángulo.



$x =$ ____________________

11. Una escuela telesecundaria tiene una pista de carreras que mide $\frac{3}{5}$ de kilómetro. Tres alumnas corrieron las siguientes distancias: Juanita: $1\frac{1}{3}$ vueltas, Esperanza: $2\frac{1}{4}$ vueltas y Evelyn: 1 650 m. ¿Cuántos metros corrieron Juanita y Esperanza? ____________________ ¿Y cuántas vueltas dio Evelyn? ____________________

12. Resuelve las siguientes operaciones.

a) $(-16)(3) =$ ________ **b)** $\frac{5}{8} \times \frac{1}{2} =$ ________ **c)** $2.55 \times 0.1 =$ ________

d) $5 \div \frac{1}{2} =$ ________ **e)** $(-45.9)(2.5) =$ ________ **f)** $19.5 \div -7.2 =$ ________

g) $-\frac{2}{3} \times \frac{9}{11} =$ ________ **h)** $\frac{3}{5} \div \frac{3}{25} =$ ________ **i)** $-\frac{1}{8} \div \frac{5}{16} =$ ________

13. En un pueblo, 5 personas escucharon una noticia. En una hora, cada una de ellas contó la noticia a otras 5; a su vez, en otra hora, éstas contaron la noticia a otras 5, y así sucesivamente. Si nadie cuenta ni escucha la noticia más de una vez y en ese pueblo hay un poco más de 19 000 habitantes, ¿en cuántas horas se habrá enterado todo el pueblo? ____________________________________

14. Resuelve. ¿Cuánto mide el lado de un cuadrado si su área es de 20 cm^2?

$x =$ ____________________

15. La altura de una persona (en cm), representada por la letra *a*, depende de si es mujer u hombre y de la longitud (en cm) de su fémur, descrita por *L*. Las expresiones que las relacionan son:

Mujeres: $a = 1.94 \times L + 72.8$ Hombres: $a = 1.88 \times L + 81.31$

a) Si la altura de un hombre es 182 cm, ¿cuál es la longitud de su fémur? ____________

b) ¿Y cuál será la longitud del fémur de una mujer de 168 cm de altura? __________

____

16. En un grupo de 25 alumnos se aplicó una evaluación de 100 preguntas y la cantidad de aciertos por alumno está en la siguiente lista:

60, 15, 71, 85, 40, 10, 25, 70, 0, 39, 85, 79, 99,

61, 47, 92, 88, 56, 30, 99, 20, 96, 77, 85, 80

Completa la tabla con las medidas de tendencia central de la información anterior.

Rango	Media	Mediana	Moda

17. En un grupo de telesecundaria se aplicó una evaluación, y con los datos obtenidos se realizó la siguiente gráfica. A partir de ésta, responde las siguientes preguntas.

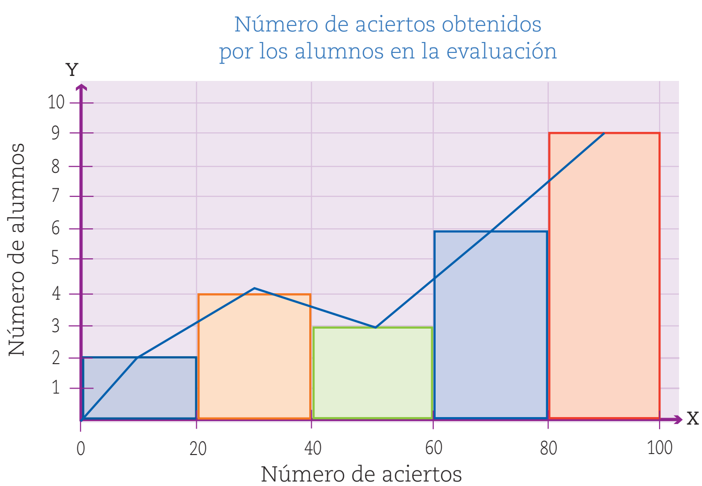
a) ¿Qué información presenta la gráfica? ______

____

b) ¿Qué representa cada número del eje vertical?

____

Y, ¿del eje horizontal? ____________________



c) ¿Qué tipo de gráfica es? ______________

d) ¿Qué rango tienen sus intervalos? ______

e) ¿Qué representan los puntos medios de cada barra? ______________________

____

f) ¿Cuántos alumnos presentaron la evaluación? ________________________

____

g) ¿Qué intervalo tiene la mayor frecuencia? ____________________________

____

¿Y la menor? ______________________

____

____

Bloque 1

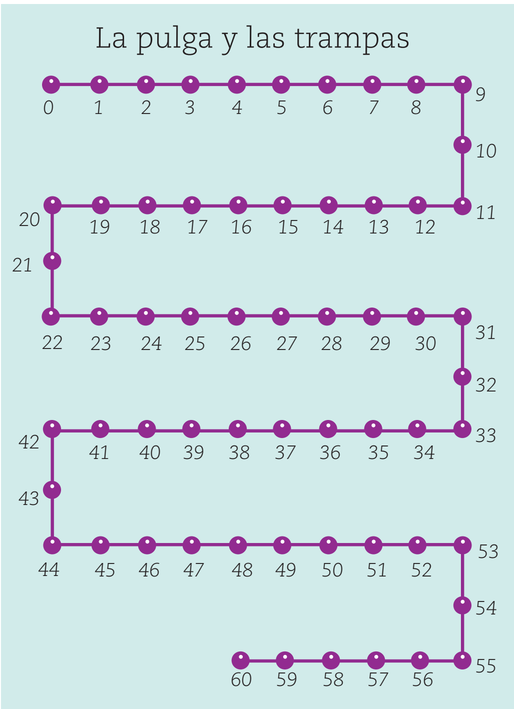
La geometría al servicio del arte

La elaboración de vitrales está íntimamente relacionada con la geometría, pues antes de realizar un vitral, el artista hace un diseño a escala de lo que quiere lograr con el vidrio en el espacio disponible. Después confecciona la plantilla que servirá para cortar los cristales. ¿No te parece maravilloso este arte? ¿Te gustaría hacer algún vitral? En este bloque conocerás más acerca de estos fascinantes elementos y aprenderás a trazar figuras a escala, lo cual te servirá para crear tus propios diseños de posibles vitrales.

1. Múltiplos, divisores y números primos

Para empezar

Sesión 1



¿Conoces un juego matemático que se llama "La pulga y las trampas"? Se juega con una sucesión de números puestos sobre una línea, como la dibujada en el tablero de la izquierda, y dos tipos de objetos, que pueden ser piedritas y clips, unos representan las pulgas y los otros, las trampas. Uno de los jugadores se encarga de poner una o más trampas sobre algunos números, y los demás hacen saltar a las pulgas a su elección, de dos en dos números, de tres en tres, etcétera, procurando que no caigan en alguna trampa.

Imagina que se juega con una sucesión de 0 a 50 y te toca poner una trampa, ¿en qué número la pondrías para atrapar la mayor cantidad de pulgas? ¿Podrías atraparlas a todas? Al estudiar esta secuencia, aprenderás a determinar múltiplos y divisores de un número y a distinguir los números primos de los números compuestos.

Manos a la obra

Divisores de un número

1. Reúnete con tres compañeros para jugar a "La pulga y las trampas" hasta el número 54. Utilicen el tablero que aparece en el recortable 1 de la página 271.
   - **a)** Elijan a un jugador que ponga una trampa sobre uno de los números de la línea del tablero; los demás harán saltar a la pulga.
   - **b)** Antes de hacer saltar a su pulga, cada jugador debe decir la longitud que eligió para sus saltos: de dos en dos, de tres en tres, de cuatro en cuatro, de cinco en cinco o de seis en seis.
   - **c)** Si la pulga es atrapada, se la queda quien puso la trampa. Si no cae, la conserva quien la hizo saltar.
   - **d)** En la siguiente ronda, otro jugador pone la trampa. Y continúan así hasta que todos hayan colocado trampas. Gana quien obtiene más pulgas.

2. Después de jugar varias veces "La pulga y las trampas", contesten lo siguiente y justifiquen sus respuestas.

   a) ¿En qué números conviene poner la trampa para atrapar más pulgas? Den al menos tres ejemplos. ____________________

   b) Si un jugador pone la trampa en el número 30, ¿qué saltos no conviene elegir? ____________________

   c) Si la trampa está en el número 36 y una pulga logra recorrer toda la línea sin ser atrapada, ¿qué saltos pudo haber elegido? ____________________

   d) ¿Con cuál de estos números se atrapan más pulgas: 12 o 40? ____________________

3. Respondan lo siguiente.

   a) Un equipo de jugadores modifica algunos aspectos del juego.

   - La línea va del 0 al 60.
   - Deben colocarse tres trampas.
   - Los saltos pueden ser de dos en dos y hasta de 10 en 10.

   b) ¿En qué números conviene poner cada trampa para atrapar más pulgas? ____________________

   c) ¿En cuáles números conviene poner las trampas para atrapar a todas las pulgas? ____________________

   d) ¿Sería posible atrapar a todas las pulgas si sólo se colocaran dos trampas? Argumenten su respuesta.

   ____

   ____

4. En grupo, y con apoyo del maestro, comparen sus respuestas. Si lo consideran necesario, realicen el juego con las reglas que se mencionan en la actividad 3. Luego lean y comenten la siguiente información.

   Los números en los que conviene poner las trampas son aquellos que tienen más divisores. Por ejemplo, conviene más poner la trampa en el 12 que en el 15, porque el 12 atrapa saltos de 2, 3, 4 y 6; mientras que el 15 sólo atrapa saltos de 3 y 5.

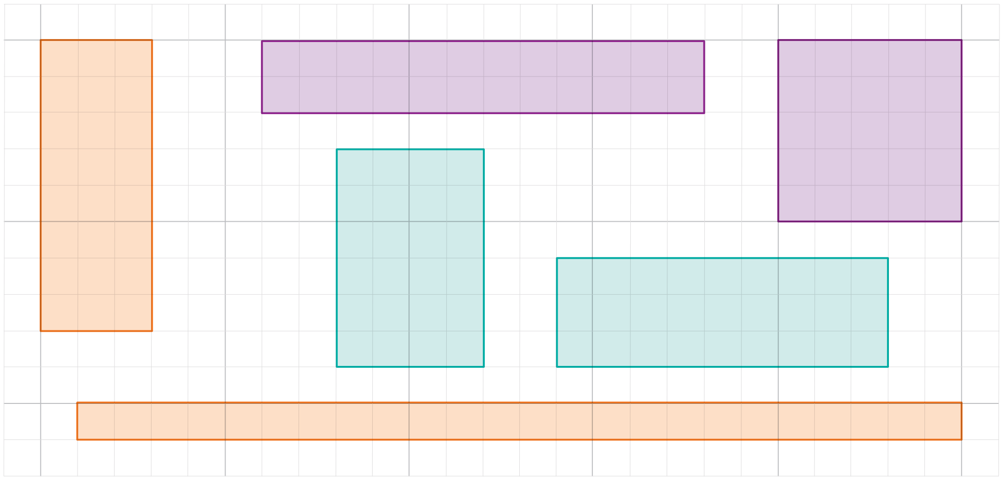
> El conjunto de divisores de 12 es: {1, 2, 3, 4, 6 y 12}, porque al dividir 12 entre cada uno de sus divisores, el resultado es un número entero y el residuo es cero.
>
> Son divisores de 30: {1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 y 30}.

Sesión 2

Múltiplos y divisores de un número

En pareja, resuelvan la siguiente actividad.

1. Marquen todos los rectángulos que tengan 24 cm^2 de área. Consideren que la cuadrícula está dividida en centímetros cuadrados (cm^2).



2. Como recordarán, el área de un rectángulo se calcula multiplicando largo por ancho. Anoten dentro de cada rectángulo marcado, la multiplicación que corresponde a su área. Después contesten lo que se indica.

a) Los números que intervienen en las multiplicaciones que anotaron son los factores de 24, por ejemplo, en la multiplicación $3 \times 8 = 24$, 3 y 8 son factores de 24. Completen la lista de factores de 24: {1, 2, ________________________}.

b) ¿Cuántos factores tiene el número 24? ________________________

c) Supongamos ahora que el área es de 36 cm^2. Dibujen en su cuaderno todas las variantes de rectángulos que se podrían construir.

d) ¿Cuántos rectángulos diferentes con un área de 36 cm^2 se pueden trazar, considerando que el largo y el ancho son números enteros? ________________

e) Continúen la lista de los factores de 36: {1, 2, ________________________}.

f) ¿Cuántos factores tiene el número 36? ________________________

3. Con ayuda de su maestro, comparen sus respuestas. Comenten cómo hicieron para estar seguros de que no les faltó ningún factor. Después, lean la siguiente información.

El conjunto de factores de un número también es el conjunto de divisores de dicho número. Por ejemplo, 3 es divisor de 12 porque divide exactamente a 12, el cociente es 4 y el residuo es cero. De igual forma, 3 es factor de 12 porque al multiplicar 3×4 se obtiene exactamente 12. El conjunto de factores o divisores de 12 es: {1, 2, 3, 4, 6 y 12}. Por otra parte, 12 es múltiplo de cada uno de sus factores o divisores.

4. Trabajen en equipo. Completen la tabla y asegúrense de que no les falta ningún factor o divisor. Después contesten las preguntas.

Número	Conjunto de factores o divisores del número	¿Cuántos factores o divisores son en total?
40		
64		
23		
81		
67		
60		

Algunos números sólo tienen dos factores o divisores distintos: el 1 y él mismo. Estos números se conocen como *números primos*.

a) ¿Cuál es el número que es divisor de cualquier número? ____________________

b) De la tabla anterior, ¿cuáles son números primos? ____________________

c) ¿Cuáles números de la primera columna son múltiplos de 5? ____________________

d) ¿Qué número es, al mismo tiempo, múltiplo y divisor de 60? ____________________

e) ¿Qué número es el mayor divisor de cualquier número? ____________________

¿Y cuál es el menor divisor? ____________________

f) ¿Qué número es múltiplo de sí mismo? ____________________

g) Averigua más acerca del descubrimiento del mayor número primo conocido hasta ahora, lo cual se divulgó el 26 de diciembre de 2017.

5. Con tus compañeros, y con ayuda del maestro, comparen sus respuestas. Propongan números al azar y encuentren todos sus factores o divisores, o bien, algunos múltiplos.

Para terminar

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

La criba de Eratóstenes

1. Usa el siguiente tablero para hacer lo que se indica.
   a) Encierra en un círculo rojo el número 2 y luego marca con un × todos los múltiplos de 2.
   b) Circula con rojo el siguiente número que no está tachado y luego tacha todos sus múltiplos.
   c) Repite el paso anterior, hasta que todos los números del cuadrado estén encerrados en un círculo rojo o tachados.

Glosario
Cribar significa separar o seleccionar.

2. El tablero anterior se conoce como la *criba de Eratóstenes* en honor del matemático griego que la inventó, y sirve para seleccionar o cribar los números primos comprendidos entre 2 y 100.
   a) En el tablero, ¿cuáles son números primos, los encerrados en círculo o los tachados? Escríbelos a continuación. ______________________________

   ____
   b) Compara tu respuesta con la de otros compañeros y vean si obtuvieron los mismos números primos. En aquellos que no coincidan, busquen la manera de comprobar si son primos o no.

Los números naturales que no son primos se llaman *números compuestos* y son los que tienen más de dos factores o divisores. Por ejemplo, el 28 es número compuesto porque tiene como factores o divisores: {1, 2, 4, 7, 14 y 28}.

   c) Escribe debajo de cada número una P si es primo, o una C si es compuesto. Puedes usar calculadora para corroborar tu clasificación.

121	107	123	135	102	111	183	131	29	99

   d) Explica cómo hiciste para decidir si un número es primo o es compuesto: ______

   ____

   ____

3. En grupo y con ayuda de su maestro, comparen sus resultados y analicen los procedimientos que utilizaron. Corrijan los errores.

4. En pareja, resuelvan los siguientes acertijos numéricos.

a) Es la suma de dos números primos menores que 10 y es múltiplo de 3; además, la suma de sus cifras es 3. ¿Qué número es?

b) Es el producto de dos números primos menores que 10 y tiene cuatro divisores; la suma de sus cifras es mayor que 6. ¿Qué número es?

c) Es un número primo mayor que 170 y menor que 180; la cifra de las unidades también es un número primo. ¿Qué número es?

d) Es un número primo mayor que 500 y menor que 510; la cifra de las unidades es un número compuesto. ¿Qué número es?

5. Indiquen con una ✓ si el enunciado es verdadero o con un ✗ si es falso, en cuyo caso deberán anotar un ejemplo.

Enunciado	Verdadero / Falso	Ejemplo
a) La suma de dos números primos siempre es un número primo.		
b) El producto de dos números primos siempre es un número compuesto.		
c) El sucesor de un número primo siempre es un número compuesto.		
d) Cualquier número compuesto se puede expresar como un producto de números primos.		

6. Observen el recurso audiovisual *Múltiplos, divisores, números primos y compuestos* para analizar otros ejemplos y características de estos números.

7. Utilicen el recurso informático *Algunos múltiplos, todos los divisores* para continuar con el estudio de los múltiplos y divisores de los números naturales.

Dato interesante
Dos números primos son gemelos si su diferencia es 2. Ejemplos de números primos gemelos son 17 y 19, 29 y 31, así como 1 000 000 061 y 1 000 000 063.

2. Criterios de divisibilidad

Sesión 1

Para empezar

Una historia sobre el reparto de un tesoro cuenta que un coronel y tres soldados, identificados como A, B y C, encontraron un baúl enterrado que contenía más de 230 barras de oro, pero menos de 250. El coronel decidió que, al día siguiente, las repartiría entre los 3 soldados para premiar su valentía. Sin embargo, en el transcurso de la noche, el soldado A se adelantó, dividió entre 3 el total del contenido del baúl, tomó una tercera parte y se deshizo de una barra que le sobraba para que la partición fuera exacta. Poco después, el soldado B tuvo la misma idea, contó las barras que había, tomó la tercera parte, y como también le sobraba una barra, se deshizo de ella. El soldado C, al igual que sus compañeros, contó y dividió el oro para tomar lo que le tocaba. A él también le sobró una barra y la desechó para evitar conflictos por la repartición.

A la mañana siguiente, el coronel se dispuso a repartir el tesoro. Él creía que lo que estaba en el baúl era el total del oro, por lo que lo repartió en tres partes iguales y, como le sobró una barra, decidió quedársela. ¿Cuántas barras de oro recibió en total cada soldado?

Con los aprendizajes que obtengas en esta secuencia podrás resolver problemas que implican anticipar si un número es divisible o no entre otro número natural menor o igual que 10.

Manos a la obra

Divisibilidad entre 3

1. Trabajen en equipo. Según la historia de la repartición del oro, respondan lo siguiente. Pueden utilizar calculadora si lo requieren.
   - **a)** Calculen cuántas barras de oro había originalmente. No olviden que eran más de 230, pero menos de 250. ______
   - **b)** ¿Podría ser 236 la cantidad original de barras de oro? Argumenten su respuesta.
     ______
   - **c)** ¿Qué características debería tener la cantidad original de barras de oro para cumplir con las condiciones de la historia? ______
     ______

2. Lean la siguiente información y verifiquen lo que se pide.

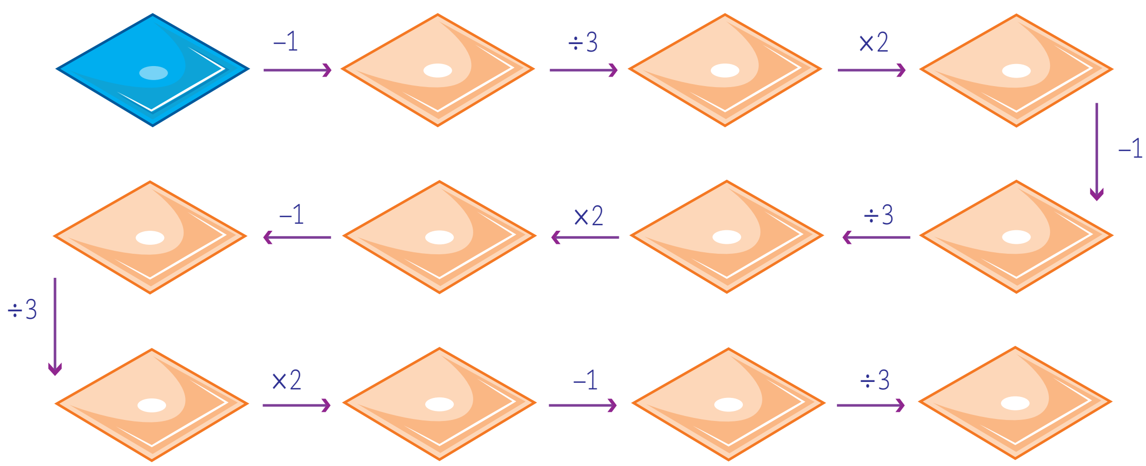
Para resolver el problema de la repartición es útil saber si un número es divisible entre 3 sin tener que hacer la división. Ser divisible significa que el residuo de la división es 0.

a) Verifiquen con algunos casos lo siguiente: es divisible entre 3 todo número que, al sumarse las cifras que lo componen, su resultado sea múltiplo de 3. Por ejemplo, el número 228 es divisible entre 3 porque 2 + 2 + 8 = 12, y 12 es múltiplo de 3. En cambio, 229 no es divisible entre 3 porque 2 + 2 + 9 = 13, y 13 no es múltiplo de 3.

3. En la siguiente sucesión de números de 230 a 250, tachen los que son divisibles entre 3; el sucesor de uno de esos números es la cantidad buscada.

230	231	232	233	234	235	236	237	238	239	
240	241	242	243	244	245	246	247	248	249	250

4. El siguiente esquema puede ayudarles a verificar si la cantidad inicial de barras de oro que encontraron es correcta. Efectúen las operaciones que se indican para hallar la cantidad que va en cada rombo. Comprueben que la cantidad original de barras es la que colocaron en el rombo azul, después contesten la pregunta que está debajo del esquema.



a) ¿Cuántas barras de oro le correspondieron en total a cada soldado?

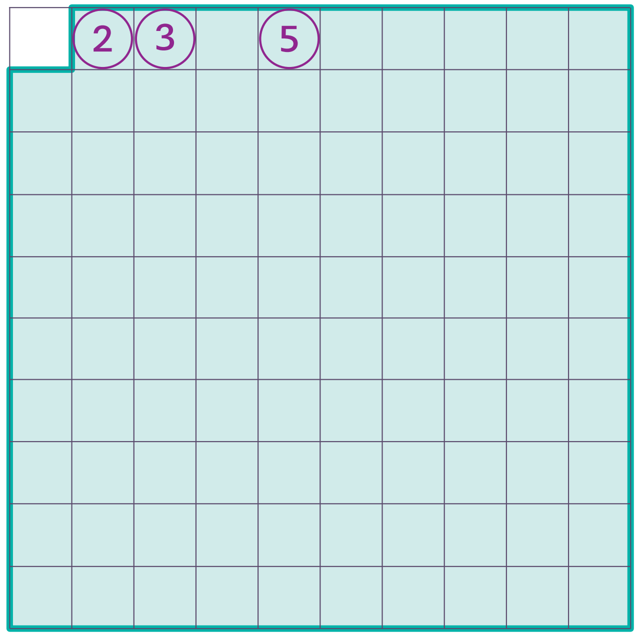
Soldado	A	B	C
Barras de oro			

5. Con apoyo del maestro, comparen sus resultados y, en caso necesario, corrijan.

Sesión 2

Divisibilidad entre 2 o entre 5

1. Trabajen en equipo. En el siguiente esquema, hagan lo que se indica.



a) Anoten todos los múltiplos de 2 en las casillas que les corresponden. Observen en qué se parecen y traten de formular una idea que defina los múltiplos de 2.

____

____

b) Ahora, anoten los múltiplos de 5 (algunos ya estarán anotados porque también son múltiplos de 2). Formulen una idea que defina los múltiplos de 5.

____

____

c) Finalmente, anoten los múltiplos de 3 (algunos ya estarán anotados porque también son múltiplos de 2 o de 5).

2. Las ideas que formularon en los incisos a) y b) dan pie a los criterios de divisibilidad de 2 y 5; anótenlos según se pide.

a) Son divisibles entre 2 todos los números que:

____

____

b) Son divisibles entre 5 todos los números que:

____

____

3. Analicen y resuelvan la siguiente situación. Al número 34 ☐ 2 ☐ le faltan dos cifras; anoten las que sean necesarias para que el número cumpla con la condición que se pide.

- Si es divisible entre 2, entonces es igual a 2 × ________ = 34 ☐ 2 ☐
- Si es divisible entre 3, entonces es igual a 3 × ________ = 34 ☐ 2 ☐
- Si es divisible entre 5, entonces es igual a 5 × ________ = 34 ☐ 2 ☐

4. Con ayuda del maestro, comparen sus respuestas. Vean si los criterios de divisibilidad que escribieron coinciden; si no fuera así, averigüen quiénes tienen razón.

5. Lean y comenten la siguiente información.

Se dice que un número es divisible entre otro si, al hacer la división, el residuo es cero. Para saber si un número es divisible entre otro sin hacer la división, en algunos casos hay que fijarse en qué cifra termina el número. Por ejemplo:

- son divisibles entre 2 los números que terminan en cifra par (0, 2, 4, 6 u 8);
- son divisibles entre 5 los números que terminan en cero o en cinco;
- son divisibles entre 10 los números que terminan en cero.

En otros casos hay que fijarse en la suma de las cifras. Por ejemplo:

- un número es divisible entre 3 cuando la suma de sus cifras es un múltiplo de 3.

Los anteriores son algunos criterios de divisibilidad para facilitar cálculos matemáticos.

6. Usen los criterios de divisibilidad para completar la siguiente tabla. Anoten sí o no en las casillas.

	El número es divisible entre…		
	2	3	5
108			
615			
4 580			
7 523			
15 459			
43 821			

Sesión 3

Divisibilidad entre 4 y entre 6

1. Trabajen en equipo. Anoten las cifras que faltan en cada cuadro. Usen una calculadora para verificar que los de la izquierda son divisibles entre 4 y los de la derecha no. Después, contesten las preguntas.

Son divisibles entre 4	No son divisibles entre 4
□16	□14
□□32	□□35
□□□48	□□□46
□□□□20	□□□□30

a) ¿Qué característica debe tener un número natural para ser divisible entre 4?

____

b) Con base en lo que escribieron, anoten tres números divisibles entre 4: uno de dos cifras, otro de tres y otro de cuatro.

____

c) Identifiquen, sin hacer la división, los números divisibles entre 4. Subráyenlos.

45 828 57 322 77 340 85 236 123 410 256 300

Dato interesante
Fue Euclides, matemático griego, quien demostró los teoremas de divisibilidad para los números enteros.

2. Con apoyo del maestro, comparen sus respuestas. Verifiquen que obtuvieron las mismas condiciones para establecer cuándo un número es divisible entre 4.

3. Anoten las cifras que consideren convenientes en cada cuadro para cumplir con las condiciones que se indican. Después, contesten las preguntas.

Son divisibles entre 6	No son divisibles entre 6
□4□	□4□
□53□	□53□
6□43□	6□43□
□8 513□	□8 513□

a) Para que un número natural sea divisible entre 6, debe cumplir dos condiciones: una se refiere a la cifra de las unidades y, la otra, a la suma de las cifras que forman el número.

- ¿Qué condición debe cumplir la cifra de las unidades? ____________________
- ¿Qué condición debe cumplir la suma de las cifras que forman el número?

____

b) Con base en lo que escribieron, anoten tres números divisibles entre 6: uno de tres cifras, otro de cuatro y otro más de cinco.

____

c) Identifiquen, sin hacer la división, los números divisibles entre 6. Subráyenlos.

45 720 54 392 68 286 414 528 935 257 1 348 653

d) Con apoyo del maestro, comparen sus respuestas. Verifiquen que obtuvieron las mismas condiciones para establecer cuándo un número es divisible entre 6.

4. Lean la siguiente información y compárenla con lo que encontraron en las actividades anteriores.

- Son divisibles entre 4 los números naturales cuyas dos últimas cifras forman un número divisible entre 4.
- Son divisibles entre 6 los números naturales cuya última cifra es par y la suma de sus cifras es múltiplo de 3. Dicho de otra manera, son aquellos números que son divisibles entre 2 y entre 3 al mismo tiempo.

5. Al número 4 ☐ 83 ☐ le faltan dos cifras. Anoten, en cada caso, las cifras necesarias para que el número cumpla con la condición que se pide.

- Si es divisible entre 2, entonces es igual a 2 × __________ = 4 ☐ 83 ☐
- Si es divisible entre 3, entonces es igual a 3 × __________ = 4 ☐ 83 ☐
- Si es divisible entre 4, entonces es igual a 4 × __________ = 4 ☐ 83 ☐
- Si es divisible entre 5, entonces es igual a 5 × __________ = 4 ☐ 83 ☐
- Si es divisible entre 6, entonces es igual a 6 × __________ = 4 ☐ 83 ☐
- Si es divisible entre 10, entonces es igual a 10 × __________ = 4 ☐ 83 ☐

6. Con apoyo del maestro, comparen sus resultados. Verifiquen que los números que formaron son, efectivamente, divisibles entre el número indicado.

Sesión 4

Para terminar

Algo más acerca de los criterios de divisibilidad

1. Verifica con tu calculadora cuáles son números divisibles entre 9. Enciérralos en un óvalo.

63 648 5 346 91 081 7 452 114 209 203 518

a) ¿Qué características tienen en común los números que son divisibles entre 9?

____

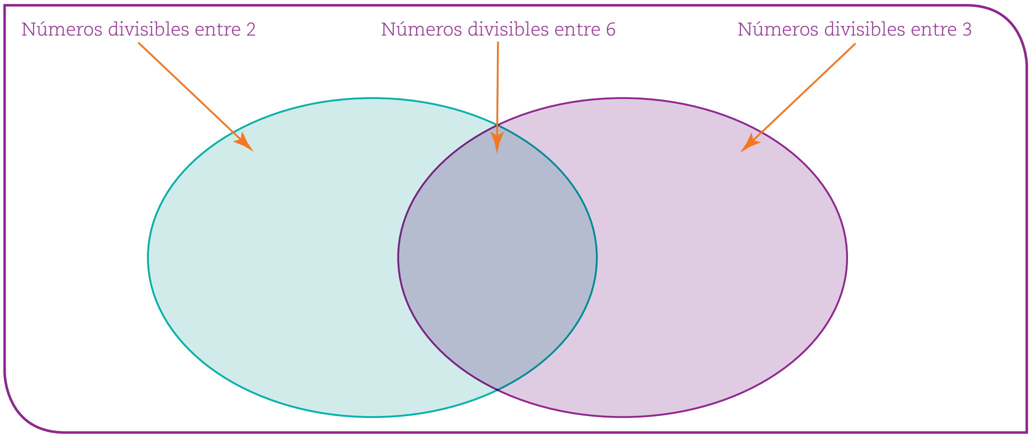
b) Con ayuda de su maestro, establezcan un criterio que les permita determinar cuándo un número es divisible entre 9. Anótenlo. ______________________________

____

2. Usa los aprendizajes que has adquirido para completar la siguiente tabla.

Enunciado	Verdadero / Falso	Ejemplo
a) Si un número es divisible entre 2, también es divisible entre 4.		
b) Si un número es divisible entre 4, también es divisible entre 2.		
c) Si un número es divisible entre 3, también es divisible entre 6.		
d) Si un número es divisible entre 6, también es divisible entre 3.		
e) Si un número es divisible entre 3, también es divisible entre 9.		
f) Si un número es divisible entre 9, también es divisible entre 3.		
g) Si un número es divisible entre 5, también es divisible entre 10.		
h) Si un número es divisible entre 10, también es divisible entre 5.		

3. De los siguientes números, algunos son divisibles entre 2, otros son divisibles entre 3 y otros son divisibles entre 6. Anoten cada número en el lugar que le corresponde en el esquema: 78, 86, 93, 114, 144, 554, 1 239, 2 536, 43 854, 56 804.



4. Un vendedor de fruta del mercado calcula que tiene más de 110 naranjas, pero menos de 130. Quiere exhibirlas en su puesto por montones de 3, pero le sobra una naranja. Intenta, entonces, con montones de 5 y le vuelve a sobrar una. No se da por vencido y hace montones de 6 naranjas, aunque nuevamente le sobra una. Finalmente desiste y las deja en un solo montón.

a) ¿Cuántas naranjas tenía el vendedor? ____________________

5. Completen la tabla. Anoten en la primera columna los números que cumplan con las condiciones que se indican.

	El número es divisible entre…				
	2	**3**	**5**	**9**	**10**
	No	Sí	Sí	No	No
	Sí	Sí	No	No	No
	No	Sí	Sí	Sí	No
	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí

6. Con apoyo del maestro, comparen sus respuestas. Comenten cómo hicieron para encontrar un número que fuera divisible entre 2, 3, 5, 9 y 10.

7. Observen el recurso audiovisual *Criterios de divisibilidad* para analizar las características que deben cumplir los números divisibles entre 2, 3, 4, 5, 6, 9 y 10.

8. Utilicen el recurso informático *Criterios de divisibilidad* para resolver problemas que requieran aplicar los criterios de divisibilidad.

3. Figuras geométricas y equivalencia de expresiones de segundo grado 1

Sesión 1

Para empezar

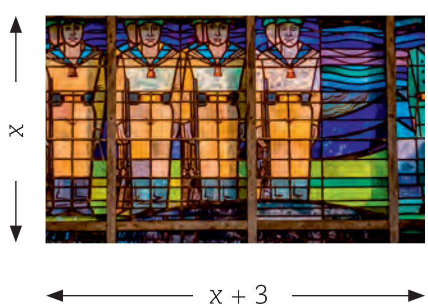
Vitral *Artes liberales* del pórtico sur de la fachada de la catedral de San Esteban de Auxerre, en Borgoña, Francia.

Los vitrales son composiciones de vidrios pintados con esmalte y ensamblados mediante varillas de plomo. Se les llama también vidrieras policromadas y los temas que se plasman en ellas son muy variados, como puedes ver en la imagen. En general, se elaboran con la misma técnica desde su origen. Los colorantes que más se emplean en su elaboración son el óxido de cobre, el fluoruro de calcio, el dióxido de manganeso, el óxido de cobalto y el óxido de hierro, entre otros. Los vitrales pueden tener distintas formas, pero primero se toman las medidas del espacio que ocuparán, luego se traza un patrón y finalmente se cortan los marcos y vidrios. Hay vitrales que cubren superficies muy grandes, como los que se encuentran en el Gran Hotel de la Ciudad de México, los cuales se realizan por partes, generalmente con diferentes formas geométricas. En esta secuencia usarás expresiones algebraicas para expresar la medida de los marcos y de las superficies de algunos vitrales, y seguirás trabajando con expresiones equivalentes que empezaste a estudiar en segundo grado.

Glosario
Policromado se dice de un objeto con diversos colores.

Manos a la obra

Los vitrales



1. Trabajen en pareja para contestar lo que se indica. Hilda elabora vitrales. Uno de ellos se muestra en la imagen.
   a) Según las medidas del vitral, ¿qué forma tiene? ______
   b) Escriban una expresión algebraica que represente el perímetro del vitral.
   ______
   c) ¿Qué expresión algebraica representa el área que ocupa la superficie del vitral? ______
   d) ¿Son equivalentes las expresiones que escribieron en b) y c)? ______
   Justifiquen su respuesta. ______

2. Erick también hace vitrales, como el que se muestra a la derecha.

a) ¿Qué forma tiene este vitral, según sus medidas? ______________________

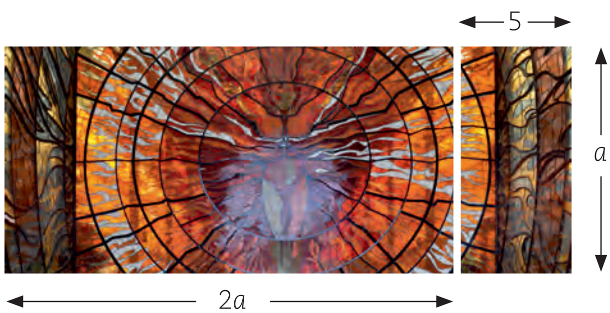
b) Escriban la expresión que representa su perímetro. ______________________

c) ¿Qué expresión representa el área que ocupa la superficie del vitral?

____

d) Un posible comprador dice que los vitrales de Hilda y Erick tienen la misma área. ¿Tiene razón? ______________ Comprueben su respuesta.

3. Observen los siguientes fragmentos del Cosmovitral, localizado en Toluca, capital del Estado de México, y escriban las expresiones que se solicitan.



Vitral 1

Vitral 2

Vitral 3

Vitral	Expresiones que representan el área de cada pieza del vitral	Expresión que representa el área total del vitral
1		
2		
3		

4. Compartan con el grupo las respuestas que obtuvieron de las situaciones anteriores. ¿Todos escribieron las mismas expresiones? ¿Cómo podrían comprobar si las expresiones son o no equivalentes?

En álgebra, los *términos semejantes* son los que tienen la misma parte literal. Los términos semejantes se pueden sumar o restar. Algunos ejemplos de ellos son:

$$z,\ 5z,\ 3.1z,\ 2z;\ 2xy,\ 7xy,\ \frac{1}{2}xy,\ 15xy$$

Las expresiones algebraicas tienen nombre, éste se determina a partir del número de términos no semejantes que tienen.

- *Monomio:* tiene sólo un término. Ejemplos: x, $2a$, y^2, $1.8b$, mn, $5xy$, $\frac{1}{2}a^2b$
- *Binomio:* tiene dos términos. Ejemplos: $x + 2y$; $y^2 + 8y$; $mn - 5$; $ab + \frac{1}{2}a^2b$
- *Trinomio:* tiene tres términos. Ejemplos: $x + 2y^2 - 8xy$; $mn + 9m^2n + 81$
- En general, un *polinomio* tiene dos o más términos.

Término independiente es el número que aparece sin parte literal en una expresión algebraica, por ejemplo en $x + 3$, $5xy + 4$, 3 y 4 son los términos independientes.

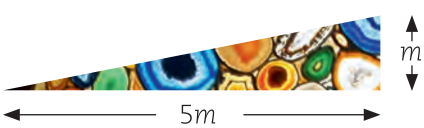
Las *expresiones algebraicas equivalentes* son aquellas que se escriben de manera diferente, pero representan lo mismo.

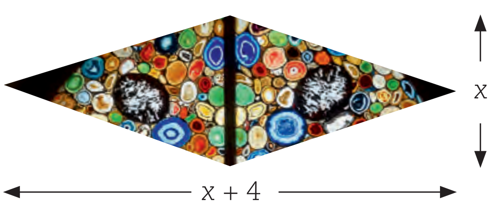
Sesión 2

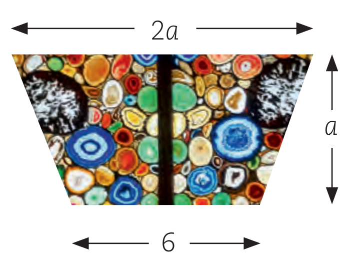
Vitrales y sucesiones

1. Los vitrales pueden variar de forma, pueden ser: triangulares, circulares, de ojiva, de medio círculo, romboidales, entre otras. Los siguientes vitrales son parte de una composición. Trabajen en pareja para realizar lo que se pide.

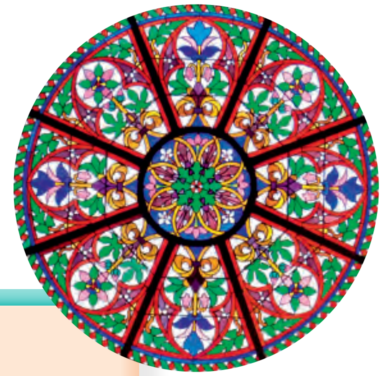
a) Anoten dos expresiones algebraicas equivalentes que representen el área de cada pieza.







2. El diámetro de este vitral está representado por la expresión $6y$.



a) ¿Qué expresión representa su radio? ____________________

b) Escriban dos expresiones equivalentes que representen su área.

____

3. Lean y comenten la información del recuadro con ayuda de su maestro.

Los casos de multiplicación de expresiones algebraicas son:

- Monomio por término independiente. Es cuando se multiplica el coeficiente de un monomio por el término independiente. Ejemplos:

$$x(5) = 5x \qquad (mn)4 = 4mn$$

$$(2a)8 = 16a \qquad (xy)\frac{1}{2} = \frac{1}{2}xy$$

$$(y^2)18 = 18y^2 \qquad (a^2 b)7 = 7a^2b$$

- Monomio por monomio. Hace referencia a la multiplicación de los coeficientes y las literales de dos términos. Ejemplos:

$$x(5x) = 5x^2$$

$$(2a)(8b) = 16ab$$

$$y^2 (3.1x) = 3.1xy^2$$

- Monomio por binomio. Es la multiplicación de un término por cada uno de los términos del binomio. Ejemplos:

$$x(5x + y) = 5x^2 + xy$$

$$(2a + 3)8b = 16ab + 24b$$

$$y^2 (3.1x - 4) = 3.1xy^2 - 4y^2$$

4. Las sucesiones de figuras pueden representar áreas que tienen un patrón de crecimiento. El lugar que ocupa cada término de una sucesión se representa con la letra n, es decir, para encontrar un término específico de la sucesión se sustituye la n en la regla general por el número del lugar que se está buscando. Realicen lo que se pide con base en la siguiente sucesión.

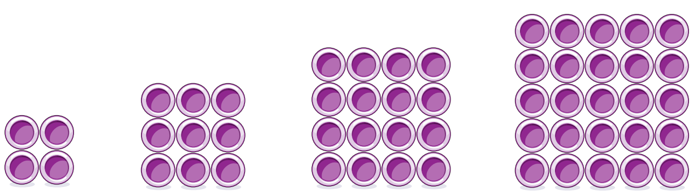


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3 Fig. 4 Fig. 5 ...

a) ¿Cuántas fichas tendrá la figura 5? ____________ ¿Y la figura 15? ______________
¿Cuántas fichas tendrá la figura 145? ______________________________________

b) Subrayen las expresiones que representan la sucesión anterior.

n^2 $\qquad$ $2n$ $\qquad$ $(n + 1)^2$ $\qquad$ $n^2 + 2n + 1$

c) ¿Cómo determinaron las expresiones que le corresponden a la sucesión? _______
____

5. Analicen la siguiente sucesión y respondan lo que se pide.

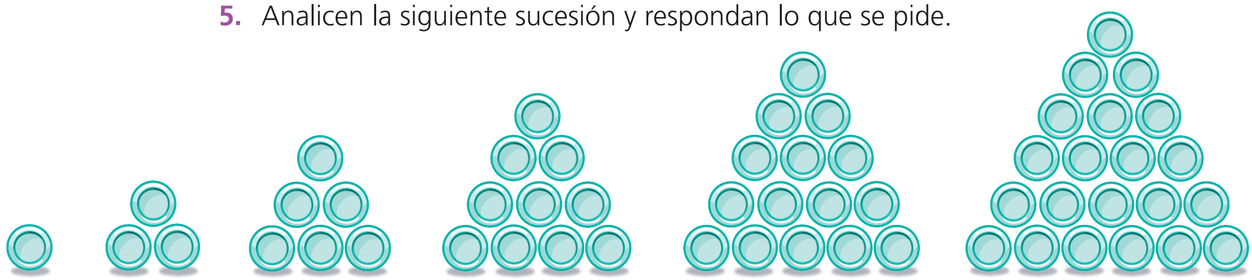


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3 Fig. 4 Fig. 5 Fig. 6

a) ¿Cuántas fichas tendrá la figura 10? __________________

b) ¿Cuántas fichas tendrá la figura 30? __________________

c) Subrayen las expresiones algebraicas que representan la sucesión mostrada arriba.

$n + 2$ $\qquad$ $\frac{n(n + 1)}{2}$ $\qquad$ $\frac{2n}{2}$ $\qquad$ $\frac{n^2 + n}{2}$

d) Expliquen brevemente cómo determinaron las expresiones algebraicas que representan esta sucesión. ____
____

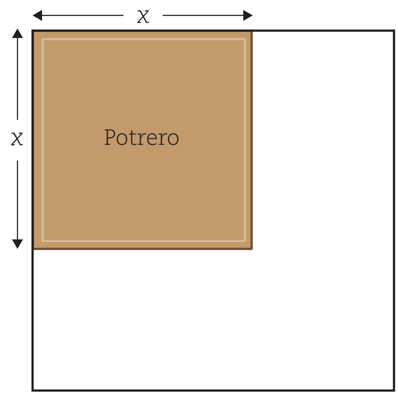
6. Sustituyan las literales de las expresiones de los vitrales con diversos valores para comprobar que son equivalentes. Hagan lo mismo con las expresiones que eligieron en cada sucesión para ver si son equivalentes.

Sesión 3

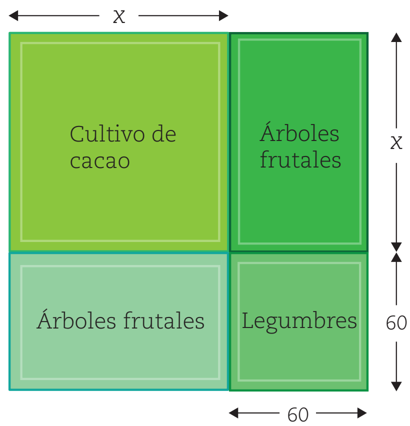
Siembra vida

1. En 2019 surgió una convocatoria dirigida a los habitantes de las zonas rurales de México, en la que se ofrecía apoyo a los campesinos para combinar la siembra tradicional con la de árboles frutales y maderables. Samuel vive en Chiapas y tiene un terreno en esa entidad, decidió usarlo completo para participar en tal proyecto. El dibujo 1 representa la parte del terreno que usaba como potrero; el dibujo 2 muestra la manera en que Samuel distribuyó todo su terreno para sembrar.

Dibujo 1



Dibujo 2



a) Escriban la expresión algebraica que representa el área de la superficie del terreno que ocupaba como potrero. ______________________________

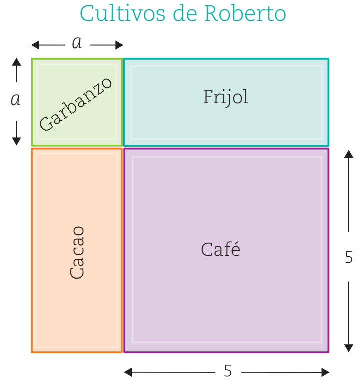
b) Escriban, en la tabla de abajo, la expresión que representa, en el dibujo 2, el área destinada a sembrar cada uno de los productos.

Cacao	Árboles frutales	Legumbres

2. En grupo y con apoyo del maestro, comparen y analicen si todos escribieron las mismas expresiones. Si no fue así, asignen un valor cualquiera a las literales para revisar si las expresiones que anotaron son equivalentes.

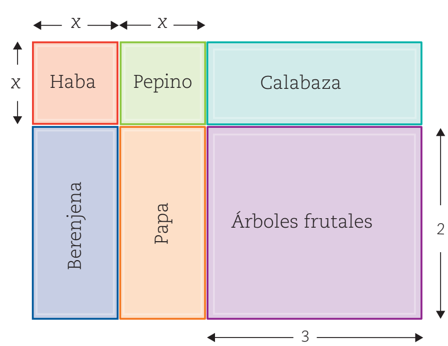
3. Dos amigos de Samuel, Roberto y Lulú, también se animaron a cultivar diferentes productos en sus terrenos. Anoten frente a cada producto una expresión que represente el área que ocuparon con cada cultivo.

Cultivos de Roberto



Café: ____________________
Frijol: ____________________
Garbanzo: ________________
Cacao: ____________________
Área total del terreno: ________

Cultivos de Lulú



Papa y pepino: __________________
Berenjena y haba: ________________
Árboles frutales y calabaza: ________
Haba y pepino: __________________
Área total del terreno: ____________

Dato interesante
Para hacer más eficiente el uso de nutrientes del suelo, es conveniente sembrar diferentes cultivos juntos. Esto ayuda a que disminuyan los problemas causados por plagas. Por ejemplo, en algunos cultivos de leguminosas se siembra ajo alrededor o intercalado, pues ayuda a repeler las plagas de los cultivos vecinos.

4. ¿Todos escribieron las mismas expresiones? Si no fue así, comprueben si son equivalentes. Luego, lean y comenten la información del recuadro. En caso necesario, corrijan sus respuestas.

De la misma manera que es posible encontrar expresiones algebraicas de primer grado que son equivalentes, también es posible obtener expresiones algebraicas de segundo grado equivalentes. Una forma de comprobarlo consiste en dar cualquier valor a las literales y ver si la igualdad se cumple.

Por ejemplo:

$6x^2 + 8x$ es equivalente a $2x(3x + 4)$, si x vale 7 se tiene que

$$6x^2 + 8x = 6(7^2) + (8)(7) = 6\,(49) + 56 = 294 + 56 = 350 \text{ y}$$

$$2x(3x + 4) = 2(7)[(3)(7) + 4] = 14[21 + 4] = 14\,(25) = 350$$

Al hacer las operaciones, en ambas se llega al mismo resultado; por lo tanto, las dos expresiones algebraicas son equivalentes.

5. Al finalizar, comenten si conocen alguna estrategia para evitar plagas en los cultivos, pero que no dañe el ambiente como lo hacen algunos plaguicidas químicos.

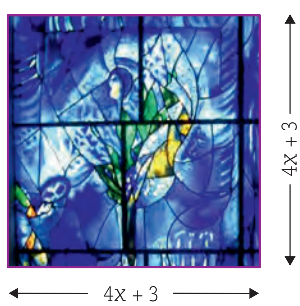
Sesión 4

Para terminar

Más vitrales

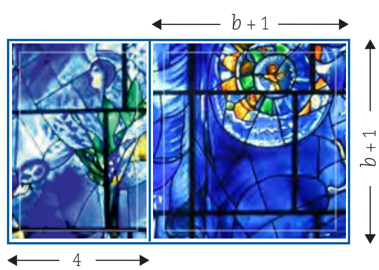
1. Trabajen en equipo y realicen lo que se indica. Escriban dos expresiones algebraicas equivalentes que representen el área de las siguientes figuras que forman parte de algunos vitrales.

Figura 1



_______ = _______

Figura 2



_______ = _______

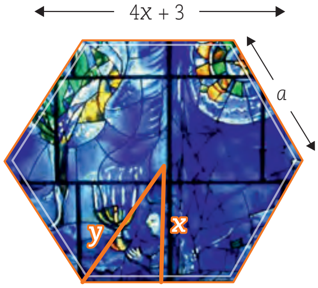


Figura 3

_______ = _______

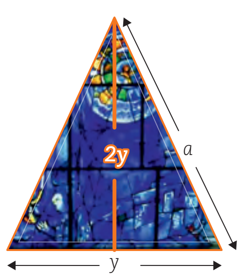


Figura 4

_______ = _______

2. En su cuaderno, comprueben que las expresiones algebraicas son equivalentes al hacer las transformaciones algebraicas necesarias para cada caso.

3. Tracen una figura cuya área se pueda calcular con las siguientes expresiones algebraicas:

a) $A = 36y^2$

b) $A = (2a + 2)(2a + 3)$

4. Dividan las figuras de la actividad anterior en rectángulos de menor área para encontrar dos expresiones algebraicas que representen el área de la figura completa. Anótenlas.

____

____

5. Lean la siguiente información y coméntenla con sus compañeros y su maestro.

Otra forma de saber si dos expresiones algebraicas son equivalentes consiste en transformarlas por medio de los procedimientos algebraicos que permitan igualarlas.

Por ejemplo: ¿Las expresiones algebraicas $(3x + 4)(3x + 2)$ y $9x^2 + 18x + 8$ son equivalentes? Para saberlo, se realizan las operaciones correspondientes y se aplican las reglas de la igualdad:

$$(3x + 4)(3x + 2) = [(3x)(3x) + (3x)(2)] + [(4)(3x) + (4)(2)] =$$

$$[9x^2 + 6x] + [12x + 8] = 9x^2 + 18x + 8 = 9x^2 + 18x + 8 =$$

$$= 9x^2 + 18x + 8$$

6. Observen el recurso audiovisual *Expresiones cuadráticas equivalentes 1* para que amplíen sus conocimientos acerca del proceso algebraico que permite comprobar que dos expresiones algebraicas son equivalentes.

7. Usen el recurso informático *Expresiones cuadráticas equivalentes 1* para que resuelvan problemas que implican encontrar distintas expresiones algebraicas relacionadas con sucesiones y áreas de composiciones rectangulares.

Dato interesante
La catedral de Colonia, en Alemania, forma parte del Patrimonio Mundial de la Humanidad y tiene gran cantidad de vitrales: aproximadamente 11 500 cuadros de vidrio de 72 colores. En México tenemos el Jardín Botánico de Toluca, conocido como el Cosmovitral, en cuya construcción se usaron 75 toneladas de vidrio soplado y combina 28 colores.

4. Ecuaciones cuadráticas 1

Sesión 1

Para empezar

Se tienen evidencias de que en Babilonia, en el año 1600 a. n. e., se resolvían problemas que implicaban el uso de ecuaciones de segundo grado (representadas de manera distinta a como lo hacemos ahora); y de que éstas se conocieron después en Egipto y, posteriormente, en Grecia. En este último lugar, el gran mérito se le atribuye a Diofanto de Alejandría (aproximadamente 200-284 n. e.), quien, entre otras cosas, dejó resueltos de manera ingeniosa muchos problemas, así como un método para solucionar las ecuaciones de segundo grado, por lo que se le reconoce como el padre del álgebra. En su epitafio puede leerse: "Transeúnte, ésta es la tumba de Diofanto, al terminar de leer esta sorprendente distribución, conocerás el número de años que vivió. Su niñez ocupó la sexta parte de su vida; después, durante la doceava parte, su mejilla se cubrió con el primer bozo. Pasó aún una séptima parte de su vida antes de tomar esposa y, cinco años después, tuvo un precioso niño que, una vez alcanzada la mitad de la edad de su padre, pereció de una muerte desgraciada. Su padre tuvo que sobrevivirle, llorándole, durante cuatro años. De todo esto se deduce su edad". ¿A qué edad murió Diofanto?

Glosario
Bozo se refiere al vello que aparece en los hombres jóvenes antes de nacer la barba.

En esta secuencia conocerás las características de las ecuaciones de segundo grado y comenzarás a utilizarlas para resolver problemas.

Manos a la obra

Ecuaciones de primer y segundo grado

Trabajen en equipo. Analicen los siguientes problemas y resuelvan lo que se pide.

1. Supongan que x es la edad a la que murió Diofanto.

a) El epitafio habla de tres etapas de su vida; represéntenlas algebraicamente.

Niñez	Etapa en que aparece el bozo en su mejilla	Etapa entre el primer bozo y antes de casarse

b) Representen algebraicamente la suma de estas tres etapas. ______________

c) Representen algebraicamente los años que vivió el hijo de Diofanto. ___________

____

d) ¿Qué expresión algebraica representa el número de años que vivió Diofanto?

____

e) ¿A qué edad murió Diofanto? _______________________

2. Con tus compañeros y con ayuda del maestro, comparen sus respuestas. Verifiquen que el valor encontrado corresponde a la edad de Diofanto y que con él se pueden calcular las etapas indicadas en su epitafio.

3. *Todos los alumnos de un grupo de tercero de secundaria enviaron un mensaje a cada uno de sus compañeros para saber cuál es la fruta que más les gusta. Si en total se enviaron 650 mensajes, ¿cuántos alumnos hay en el grupo?*

a) Para comprender mejor la situación, pueden replicarla trabajando por equipo en el salón.

- ¿Cuántos integrantes hay en su equipo? ___________
- ¿Cuántos mensajes envía cada integrante? ___________
- ¿Cuántos mensajes se envían en total? ___________

b) Ahora imaginen que replican la actividad con todo el grupo.

- ¿Cuántos alumnos son en total? ___________
- ¿Cuántos mensajes tendría que enviar cada quien? ___________
- ¿Cuántos mensajes se envían en total? ___________

c) Lean de nuevo la situación planteada. Supongan que x es la cantidad total de alumnos que hay en ese grupo y respondan las preguntas.

- ¿Cómo se representa algebraicamente la cantidad de mensajes que envió cada alumno? ___________
- ¿Cómo se representa algebraicamente el total de mensajes enviados en el grupo? ___________

Dato interesante

Entre las ecuaciones más famosas que han servido para dar respuesta a las preguntas que la humanidad se ha hecho están:

- La que representa el teorema de Pitágoras: $a^2 + b^2 = c^2$
- La de Isaac Newton para la ley de la gravitación universal: $F = G\, m_1\, m_2 / r^2$
- La de Albert Einstein para la teoría de la relatividad especial: $E = mc^2$.

d) Con base en la situación anterior, completen la siguiente tabla.

	En tu equipo	En tu grupo	En el grupo de la situación planteada
Número total de alumnos (incógnita)			
Número de mensajes enviados por cada alumno			
Número total de mensajes enviados			650

e) Si se considera que se enviaron 650 mensajes en total, ¿cuál es la ecuación que permite calcular el valor de *x*? ______________________ ¿Cuántos alumnos hay en ese grupo? ____

4. Con el apoyo del maestro, comparen sus respuestas. Verifiquen si todos formularon la misma ecuación. Comenten cómo la resolvieron y en qué se distingue de las ecuaciones que ya conocen.

Sesión 2

Dos soluciones, una solución o ninguna

Trabajen en equipo. Analicen tanto las situaciones presentadas como su proceso de resolución al responder las preguntas que se plantean y resuelvan lo que se indica.

1. *Raúl es 6 años mayor que su hermana. El producto de las dos edades es igual a 315. ¿Qué edad tiene cada uno?*

a) Si la hermana de Raúl tuviera 10 años, ¿cuántos años tendría Raúl? __________
¿Cuál sería el producto de las dos edades? ______________________

b) En el problema planteado inicialmente, ¿consideran que la hermana de Raúl tiene más de 10 años o menos de 10 años? ______________________
Argumenten su respuesta. ____

____

c) Continúen este razonamiento hasta encontrar las edades de ambos. Verifiquen que el producto es 315. Anoten aquí los resultados.

Hermana de Raúl	Raúl

2. El proceso que realizaron en la actividad anterior también se puede hacer utilizando el lenguaje algebraico. Anoten las expresiones algebraicas que se piden.

La edad de la hermana de Raúl	La edad de Raúl	El producto de las dos edades	El producto conocido de las dos edades
x			315

a) En la tabla hay dos productos que son iguales: uno expresado algebraicamente y el otro con un número. Relaciónenlos con el signo igual para obtener una ecuación.

________________ = ________________

b) En la ecuación, x representa la edad de la hermana de Raúl. En su cuaderno, sustituyan x por el valor que encontraron en la actividad 1c) y verifiquen que la ecuación se cumple.

Dato interesante
En algunos lugares del país, al hijo menor se le llama xocoyote, del náhuatl *xocotl*, "verde, inmaduro", y *coyotl*, "cachorro". Entre Raúl y su hermana, ¿quién será el xocoyote? Si tú tienes hermanos, ¿quién de ustedes lo es?

3. En grupo y con apoyo del maestro, comparen los resultados obtenidos en equipo; identifiquen si tuvieron errores y corrijan. Luego, lean lo siguiente.

Una ecuación cuadrática o de segundo grado con una incógnita es una ecuación en la cual el mayor exponente de la incógnita es 2.

Algunos ejemplos de ecuaciones cuadráticas son:

$4z^2 = 36$

$r^2 + r = 12$

$y^2 + 3y - 2 = 0$

Ecuación con una incógnita en la cual el mayor exponente es 2

$x(x + 5) = 6$

Producto de factores que dan como resultado la ecuación cuadrática: $x^2 + 5x = 6$

4. Trabajen en equipo y completen la siguiente tabla con las expresiones algebraicas que se piden.

De un número cualquiera	Del sucesor de un número cualquiera	De la suma de dos números consecutivos cualesquiera	Del producto de dos números consecutivos cualesquiera

5. Escriban las ecuaciones que representan los siguientes enunciados.

A. La suma de dos números consecutivos es igual a 93	B. El producto de dos números consecutivos es igual a 210
$= 93$	$= 210$

a) Consideren la ecuación que representa cada enunciado. ¿A qué enunciado le corresponde una ecuación cuadrática? ________________

b) ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación que representa el enunciado A?

____

c) En el caso del enunciado B, hay un par de números enteros negativos consecutivos cuyo producto es igual a 210. ¿Cuáles son? ________________

d) Completen la tabla para encontrar la pareja de números enteros negativos consecutivos (o verifiquen que sí lo son).

x	$x + 1$	$x(x + 1)$
-11	-10	$(-11)(-10) =$
-13		

6. En grupo y con apoyo del maestro, comparen sus respuestas y, en caso necesario, corrijan. Después, lean y hagan lo que se indica.

Resolver una ecuación es hallar la solución o las soluciones que satisfacen la ecuación. Una *solución* o *raíz de una ecuación* es un valor de la incógnita que, al sustituirse en la ecuación, la satisface.

Las ecuaciones cuadráticas tienen dos soluciones o raíces.

a) Verifiquen que encontraron las dos parejas de números consecutivos cuyo producto es 210.

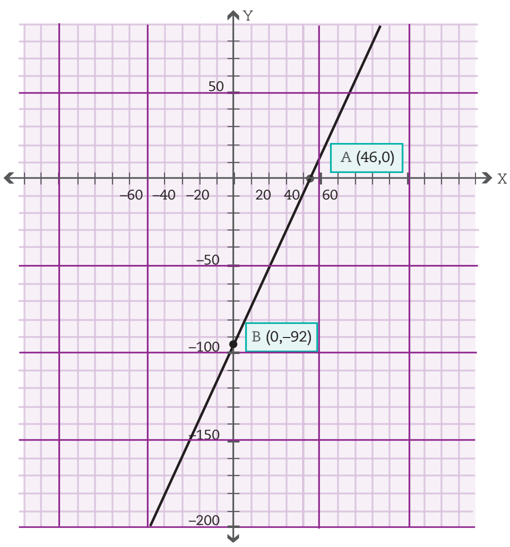
b) ¿Cuáles son las dos soluciones o raíces de la ecuación cuadrática? ________________

____

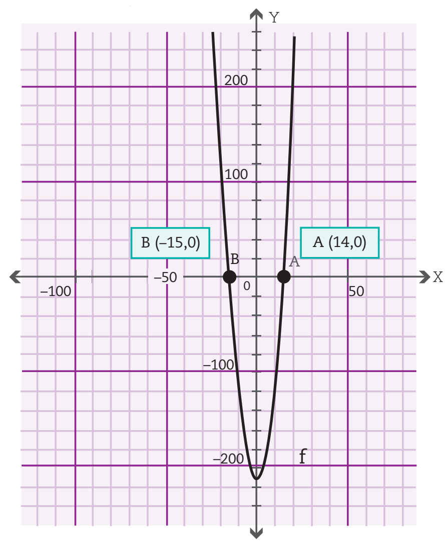
Para terminar

Interpretación gráfica de las soluciones

1. Trabajen en equipo. A continuación encontrarán las gráficas de las funciones de las cuales se obtienen las ecuaciones de los enunciados A y B de la sesión anterior; analícenlas para responder las preguntas planteadas.



Ecuación: $2x + 1 - 93 = 0$



Ecuación: $x^2 + x - 210 = 0$

a) Consideren la gráfica de la función lineal. ¿Cuál es la abscisa del punto donde se corta la gráfica con el eje X? ____________ ¿Cuál es la solución de la ecuación?

____

b) Consideren la gráfica de la ecuación cuadrática. ¿Cuáles son las abscisas de los puntos donde se corta la gráfica con el eje X? ______________ ¿Cuáles son las soluciones de la ecuación? ______________________________

2. Comparen sus respuestas y, en caso necesario, corrijan. Después, lean y realicen lo que se pide.

> Las soluciones o raíces de una ecuación cuadrática se pueden observar al graficar la función de la cual se obtiene y corresponden a las abscisas de los puntos donde la gráfica se interseca con el eje X; en estos casos, los valores de la ordenada son 0.

a) Subrayen, con color rojo, los valores de las soluciones de las ecuaciones en las gráficas.

3. Analicen el siguiente planteamiento y su proceso de resolución para responder las preguntas que se plantean. Resuelvan lo que se pide.

El área de un rectángulo es de 48 cm^2. La medida del largo es el triple del ancho.

a) ¿Es posible que la medida del ancho sea 5 cm? ______________ ¿Por qué?

____

Mediante ensayo y error, encuentren las dimensiones del rectángulo.

Ancho: ______________ Largo: ______________

b) En su cuaderno, tracen un rectángulo cuyo largo sea el triple del tamaño del ancho. Si representan con la letra x la medida del ancho, ¿cómo representan la medida del largo? ______________________________

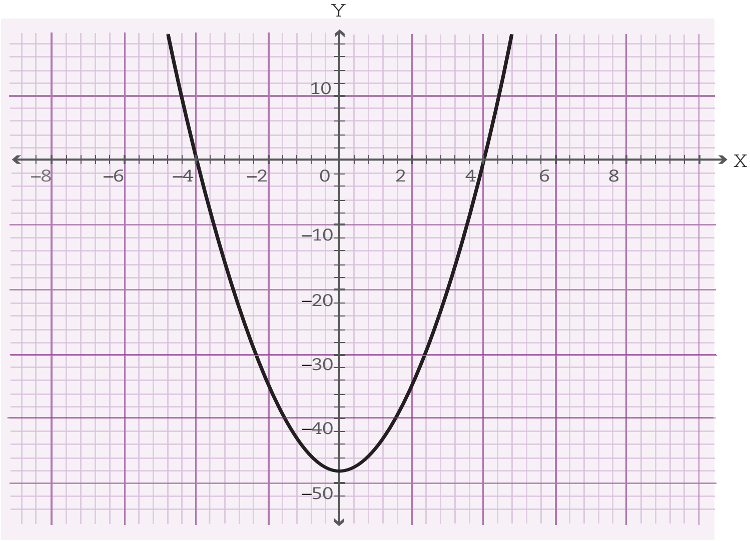
¿Qué expresión algebraica representa su área? ______________

c) De las siguientes ecuaciones, dos de ellas representan la situación descrita arriba. Subráyenlas.

$x(3x) = 48$	$(x + 3x)^2 = 48$	$3x^2 = 48$	$2(x + 3x) = 48$

En esas dos ecuaciones, x representa la medida del ancho del rectángulo. Sustituyan x por el valor que encontraron en el inciso a) y comprueben que la ecuación se satisface.

d) La ecuación $3x^2 - 48 = 0$ está asociada a la siguiente gráfica. Encuentren un valor que satisfaga la ecuación.



e) De acuerdo con la gráfica, el número –4 es una solución de la ecuación. ¿Es posible que ese valor sea la medida del ancho del terreno? ______________________

____

¿Por qué? ____

____

____

4. Verifiquen con ayuda de su maestro los resultados encontrados. Después lean y comenten la siguiente información.

Para encontrar el valor de x en una ecuación como $x^2 - 36 = 0$, que es equivalente a $x^2 = 36$, es necesario obtener la raíz cuadrada de ambos miembros de la ecuación de la forma $\sqrt{x^2} = \sqrt{36}$, de donde resultan las dos raíces de la ecuación $x = \pm 6$, que es equivalente a decir que

$$x_1 = +6 \quad \text{y} \quad x_2 = -6$$

Sin embargo, en algunas ocasiones, una de las dos soluciones de una ecuación cuadrática no es necesariamente la solución de la situación que representa, como ocurre en el caso del área de una figura, donde solamente se consideran los valores positivos de las raíces.

Dato interesante
La ciencia se vale de las ecuaciones para formular leyes; por ejemplo, hay una que, para este momento, ya te es familiar: $a^2 + b^2 = c^2$. Sí, se trata del teorema de Pitágoras.

En una ecuación como $x^2 = 15$, puesto que 15 no tiene raíz cuadrada exacta, el resultado puede expresarse como $x = \pm\sqrt{15}$, o con un valor aproximado de $x \approx \pm 3.87$; sin embargo, lo más conveniente en estos casos es emplear la expresión con radical.

5. Observen el recurso audiovisual *Ecuaciones cuadráticas 1* para analizar las características de las ecuaciones de segundo grado.

6. Utilicen el recurso informático *Análisis de ecuaciones cuadráticas* para continuar analizando gráficas y expresar algebraicamente ecuaciones lineales y cuadráticas.

5. Funciones 1

Sesión 1

Para empezar

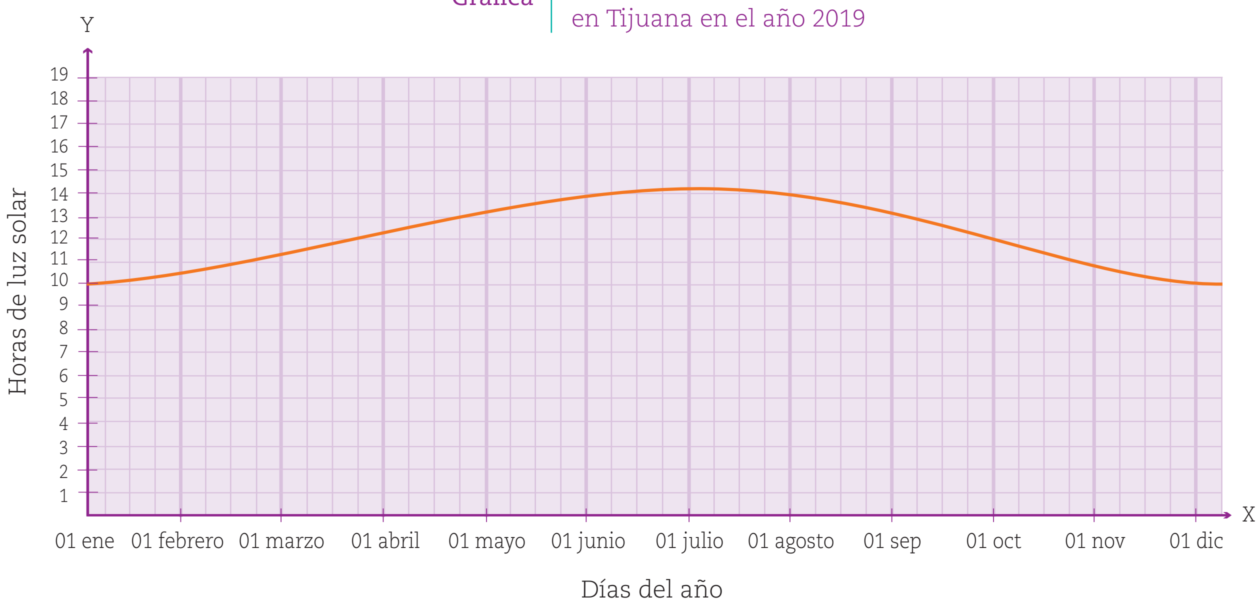
La duración del día, al igual que la de la noche, depende de la época del año y de la parte del mundo en la que nos encontremos. Esto se debe a que, como sabes, la Tierra efectúa un movimiento de traslación alrededor del Sol y otro de rotación sobre su propio eje, que tiene cierta inclinación respecto al Sol. ¿Qué tiene que ver esto con la duración de los días o la diferencia de estaciones a lo largo del año? Si se registrara durante un año la cantidad de horas de luz solar que hay diariamente y se graficaran los datos, ¿qué forma tendría la gráfica? ¿Sería una línea recta o una curva? En esta secuencia aprenderás a analizar casos de variación de manera cualitativa mediante la lectura e interpretación de gráficas o tablas que representan diferentes sucesos.

Manos a la obra

Horas de luz solar en distintos lugares de México y del mundo

1. Trabajen en pareja. Analicen la siguiente gráfica del registro de la cantidad de horas con luz solar diarias en la ciudad de Tijuana durante 2019. Después respondan lo que se pide.

Gráfica | Duración de la luz solar en Tijuana en el año 2019



Fuente: https://bit.ly/2HZFOus

a) ¿Cuándo se hacen más cortos los días? ____________________

b) ¿En qué mes se encuentran el día más largo y el más corto del año? ____________________

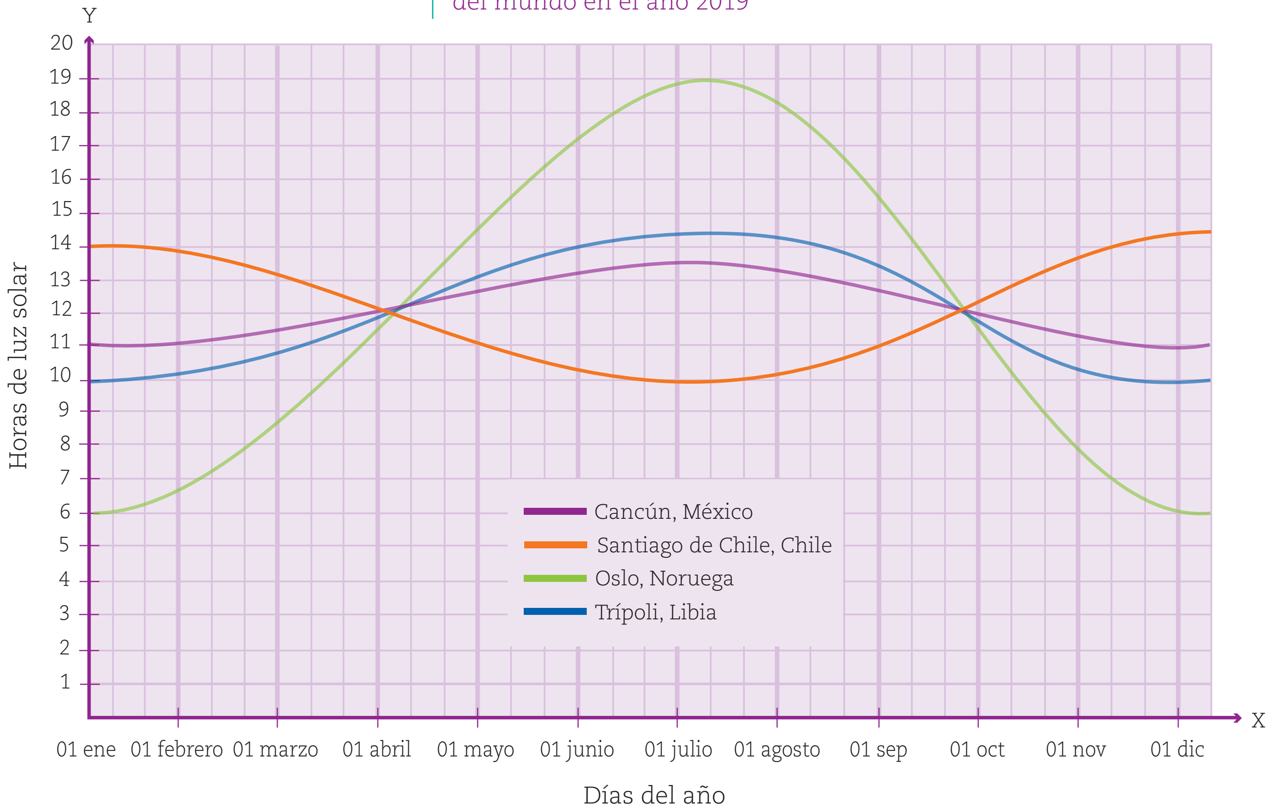
____

c) ¿Cuántas horas de luz solar tiene el día más largo? ____________________

d) ¿Cuántas horas de luz solar hubo aproximadamente el 31 de diciembre, el 1 de abril y el 30 de octubre? ____________________

2. En la siguiente gráfica se muestra el flujo del cambio en las horas con luz solar durante los 365 días de 2019 en cuatro ciudades del mundo. Respondan las preguntas con base en los datos que aparecen en ella.

Gráfica | Duración de la luz solar en cuatro ciudades del mundo en el año 2019



Fuente: https://bit.ly/2HZFOus

a) En junio, ¿en qué ciudad dura más el día? __________ ¿En cuál menos? __________

¿A qué se deberá esto? ____________________

____

b) Si se considera el 31 de diciembre, ¿en qué ciudad dura más el día? __________

¿En cuál menos? ____________________

c) ¿Aproximadamente, en qué fechas es mayor la diferencia de horas entre las cuatro ciudades? __________ ¿Cuándo es menor? __________

d) ¿En qué fechas se intersecan todas las curvas? ____________________

e) Considerando las fechas en que la luz de día es la misma en estas ciudades, ¿sucederá lo mismo en todos los lugares del planeta? ______________ ¿Por qué? ____________________

f) ¿En cuál de las cuatro ciudades se parece más la duración del día a la de Tijuana? ______________ ¿Por qué sucederá esto? ______________

Dato interesante
La latitud es la distancia, medida en grados, que existe entre cualquier paralelo y la línea del Ecuador. Siempre se indica si esta distancia se mide hacia el hemisferio norte o al sur.

3. Investiguen y comenten qué pasa en las fechas en que la duración de la luz solar es igual en las cuatro ciudades y qué sucede cuando la diferencia entre ellas es mayor.

Sesión 2

Día a día

1. Trabajen en pareja. Consideren las gráficas de la sesión anterior para completar la tabla de abajo. Anoten la duración aproximada del día en las fechas solicitadas para cada ciudad.

Ciudad	Enero 1	Febrero 1	Marzo 21	Junio 21	Agosto 1	Septiembre 21	Noviembre 1	Diciembre 21
Tijuana	10 h					12 h		
Cancún	11 h						11 h y 30 minutos	

a) ¿Qué duración tiene el día más largo en Tijuana? ______________ Y, ¿en Cancún? ______________ ¿Ocurre en la misma fecha para ambas ciudades? ______________

b) ¿A qué se deberá que las gráficas de Tijuana y Cancún, aun estando en México, no tengan el mismo comportamiento? ____________________

2. La curva que representa la variación de luz de día a lo largo de 2019 en Santiago de Chile se comporta diferente a las demás.

a) ¿En qué días la gráfica es decreciente? ____________________

b) ¿En qué fecha la gráfica comienza a crecer? ____________________

c) Expliquen cuáles son las principales diferencias entre la gráfica de Santiago de Chile y las del resto de las ciudades. ____________________

d) ¿Cuáles podrán ser las causas? ____________________

3. Ubiquen en un mapamundi las cinco ciudades mencionadas en las gráficas de las páginas 46 y 47 e indiquen cuáles están en la misma latitud.

____

a) ¿Qué similitudes tienen Trípoli y Tijuana? _______________

b) ¿Cómo influye la ubicación de Santiago de Chile respecto a las otras ciudades en la variación de las horas de día a lo largo del año?

____

c) Analicen la posición de Oslo en el mapa e intenten dar una explicación al comportamiento de su gráfica. _______________

Vínculo con... Geografía

Revisa el libro de Geografía de primer grado para retomar algunos de sus mapamundis y resolver la actividad 3 de esta página. También puedes encontrarlo en internet en la liga bit.ly/2xhRaIR. Consulta las páginas 67 o 69.

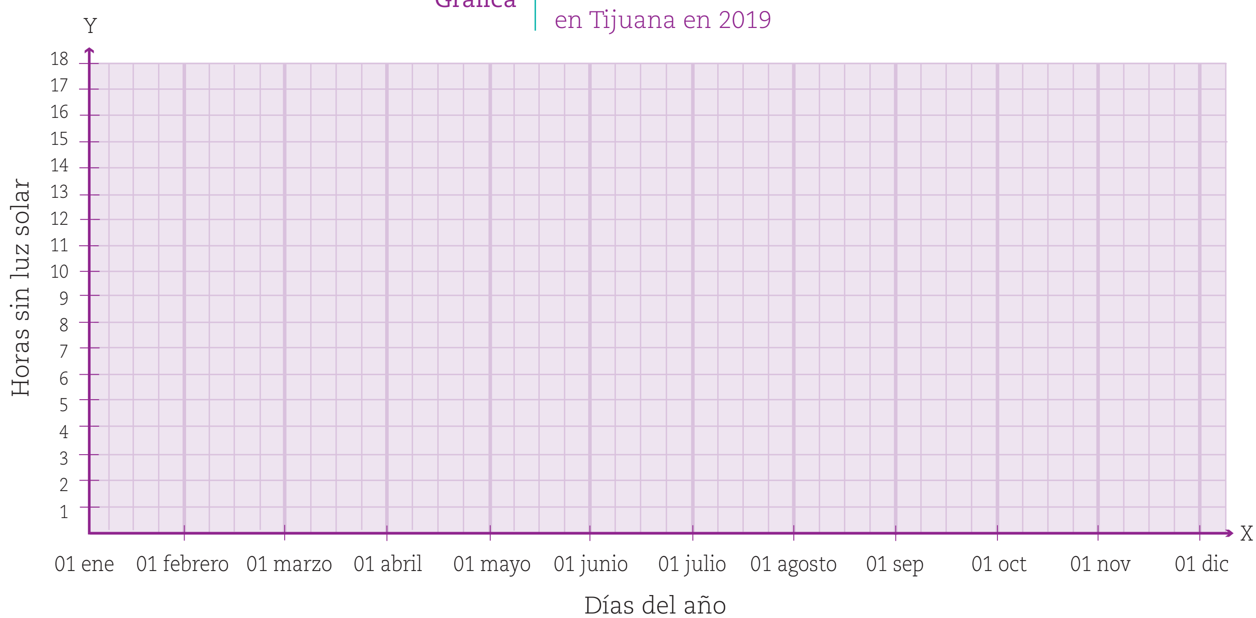
4. En grupo, y con apoyo del maestro, comenten: ¿por qué a cada fecha y a cada ciudad sólo les corresponde un dato de duración de horas en la gráfica?

5. Junto con su maestro, lean y comenten lo siguiente.

> En las gráficas y en las tablas de valores suele presentarse una relación de dependencia entre dos variables.

6. Con la información de la actividad 1 de la sesión 1, tracen la gráfica que representa la variación de las horas sin luz solar en la ciudad de Tijuana a lo largo de 2019. Después respondan las preguntas.

Gráfica | Duración de la noche en Tijuana en 2019



a) Cuando la luz solar dura 12 horas, ¿cuántas horas tiene la noche?

____

b) ¿Cuántos valores se registran como duración de la noche en cada fecha del año?

____

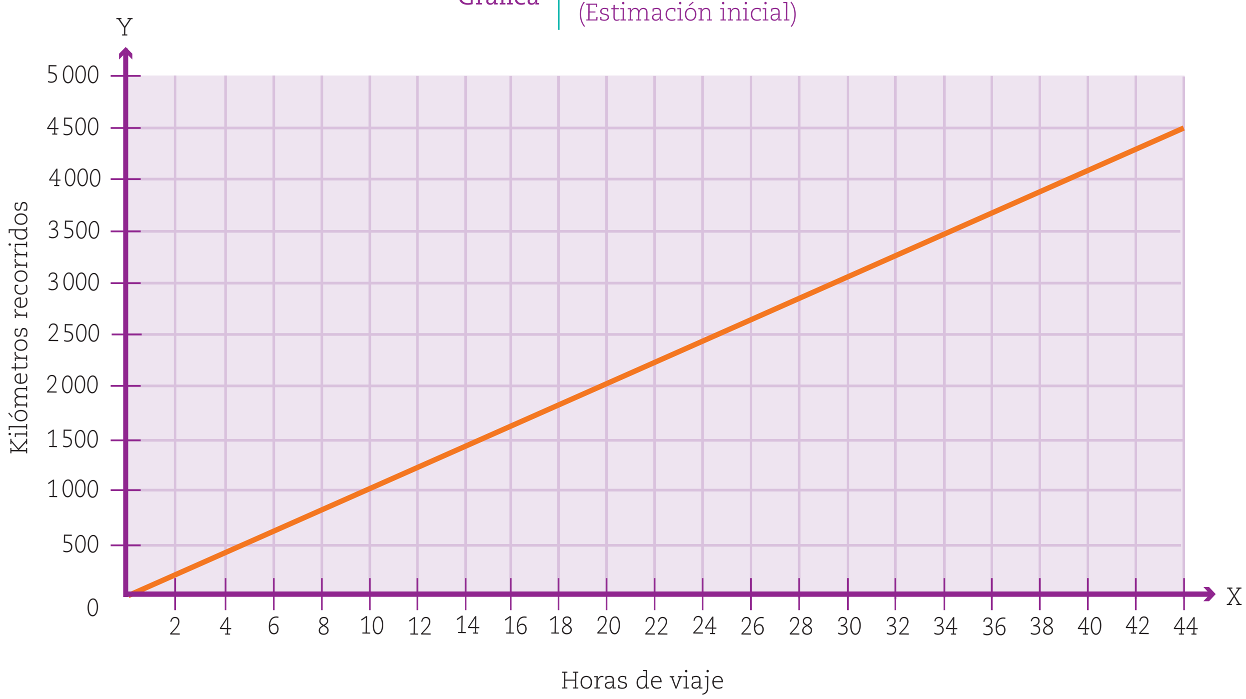
7. En equipo, utilicen un pliego de cartulina o papel bond y tracen la gráfica que represente la duración en horas de cada noche de 2019 para las cuatro ciudades que aparecen en la gráfica de la página 47. Distribuyan el trabajo de tal forma que todos participen en la realización de cada gráfica.
8. En grupo, y con apoyo de su maestro, comenten cómo fue el proceso de elaboración de las gráficas y qué información les fue útil para trazarlas.

Sesión 3

De Tijuana a Cancún

1. Trabajen en pareja las actividades de esta sesión. Amalia y su madre se mudan de Tijuana a Cancún. Para ello, consultan la página de la Secretaría de Comunicaciones y Transportes y encuentran una ruta que implica recorrer 4 350 km. Trazan la gráfica que ves aquí y que representa el kilometraje que recorrerán por cada hora de viaje si mantienen una velocidad constante. Con base en ella, respondan las preguntas que aparecen enseguida.

Gráfica | Viaje de Tijuana a Cancún (Estimación inicial)



a) ¿En cuánto tiempo completarán los 4 350 km de viaje Amalia y su madre?

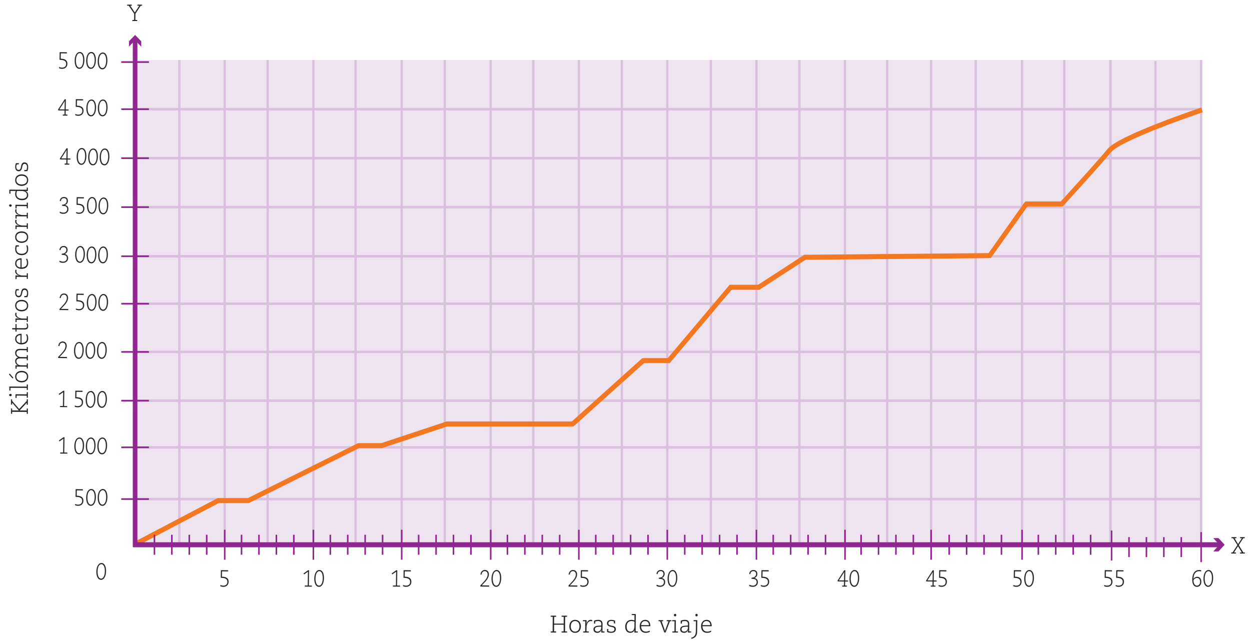
____

b) ¿A qué velocidad promedio estiman viajar? ____________________

c) Comenten con sus compañeros si los cálculos y la planeación que realizaron Amalia y su madre les permitirán llegar a Cancún en el tiempo estimado.

2. La siguiente gráfica muestra los datos reales del viaje, registrados por Amalia y su madre durante el trayecto a Cancún. Analícenla y después respondan las preguntas.

Gráfica | Viaje de Tijuana a Cancún (Datos reales)



a) ¿En cuántas horas realizaron el viaje a Cancún? ____________________

b) ¿Cuántas horas de diferencia hubo entre el tiempo real de duración del viaje y su estimación? ____________________

c) Expliquen qué significado tienen los segmentos de la gráfica que son paralelos al eje de las abscisas. ____________________

d) ¿Cuánto tiempo en total estuvo detenido el automóvil? ____________________

e) Comparen los trayectos en que el automóvil estuvo en movimiento y expliquen en cuáles viajaron a mayor velocidad. ____________________

____

f) Cuando llevaban 11 horas de viaje, Amalia y su madre hicieron una parada en Guaymas, Sonora, para cargar gasolina y merendar. ¿A cuántos kilómetros de Tijuana está Guaymas? ____________________

g) La ciudad de Tepic, Nayarit, se encuentra aproximadamente a 2000 kilómetros de Tijuana. De acuerdo con la gráfica, ¿qué tiempo de viaje llevaban al pasar por ahí?

____

3. Comenten con el resto de sus compañeros: ¿en qué tramos llevaban la misma velocidad?, ¿en cuáles hubo cambio de velocidad? Describan qué sucedió en el último trayecto y por qué la gráfica es curva. ____________________

Interior del Museo de las Californias, ubicado en Tijuana, Baja California; forma parte de las instalaciones del Centro Cultural Tijuana (CECUT), construido en 1982.

Dato interesante

Tijuana es una de las ciudades mexicanas más visitadas y es ejemplo de nuestra diversidad cultural. Se fundó el 11 de julio de 1889. Se sabe que ese lugar lo habitaban los kumiai. En el censo de 2010 se registró que en el estado de Baja California había un total de 381 hablantes de esta lengua indígena.

4. Ahora comenten las diferencias y similitudes entre las dos gráficas anteriores.

____

a) ¿A qué velocidad promedio estimaron viajar inicialmente Amalia y su madre?

____

b) ¿Cuánto tiempo transcurrió mientras el automóvil estuvo en movimiento?

____

c) Investiguen cuáles son los principales sitios de atracción turística y las actividades que se realizan en Tijuana y en Cancún. Anótenlas. ______________________________

d) ¿Cuáles podrían ser algunos de los motivos que tiene una persona para viajar de Tijuana a Cancún? ______________________________

5. En grupo, y con su maestro, lean y analicen la siguiente información:

Las gráficas que han leído, interpretado y construido en esta secuencia son una representación de la relación de dependencia que hay entre dos variables. A este tipo de relación se le llama *función* porque a cada valor asignado a la variable independiente le corresponde un único valor de la otra variable, la cual es dependiente de la primera.

Observen en las gráficas anteriores cómo a cada día del año le corresponde una y sólo una duración en horas de la luz solar. Para el caso del viaje de Amalia y su madre, la cantidad de kilómetros recorridos depende del tiempo. Así, en el caso de la duración de la luz solar, la variable independiente es el día del año, y la depediente, el número de horas de luz solar que le corresponde a ese día.

Para terminar

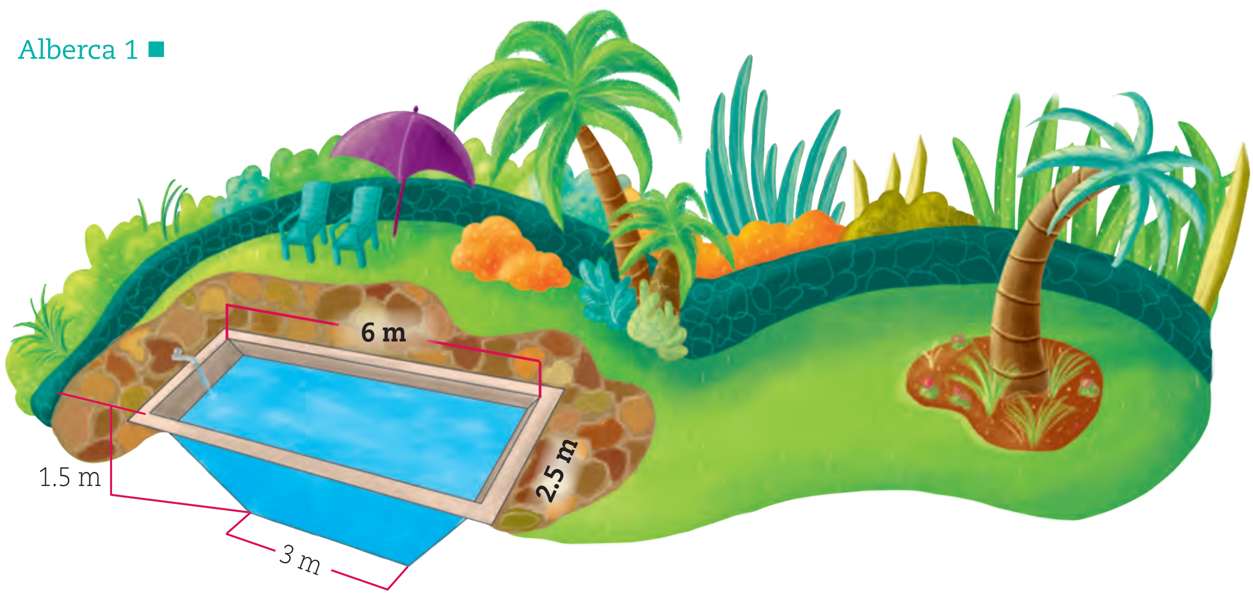
Albercas

Sesión 4

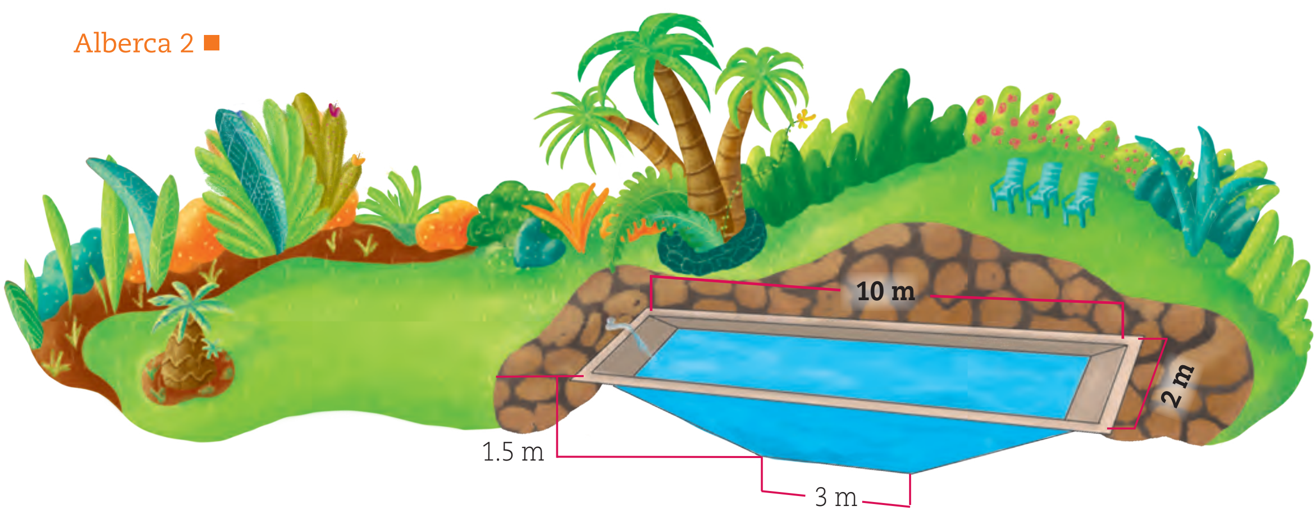
Actualmente, la ciudad de Cancún es uno de los principales centros turísticos de México y del mundo. Genera gran cantidad de empleos y una parte importante de la población del país emigra hacia allá para trabajar. Entre las muchas actividades que se realizan está el mantenimiento a las albercas de casas y hoteles.

1. Trabajen en pareja. Consideren la situación y realicen lo que se les indica.
   Las siguientes imágenes representan las dos albercas que Fabián comienza a llenar a las seis de la mañana mediante un sistema de encendido manual. Cada una tiene su propia llave y ambos sistemas expulsan la misma cantidad de agua.

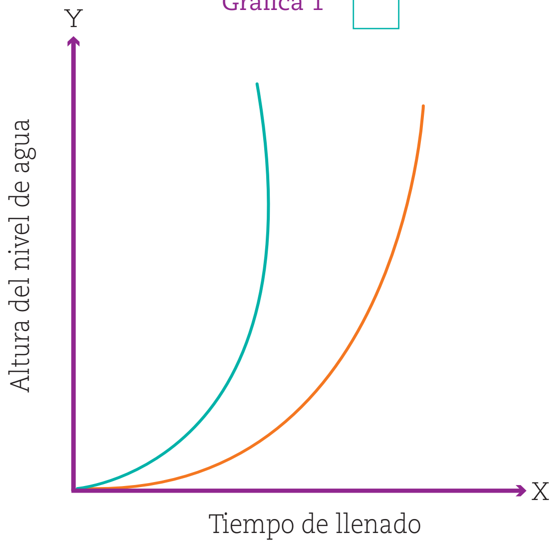
Alberca 1



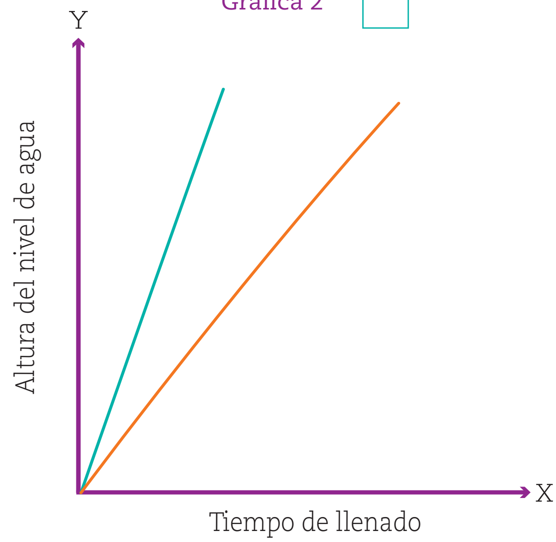
Alberca 2



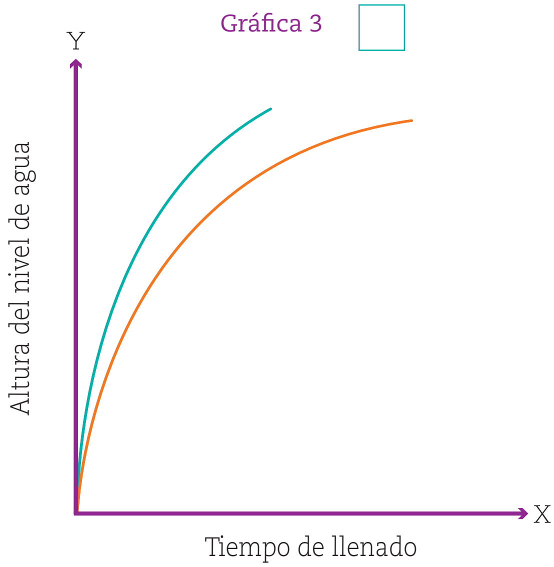
Gráfica 1 ☐



Gráfica 2 ☐



Gráfica 3 ☐



Alberca 1 ■ Alberca 2 ■

a) Indiquen con una ✓ cuál es la gráfica que representa el comportamiento del llenado de las dos albercas. Justifiquen su elección.

____

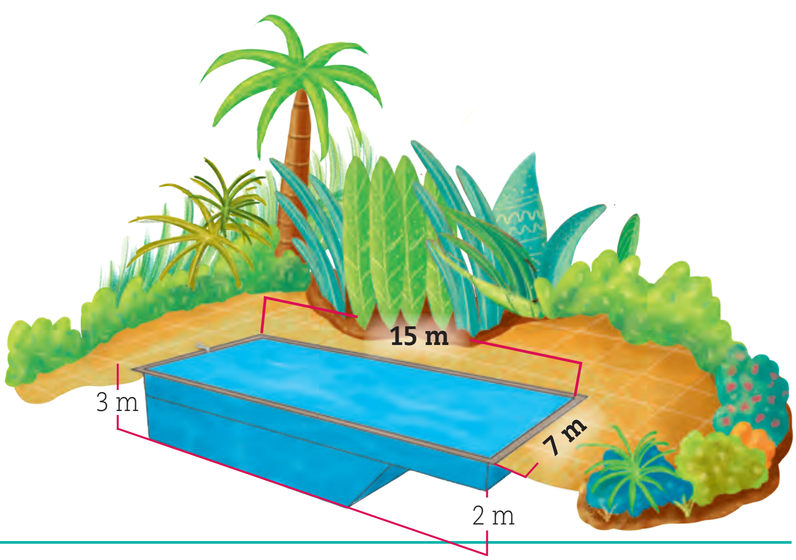
____

b) ¿En cuál de las dos albercas se tiene que cortar primero el flujo de agua para evitar que se desborde. ______________________________

Dato interesante

No todas las piscinas están hechas y recubiertas con el mismo material, por lo que no se puede usar el mismo tipo de cloro para mantenerlas limpias. Por ejemplo, se recomienda usar 10 g de cloro en polvo al 90% por cada 10 000 L de agua en albercas que están recubiertas con pintura.

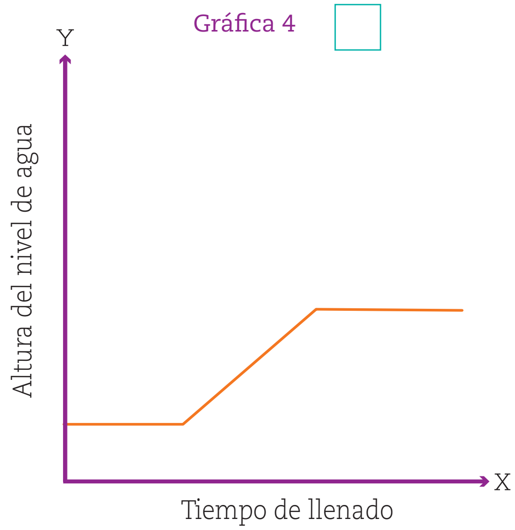
2. La siguiente imagen representa la alberca de un hotel. Para llenarla se utiliza una llave que vierte siempre la misma cantidad de agua.



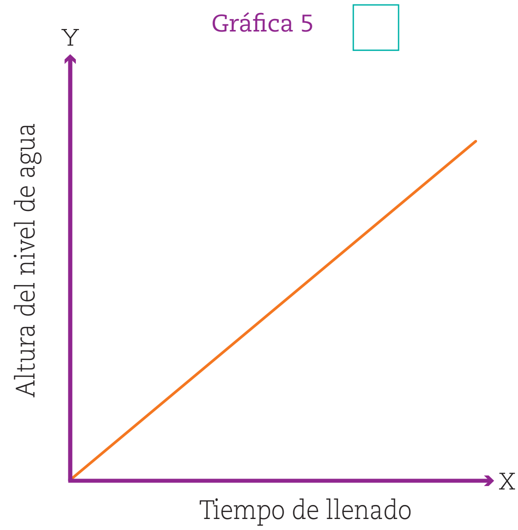
El nivel de agua de la alberca mostrada aumenta conforme el tiempo transcurre. Analicen las siguientes gráficas y seleccionen la que representa la variación del nivel de agua respecto del tiempo de llenado. Márquenla con una ✓. Justifiquen su selección: ____

____

Gráfica 4 ☐



Gráfica 5 ☐



Gráfica 6 ☐

3. Comenten sus respuestas con el grupo y con el maestro. Destaquen la dependencia entre las variables y el tipo de variación que se da.

4. Observen el recurso audiovisual *Llenado de recipientes* junto con su maestro y analicen por qué las características de los recipientes determinan si la gráfica está compuesta por líneas rectas o por curvas.

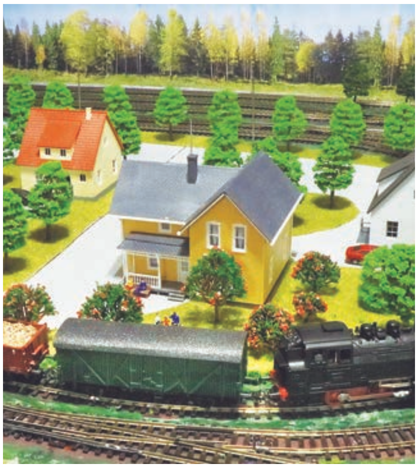
5. Usen el recurso informático *Análisis cualitativo de gráficas de relaciones de variación*, que les permitirá comprender, interpretar y observar la dependencia del valor de una de las variables o cantidades respecto de otra.

Dato interesante
Los cenotes, del maya *dz'onot*, que significa "caverna con agua", son pozos acuíferos que se alimentan de las filtraciones de la lluvia y de los ríos subterráneos. La mayoría se encuentra en la península de Yucatán. Además, algunos de ellos, al estar abiertos, son grandes albercas naturales donde se puede disfrutar de sus aguas cristalinas y refrescantes.

6. Polígonos semejantes 1

Para empezar

Sesión 1



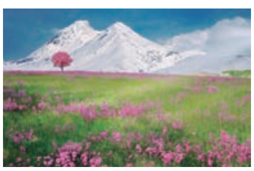
Seguramente has visto las figuras hechas a escala. La fotografía de la izquierda es de una maqueta de trenes hecha a una escala de 1:87. Esta expresión significa que las figuras de la maqueta son 87 veces más pequeñas de lo que son en la realidad. Los planos que los arquitectos hacen de las casas son un ejemplo de objetos trazados a escala. ¿Qué otros ejemplos de este tipo conoces? ¿Sabes cuáles son las características que debe reunir una figura para estar hecha a escala de otra? ¿Sabes, por ejemplo, que es imposible hacer una maqueta a escala del Sistema Solar? ¿A qué crees que se deba? En esta secuencia estudiarás un concepto matemático relacionado con las escalas: la semejanza.

Manos a la obra

Figuras a escala

1. De las siguientes fotografías, dos están a escala una de la otra, ¿cuáles son?

_____________ y _____________.



1

2

3

4

¿Por qué consideras que esas dos fotografías están a escala?

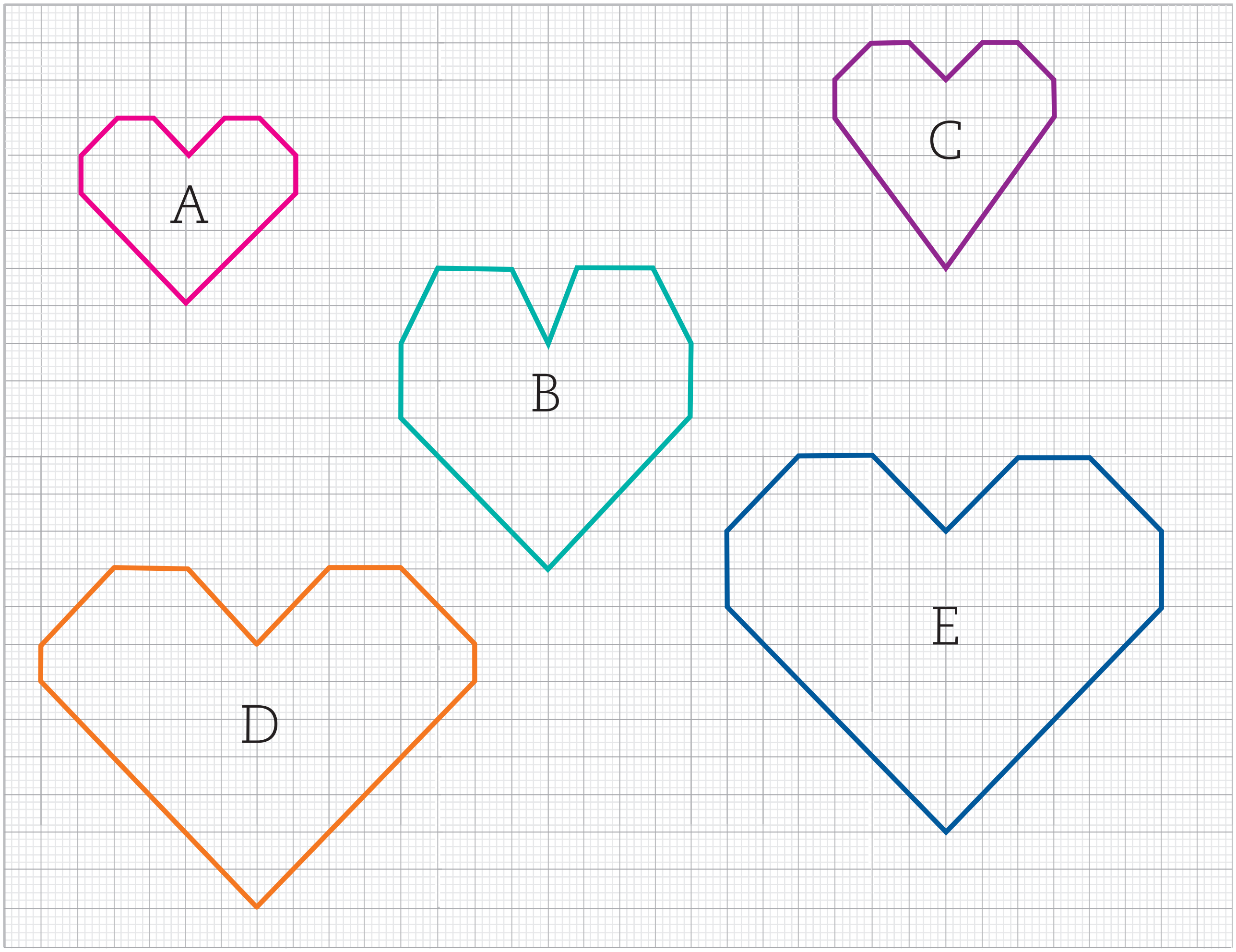
____

____

____

____

2. ¿Cuál figura está hecha a escala de la figura A? ________________



Argumenta tu respuesta.

3. En tu cuaderno traza dos figuras a escala de la figura A y dos a escala de la figura B.

4. Compara tus respuestas con las de tus compañeros. En particular, sus argumentos en las preguntas 1 y 2, y respondan: ¿en qué se fijan para saber si una figura está hecha a escala de otra? Comenten la siguiente información y den ejemplos para cada caso.

En matemáticas, a las figuras que están hechas a escala una de la otra se les llama *figuras semejantes*.

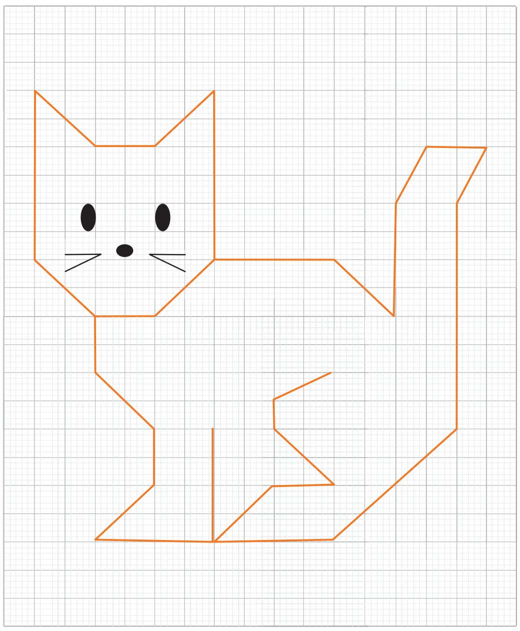
En la vida cotidiana, la palabra *semejante* se usa de otra manera: decimos que es semejante cuando es *parecido*; pero en matemáticas tiene un significado específico: que debe cumplir con ciertas condiciones.

Sesión 2

Escala o razón de semejanza

1. Trabajen en pareja. En su cuaderno, tracen las figuras F y G a escala de la figura del gato, según lo que se indica.

Dato interesante
La escala H0, también conocida como HO, es la escala del modelismo ferroviario más popular.



- Figura F: Los segmentos deben medir el doble.
- Figura G: Los segmentos deben medir la mitad.

a) ¿Cuál es la escala de la figura G respecto a la figura original? ____________
¿Por qué? ____
____

b) ¿Cuál es la escala de la figura F respecto a la figura original? ____________
¿Por qué? ____
____

2. Lean la siguiente información y compárenla con las respuestas de las preguntas anteriores:

Cuando una imagen se reproduce más grande o más pequeña que la original, se dice que está hecha a escala. En matemáticas, la escala también se conoce como *razón de semejanza*.

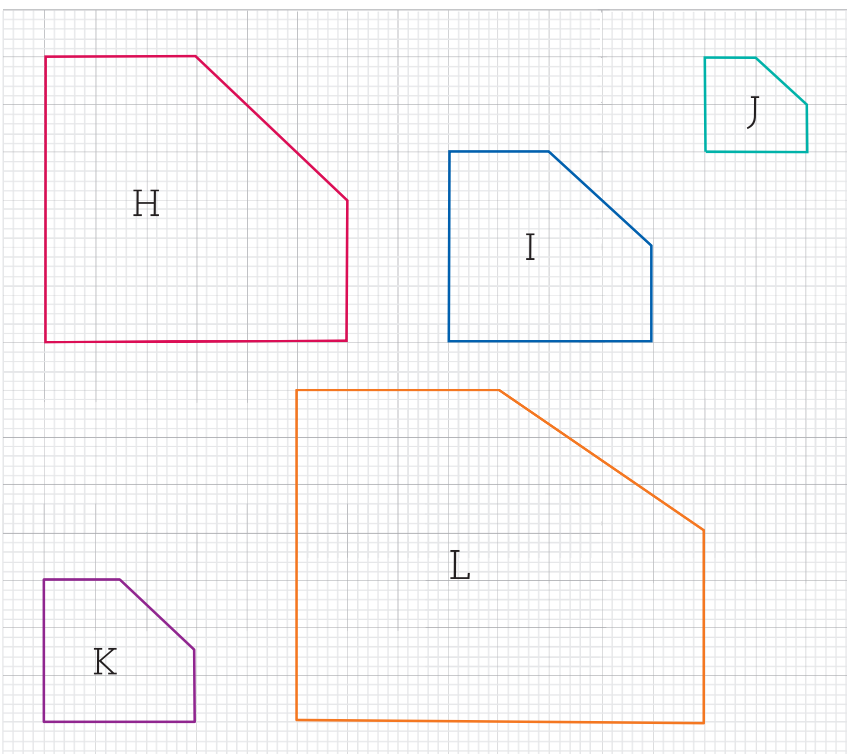
Es decir, cuando la imagen final es el doble del tamaño de la original, se dice que está hecha a escala 2:1 (que se lee como 2 a 1), o bien, que su razón de semejanza es $\frac{2}{1} = 2$.

Por otro lado, cuando la imagen final es la mitad del tamaño de la original, se dice que está hecha a escala 1:2 (que se lee como 1 a 2), o bien, que su razón de semejanza es $\frac{1}{2}$

a) ¿Cuál es la razón de semejanza de la figura G respecto a la figura F? ____________

b) ¿Cuál es la razón de semejanza de la figura F respecto a la figura G? ____________

3. Consideren los siguientes polígonos semejantes y completen la tabla.



Dato interesante
La proyección de Mercator es, en síntesis, un mapamundi. Fue creada para facilitar la navegación a los barcos, trazando sus líneas rectas. A pesar de su gran utilidad, es inexacta, pues África y Sudamérica aparecen reducidos en tamaño.

Figura original	Reproducción	Razón de semejanza de la original con la reproducción	Razón de semejanza de la reproducción con la original
H	J		
H	I		
L	K		
I	K		
L	H		

4. Comparen sus respuestas con las de sus compañeros de grupo. Platiquen cómo determinan la razón de semejanza entre dos polígonos.

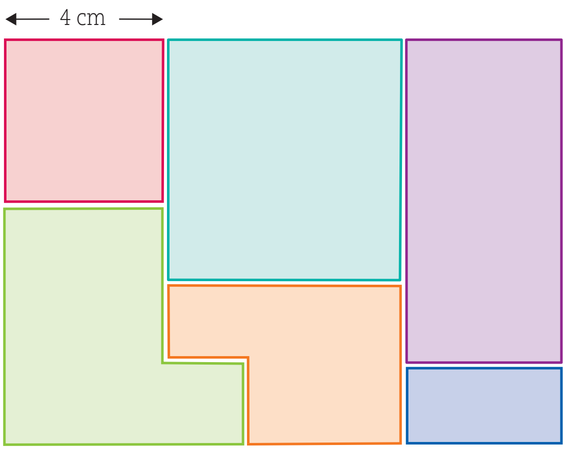
5. Trabajen con el recurso informático *Razón de semejanza* para que practiquen la determinación de esta razón entre dos polígonos.

6. En grupo y con ayuda de su maestro, investiguen la distancia al Sol y el diámetro de cada planeta del Sistema Solar. Discutan si sería posible hacer una maqueta a escala.

Sesión 3

Rompecabezas geométricos

1. Trabajen en equipo. En el recortable 2 de la página 273 encontrarán una figura como la siguiente. Hagan lo que se indica.



a) Recorten cada una de las piezas y repártanlas entre los integrantes del equipo.

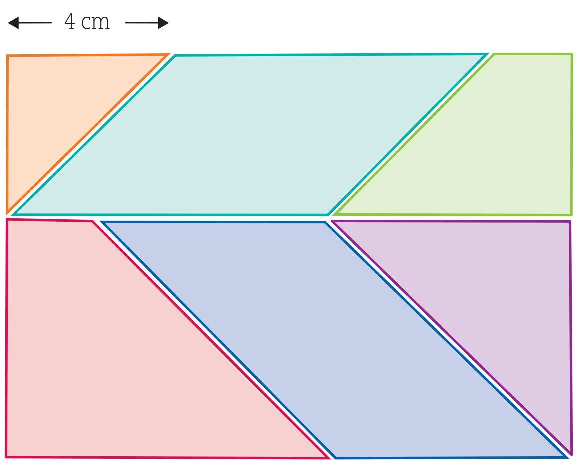
b) Cada uno trace su o sus figuras a escala de tal manera que el lado que mide 4 cm, en su figura deberá medir 3 cm.

c) Cuando todos hayan terminado, armen el rompecabezas. En caso de que las piezas no embonen, analicen qué sucedió y corrijan.

2. ¿Cuál es la razón de semejanza del rompecabezas que hicieron respecto al rompecabezas de su material recortable? ______________________

3. Comenten con los compañeros del grupo si pudieron armar el rompecabezas que trazaron, y, si tuvieron errores, a qué se debieron y cómo los corrigieron. Platiquen cómo determinaron la razón de semejanza.

4. Repitan la actividad anterior con el rompecabezas geométrico que está en su recortable 3 de la página 275. Ahora harán una ampliación de manera que el lado que mide 4 cm, en el suyo mida 5 cm.



a) ¿Cuál es la razón de semejanza del rompecabezas que hicieron respecto al rompecabezas de su material recortable? ______________________

____

b) Además de los lados, ¿qué otro dato se requiere para trazar las figuras semejantes a los romboides de este rompecabezas? ______________________

____

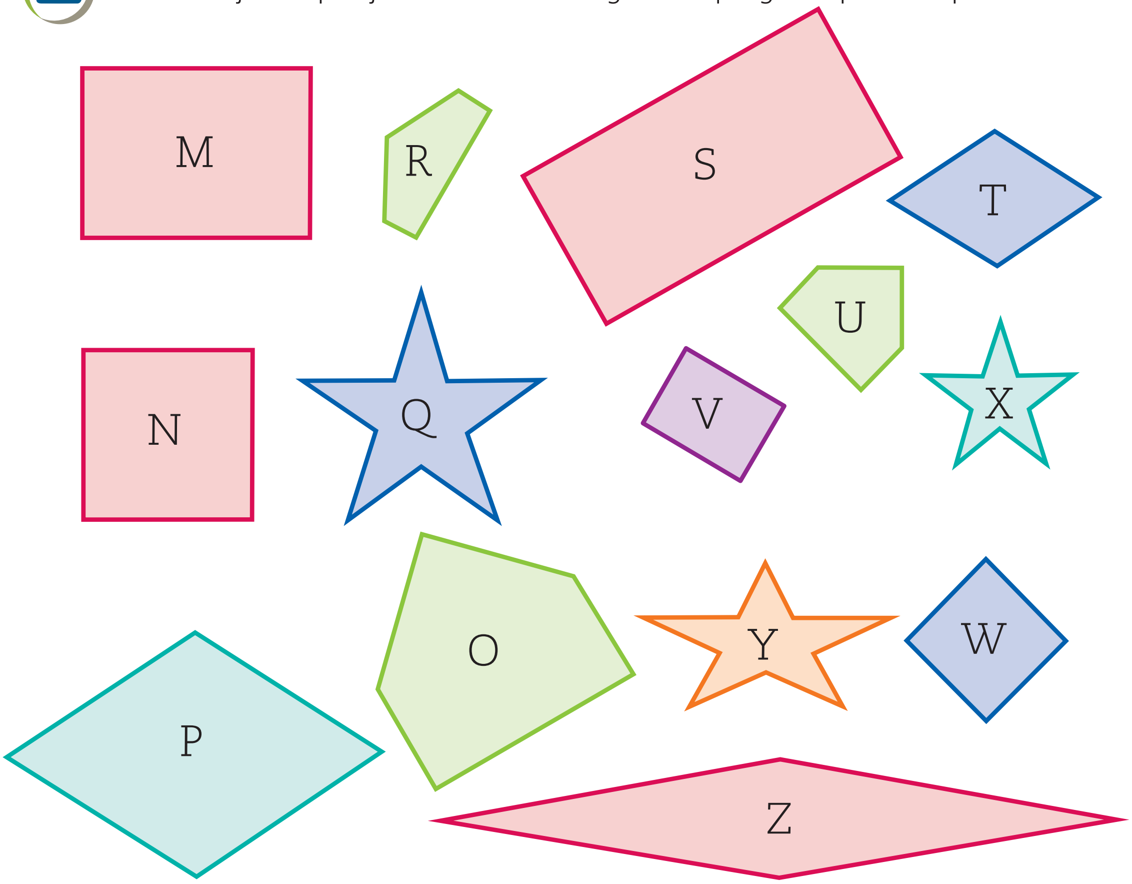
5. Comparen el rompecabezas que trazaron con los de otros compañeros del grupo. Platiquen cuáles fueron los problemas a los que se enfrentaron y si tuvieron necesidad de medir los ángulos.

6. Observen el recurso audiovisual *Construcción de polígonos semejantes*, donde analizarán la proporcionalidad de los lados y la igualdad de sus ángulos correspondientes.

Sesión 4

Polígonos semejantes

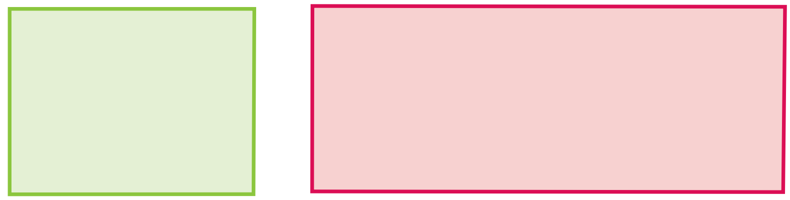
1. Trabajen en pareja. Consideren los siguientes polígonos para completar la tabla.



Glosario
Argumento es el razonamiento que prueba o demuestra una afirmación.

Polígono	Es semejante al polígono	Argumento
M		
N		
O		
P		
Q		

2. Consideren los dos polígonos de la derecha.



   a) ¿Son semejantes? ________________

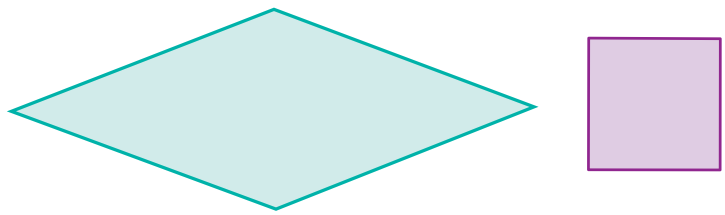
   ____

   b) Argumenten su respuesta.

   ____

   ____

3. Consideren los dos polígonos de la derecha.



   a) ¿Son semejantes? ________________

   ____

   b) Argumenten su respuesta.

   ____

   ____

4. Dos argumentos respecto a los polígonos de la actividad 3 son los siguientes:

   a) *Son semejantes porque los lados del rombo miden el doble de los lados del cuadrado, la razón de semejanza es 2 a 1.*

   b) *No son semejantes porque, aunque sus lados son proporcionales (los lados de uno miden el doble de los lados del otro), sus ángulos no son iguales.*

   - ¿Con qué argumento están de acuerdo? ________________________________

     ¿Por qué? ____

     ____

     ____

5. Comparen sus respuestas y procedimientos con los de otros compañeros; en caso necesario, corrijan. Comenten los argumentos que anotaron para determinar la semejanza de las figuras y observen que ambas condiciones (*igualdad de ángulos y proporcionalidad de lados correspondientes*) son necesarias para que las figuras sean semejantes.

6. Lean y comenten con ayuda de su maestro la siguiente información.

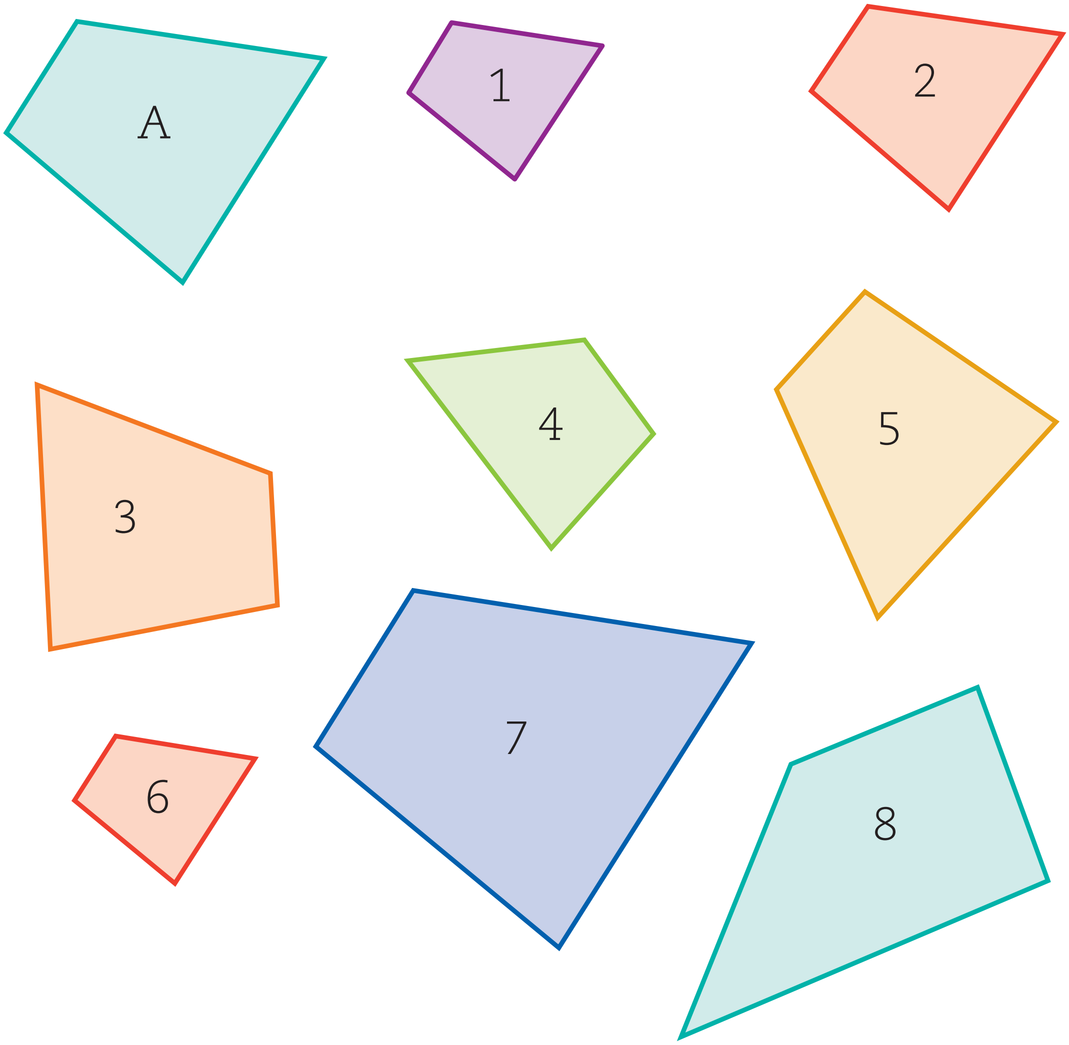
> Dos *polígonos son semejantes* si sus ángulos son iguales, respectivamente, y sus lados correspondientes son proporcionales, esto es, si existe entre ellos la misma razón de proporcionalidad.

Sesión 5

Para terminar

Semejante o congruente

1. Trabajen en pareja. Consideren los siguientes polígonos.

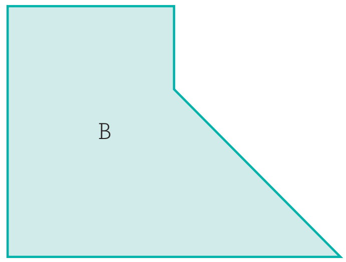


Se dice que son *polígonos congruentes* cuando dos o más figuras tienen exactamente la misma forma y la misma medida.

a) ¿Cuáles polígonos son congruentes con el polígono A? __________

b) ¿Cuáles polígonos son semejantes al polígono A? __________

2. Tracen lo que se indica.



Un polígono congruente con el polígono B	Un polígono semejante al polígono B, cuya razón de semejanza sea 1

a) ¿Cómo son entre sí los dos polígonos que trazaron? ____________________

b) Anoten sus conclusiones. ____________________

____

3. Comparen sus respuestas y sus procedimientos con otros compañeros de grupo y, en caso necesario, corrijan. Comenten si los polígonos 3 y 5, de la página 64, son semejantes, congruentes o ambos respecto al polígono A de la actividad 1 de esa misma página.

4. Platiquen y discutan en grupo y con ayuda de su maestro la siguiente afirmación:

> Todos los *polígonos congruentes* son semejantes entre sí, pero no todos los polígonos semejantes son congruentes entre sí.

5. Observen el recurso audiovisual *Aplicaciones en situaciones reales de la semejanza* para que conozcan más acerca de la semejanza.

7. Razones trigonométricas 1

Sesión 1

Para empezar

Una manera de mejorar las condiciones de vida de las personas es creando un entorno en el que se respeten sus derechos humanos, así como sus necesidades específicas. Esto representa un aspecto de la calidad de vida. Por ejemplo, una ciudad incluyente tiene espacios públicos, como parques, oficinas, puentes peatonales, banquetas, escuelas, hospitales, etcétera, con rampas de acceso para personas que usan silla de ruedas.

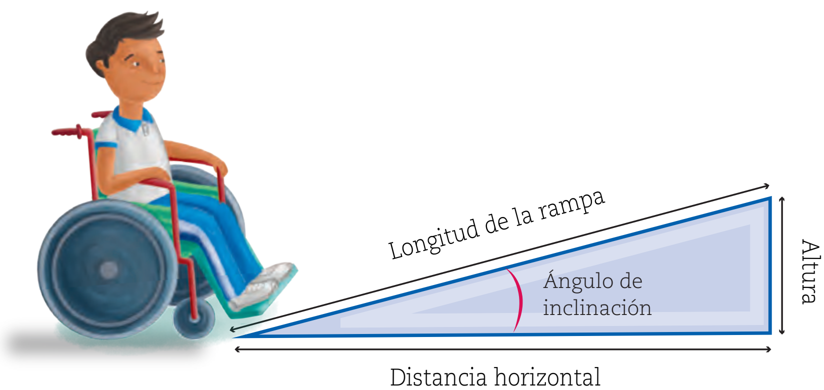
¿En los lugares públicos de tu comunidad hay rampas para el acceso con silla de ruedas?, ¿crees que cualquier rampa sirve para que una persona en silla de ruedas la use?, ¿qué características debe tener una rampa para que sea apropiada? Aunque no lo creas, algunas de esas características tienen que ver con la trigonometría, una rama del conocimiento de las Matemáticas que empezarás a estudiar en esta secuencia.

Manos a la obra

Rampas para sillas de ruedas

1. Trabajen en pareja. Observen las medidas que intervienen en una rampa.

Dato interesante
Según la *Guía básica de accesibilidad para personas con discapacidad en edificios y áreas de atención ciudadana de la Secretaría de Finanzas del Estado de México*, si la longitud de una rampa para silla de ruedas es de hasta 1.50 m, su pendiente máxima debe ser de 12%, si mide entre 1.50 y 3.00 m, debe ser de 10%; hasta los 15 m, la pendiente máxima debe ser de 6%.

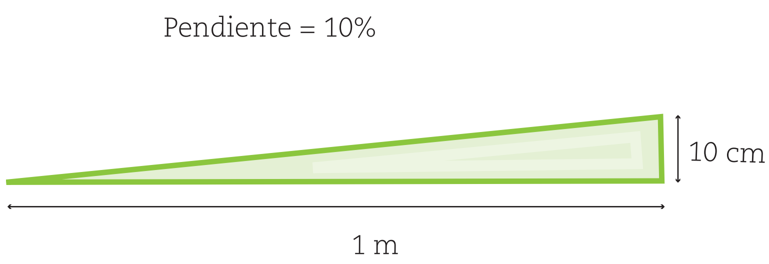


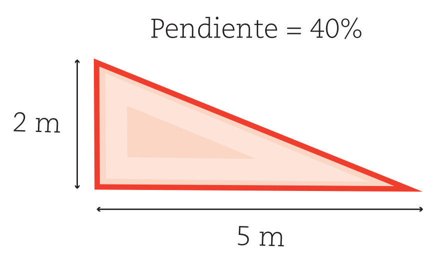
En el lenguaje coloquial se usa la expresión inclinación de la rampa para referirse a lo que, en Matemáticas, llamamos *pendiente* de la rampa.

a) ¿Consideran que la inclinación o pendiente de la rampa depende de la distancia horizontal, de la altura o de ambas? ______________________________

¿Por qué? ____

2. La pendiente de una rampa se especifica en porcentajes. Los siguientes triángulos representan rampas. Analicen la información y anoten debajo cómo se calculó la pendiente de cada una.





3. Comparen sus respuestas con las de sus compañeros de grupo y, con ayuda de su maestro, verifiquen si son correctas. En particular, comenten lo que anotaron acerca del cálculo de la pendiente de una rampa.

4. Completen la tabla de acuerdo con la pendiente de la rampa que se indica.

Pendiente (%)	Distancia horizontal (cm)	Altura de la rampa (cm)
10	85	
6		6
8	130	
12		18
15	200	

5. Comparen sus respuestas y procedimientos con sus compañeros. Comenten la siguiente información.

La pendiente de una rampa no depende sólo de la distancia horizontal o de la altura, sino de la razón entre ambas.

$$\textit{Pendiente de la rampa} = \frac{\textit{altura de la rampa}}{\textit{distancia horizontal}}$$

Una razón se puede expresar como porcentaje:

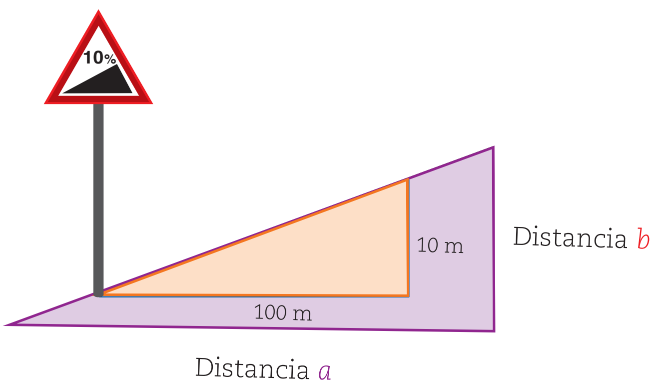
$$\textit{Porcentaje de la pendiente de la rampa} = \frac{\textit{altura de la rampa}}{\textit{distancia horizontal}} \times 100$$

Sesión 2

Pendientes de calles y carreteras

1. Trabajen en pareja. Al igual que las rampas, la pendiente de calles y carreteras también se expresa en porcentajes. En el siguiente esquema, la distancia horizontal se representa con la letra *a* y la vertical con la *b*.

De acuerdo con el siguiente señalamiento de tránsito en la carretera, completen la tabla.



Distancia *a* (m)	Distancia *b* (m)
100	
300	
650	
	150
	225

2. Consideren que en una carretera la distancia *a* es un kilómetro y medio; y la *b*, 90 m; en otra carretera, la distancia *a* es un kilómetro y la *b*, 60 m.

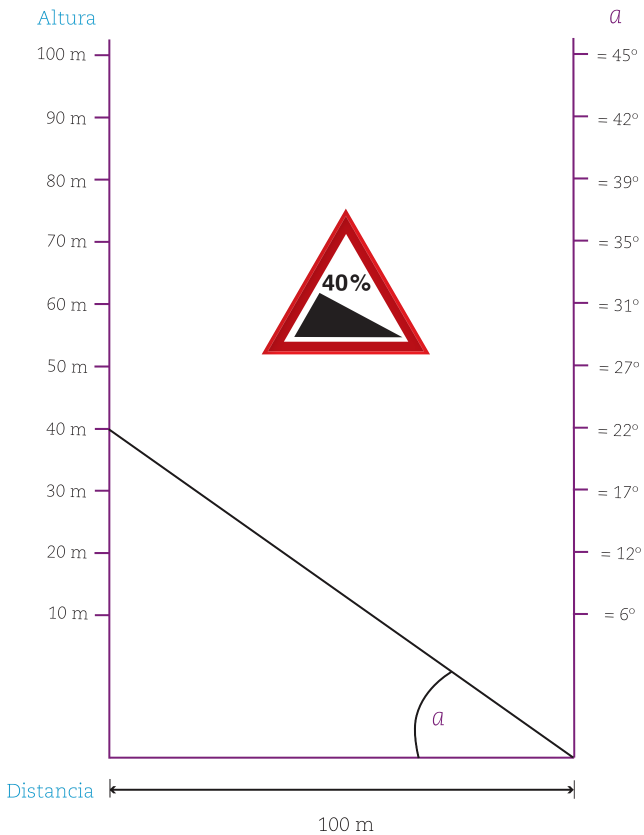
a) ¿Tienen la misma pendiente ambas carreteras? ____________

Argumenten su respuesta. ____________

____

____

3. En el bloque 2 aprenderán a calcular los ángulos que corresponden a los porcentajes de las pendientes; por ahora, consideren el siguiente diagrama. En él se observa que a una pendiente de 40% le corresponde, aproximadamente, un ángulo de 22°.



Respondan lo siguiente.

a) Aproximadamente, ¿a qué ángulo corresponde una pendiente de 20%?

____

b) Si se tiene un ángulo de inclinación de 17°, ¿a qué porcentaje se refiere aproximadamente? ______________________________

c) La calle más inclinada del mundo se encuentra en Nueva Zelanda; tiene una pendiente de aproximadamente 35%, ¿cuál es su ángulo de inclinación?

____

Dato interesante
El signo ≈ significa aproximadamente.

4. Comparen sus procedimientos y respuestas con los de otros compañeros. Si hay diferencias, lleguen a un acuerdo. Si hay errores, corríjanlos.

5. Practiquen el cálculo de pendientes de rampas y carreteras dando solución a las situaciones que presenta el recurso interactivo *¿Cuál tiene mayor pendiente?*

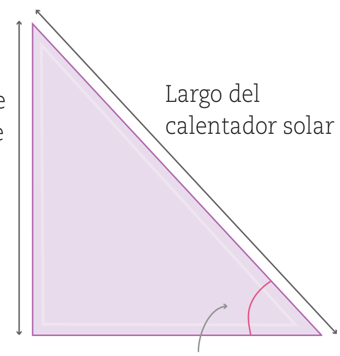
6. Observen el recurso audiovisual *Construcción de rampas de acceso y carreteras* para conocer algunos de sus diseños y planos.

Sesión 3

Calentadores solares

1. Trabajen en pareja. Un calentador solar es el aparato que capta la energía del Sol para elevar la temperatura del agua. El ángulo de inclinación con que debe colocarse depende de su longitud y de la latitud del lugar donde sea colocado. Observen y luego respondan lo que se pide.

Calentador solar



a) Para la Ciudad de México se recomienda que la altura a la que se coloque el calentador solar sea la mitad de la medida que tiene de largo. Con base en este dato, completen la siguiente tabla.

Largo del calentador solar (m)	Altura del calentador solar (m)
1.50	
	0.80
1.80	
2.3	
	1.45

Dato interesante
Los calentadores solares son inocuos para el medio ambiente porque no emiten contaminantes, ¡y fueron inventados hace más de un siglo!

b) El ángulo de inclinación de los calentadores solares indicados en la tabla, ¿es el mismo o varía? ________________ Argumenten su respuesta. ________________

____

2. En el municipio de Álamos, en Sonora, la altura a la que debe colocarse el calentador solar es de $\frac{6}{10}$ de su medida de largo. Tomen en cuenta esta información para completar la siguiente tabla.

Largo del calentador solar (m)	Altura a la que debe colocarse el calentador solar (m)
1.50	
	0.80
1.80	
2.3	
	1.45

Respondan.

a) El ángulo de inclinación de los calentadores solares indicados en la tabla, ¿es el mismo o varía? ______________________

Argumenten su respuesta. ______________________

b) El ángulo de inclinación de un calentador solar instalado en la Ciudad de México, ¿es igual al de uno instalado en el municipio de Álamos? ______________________

Argumenten su respuesta. ______________________

c) Si su respuesta al inciso b) fue negativa, ¿cuál de los dos ángulos es mayor y cómo lo saben? ______________________

____

3. En cierto lugar, un plomero instaló correctamente un calentador solar que mide 2 m de largo, a una altura de 30 cm.

a) ¿Cuál es la razón entre la altura y la longitud del calentador solar? ______________________

b) En este mismo lugar, ¿cuál es la altura a la que se debe colocar un calentador que mide un metro y medio? ______________________

4. Comparen sus respuestas y procedimientos con los de otros compañeros. Comenten la siguiente información.

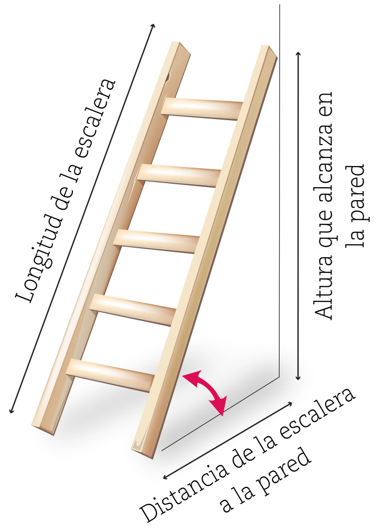
El ángulo de inclinación al que se coloca un calentador solar no depende sólo de su longitud o de su altura, sino de la razón entre ambas, es decir:

$$\textit{Razón para determinar el ángulo de inclinación} = \frac{\textit{altura a la que debe colocarse el calentador}}{\textit{longitud del calentador}}$$

Sesión 4

Escaleras de mano

1. Trabajen en pareja. Observen la imagen de una escalera recargada en una pared.



El ángulo marcado con rojo es el ángulo de inclinación de la escalera.

a) Imaginen que la escalera de la imagen se desliza hacia el frente; completen la tabla en función de lo que pasaría. Usen las siguientes etiquetas.

aumenta | disminuye | queda igual

La distancia de la escalera a la pared...	La altura que alcanza la escalera en la pared...	El ángulo de inclinación de la escalera...

Glosario
Zanca es cada uno de los maderos inclinados que sirven de apoyo a una escalera.

2. En una bodega hay dos escaleras; la escalera A es más larga que la B; ambas están colocadas de modo que sus zancas respectivas están a una distancia de medio metro de la pared.

a) ¿Cuál escalera alcanza mayor altura en la pared? ____________________

b) ¿Cuál de las dos escaleras forma un ángulo de inclinación mayor? __________

____

3. En la bodega hay otro par de escaleras; la M es más alta que la escalera N. Ambas alcanzan una altura de 2 m al recargarse en una pared.

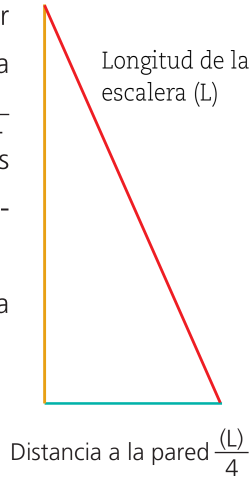
a) ¿Cuál de las dos escaleras está colocada a una distancia mayor de la pared?

____

b) ¿Cuál escalera forma un ángulo de inclinación mayor? ____________________

4. Entre las medidas de seguridad para colocar una escalera de mano se recomienda que la distancia a la pared sea, como mínimo, de $\frac{1}{4}$ de su longitud, y como máximo, de $\frac{1}{3}$. En los siguientes diagramas, el segmento rojo representa la escalera.

Con base en esta información, completen la siguiente tabla.



Escalera	Longitud de la escalera (m)	Distancia mínima a la pared (m)	Distancia máxima a la pared (m)
A	2		
B	2.5		
C	2.8		
D		0.75	
E		0.80	

5. Resuelvan y respondan.

a) Una escalera que mide 2.4 m se ha colocado a 0.7 m de la pared, ¿es recomendable ubicarla a esta distancia? ____________________

Argumenten su respuesta. ____________________

b) Una escalera que mide 2 m se ha colocado a 0.50 m de la pared, y otra que mide 1.6 m se ha puesto a 0.40 m de la pared. ¿Cómo son entre sí los ángulos de inclinación de estas escaleras? ____________________

Argumenten su respuesta. ____________________

6. Comparen sus respuestas y procedimientos con los de sus compañeros con ayuda del maestro. Comenten la siguiente información:

El ángulo de inclinación que la escalera forma con el piso no depende sólo de la longitud de la escalera o de su distancia a la pared, sino de la razón entre ambas:

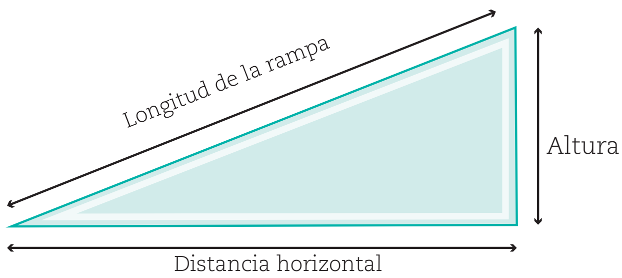
$$\textit{Razón para determinar el ángulo de inclinación} = \frac{\textit{distancia a la pared}}{\textit{longitud de la escalera}}$$

Para terminar

Rampas, calentadores solares y escaleras

1. Trabajen en pareja. En cada caso anoten lo que se pide.

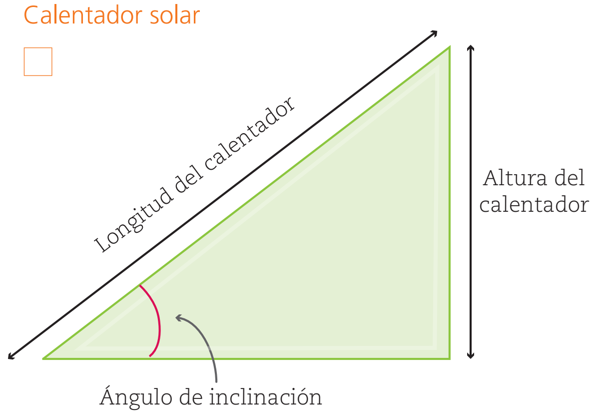
Rampa



a) La rampa A tiene una distancia horizontal de 2 m y una altura de 0.4 m.

La rampa B tiene la misma pendiente que la rampa A y una distancia horizontal de 3 m, ¿cuál es su altura?

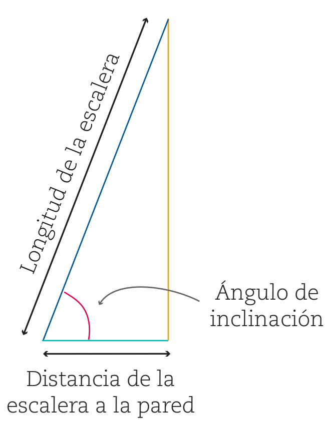
Calentador solar



b) El calentador solar C mide 2.5 m de largo y se ha colocado a una altura de 1.35 m.

El calentador solar D tiene el mismo ángulo de inclinación que el calentador solar C; si se colocó a una altura de 0.8 m, ¿cuánto mide de largo?

Escaleras de mano



c) La escalera de mano E mide 3.5 m de longitud y se encuentra a una distancia de la pared de 0.8 m.

La escalera de mano F está a 0.5 m de la pared y forma con ella un ángulo de inclinación igual al de la escalera E, ¿cuál es la longitud de la escalera F?

2. En cada gráfico anoten dentro del recuadrito anaranjado: 1 para la situación en la que el ángulo de inclinación o pendiente sea el mayor; luego 2, al siguiente, y así sucesivamente, para identificar su jerarquía en función de su ángulo. Si dos ángulos de inclinación son iguales, asígnenles el mismo número.

a) Rampas

Distancia horizontal (m)	Distancia vertical (m)	Pendientes de mayor a menor
0.5	0.25	
0.5	0.2	
1	0.2	
1	0.1	
2	0.1	

b) Calentadores solares

Longitud del calentador solar (m)	Altura a la que se coloca el calentador solar (m)	Ángulo de inclinación de mayor a menor
1	0.5	
1	0.3	
1.5	0.5	
1.5	0.25	
2	0.6	

c) Escaleras de mano

Longitud de la escalera (m)	Distancia a la pared (m)	Ángulo de inclinación de mayor a menor
1	0.25	
1	0.33	
2	0.5	
2	0.33	
2.5	0.5	

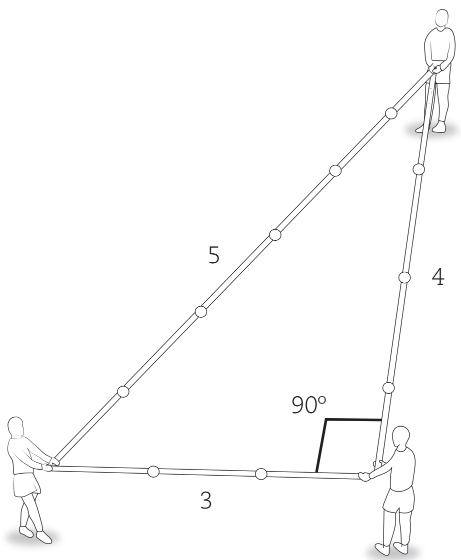
3. Comparen sus resultados con los de sus compañeros de grupo. En particular es importante que comenten cómo determinaron el orden de las pendientes o de los ángulos de inclinación en las situaciones anteriores. Si no llegan a un acuerdo, pueden dejarlo así por el momento; en el bloque 2 seguirán estudiando estas situaciones y podrán comprobar sus respuestas.

4. Observen el recurso audiovisual *Aplicaciones de la trigonometría* para conocer otras aplicaciones de la trigonometría, además de las mostradas en esta secuencia.

8. Teorema de Pitágoras 1

Para empezar

Sesión 1



Cuerda de 12 nudos estirada.

Según un documento histórico escrito en el siglo IV, los desbordes del río Nilo, en Egipto, originaron que los antiguos egipcios desarrollaran diversos contenidos matemáticos por la necesidad de marcar los límites de los terrenos colindantes con el río. Para señalar los ángulos rectos de los terrenos usaban la cuerda de los 12 nudos, con la cual formaban un triángulo que medía 3, 4 y 5 unidades. Si el ángulo que forman los lados de 3 y 4 unidades mide 90°, ¿qué contenido geométrico está detrás del método de la cuerda de los 12 nudos? ¿Sabes cómo determinan en tu comunidad los ángulos para marcar los linderos de un terreno rectangular?, ¿cómo determinan los ángulos rectos al construir una casa?

En esta secuencia estudiarás el teorema de Pitágoras, que justifica el método de la cuerda de los 12 nudos.

Busca la obra *Historia de las matemáticas*, de Andrés Sestier, en ella encontrarás ésta y otras historias.

Manos a la obra

¿Existe o no el triángulo?, ¿es o no rectángulo?

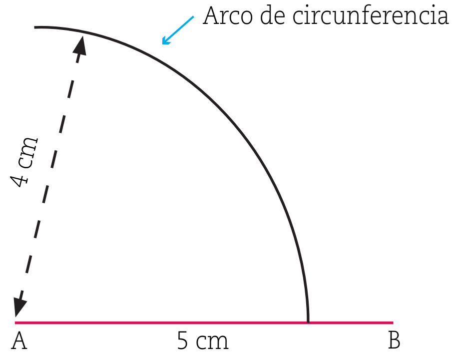
1. Trabajen en pareja. Lean y contesten las siguientes preguntas y justifiquen sus respuestas en el cuaderno. Conforme avancen en el estudio de esta secuencia, podrán regresar a esta sección y revisar nuevamente si sus respuestas son correctas.
   a) ¿Con tres medidas cualesquiera es siempre posible construir un triángulo? ____
   ¿Por qué? ____________________
   b) ¿Qué características deben cumplir las medidas de los lados de un triángulo para que sea rectángulo? ____________________

Un *triángulo rectángulo* es el que tiene un ángulo recto, es decir, un ángulo de 90°.

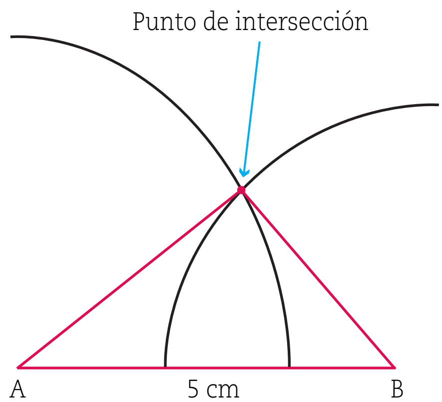
2. Utilicen su juego de geometría para trazar, en el cuaderno, el triángulo de los 12 nudos con medidas 4 cm, 3 cm y 5 cm a partir de los tres pasos siguientes:

Paso 1: Elijan una medida y tracen un segmento de esa medida, por ejemplo, 5 cm.

Paso 2: Tracen un arco de circunferencia con centro en uno de los extremos del segmento, y de radio, otra de las medidas. En este caso, elegimos 4 cm.



Paso 3: Tracen otro arco de circunferencia, ahora con centro en el otro extremo y con radio igual a la medida que falta, en este caso, 3 cm. Unan los extremos del segmento con el punto de intersección de los dos arcos. ¡Y listo! Tienen el triángulo con las medidas indicadas.



3. Respondan en su cuaderno.
   a) El triángulo que se obtiene, ¿es rectángulo? ____________________
   b) ¿Cómo lo saben? ____________________
   c) ¿Qué relación tiene este triángulo con el que se formó con la cuerda de los 12 nudos? ____________________

4. Con el procedimiento anterior, tracen en su cuaderno los triángulos con las medidas indicadas en la siguiente tabla y complétenla.

Medidas de los lados (cm)	¿Existe el triángulo?	¿Es un triángulo rectángulo?
9, 5, 7		
5, 12, 13		
1, 3, 10		
8, 2, 5		
10, 6, 8		

5. Comparen en grupo sus respuestas. Luego, revisen la respuesta que dieron a la primera pregunta de la actividad 1 y, en caso necesario, corríjanla. Para revisar la segunda pregunta, seguiremos investigando en las siguientes sesiones.

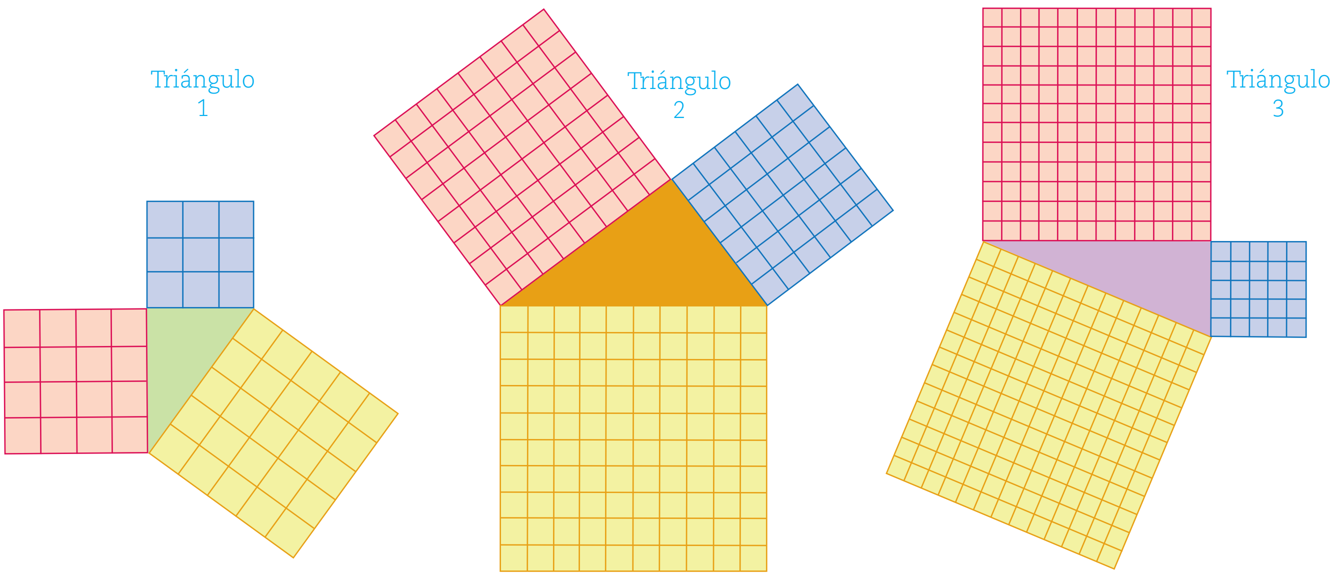
6. Comenten cómo determinaron en qué casos el triángulo es rectángulo.

Sesión 2

¡A calcular áreas!

1. Trabajen en pareja y realicen las siguientes actividades.

   a) En la sesión anterior encontraron algunas ternas para las medidas de los lados que forman un triángulo rectángulo. Ahora, tomando como unidad de superficie el cuadrado pequeño (□), calculen el área de los cuadrados construidos sobre los lados de cada triángulo rectángulo e identifiquen el ángulo recto de cada uno de ellos. Luego, completen la tabla.



En un triángulo rectángulo, los lados que forman el ángulo recto se llaman *catetos* y el lado opuesto al ángulo recto se llama *hipotenusa*.

Triángulo	Área del cuadrado naranja construido sobre un cateto	Área del cuadrado azul construido sobre un cateto	Área del cuadrado amarillo construido sobre un cateto
1			
2			
3			

2. De acuerdo con los resultados de la tabla, subrayen la afirmación que se cumple para los tres triángulos rectángulos de la página anterior.

Afirmación a: La suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos es mayor que el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa.

Afirmación b: La suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos es menor que el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa.

Afirmación c: La suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos es igual que el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa.

3. ¿Creen que la afirmación que subrayaron se cumple para todos los triángulos rectángulos? Pensando en esto, realicen lo siguiente:

a) Completen la tabla.

Área del cuadrado construido sobre un cateto (cm^2)	Área del cuadrado construido sobre el otro cateto (cm^2)	Área del cuadrado construido sobre la hipotenusa (cm^2)
8	5	
	9	13
20		50
1.5	4.5	
8.32		12.45

b) ¿Cuánto miden los catetos y la hipotenusa del segundo triángulo de la tabla anterior? ____________________

¿Cómo lo supieron? ____________________

____

____

c) Calculen la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo si sus catetos miden 15 cm y 36 cm. ____________________

____

Dato interesante
Puedes usar tu calculadora para encontrar la raíz cuadrada de un número usando la tecla $\sqrt{}$.

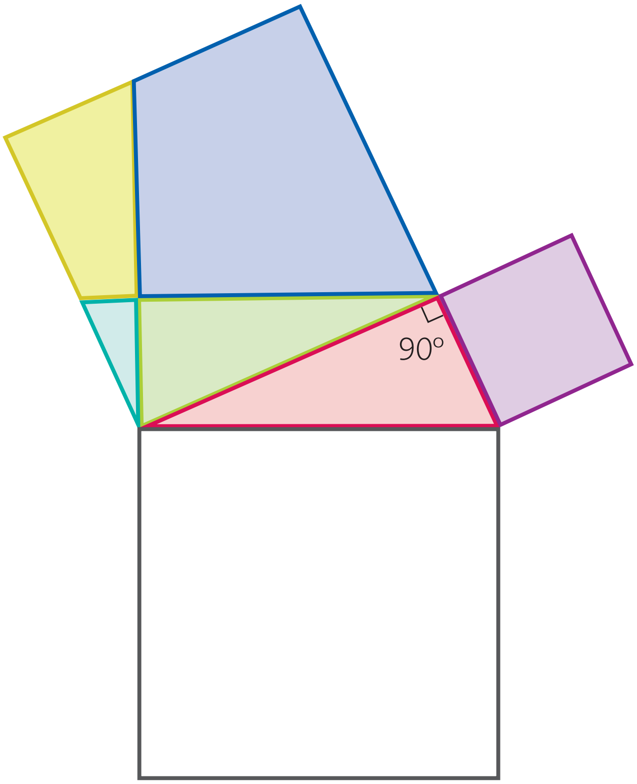
4. Comenten las respuestas con sus compañeros y, con la ayuda de su maestro, observen que la característica que encontraron para los lados de un triángulo rectángulo se cumple para los casos particulares que han estudiado. Ahora falta probar si se cumple para otros triángulos rectángulos, lo cual tendrán la oportunidad de hacer en las siguientes sesiones.

Sesión 3

Armemos rompecabezas

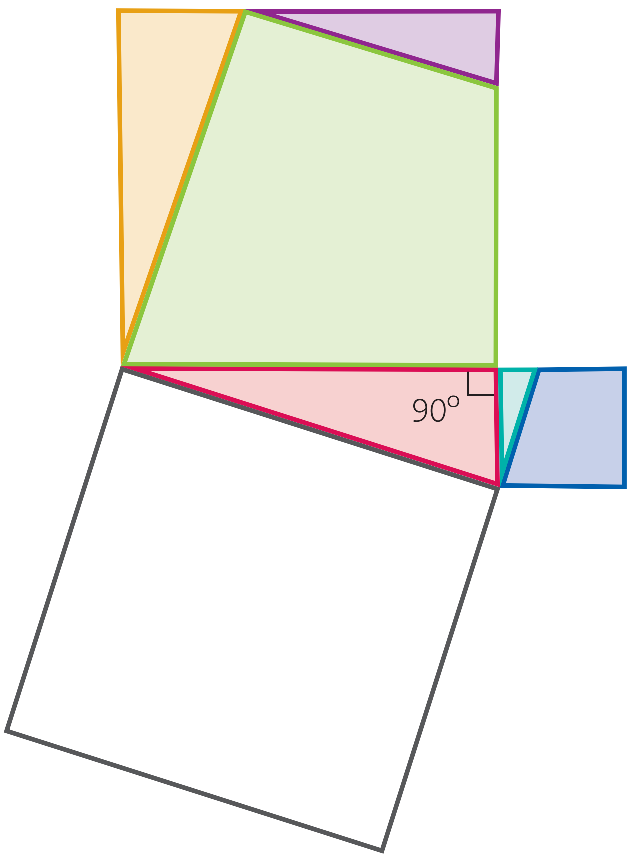
1. Trabajen en pareja. En la sesión 2 pudieron comprobar que en los triángulos rectángulos considerados se cumple lo siguiente.

> La suma del área de los cuadrados construidos sobre los catetos de un triángulo rectángulo es igual que el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa. Esta afirmación se conoce como el *teorema de Pitágoras*.



Realicen las siguientes actividades para averiguar si esto se cumple en otros triángulos rectángulos.

a) En el recortable 4 de la página 277 encontrarán una figura como la de la izquierda. Recorten las cinco figuras que forman los cuadrados construidos sobre los catetos del triángulo rojo y, a manera de rompecabezas, formen el cuadrado que tiene por lado la hipotenusa. Cuando lo hayan armado, peguen las cinco piezas sobre él.



b) Repitan la actividad anterior, pero ahora recorten los triángulos que se encuentran en los catetos del triángulo rojo en el recortable 4 de la página 277.

2. En el cuaderno, realicen la siguiente construcción:

Paso 1: Tracen un triángulo rectángulo con tres lados de diferente medida.

Paso 2: Construyan un cuadrado sobre cada uno de sus tres lados.

Paso 3: Encuentren el centro del cuadrado construido sobre el cateto mayor. Tracen una paralela a la hipotenusa que pase por ese centro y corte a los lados del cuadrado.

Paso 4: Tracen una perpendicular a la hipotenusa que pase por ese centro y corte a los lados del cuadrado.

Después de los trazos de los pasos 3 y 4, el cuadrado del cateto mayor ha quedado dividido en cuatro partes; recórtenlas. También recorten el cuadrado del cateto menor y, a manera de rompecabezas, formen el cuadrado de la hipotenusa.

Dato interesante
E. S. Loomis catalogó, en 1927, 371 pruebas diferentes del teorema de Pitágoras, las cuales se pueden consultar en su libro *The Pythagorean Proposition*. En la liga: bit.ly/34C5NTw pueden verse 122 gráficos que comprueban el teorema.

3. Con apoyo de su maestro, comparen sus respuestas y trazos con sus compañeros. Muestren la manera en que armaron el cuadrado construido sobre la hipotenusa a partir de las piezas de los cuadrados de los catetos.

4. Observen y comenten el recurso audiovisual *Pruebas geométricas del teorema de Pitágoras* para conocer otras pruebas geométricas de este famoso teorema.

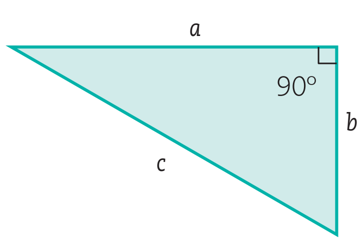
Para terminar

Sesión 4

Pruébalo ahora ¡con álgebra!

1. Trabajen en pareja. En las dos sesiones anteriores exploraron que en un triángulo rectángulo la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos es igual que el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa, lo cual enuncia el teorema de Pitágoras.

Ahora explorarán esta relación usando el álgebra. En esta actividad se nombran como a y b los catetos de los distintos triángulos rectángulos que se presentan, y como c, la hipotenusa.

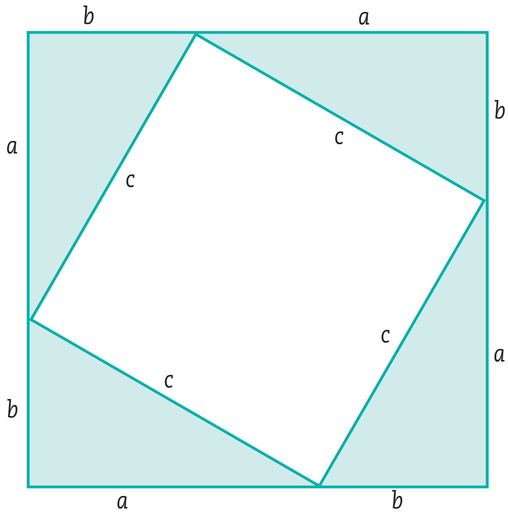


Por el teorema de Pitágoras se tiene que $a^2 + b^2 = c^2$.

En los próximos ejercicios usen cada una de las figuras siguientes para demostrar algebraicamente que $a^2 + b^2 = c^2$.

2. Respondan lo siguiente, según observen en la figura 1.

Figura 1



a) Calculen el área del cuadrado cuyo lado mide $a + b$.	
b) Calculen el área del mismo cuadrado a partir de la suma de las áreas de los cuatro triángulos rectángulos más el área del cuadrado cuyo lado mide c.	
c) Igualen los resultados que encontraron en los incisos a) y b). Luego, simplifiquen (si es necesario revisen lo que estudiaron en la secuencia 3).	

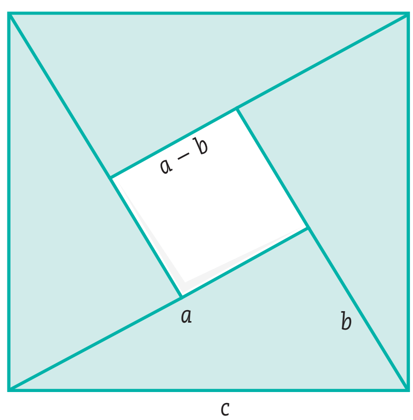
- ¿Qué relación encuentran entre este ejercicio y el teorema de Pitágoras?

____

____

3. A partir de la figura 2, contesten.

Figura 2



a) Calculen el área del cuadrado cuyo lado mide c.	
b) Calculen el área del mismo cuadrado considerando que es la suma de las áreas de los cuatro triángulos rectángulos y el área del cuadrado cuyo lado mide $a - b$.	
c) Igualen los resultados que encontraron en los incisos a) y b). Luego, simplifiquen.	

- ¿Qué relación encuentran entre este ejercicio y el teorema de Pitágoras?

____

____

- ¿Qué relación encuentran entre este ejercicio y el de la figura 1?
____
____
____
____

- ¿Qué relación encuentran entre los ejercicios de las figuras 1 y 2 y el teorema de Pitágoras? ______________________________
____
____

Dato interesante
El artículo 27 constitucional protege la integridad de las tierras de las comunidades y la naturaleza jurídica de los ejidos. En las regiones indígenas coexisten tres tipos de tenencia: bienes comunales, ejidos y ejidos que operan según la Ley de la Reforma Agraria.

4. Comparen sus respuestas y procedimientos con otros compañeros y, con ayuda de su maestro, corrijan en caso necesario.

a) Elaboren un apunte en su cuaderno, titúlenlo "Teorema de Pitágoras", anoten lo que éste enuncia e ilústrenlo.

b) Revisen nuevamente sus respuestas de la actividad 1 de la sesión 1 de esta secuencia. ¿Han cambiado sus respuestas? _____ ¿Por qué?
____
____
____

5. Utilicen el recurso informático *Otras pruebas del teorema de Pitágoras*, donde practicarán otras maneras de probar este teorema.

6. Observen el recurso audiovisual *El teorema de Pitágoras* para que conozcan más acerca de su historia y algunos de sus usos.

7. En grupo, y con apoyo de su maestro, comenten las respuestas que dieron a la pregunta: "¿Sabes cómo determinan en tu comunidad los ángulos para marcar los linderos de un terreno rectangular?" de la sección "Para empezar".

Particularmente, comenten la manera en que se distribuye el territorio de su localidad: ¿qué áreas son comunitarias, ejidales o privadas? ¿Cómo se trazan y se determina el uso de los terrenos? Comenten los beneficios que tiene cada tipo de terreno, según su punto de vista.

8. Individualmente, investiga si en tu localidad existe algún programa de regularización de propiedades de terrenos e inmuebles y cuál es la importancia de contar con los títulos de propiedad y acreditación de tenencia de la tierra.

9. Eventos mutuamente excluyentes 1

Sesión 1

Para empezar

Un espacio para conocer las tradiciones culturales, recreativas y de entretenimiento en nuestro país son las fiestas y ferias. En ellas se ofrece la oportunidad de vivir lo más representativo de la cultura popular y regional mexicana. La Feria Nacional de San Marcos, también conocida como feria de Aguascalientes, es una de las más importantes. Entre las principales muestras que ofrece se encuentra el Campeonato Nacional de Charrería. ¿Sabes de alguna fiesta o feria que se celebre en tu localidad? ¿Conoces algunas de las actividades culturales y recreativas que se realizan en México?

Una de las atracciones en la mayoría de las ferias son los juegos de azar, como la ruleta y los dados. ¿Has podido probar suerte en alguno de ellos? En esta secuencia jugaremos un poco para analizar los resultados posibles y determinar la probabilidad de ganar.

Manos a la obra

Carreras de caballos

1. Trabajen en grupo. Realicen el juego "Carreras de caballos" considerando las siguientes indicaciones:
   a) Los números del tablero representan a los caballos que participan en la carrera. Cada jugador elige un número y coloca su ficha sobre ese número.
   b) Cada jugador lanza dos dados no trucados y se suman los puntos que caen en la cara superior de cada dado. La suma indica el número del caballo que avanzará una casilla.
   c) El jugador que avanza deberá anotar la pareja de números que le permitió avanzar en la casilla correspondiente. Por ejemplo, si al lanzar los dados caen (5, 4), avanza el caballo 9 y en la primera celda se anota esa pareja de números.
   d) Gana el caballo que primero avance las 10 casillas.

   Antes de iniciar el juego, realicen las siguientes predicciones:
   - ¿Qué caballo es su favorito? ____________________
   - ¿En qué orden creen que llegarán los caballos a la meta? ____________________

   Jueguen y no olviden anotar el par de números que suman en la casilla que avanzan.

2. De acuerdo con los resultados que obtuvieron al efectuar el juego, contesten:

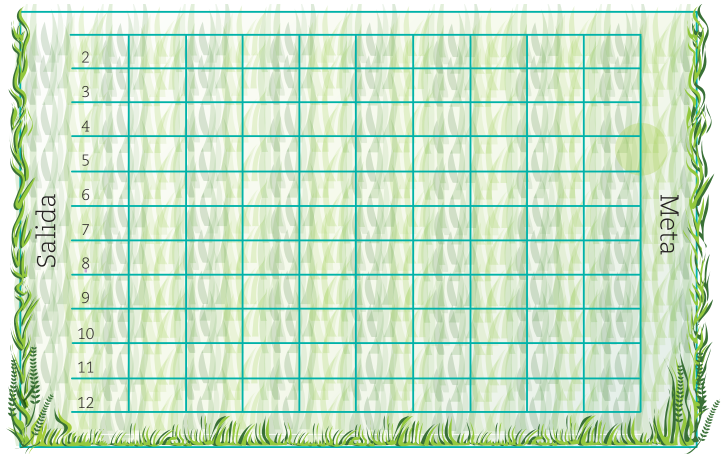
a) ¿Qué caballo ganó? ____________

b) En total, ¿cuántas veces lanzaron ambos dados? ____________

c) ¿Cuál es la probabilidad frecuencial del evento ganador? ____________

d) Consideren los pares de números anotados en las diez casillas que recorrió el caballo ganador. ¿Cuántos resultados diferentes anotaron? ____________

Tablero de carreras de caballos



e) ¿Cuántas casillas avanzó el caballo 12? ____________

f) ¿Cuántos resultados diferentes anotaron? ____________

g) ¿Cuál es la probabilidad frecuencial de que avance el caballo 12? ____________

3. Completen la tabla considerando los eventos indicados y los resultados registrados por el equipo que realizó el juego:

Ensayo	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Resultado / **Evento**	**(5, 2)**	**(3, 4)**	**(4, 6)**	**(2, 5)**	**(1, 1)**	**(1, 1)**
A: Avanza el caballo 2	No ocurrió	No ocurrió	No ocurrió	No ocurrió	Ocurrió	Ocurrió
B: Avanza el caballo 7	Ocurrió	Ocurrió	No ocurrió	Ocurrió	No ocurrió	No ocurrió
P′ (*A*): Probabilidad frecuencial del evento *A*	$\frac{0}{1}$	$\frac{0}{2}$			$\frac{1}{5}$	
P′ (*B*): Probabilidad frecuencial del evento *B*	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{3}$			

Observen los resultados registrados cada vez que ocurrió el evento *A* y el evento *B*.

a) ¿Cuántos resultados diferentes corresponden al evento *A*? ____________

b) ¿Cuántos resultados diferentes corresponden al evento *B*? ____________

c) ¿Cuál es el valor mínimo de la probabilidad frecuencial de los eventos en cualquiera de los casos? ____________ ¿Y el máximo? ____________

De seguir el juego...

d) ¿Habrá otros resultados diferentes con los que pueda avanzar el caballo 7? ____________ En caso afirmativo, ¿cuáles? ____________

e) ¿Habrá otros resultados diferentes con los que pueda avanzar el caballo 2? ______
En caso afirmativo, ¿cuáles? ______

4. Revisen sus respuestas con ayuda de su maestro y corrijan en caso necesario. Posteriormente, lean y comenten la información que se les presenta y contesten las preguntas.

Un experimento aleatorio es un proceso repetible cuyo resultado no se conoce de antemano. Si se repite un experimento aleatorio en las mismas condiciones y se registra la frecuencia relativa de un evento, se observará que ésta tiende a estabilizarse alrededor de un número que está entre cero y uno. Este valor recibe el nombre de *probabilidad frecuencial*. Cuando un evento tiene un solo resultado posible se le llama *evento simple*. Si el evento tiene dos o más resultados posibles se llama *compuesto*.

a) Observen los resultados que anotaron en el juego de carreras de caballos, ¿cuántos eventos simples hay? ______
¿Cuántos eventos son compuestos? ______
b) Si realizan nuevamente el juego, ¿creen que gane ese caballo otra vez? ______
Justifiquen sus respuestas. ______

Sesión 2

¿Cuáles son los eventos mutuamente excluyentes?

1. Trabajen en pareja. Completen la tabla 1 considerando los resultados registrados por un equipo que lanzó dos dados en diez ensayos. Utilicen la letra O si ocurrió o, de lo contrario N/O.

Tabla 1

Ensayo	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Resultado / **Evento**	**(3, 2)**	**(4, 4)**	**(1, 5)**	**(6, 5)**	**(1, 1)**	**(5, 2)**	**(3, 3)**	**(2, 3)**	**(6, 2)**	**(4, 3)**
D: La suma de los números en los dos dados es menor que 6	O	N/O	N/O	N/O	O	N/O	N/O			
F: La suma de los números en los dos dados es mayor que 7	N/O	O	N/O	O	N/O	N/O	N/O			
G: La suma de los números en los dos dados es un número par	N/O	O	O	N/O	O	N/O	O			

Ensayo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Resultado / Evento	(3, 2)	(4, 4)	(1, 5)	(6, 5)	(1, 1)	(5, 2)	(3, 3)	(2, 3)	(6, 2)	(4, 3)
P' (*D*): Probabilidad frecuencial del evento *D*	$\frac{1}{1}$					$\frac{2}{6}$				
P' (*F*): Probabilidad frecuencial del evento *F*		$\frac{1}{2}$								
P' (*G*): Probabilidad frecuencial del evento *G*			$\frac{2}{3}$				$\frac{4}{7}$			

Cuando los eventos ocurrieron...

a) ¿Cuántos resultados diferentes registraron para el evento *D*? ______

b) ¿Cuántos resultados diferentes registraron para el evento *F*? ______

c) ¿Cuántos resultados diferentes registraron para el evento *G*? ______

d) Si en un ensayo ocurre el evento *D*, ¿puede ocurrir simultáneamente el evento *G*? ______

Si su respuesta es afirmativa, anoten los resultados. ______

2. Completen la tabla 2, que contiene los datos obtenidos por el equipo anterior al observar el evento: la suma de los números en los dos dados es menor que 6 y es un número par. Utilicen la letra O si ocurrió o, de lo contrario N/O.

Tabla 2

Ensayo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Resultado / Evento	(3, 2)	(4, 4)	(1, 5)	(6, 5)	(1, 1)	(5, 2)	(3, 3)	(2, 3)	(6, 2)	(4, 3)
D y *G*: La suma de los números en los dos dados es menor que 6 y es un número par	N/O	N/O	N/O	N/O	O	N/O	N/O			
P' (*D* y *G*): Probabilidad frecuencial del evento *D* y *G*	$\frac{0}{1}$					$\frac{1}{6}$				

a) Si en un ensayo ocurre que la suma de los números en los dos dados es menor que 6, ¿también puede ocurrir que la suma sea un número par? ______

b) Después de 10 ensayos, ¿cuál es la frecuencia relativa del evento (*D* y *G*)?

______

3. Completen la tabla 3, donde el mismo equipo observó y registró los resultados del evento: la suma de los números es mayor que 7 y es un número par. Utilicen la letra O si ocurrió o, de lo contrario N/O.

Tabla 3

Ensayo	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Resultado / **Evento**	**(3, 2)**	**(4, 4)**	**(1, 5)**	**(6, 5)**	**(1, 1)**	**(5, 2)**	**(3, 3)**	**(2, 3)**	**(6, 2)**	**(4, 3)**
F y *G*: La suma de los números es mayor que 7 y es un número par	N/O	O	N/O	N/O	N/O	N/O	N/O			
P´ (*F* y *G*): Probabilidad frecuencial del evento *F* y *G*	$\frac{0}{1}$			$\frac{1}{4}$						

a) Si en un ensayo ocurre que la suma de los números en los dos dados es mayor que 7, ¿también puede ocurrir que la suma sea un número par? __________

b) Después de 10 ensayos, ¿cuál es la frecuencia relativa del evento (*F* y *G*)?

____

4. Completen la tabla 4, donde se registraron los datos obtenidos por el mismo equipo al observar el evento: la suma de los números es menor que 6 y mayor que 7. Utilicen la letra O si ocurrió o, de lo contrario N/O.

Tabla 4

Ensayo	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Resultado / **Evento**	**(3, 2)**	**(4, 4)**	**(1, 5)**	**(6, 5)**	**(1, 1)**	**(5, 2)**	**(3, 3)**	**(2, 3)**	**(6, 2)**	**(4, 3)**
D y *F*: La suma de los números en los dos dados es menor que 6 y es mayor que 7	N/O	N/O	N/O							
P´ (*D* y *F*): Probabilidad frecuencial del evento *D* y *F*	$\frac{0}{1}$									

a) Si en un ensayo ocurre que la suma de los números en los dos dados es menor que 6, ¿también puede ocurrir que la suma sea mayor que 7? __________

b) Después de 10 ensayos, ¿cuál es la frecuencia relativa del evento (*D* y *F*)?

____

5. Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Luego, lean y comenten la información de la siguiente página.

Al realizar un experimento aleatorio y observar dos eventos simultáneos elegidos puede suceder cualquiera de las situaciones siguientes:

a) Todos los resultados favorables de uno de los dos eventos son los mismos que todos los resultados favorables del otro evento.

b) Algunos resultados favorables de uno de los dos eventos son los mismos que algunos resultados favorables del otro evento.

c) No existen resultados favorables en común para los dos eventos. Esto significa que ambos eventos no pueden ocurrir al mismo tiempo, es decir, la frecuencia relativa de ambos es cero. A estos eventos se les llama mutuamente excluyentes o ajenos. Cuando se dan los casos señalados en a) y b) el valor de la probabilidad frecuencial es mayor que 0 y menor que 1.

Por ejemplo, al hacer el experimento de lanzar 10 veces dos dados y observar los números que caen, en un ensayo el resultado fue (1, 1), que puede registrarse tanto en el evento *D* (*la suma de los números en los dos dados es menor que* 6) como en el evento *G* (*la suma de los números en los dos dados es un número par*). Por lo tanto, la frecuencia de ocurrencia simultánea del evento (*D* y *G*) es $\frac{1}{10}$

Por otra parte, si a lo largo de los 10 ensayos ninguno de los resultados registrados es común para observar los eventos *D* (*la suma de los números en los dos dados es menor que* 6) y *F* (*la suma de los números en los dos dados es mayor que 7*), entonces la frecuencia de ocurrencia del evento (*D* y *F*) es 0, lo que significa que *D* y *G* son eventos mutuamente excluyentes.

Los eventos que no tienen resultados favorables que ocurren al mismo tiempo se llaman ***mutuamente excluyentes*** o ***ajenos***.

6. Utilicen los resultados registrados en el tablero de las carreras de caballos que efectuaron e indiquen si los eventos *A* y *B* son mutuamente excluyentes y justifiquen su respuesta.

Para terminar

Espacio muestral y eventos mutuamente excluyentes

Sesión 3

1. En pareja, determinen el espacio muestral de resultados posibles al lanzar dos dados al mismo tiempo. Anótenlo en la siguiente tabla; observen el ejemplo. Después realicen lo siguiente.

- Marquen con color rojo todos los resultados favorables al evento *D*: la suma de los números en los dos dados es menor que 6.
- Utilicen el color azul para marcar los resultados favorables al evento *F*: la suma de los números en los dos dados es mayor que 7.
- Marquen con color verde los resultados favorables al evento *G*: la suma de los números en los dos dados es un número par.

Dado 2						
6						
5		5, 2				
4						
3						
2						
1						
	1	2	3	4	5	6
	Dado 1					

a) ¿Cuántos resultados posibles hay en total? ______

b) ¿Cuántos resultados favorables tiene el evento *D*? ______

c) ¿Cuántos resultados favorables tiene el evento *F*? ______

d) ¿Y cuántos resultados favorables tiene el evento *G*? ______

e) ¿Cuántos resultados están marcados con color rojo y azul a la vez, es decir, son favorables tanto para el evento *D* como para el *F*? ______ ¿Cuál o cuáles son los resultados favorables en común? ______

f) ¿Cuántos resultados están marcados con color azul y verde a la vez, es decir, son favorables tanto para el evento *F* como para el *G*? ______ ¿Cuál o cuáles son los resultados favorables en común? ______

g) ¿Cuántos resultados están marcados con color verde y rojo a la vez, es decir, son favorables tanto para el evento *D* como para el *G*? ______ ¿Cuál o cuáles son los resultados favorables en común? ______

2. Hay dos tipos de probabilidades de un evento: la *frecuencial*, que se obtiene a partir de ejecutar el experimento o fenómeno aleatorio y registrar los resultados favorables, y la *clásica*, que se obtiene al tomar el número de resultados favorables al evento y dividirlo entre el número de resultados posibles. Obtengan la probabilidad clásica de los eventos siguientes.

Evento	Probabilidad clásica del evento
D: La suma de los números en los dos dados es menor que 6	$P(D) = \dfrac{\text{Número de resultados favorables al evento } D}{\text{Número total de resultados posibles}} =$
F: La suma de los números en los dos dados es mayor que 7	$P(F) = \dfrac{\text{Número de resultados favorables al evento } F}{\text{Número total de resultados posibles}} =$
G: La suma de los números en los dos dados es un número par	$P(G) = \dfrac{\text{Número de resultados favorables al evento } G}{\text{Número total de resultados posibles}} =$
D y *F*: La suma de los números en los dos dados es menor que 6 y es mayor que 7	$P(D \text{ y } F) = \dfrac{\text{Número de resultados favorables al evento } (D \text{ y } F)}{\text{Número total de resultados posibles}} =$
D y *G*: La suma de los números en los dos dados es menor que 6 y es un número par	$P(D \text{ y } G) = \dfrac{\text{Número de resultados favorables al evento } (D \text{ y } G)}{\text{Número total de resultados posibles}} =$
F y *G*: La suma de los números es mayor que 7 y es un número par	$P(F \text{ y } G) = \dfrac{\text{Número de resultados favorables al evento } (F \text{ y } G)}{\text{Número total de resultados posibles}} =$

3. Completen la tabla con los resultados registrados en las actividades de las sesiones que se indican.

Actividad 4 de la sesión 2	Actividad 1 de la sesión 3
Número de veces que ocurrió el evento (*D* y *F*):	Número de resultados favorables del evento (*D* y *F*):
Número de veces que se realizó el experimento:	Número de resultados posibles:
Probabilidad frecuencial *P′* (*D* y *F*):	Probabilidad clásica *P* (*D* y *F*):

a) Comparen el número de veces que ocurrió el evento (*D* y *F*) con el número de resultados favorables, ¿es igual o diferente? ______

b) ¿Qué valor tienen la probabilidad frecuencial y clásica del evento (*D* y *F*)? ______

c) De acuerdo con lo anterior, ¿qué tipo de eventos son *D* y *F*? ______

4. Revisen sus respuestas con ayuda de su maestro y corrijan en caso necesario. Posteriormente, lean y comenten la información que se les presenta y contesten la pregunta.

Dos eventos son mutuamente excluyentes si los resultados favorables para cada evento son distintos.

Por ejemplo, si se definen los siguientes tres eventos al lanzar un dado:

C: El número es mayor que 3.   *E*: El número es impar.   *J*: El número es menor o igual que 3.

Los resultados favorables de cada evento son:

$C = \{4,5,6\}$; $E = \{1,3,5\}$; $J = \{1,2,3\}$

Al comparar los resultados favorables de los eventos C y E, se observa que el resultado 5 es común en ambos conjuntos, entonces la probabilidad de lanzar un dado y obtener un número que sea mayor que 3 e impar es un sexto y se expresa:

$$P\,(C \text{ y } E) = \frac{1}{6}$$

Al comparar los resultados favorables de los eventos C y J, no hay resultados en común, por lo tanto, son mutuamente excluyentes y la P (C y J) = 0.

¿Qué tipo de eventos son *E* y *J*? Justifiquen su respuesta. ______

______

5. Investiguen en su comunidad si se realiza alguna feria y si entre las actividades hay algunos juegos de azar. De ser posible, describan en qué consisten e identifiquen si hay eventos simples, eventos compuestos o eventos mutuamente excluyentes.

6. Para determinar si los eventos son simples, compuestos o mutuamente excluyentes utilicen el recurso informático *Eventos simples, compuestos y mutuamente excluyentes*.

7. Observen el recurso audiovisual *Eventos simples, compuestos y mutuamente excluyentes* para distinguir estos eventos en otros experimentos aleatorios.

Evaluación

Marca con una ✓ las respuestas correctas. Algunas preguntas tienen más de una respuesta correcta.

1. ¿Cuál de los siguientes números tiene más divisores?

Ⓐ 14 Ⓑ 20 Ⓒ 48 Ⓓ 89

2. De los siguientes números, ¿cuáles son primos?

Ⓐ 21 Ⓑ 41 Ⓒ 61 Ⓓ 81

3. De un costal de naranjas se formaron varios montones de 5 naranjas cada uno. Al final sobraron 3 naranjas. ¿Cuántas naranjas pudo haber contenido el costal?

Ⓐ 210 Ⓑ 211 Ⓒ 212 Ⓓ 213

4. La siguiente sucesión de figuras se genera con la expresión $\frac{n(3n-1)}{2}$

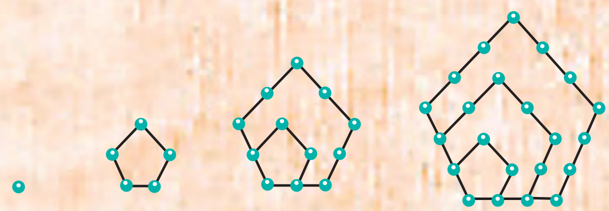


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3 Fig. 4

De las opciones que se presentan enseguida, elige las que consideres que son sus expresiones equivalentes.

Ⓐ $\frac{(3n^2-1)}{2}$ Ⓑ $\frac{3n^2-n}{2}$ Ⓒ $\frac{3}{2}(n^2-n)$ Ⓓ $\frac{3}{2}n^2-\frac{1}{2}n$

5. En un torneo de ajedrez, cada participante jugó una partida contra todos los demás. En total se realizaron 45 partidas. ¿Cuántos jugadores participaron en el torneo? Subraya la ecuación que resuelve este problema.

Ⓐ $n(n+1)=45$ Ⓑ $n(n-1)=45$ Ⓒ $\frac{n(n+1)}{2}=45$ Ⓓ $\frac{n(n-1)}{2}=45$

6. ¿Cuáles ecuaciones tienen las soluciones correctas?

Ⓐ $2x^2-72=0$; $x_1=6$; $x_2=-6$

Ⓑ $x^2+2x=0$; $x_1=0$; $x_2=2$

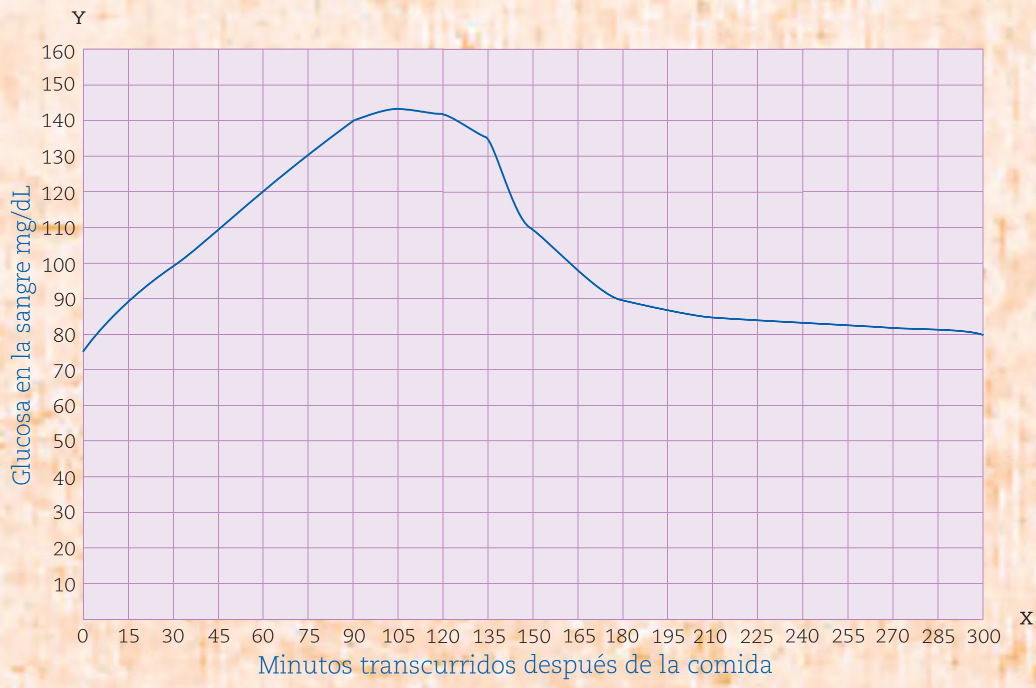
Ⓒ $x(x-8)=7$; $x_1=-5$; $x_2=-3$

Ⓓ $x^2=-25$; $x_1=5$; $x_2=-5$

7. La diabetes es una enfermedad caracterizada por el aumento de azúcar en la sangre.

En los últimos años ésta se ha extendido mucho en México, sobre todo por los malos hábitos de alimentación y la falta de ejercicio. El azúcar o glucosa en la sangre es necesaria, ya que es la principal fuente de energía para el funcionamiento del cuerpo. Sin embargo, cuando hay un incremento descontrolado de glucosa es peligroso para la salud.

Ramón es diabético y se debe medir el nivel de glucosa en la sangre cada 15 minutos desde que come hasta que pasan 5 horas. Observa la gráfica y contesta las siguientes preguntas.



Los niveles de azúcar son más bajos cuando se está en ayunas y suben en cuanto se come.

a) ¿Después de cuántos minutos Ramón tiene el máximo nivel de glucosa en la sangre?

(A) 300 (B) 135 (C) 105 (D) 90

b) El rango normal para el óptimo funcionamiento del cuerpo debe estar entre 70 y 140 mg/dL. Indica el intervalo de tiempo en que Ramón se encuentra fuera del rango óptimo, o bien si él nunca está fuera de rango.

(A) Entre 0 y 300 minutos
(B) Entre 75 y 145 minutos
(C) Entre 90 y 125 minutos
(D) Nunca está fuera de rango

c) ¿Cuáles son sus niveles de azúcar al transcurrir 5, 120 y 300 minutos?

(A) 80, 145 y 80 mg/dL, respectivamente
(B) 75, 150 y 75 mg/dL, respectivamente
(C) 80, 145 y 0 mg/dL, respectivamente
(D) 75, 145, y 80 mg/dL, respectivamente

8. Se tienen dos cuadrados: uno de 10 cm y otro de 7 cm por lado. ¿Cuál es la razón de semejanza del segundo cuadrado respecto al primero?

(A) -3 (B) 3 (C) $\frac{7}{10}$ (D) $\frac{10}{7}$

9. Respecto a la semejanza de figuras geométricas, completa la siguiente afirmación con la figura geométrica que la haga verdadera.

Todos los ________________ son semejantes entre sí.

(A) Rombos (B) Rectángulos (C) Trapecios isósceles (D) Triángulos equiláteros

Hombre en escalera telescópica.

10. Se están utilizando cuatro escaleras telescópicas, todas tienen un extremo recargado sobre la misma pared y el otro, a cierta distancia de ella. En cada opción de respuesta, la primera medida se refiere a la longitud de la escalera, y la segunda, a su distancia hacia la pared. ¿Cuál de ellas forma el mayor ángulo con el piso?

(A) 2 m, 1 m (B) 2 m, 0.5 m (C) 3 m, 2 m (D) 4 m, 2 m

11. La rampa A tiene una distancia horizontal de 4 m y alcanza una altura de 0.5 m. En cada opción de respuesta, el primer número corresponde a la distancia horizontal, y el segundo, a la altura que alcanzan otras cuatro rampas. ¿Cuál de ellas tiene la misma pendiente que la rampa A?

Rampa A

Altura

Distancia horizontal

(A) 1 m, 0.20 m

(B) 2 m, 0.25 m

(C) 2 m, 1 m

(D) 3 m, 1.5 m

12. ¿Para qué tipo de triángulos se cumple el teorema de Pitágoras? Para…

(A) todos (B) los escalenos

(C) los rectángulos (D) los acutángulos

13. En un triángulo rectángulo, el área del cuadrado construido sobre un cateto mide 3 cm^2 y el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa mide 10 cm^2. ¿Con cuál expresión se calcula el área del cuadrado construido sobre el otro cateto?

(A) $\left(\frac{3}{10}\right) cm^2$ (B) $\left(\frac{10}{3}\right) cm^2$ (C) $10\ cm^2 + 3\ cm^2$ (D) $10\ cm^2 - 3\ cm^2$

14. Se lanza un dado legal y se observa el número de la cara superior que cae. Tres eventos que pueden ocurrir son:

a) Cae número par **b)** Cae un múltiplo de 3 **c)** Cae un número impar

Al comparar los resultados favorables de los eventos, ¿cuáles de éstos son mutuamente excluyentes?

b y c   a y b   a y c   c y b

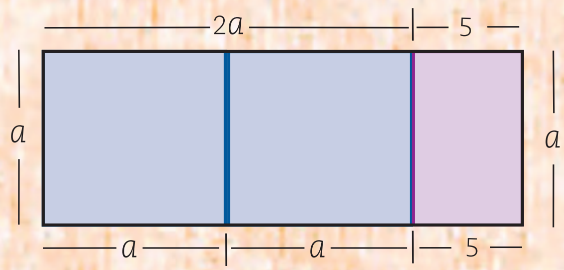
Resuelve lo que se pide.

1. Anota en cada número la cifra que falta para que el primero sea divisible entre 2; el segundo, entre 3; el tercero, entre 5; y el cuarto, entre 6.

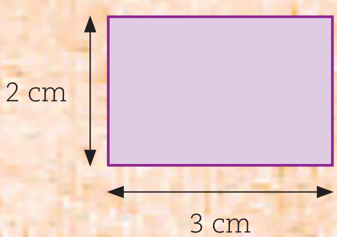
438☐   438☐   438☐   438☐

2. Escribe tres expresiones equivalentes que representen la superficie del rectángulo dibujado con líneas negras.

Expresión algebraica 1	
Expresión algebraica 2	
Expresión algebraica 3	



3. Construye un rectángulo semejante al siguiente, de tal manera que el lado que aquí mide 2 cm, en el que vas a construir sea de 3 cm.



4. Para colocar un calentador solar en cierto lugar, se indica que la razón entre la altura a la que se sitúe y su longitud sea de $\frac{2}{5}$. Si el calentador mide 2 m, ¿a qué altura debe colocarse? ____________________

5. Se realiza una rifa de 400 boletos para ganar una pantalla. En una urna se revuelven los boletos y se selecciona uno al azar para elegir al ganador. Si una persona compró 25 boletos, ¿cuál es la probabilidad que tiene de ganar la rifa? ____________

Bloque 2

Las funciones cuadráticas en la construcción

¿Sabías que muchas de las estructuras de acero que se utilizan para sostener el piso de los puentes tienen forma parabólica? Esto se debe a que la parábola permite que la carga se distribuya de manera uniforme.

¿Qué crees que suceda si uno de esos cables se llega a romper? ¿Qué sucederá con el peso que soportaba? ¿Qué pasará con el peso que soportan los demás cables?

En este bloque estudiarás las funciones cuadráticas que dan origen a parábolas y con las que es posible hacer los cálculos necesarios para construir este tipo de puentes.

10. Mínimo común múltiplo y máximo común divisor 1

Sesión 1

Para empezar

Automóvil	Tiempo que tarda en dar una vuelta (en segundos)
A	18
B	20
C	24
D	28

Hay un juego virtual llamado "Carreras de autos" que consiste en lo siguiente.

- Participan dos jugadores, cada uno debe elegir dos automóviles.
- Los cuatro automóviles se colocan en la línea de salida y arrancan al mismo tiempo.
- Gana el jugador cuyos dos automóviles, después de dar varias vueltas a la pista, vuelven a pasar juntos por la línea de salida.

En la tabla de la izquierda se muestran los tiempos en que cada automóvil da la vuelta a la pista.

¿Qué automóviles elegirías para ganar en este juego? ¿Después de cuántos segundos tus dos automóviles volverían a pasar juntos por la línea de salida? ¿Cuántas vueltas habría dado cada uno de los automóviles que elegiste?

Al estudiar esta secuencia, aprenderás a usar el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo para contestar preguntas como las anteriores.

Manos a la obra

Descomposición de números en factores primos

1. Trabajen en pareja. Descompongan en factores cada número, de manera que primero sean dos, después tres, y así sucesivamente, hasta que ya no se puedan descomponer. Anótenlos en cada celda.

180						
600						
3 780						

2. En la actividad anterior, verifiquen que en la última descomposición de cada número sólo aparezcan números primos como factores. Si hay algún factor no primo, todavía se puede descomponer.

3. Ahora lean la siguiente información junto con sus compañeros de grupo y su maestro.

Cualquier número natural se puede descomponer en un producto de números primos. A esta descomposición se le llama *factorización en números primos* o *factorización prima*. Cuando uno o más factores primos se repiten, la descomposición puede expresarse usando potencias.

Por ejemplo, 1890 es un número compuesto. Su descomposición en factores primos y su representación usando potencias se muestran a continuación:

$$1890 = \underbrace{2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7}_{\text{Descomposición en factores con números primos}} = \overbrace{2 \times 3^3 \times 5 \times 7}^{\text{Descomposición usando potencias}}$$

4. Completen la siguiente tabla.

Número compuesto	Factorización en números primos	Representación con potencias
12		
		2×3^2
	$2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5$	
72		
		$2 \times 3^3 \times 5^2$

5. Consideren la factorización en números primos: $2 \times 3 \times 5 \times 7$. Con base en ella, contesten las preguntas.

a) ¿A qué número corresponde? ____________________

b) ¿Cuáles son los divisores primos de ese número? ____________________

c) Expliquen por qué la factorización de números primos muestra que el número es múltiplo de 30. ____________________

____

6. La factorización en primos de un número es $2 \times 3 \times 5^2$. Con base en ella, contesten las preguntas.

a) ¿Cuáles son todos los divisores de ese número? Deben ser 12. Completen la lista.

{1, ____}

b) Los números 2, 3 y 5 son factores primos de 150 y también son parte del conjunto de divisores. Verifiquen que, exceptuando el 1, todos los demás divisores resultan al multiplicar dos o más factores primos. Por ejemplo, el 15 es el producto de 3×5. ¿Cómo se obtiene el 50? ______________ ¿Cómo se obtiene el 75?

____

7. Con sus compañeros y con apoyo del maestro, comparen sus resultados, identifiquen los errores y corrijan lo que sea necesario.

Sesión 2

Técnicas para factorizar en primos

1. Trabajen en pareja. En la tabla relacionen la columna de números compuestos con su descomposición prima. Después, contesten.

Números compuestos	Factorizaciones primas
a) 120	( ) $2^2 \times 3 \times 5$
b) 180	( ) $2 \times 3^2 \times 5$
c) 150	( ) $2 \times 3 \times 5^2$
d) 240	( ) $2^3 \times 3 \times 5$
e) 1 225	( ) $2 \times 3^3 \times 5$
f) 60	( ) $2 \times 3 \times 5^3$
g) 270	( ) $2^4 \times 3 \times 5$
h) 147	( ) $2^2 \times 3^2 \times 5$
i) 750	( ) $2^2 \times 3 \times 5^2$
j) 90	( ) $2 \times 3^2 \times 7$
k) 300	( ) 3×7^2
l) 126	( ) $5^2 \times 7^2$

a) El número 120 es el doble de 60. Expliquen en qué se parece y en qué es diferente la factorización de 120 respecto a la de 60. ______________________

____

b) En la lista anterior de números compuestos, busquen otras dos parejas, tales que un número sea el doble del otro. Verifiquen que sus factorizaciones primas se parecen y se distinguen en lo que escribieron en el inciso anterior. Anótenlas aquí. ______________________

____

c) La factorización de un número es $2 \times 3^3 \times 7$. ¿Cuál es la del doble de ese número? ______________________

____

d) La factorización de un número es $2 \times 3^4 \times 5$. ¿Cuál es la del triple de ese número? ______________________

____

e) La factorización de un número es $3^4 \times 5$. ¿Cuál es la del doble de ese número? ______________________

____

2. Con sus compañeros y con el apoyo de su maestro, comparen sus resultados, identifiquen los errores y corrijan si es necesario. Después, lean la siguiente información.

Una técnica para descomponer o factorizar cualquier número natural en números primos consiste en dividirlo sucesivamente entre números primos hasta que el cociente sea un número primo. Por ejemplo, para descomponer en factores primos el número 854, se hace lo siguiente:

- ¿854 es divisible entre 2? Sí, entonces se hace la división: 854 ÷ 2 = 427
- ¿427 es divisible entre 2? No. ¿Entre 3? No. ¿Entre 5? No. ¿Entre 7? Sí. Entonces, 427 ÷ 7 = 61. Como 61 es un número primo, la factorización en primos de 854 = 2 × 7 × 61.

3. Trabajen en equipo. Factoricen en primos los siguientes números.

Número compuesto	Factorización en números primos
132	
230	
543	
615	
864	

4. Otra manera de hacer las divisiones para encontrar los factores primos de un número es la que se muestra enseguida. Analícenla y describan en su cuaderno la manera en que se hace.

492	2	(A 492 se le saca la mitad, que equivale a dividirlo entre 2).
246	2	(A 246 se le saca la mitad, que equivale a dividirlo entre 2).
123	3	(A 123 se le saca tercera, que equivale a dividirlo entre 3).
41	41	(Como 41 es primo, sólo se puede dividir entre 41).
1		

Entonces, 492 = 2 × 2 × 3 × 41

En su cuaderno, apliquen esa técnica para factorizar los siguientes números compuestos: 90, 150 y 84.

5. Con sus compañeros y con apoyo de su maestro, comparen sus resultados y comenten cuál procedimiento les resulta más claro para factorizar números compuestos.

6. Observen el recurso audiovisual *Descomposición en factores primos*, en el que se muestran las técnicas para descomponer un número compuesto en factores primos.

Sesión 3

Máximo común divisor (MCD)

Dato interesante
Si se considera la suma de los divisores de un número, sin considerarlo a él, entonces: a) si la suma de los divisores es igual que el número, se le llama *perfecto*; b) si la suma de sus divisores es mayor que el número, se le llama *abundante*; c) si la suma es menor al número, se le llama *deficiente*.

1. Trabajen en equipo. Un carpintero quiere cortar en cuadrados iguales, lo más grandes posible, una tira de madera de 180 cm de largo por 108 cm de ancho, sin que sobre ni falte madera. ¿Cuánto debe medir por lado cada cuadrado? ¿Cuántos cuadrados logrará obtener?

   En su cuaderno, tracen un rectángulo y muestren los cortes que se hacen a lo largo y a lo ancho de la tira de madera.

2. Anoten los datos que faltan en la tabla, después contesten lo que se indica.

Medidas del rectángulo	Factorización en números primos
Ancho = 108	
Largo = 180	

a) En una de las factorizaciones, tachen de uno en uno cada factor que se repita en la otra. Éstos son factores primos comunes a 108 y 180.

b) ¿Cuál es el producto de los factores tachados? ______________________

c) Expresen con potencias el producto de los factores tachados. ______________

____

d) Verifiquen que los dos números, 108 y 180, son divisibles entre el producto de los factores primos comunes.

e) Escriban dos divisores que no sean comunes a 108 y 180. ______________

f) ¿Habrá un número mayor al producto de los factores primos comunes que sea divisor de 108 y 180? ______________ Si la respuesta es sí, escríbanlo. ______________________ Si la respuesta es no, expliquen por qué.

____

g) Consideren el problema inicial en el que 108 es, en centímetros, la medida del ancho de la tira de madera, y 180, la medida del largo, ¿cuál es la medida máxima por lado de cada cuadrado que se puede cortar de esa tira, sin que sobre ni falte madera? __________ ¿Cuántos cuadrados se pueden cortar? __________

3. Comparen sus respuestas con sus compañeros y, con apoyo de su maestro, identifiquen los errores y corrijan si es necesario. Posteriormente, lean la siguiente información y realicen lo que se les pide.

El mayor divisor común de dos o más números naturales se llama *máximo común divisor* y se denota como MCD.

a) Consideren la factorización en números primos de los números 270 y 252 y tachen en una de las factorizaciones los que son comunes a ambos números.

$270 = 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5$ $\qquad$ $252 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7$

b) Escriban el producto de los factores comunes que tacharon. ____________________

____

c) ¿Cuál es el máximo común divisor de 270 y 252? ____________________

____

4. Completen la tabla para verificar que los tres números, *a*, *b* y *c,* son divisibles entre el producto de los factores primos comunes.

Número compuesto	Factorización en números primos	Factores primos comunes de ***a*, *b* y *c***	Producto de los factores primos comunes	Cociente del número compuesto entre el producto de factores primos comunes
$a = 588$				
$b = 180$				
$c = 700$				

a) ¿Habrá un número mayor al producto de los factores primos comunes que sea divisor de *a*, *b* y *c*? __________ Si la respuesta es sí, escríbanlo. ____________________

Si la respuesta es no, expliquen por qué. ____________________

____

b) ¿Cuál es el máximo común divisor de *a*, *b* y *c*? ____________________

____

5. Completen la tabla de la siguiente página.

Números compuestos	Factorización en números primos	Factores que producen el MCD	Máximo común divisor (MCD)
60 y 90			
315, 525 y 441			
80 y 160			

Expliquen en qué caso el máximo común divisor de dos o más números es uno de ésos y den un ejemplo. ____________________

____

6. Un electricista necesita colocar lámparas a lo largo de cuatro muros que rodean una casa. El primero mide 18 m; el segundo, 24 m; el tercero, 28 m; y, el cuarto, 36 m. ¿Cuál es la mayor distancia que puede haber entre dos lámparas seguidas, si se quiere que siempre sea la misma? ____________________

7. Con sus compañeros y con ayuda del maestro, comparen sus resultados, identifiquen los errores y corrijan.

Sesión 4

Mínimo común múltiplo (mcm)

Automóvil	Tiempo que tarda en dar una vuelta (en segundos)
A	18
B	20
C	24
D	28

1. Trabajen en equipo. Regresen al problema de "Carreras de autos" de la sección "Para empezar". Éstos son los datos y se trata de elegir los dos autos que vuelven a pasar por la línea de salida simultáneamente.
   a) Completen la tabla para ver los tiempos de cada auto.

Vueltas / Automóvil	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	18	36								
B	20									
C	24									
D	28									

b) ¿Según la información presentada, ¿cuál es el menor tiempo en el que dos automóviles coinciden? ____________

c) ¿A qué automóviles corresponden esos tiempos? ____________
Encierren en un círculo rojo esa pareja de autos.

d) ¿Cuántas vueltas dio cada uno de esos autos? ____________

e) Indiquen otra pareja de automóviles que pasen la meta al mismo tiempo.

Pareja de automóviles	Tiempos en los que coinciden

f) Anoten la pareja de automóviles que tarda más en pasar por la línea de salida al mismo tiempo. ____________

g) ¿Cuál es la pareja de automóviles que conviene elegir para ganar el juego? ____________
____

2. Completen la tabla y después escriban los números que se piden.

	× 2	× 3	× 4	× 5	× 6	× 7	× 8	× 9	× *n*
3									
8									
12									

Un múltiplo común de...

a) 3 y 8: ______ b) 3 y 12: ______ c) 8 y 12: ______ d) 3, 8 y 12: ______

e) ¿Cuánto debe valer n para que la expresión $3n$ sea múltiplo de 3? ____________

f) ¿Cuánto debe valer n, para que, al sustituirlo en la expresión $3n$, el número que se obtenga sea múltiplo común de 3, 8 y 12? ____________

3. Lean en grupo con su maestro la siguiente información y después resuelvan.

Un número natural a es múltiplo común de b y c, si, al dividirlo entre b y entre c, el residuo es cero.

Por ejemplo, 24 es múltiplo común de 8 y 12 porque

$24 \div 8 = 3$ y sobra cero; así como $24 \div 12 = 2$ y sobra cero.

El número 24 no es el único múltiplo común de 8 y 12, también están el 48, el 72, el 96 y muchos más, pero 24 es el *menor múltiplo común* de 8 y 12.

En general, si un número a, es el *menor múltiplo común* de dos o más números, se dice que a es el *mínimo común múltiplo (mcm)* de esos números.

Consideren los siguientes números y su factorización en primos.

$12 = 2^2 \times 3$ $30 = 2 \times 3 \times 5$ $18 = 2 \times 3^2$

a) Tachen los factores que se tendrían que seleccionar para obtener el mcm de 12, 30 y 18. ¿Cuál es el mcm de 12, 30 y 18? ___________

b) Encierren en un círculo los factores que se tendrían que seleccionar para obtener el MCD de 12, 30 y 18. ¿Cuál es el MCD de 12, 30 y 18? ___________

c) Verifiquen que el mcm que obtuvieron es múltiplo de 12, 30 y 18, y que no hay otro número menor que cumpla esa condición. Comprueben también que el MCD que obtuvieron es divisor de 12, 30 y 18, y que no hay otro número mayor que cumpla esa condición.

4. En la tabla siguiente, anoten la descomposición en factores primos que corresponda a los tiempos que tarda en dar una vuelta cada automóvil.

Automóvil	A	B	C	D
Tiempo que tarda en dar una vuelta (en segundos)	18	20	24	28
Factorización en números primos				

a) ¿Qué factores se consideran para obtener el mcm de los tiempos que representan a los automóviles A y C? ___________ Y, ¿de A y B? ___________, ¿de A y D? ___________, ¿B y D? ___________

b) ¿Cuál es el menor de los mcm de las parejas de automóviles? ___________

Sesión 5

Para terminar

De mínimo común múltiplo y máximo común divisor

1. Trabajen en pareja. Factoricen en primos los siguientes números, después encuentren su MCD y su mcm.

48 = 56 = 64 =

MCD de 48, 56 y 64: ___________ mcm de 48, 56 y 64: ___________

2. Con sus compañeros y con apoyo del maestro, comparen sus resultados. Comenten cómo hacer para determinar el MCD y el mcm de dos o más números.

Luego, apliquen su estrategia para completar la tabla.

Números	Factorización en números primos	MCD	mcm
360 y 140	360 = 140 =		
	$2^4 \times 3 \times 7$ $2^3 \times 3^2 \times 5$ $2^3 \times 3 \times 5$		
28 y 25	28 = 25 =		

3. Analicen cada enunciado y determinen si es verdadero o falso. Anoten un ejemplo en la última columna.

Enunciado	V/F	Ejemplo
a) El MCD de dos o más números siempre es menor que cualquiera de los números.		
b) El mcm de dos o más números siempre es mayor que cualquiera de los números.		
c) El MCD de dos o más números es el producto de los factores primos comunes con menor exponente.		
d) El mcm de dos o más números es el producto de los factores primos comunes con mayor exponente.		

4. Con sus compañeros y con apoyo del maestro, comparen sus resultados, identifiquen los errores y corrijan.

5. Trabajen en equipo. Resuelvan los problemas.

a) Un número es múltiplo común de 21 y 35 y tiene cuatro dígitos. ¿Cuál es el menor número que cumple con esta condición? ______________________

b) Dos números primos entre sí son los que no tienen divisores comunes diferentes de 1. ¿Cuáles de los siguientes números son primos entre sí? Márcalos.

11 y 22 15 y 18 21 y 28 8 y 15

6. Utilicen el recurso audiovisual *Problemas que se resuelven con el mcm o con el MCD* para analizar casos en los que se aplican estos conocimientos.

7. Utilicen el recurso informático *Factorización en números primos* para que practiquen ejercicios con esta técnica.

11. Figuras geométricas y equivalencia de expresiones de segundo grado 2

Sesión 1

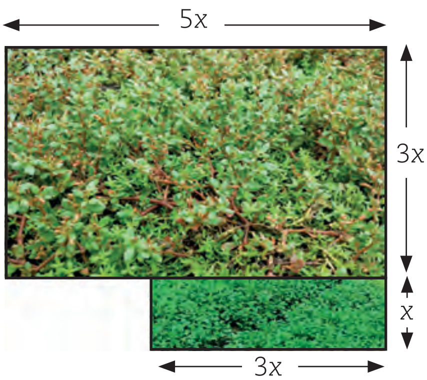
Para empezar

Las chinampas son terrenos rectangulares construidos con lodo y varas sobre el agua. Las podemos encontrar en las zonas de Tláhuac y Xochimilco, en la Ciudad de México. De acuerdo con la Oficina Regional de la FAO (https://bit.ly/2Eg8Rvp), en ellas trabajan alrededor de 12 000 personas que cultivan principalmente hortalizas y flores. Albergan 2% de la biodiversidad mundial y 11% de la biodiversidad nacional que incluye 21 especies de peces, 6 de anfibios, 10 de reptiles, 79 de aves y 23 de mamíferos. Su importancia también se basa en que es una forma de cultivo altamente productiva y sostenible. Las chinampas de la Ciudad de México pertenecen al grupo de áreas naturales protegidas de nuestro país y, desde 2017, fueron reconocidas como Sistema de Patrimonio Agrícola de Importancia Global por la Organización de las Naciones Unidas para la Alimentación y la Agricultura (FAO).

¿Conoces o has oído de los cultivos en chinampas? En la secuencia 3 se mencionó la necesidad de la rotación de cultivos. ¿Sabes cómo se distribuyen y la temporada del año en que se siembran? ¿Cómo determinarías el área que ocupan los cultivos? ¿Cómo calcularías la medida del largo o del ancho de una chinampa si se conoce su área? En esta secuencia calcularás la medida de la superficie de una chinampa cuando se desconoce alguna de sus dimensiones.

Manos a la obra

Chinampas



1. Observa las imágenes, representan la chinampa de Genaro, quien en la sección más grande cultiva verdolaga y en la de menor tamaño, perejil.
   a) Anota la expresión que representa el área de la chinampa donde Genaro cultiva verdolaga. ______
   b) ¿Qué expresión representa el área cultivada con perejil? ______

c) Escribe la expresión que representa el perímetro de toda la chinampa. ______________________

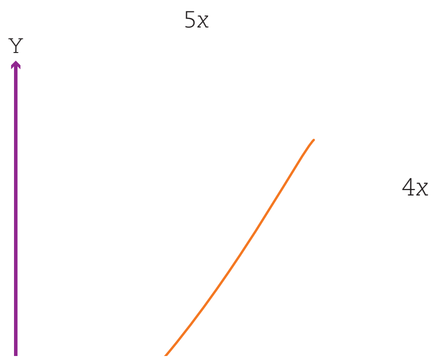
d) Anota una expresión que represente el área total que ocupa la chinampa. ___________________

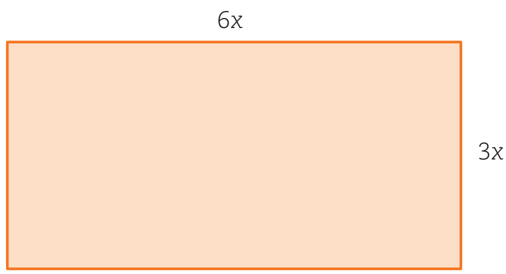
2. Anota expresiones equivalentes a las que escribiste en los incisos anteriores.

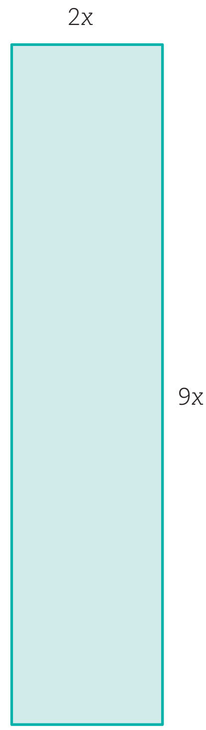
	Expresión anotada	Expresión equivalente
a) Área de la chinampa donde se cultiva verdolaga	=	
b) Área cultivada con perejil	=	
c) Perímetro de toda la chinampa	=	
d) Área total que ocupa la chinampa	=	

3. Compara con tus compañeros las expresiones que anotaron y verifiquen si todas son equivalentes.

4. En las siguientes figuras, seleccionen la chinampa cuya área sea equivalente a la de Genaro y dibujen la manera en que quedarían distribuidos los plantíos de verdolaga y perejil.





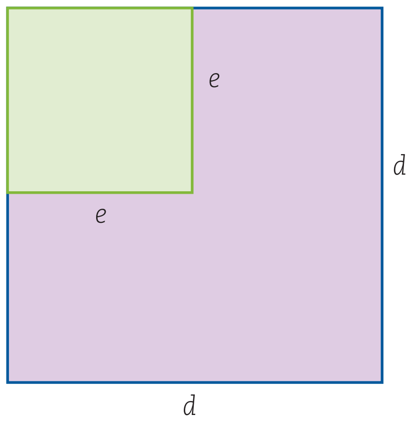


5. Investiga y anota en tu cuaderno qué productos se pueden sembrar en una chinampa y cuáles son las ventajas de esta forma de cultivo. Comenta tu investigación con tus compañeros de grupo en la siguiente sesión.

Superficies para agricultura sustentable

Sesión 2

1. Trabajen en pareja. Las ventajas que representa cultivar en chinampas han despertado el interés de mucha gente, por eso se ofrecen talleres para aprender a construirlas en el traspatio o en terrenos destinados para ello. En el primer día de uno de estos talleres se propusieron dos formas de distribuir los plantíos en las chinampas. Los dibujos representan la organización sugerida con diferentes colores.



a) Anoten una expresión que represente el área de la figura verde.

____

____

b) Escriban una expresión que represente el área de la figura morada.

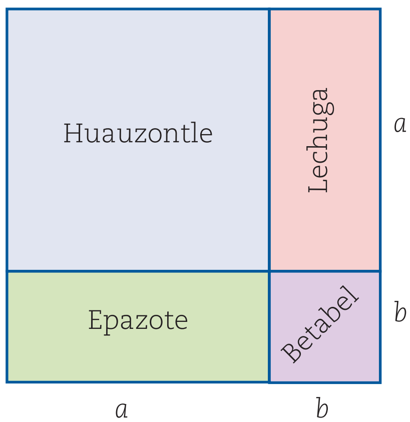
____

____

c) Escriban una expresión que represente el área de las figuras verde y morada juntas.

____

____



2. Rocío y Martha también construyeron su pequeña chinampa con los cultivos que se muestran en el dibujo.

a) Anoten una expresión que represente el área destinada a cada cultivo.

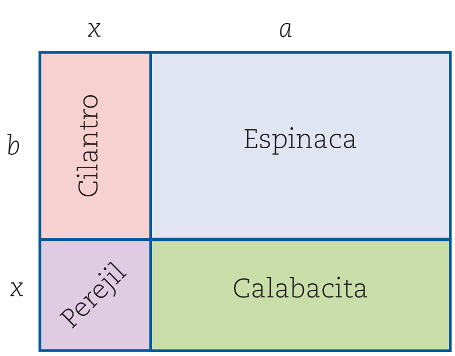
Huauzontle	Lechuga	Epazote	Betabel

b) Anoten dos expresiones equivalentes para representar el área total de la chinampa.

______________________ = ______________________

c) De acuerdo con el número de términos que tiene cada expresión, anoten su nombre.

Expresión algebraica 1	Expresión algebraica 2



3. Andrés y Elvia construyeron una chinampa cuya siembra distribuyeron como se muestra a la izquierda.

a) Anoten en la tabla la expresión que representa el área destinada a cada cultivo.

Cilantro	Espinaca	Calabacita	Perejil

b) Escriban dos expresiones que permitan conocer el área que ocupa toda la chinampa.

_______________ = _______________

c) ¿Son equivalentes las expresiones que representan el área de las dos chinampas anteriores? _______________ ¿Por qué?

____

____

d) Por la medida de sus lados, escriban a qué figura geométrica se parece la chinampa de Rocío y Martha. _______________

Y, ¿la de Andrés y Elvia? _______________

____

Dato interesante
Las chinampas representan un gran avance en técnicas de cultivo. Surgieron en el México prehispánico y alcanzaron su máximo desarrollo con la civilización mexica, en éstas se cultivaba el alimento para una de las ciudades más grandes de esa época, Tenochtitlan, con 200 000 habitantes, aproximadamente.

4. Lean la información del recuadro y sigan las indicaciones de su maestro.

Si dos o más expresiones diferentes permiten calcular la misma área, se dice que son *expresiones equivalentes*. Por ejemplo, el área de un cuadrado se puede expresar como el producto de la medida de su lado por sí misma, lo que es equivalente a elevarla al cuadrado. Esto representado en forma general es:

$$(l)\ (l) = l^2$$

Si el lado del cuadrado está expresado con un binomio $(m + n)$, entonces su área se representa como el producto de dos binomios iguales, o bien un binomio elevado al cuadrado: $(m + n)(m + n) = (m + n)^2$

Al hacer las operaciones indicadas se obtienen otras expresiones equivalentes a las anteriores.

$$m^2 + mn + nm + n^2 = m^2 + 2mn + n^2$$

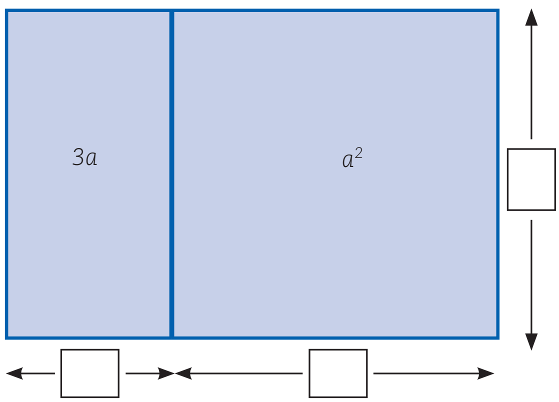
La última expresión, formada por un trinomio, ya no puede reducirse más.

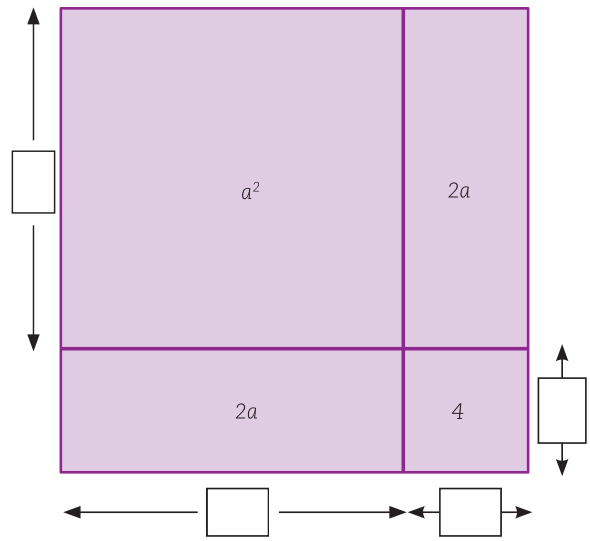
La expresión algebraica que resulta de elevar un binomio al cuadrado se conoce con el nombre de *trinomio cuadrado perfecto*.

Sesión 3

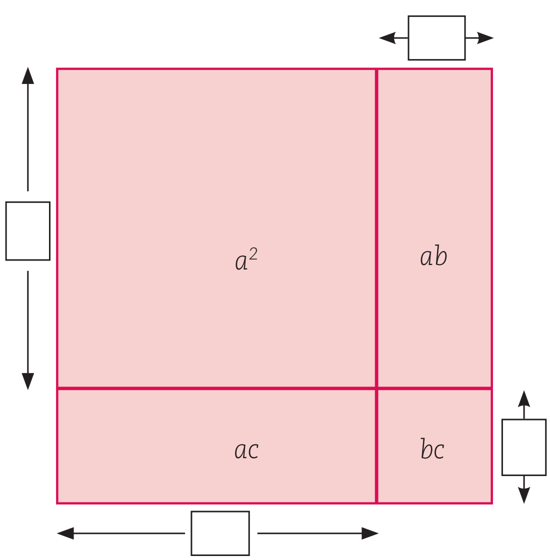
Distribución de superficies para la autosuficiencia alimentaria

1. Trabajen en pareja. La Secretaría de Agricultura y Desarrollo Rural lleva a cabo una estrategia de autosuficiencia alimentaria que consiste en apoyar a productores de pequeña y mediana escala para mejorar sus condiciones de vida. Algunos grupos de productores se organizaron y recibieron apoyo para sembrar. Los dibujos representan su distribución de cultivos. Anoten en la imagen la medida que corresponde a los lados de cada figura.





Dato interesante
La chinampa es una forma de obtener gran diversidad de cultivos sin afectar el medio ambiente.



2. Resuelvan lo que se pide.

a) Anoten la expresión que representa el área total del terreno representado con la figura de color azul.

b) Anoten la expresión que representa el área total del terreno representado con la figura de color morado.

c) ¿Qué expresión representa el área total del terreno representado con la figura de color rojo de la izquierda?

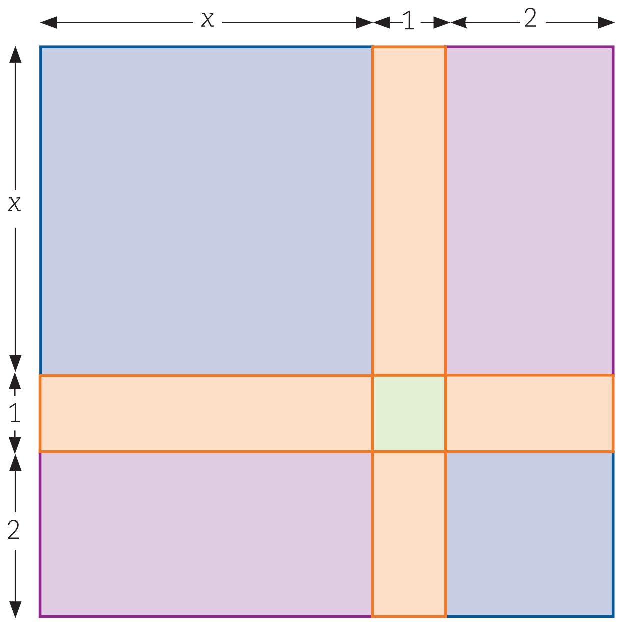
3. Ana y Enrique también son pequeños productores y quieren hacer una chinampa para sembrar elote, quelite, calabaza y chile. En su cuaderno, realicen lo que se solicita a continuación.

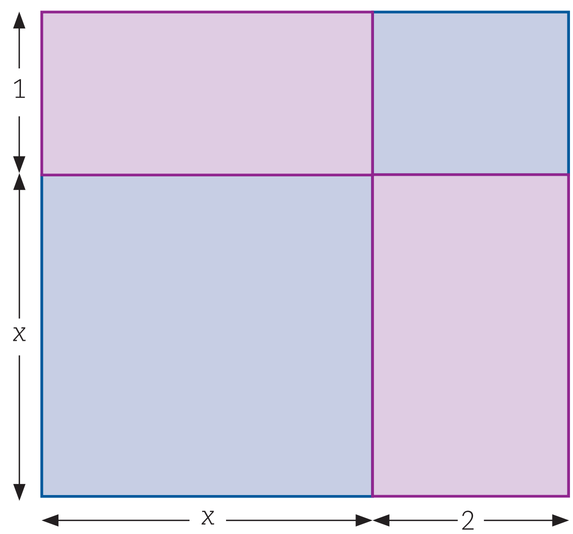
   a) La expresión $(y + a)\ (y + b)$ representa una propuesta de distribución del terreno para sus cultivos. Hagan un dibujo que corresponda a esta distribución y comprueben que el área de su dibujo es igual a: $y^2 + (a + b)y + ab$.

   b) La expresión $(x + 1)\ (x + 2)$ representa otra distribución posible. Elaboren un dibujo que la represente y comprueben que el área de su dibujo es igual a: $x^2 + 3x + 2$.

   c) Analicen cuál de las dos distribuciones que se presentan de la superficie para los cultivos corresponde a la expresión: $x^2 + 3x + 2$ y enciérrenla en un círculo. Al finalizar, digan por qué descartaron la otra figura.

Dato interesante
Una característica de las calabazas es que 90% de su peso es agua; los elotes, por su parte, son un alimento natural con mucha fibra que ayuda a la óptima digestión.





4. Revisen en grupo las respuestas al trabajo realizado en las dos actividades anteriores y, en su cuaderno, verifiquen que los valores que anotaron como medida de los lados en cada figura les permite obtener la expresión que representa su área total.

5. Cuando una expresión algebraica se escribe en forma de multiplicación, se dice que se *factorizó*. Completen la factorización de las siguientes expresiones algebraicas. Al finalizar, en su cuaderno, hagan la multiplicación expresada para comprobar que obtienen el polinomio correspondiente.

a) $8x^4 - 12x^5 = (4x^4)(2 - \square)$

b) $4a^2 + 8\,ab + 4b^2 = (\square + 2b)(2a + \square)$

c) $10y^3 + 5y^4 - n^2 = (\square)(2 + y) - n^2$

d) $b^5 - bc - bc^2 = (\square)(\square - c - c^2)$

e) $4x^2 + 8xy + 4y^2 = (\square + \square)(2x + \square)$

Vínculo con... Historia

Repasa en tu libro de segundo grado de Historia la importancia de la chinampa para la economía mexica.

6. Revisen con sus compañeros las respuestas y corrijan lo que sea necesario.

7. Lean la siguiente información y, si es necesario, regresen a las actividades anteriores para revisar sus respuestas.

Cuando un polinomio se transforma en un producto de dos factores, se dice que se *factorizó*. La mejor forma de comprobar que la factorización es correcta consiste en realizar la multiplicación y ver si el resultado corresponde al polinomio original.

Por ejemplo:

Factorización

$$6x^4 + 9x^3 = (3x^2)(2x^2 + 3) = 6x^4 + 9x^3$$

Multiplicación

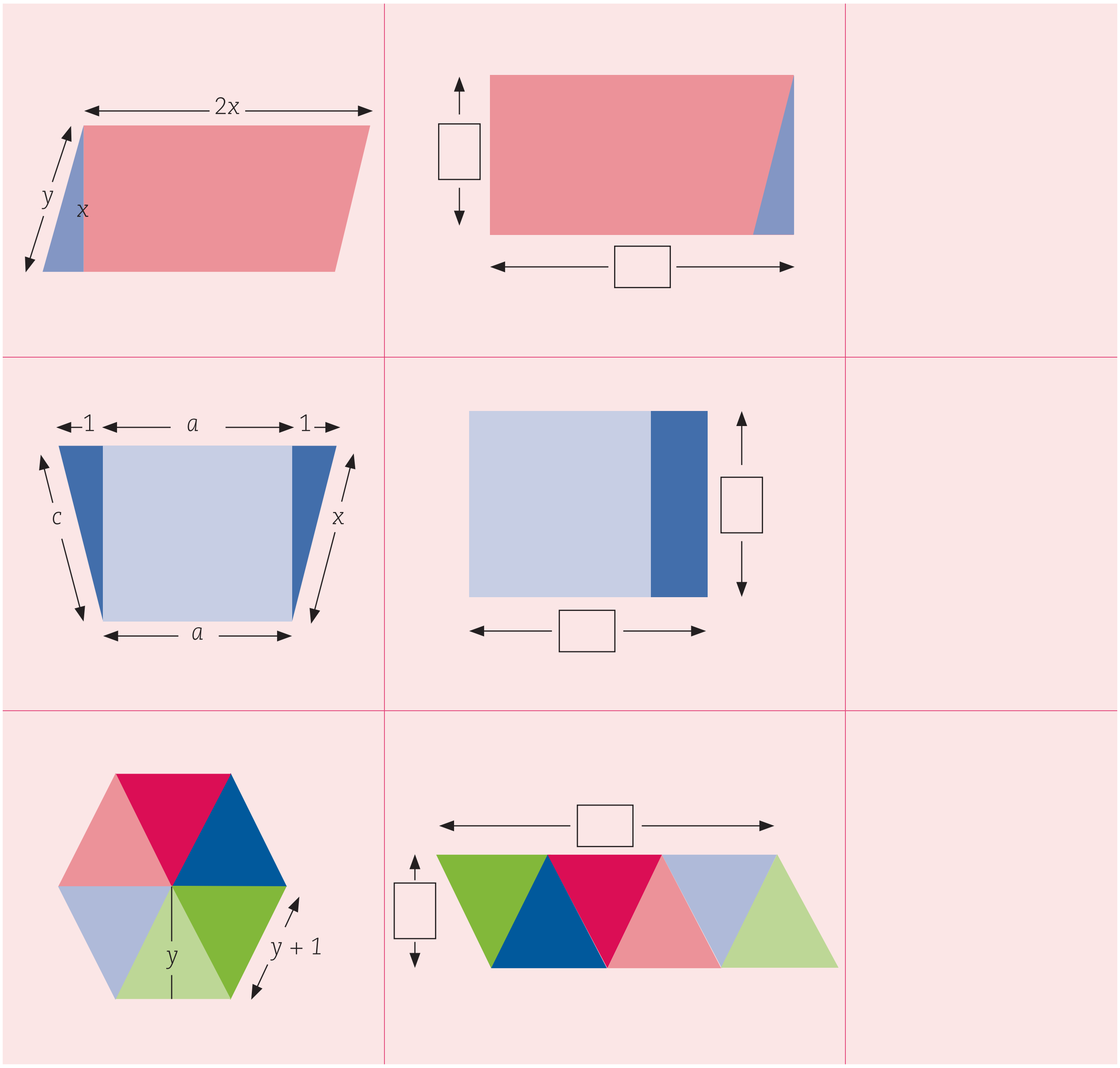
8. Al término de su revisión, platiquen acerca de la posibilidad de crear lo que se conoce como una "azotea verde" si están en un entorno urbano; si su entorno es rural, analicen las ventajas de tener cultivos para el autoconsumo.

Sesión 4

Para terminar

En busca de los factores

1. Observa la tabla de la siguiente página. Las figuras de la izquierda fueron recortadas para formar las que están a la derecha. Anota los datos que se piden en las figuras de la segunda columna. En la tercera, escribe dos expresiones equivalentes que representen su área.



2. Explica en tu cuaderno cómo comprobaste que son equivalentes las dos expresiones que anotaste para representar el área de cada figura.

3. Compara tus respuestas con las de tus compañeros y corrige si es necesario.

4. Observen el recurso audiovisual *Factores de una expresión algebraica de segundo grado* para tener mayor claridad acerca de cómo obtener una expresión equivalente por medio de la factorización.

5. Usa el recurso informático *Factorización de expresiones cuadráticas* para ejercitar los conocimientos aprendidos en esta secuencia.

12. Funciones 2

Sesión 1

Para empezar

Actualmente, los teléfonos celulares forman parte de nuestra vida; han pasado de ser un medio de comunicación a convertirse en herramientas de trabajo, estudio, navegación y entretenimiento. Según datos de la "Encuesta nacional sobre disponibilidad y uso de tecnologías de la información en los hogares" (ENDUTIH) 2018 del Inegi, en México, más de 83 millones de personas contaban con algún teléfono celular en ese año. De éstas, casi 50 millones tenían un teléfono inteligente (*smartphone*). Estas cifras han ido en aumento año con año y cada vez más gente tiene acceso a este tipo de dispositivos electrónicos. ¿Para qué usan tú o tus familiares los teléfonos celulares?

El uso de estos dispositivos también ha traído algunas consecuencias negativas: por ejemplo, el aumento en el número de accidentes vehiculares por distracciones causadas por el uso del teléfono mientras se conduce. ¿Conocen a alguien que use el celular mientras maneja? ¿Alguna vez has visto a algún chofer del transporte público utilizar su teléfono para hablar o mandar mensajes mientras conduce? ¿Cuántos accidentes crees que ocurran en tu localidad o en las carreteras por esta causa? ¿De qué manera piensas que ha variado el número de accidentes vehiculares por el uso del teléfono celular al conducir? ¿Cómo se podría representar esa situación para analizarla?

En esta secuencia aprenderás a resolver problemas que implican el análisis de la variación cuadrática para conocer sus propiedades y características.

Manos a la obra

Los teléfonos celulares

1. Trabajen en pareja. Un organismo internacional realizó un estudio, en 2015, sobre el aumento anual de la cantidad de teléfonos celulares que hay por cada 100 personas en el mundo, tomando como base los datos del periodo de 2000 a 2014. En la siguiente tabla se registran algunos de los resultados obtenidos.

	Número de teléfonos celulares por cada 100 habitantes en el mundo (2000 a 2014)						
Año	2000	2001	2004	2005	2006	2008	2014
Año del estudio	1	2	5	6	7	9	15
Número de teléfonos celulares por cada 100 habitantes	3.7	5.3	12.5	15.7	19.3	27.7	62.5

a) ¿Cuántos teléfonos celulares más hubo por cada 100 habitantes en el segundo año respecto al primer año del estudio? ________________

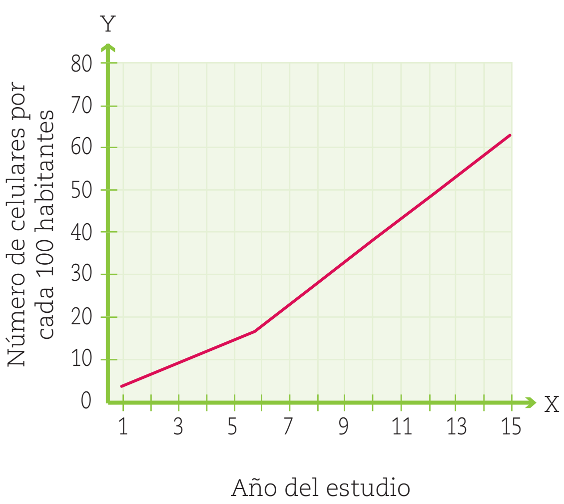
b) ¿Y cuántos más hubo en el sexto año respecto al quinto? ________________

c) Si se considera el aumento de celulares que hay año con año, anoten las cantidades aproximadas para los años 2007 y 2009. Expliquen su razonamiento para calcular el número de teléfonos que había por cada 100 personas en esos años.

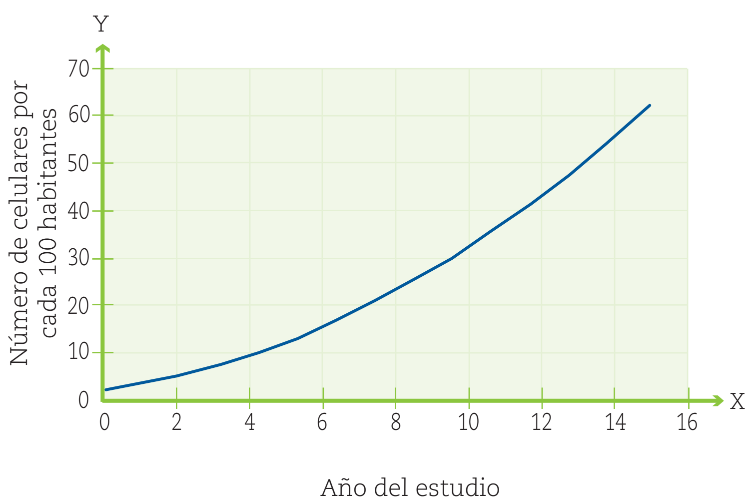
d) ¿Qué significa que haya 62.5 celulares por cada 100 personas en el año 2014? Considerando esto, ¿cuántos habría en 2014 en una población de 30 millones de habitantes? ________________

2. Marquen con una ✓ la gráfica que muestra los resultados del estudio anterior.

☐ Gráfica 1 | Número de teléfonos celulares por cada 100 habitantes en el mundo del año 2000 a 2014



☐ Gráfica 2 | Número de teléfonos celulares por cada 100 habitantes en el mundo del año 2000 a 2014



Anoten los argumentos por los cuales eligieron esa gráfica. ________________

____

3. En grupo y con apoyo del maestro, comenten cuál de las dos gráficas se corresponde mejor con los datos del estudio y sus argumentos. Contesten: ¿qué diferencias encuentran entre las gráficas? ______________________________

¿Qué diferencia hay entre los datos del primer y del quinto año en ambas gráficas? ____

____

Sesión 2

¿Cuántos teléfonos celulares habrá?

1. Trabajen en equipo. De acuerdo con el patrón de crecimiento de la gráfica que seleccionaron en la sesión anterior, ¿en qué año el estudio proyecta que habrá 90 celulares por cada 100 habitantes? ______________________________

   a) ¿En qué año habrá, según el estudio, un celular por cada habitante? __________

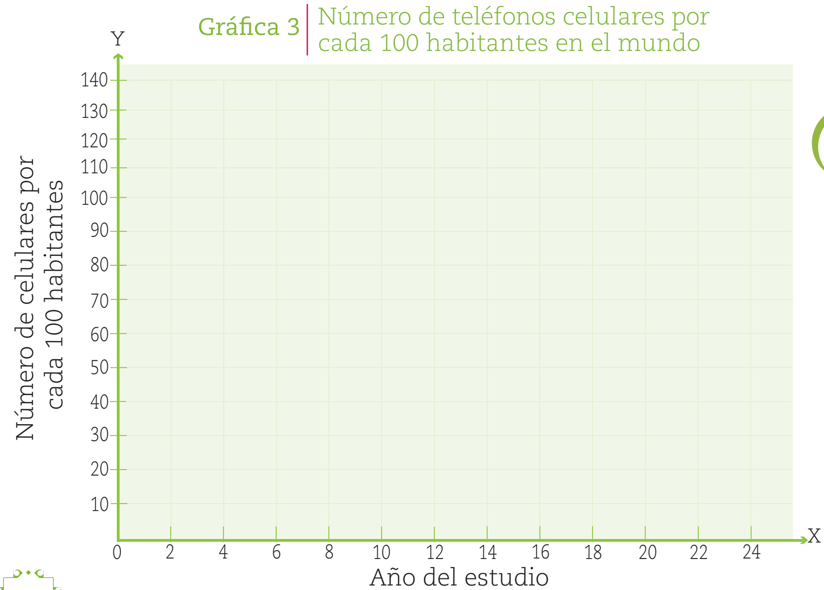
   b) Una de las siguientes expresiones algebraicas modela la situación. Márquenla con una ✓ y argumenten por qué. Consideren que *x* representa cada uno de los años que duró el estudio, y que *y* es la cantidad de teléfonos celulares por cada 100 habitantes en cada año.

   ☐ $y = 2x + 1.7$ ☐ $y = 0.2x^2 + x + 2.5$ ☐ $y = \frac{x^2}{2} + 2.5$

2. Utilicen la expresión algebraica que eligieron para completar la siguiente tabla.

	Número de celulares por cada 100 habitantes en el mundo						
Año	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
Año del estudio	16	17	18	19	20	21	22
Celulares por cada 100 habitantes							

Gráfica 3 | Número de teléfonos celulares por cada 100 habitantes en el mundo



3. Con los datos de la tabla de arriba y los de la tabla de la página 117, elaboren la gráfica para modelar el estudio.

4. En grupo y con apoyo del maestro, comparen las respuestas de las actividades anteriores con las de sus compañeros. Analicen en particular las diferentes representaciones de la misma función: ¿cómo se corresponde la gráfica con los valores de la tabla y con la expresión algebraica? ____

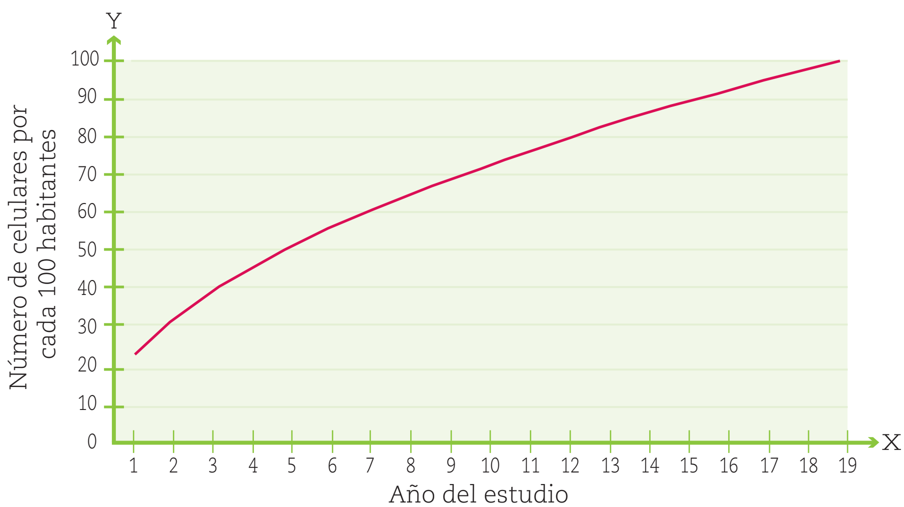
____

5. Trabajen en pareja. En Europa se realizó un estudio similar al del organismo internacional al mismo tiempo. Los resultados mostraron que el comportamiento registrado era diferente al del primer estudio.

a) ¿Cuántos teléfonos celulares había en Europa por cada 100 habitantes en el primer año del estudio?

b) A partir de la gráfica de la derecha completen la tabla.

Gráfica 4 | Número de teléfonos celulares por cada 100 habitantes en Europa



	Proyección del número de celulares por cada 100 habitantes en Europa							
Año	2000		2004	2009	2011		2016	2019
Año del estudio	1		5	10	12		17	20
Celulares por cada 100 habitantes	23	32.5				89		

c) ¿En qué año habrá, según el segundo estudio, un celular por cada habitante de Europa? ____

d) Comparen ambas gráficas. ¿Cuál de las dos crece más rápido en los primeros años del estudio? ______________ ¿Cuáles son las principales diferencias entre ambos estudios? ____

¿Por qué creen que hay tanta diferencia respecto al estudio mundial? ______________

____

____

e) Si las tendencias siguieran igual, ¿qué valores aproximados tendrían ambos estudios en el año 2025? ______________________________ ¿Cuál sería el significado de estos resultados en la realidad? ______________________

La gráfica del estudio de la sesión 1 (página 31) es parte de una curva llamada parábola y su relación funcional está dada por una función cuadrática.

En la representación algebraica de una función cuadrática, la variable independiente x aparece elevada al cuadrado y determina su grado. En este caso la expresión algebraica asociada a esta función es:

$$y = 0.2x^2 + x + 2.5$$

Sesión 3

La distancia de frenado al conducir

1. Trabajen en pareja. En el *Reglamento de tránsito en carreteras y puentes de jurisdicción federal* de México, y en el *Manual del conductor* publicados por la Secretaría de Seguridad y Protección Ciudadana se establece que: *El conductor de un vehículo debe respetar las normas de circulación y conservar, respecto del que va adelante, la distancia de seguridad que le garantice su detención oportuna y así evitar accidentes*. Pero, ¿cómo se puede calcular esta distancia de seguridad?

Cartel de una campaña vial que busca evitar accidentes.

a) Comenten cómo influye la velocidad del vehículo y la distancia que debe recorrer para detenerse después de comenzar a frenar.

b) Cuando van en bicicleta o corriendo, si van más rápido, ¿les cuesta más trabajo detenerse? Discutan por qué creen que sucede esto.

2. El cartel de la campaña vial de la página anterior ayuda a los conductores a calcular la distancia de seguridad entre un automóvil y el que se encuentra enfrente para frenar sin ocasionar un accidente; para ello se considera el tiempo de reacción del conductor, desde el instante en que reconoce el evento que lo pone en riesgo, hasta el momento en que logra detener el coche por completo.

a) Un vehículo avanza a 80 km/h. Según la información del cartel, ¿qué distancia debe mantener este auto respecto al vehículo que va adelante? __________

____

b) Si un automóvil circula a 110 km/h, velocidad máxima permitida en autopista, ¿cuánta distancia de seguridad debe dejar éste respecto a los vehículos que van adelante? ____________________________________

c) En una carretera, un vehículo circula a 70 km/h; a 40 m de distancia del punto en que circula está detenido un animal, ¿tiene suficiente espacio para detenerse por completo? ____________________________________

3. Calculen la distancia de seguridad para cada velocidad que aparece en la tabla y contesten las preguntas.

	Distancia de seguridad para un frenado que evite accidentes								
Velocidad del automóvil (en km/h)	10	20	55	60	75	80	115	130	150
Distancia de seguridad (en m)									

a) De acuerdo con los datos de la tabla, ¿qué cantidad tuvieron que multiplicar para obtener la distancia de seguridad cuando un automóvil viaja a 60 km/h?

____

Y, ¿a 75 km/h? ____________________________________

b) ¿Qué operación tienen que realizar para obtener las decenas de la velocidad?

____

c) Si x es la velocidad del automóvil, ¿cómo expresas la distancia de seguridad en función de la velocidad que lleva? __________________________

d) Ana, Ramón y Sofía comparan las expresiones algebraicas que representan la función distancia de seguridad respecto a la velocidad del vehículo. Determinen quién tiene la razón.

Ana:
La expresión algebraica que yo propongo es
$y = x^2$
y es la distancia de seguridad en metros y está en función de x que es la velocidad del automóvil.

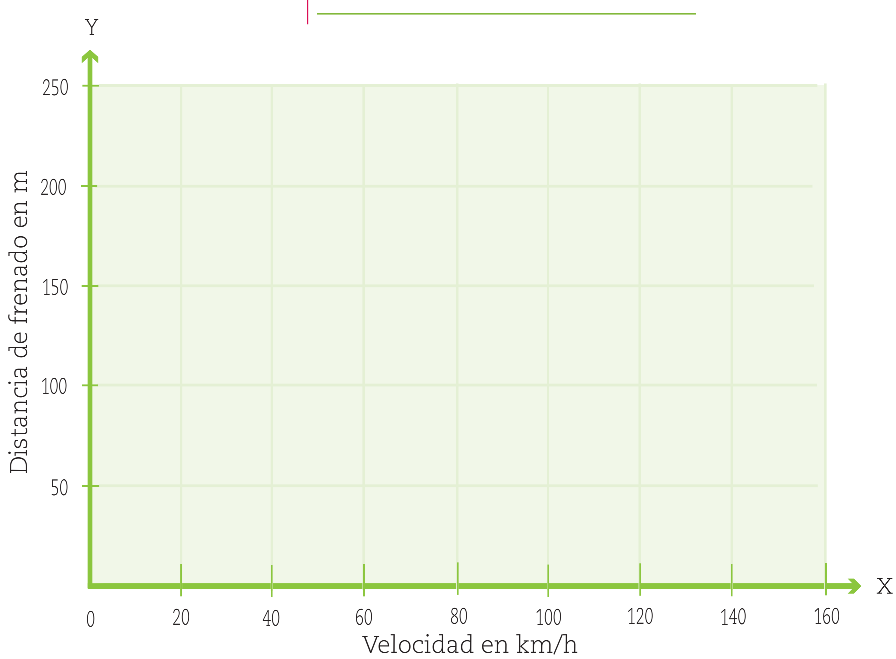
Ramón:
La función de la distancia de frenado respecto a la velocidad es
$y = \left(\frac{x}{10}\right)^2$
y es la distancia de seguridad mientras que x es la velocidad del automóvil.

Sofía:
La expresión algebraica que yo usé es
$D(v) = (0.1v)^2$
en donde $D(v)$ es la distancia de seguridad y v es la velocidad del automóvil.

4. En grupo y con apoyo del maestro, comparen las expresiones algebraicas que obtuvieron y analícenlas junto con las de Ana, Ramón y Sofía. Guíen su análisis con estas preguntas: ¿cuál o cuáles expresiones son correctas? ¿Cómo se puede verificar que una expresión algebraica se corresponde o no con la situación que representa, con los datos de una tabla o con la representación gráfica?

5. Utilicen los datos de la tabla y la expresión algebraica obtenida en la actividad 3 para obtener la gráfica que representa la función de la distancia de frenado seguro respecto a la velocidad del automóvil; anoten también un título adecuado a la gráfica.

Gráfica 5 | ______________________



Otras maneras de determinar la distancia de seguridad

1. Trabajen en pareja. En una ciudad han establecido que la manera de determinar la distancia de frenado seguro está definida por la función:

$$D(v) = 0.007v^2 + 0.2v$$

En donde $D(v)$ es la distancia sugerida entre un automóvil y el que se sitúa delante de él; mientras que v es la velocidad del mismo. Utilicen la función para completar la tabla.

	Distancia de seguridad para un frenado que evite accidentes								
v Velocidad del automóvil (en km/h)	30	55	60	75	80	100	115	120	130
$D(v)$ Distancia de seguridad (en m)									

En las funciones siempre se relacionan dos variables que generalmente se representan con letras. En ejemplos anteriores se ha empleado la letra y para representar la variable dependiente y la x para representar la variable independiente.

En la situación anterior, representamos la función como

$$D(v) = 0.007v^2 + 0.2v$$

La notación mostrada es una manera diferente de representar las funciones. En particular, esta notación nos permite identificar cuál es la variable dependiente y cuál es la variable independiente.

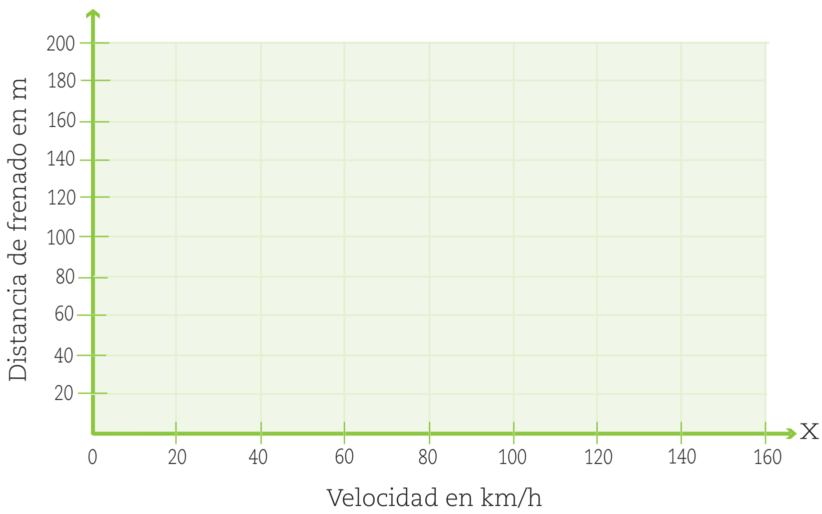
En este caso, $D(v)$ es la variable dependiente y representa la distancia recorrida en metros; v es la variable independiente y representa la velocidad a la que circula el automóvil. La función es de segundo grado o cuadrática, ya que el mayor exponente que tiene la variable independiente es 2. La función D es llamada función distancia de seguridad. En resumen, la función nos dice cómo calcular la distancia de seguridad (variable dependiente) a partir de la velocidad que lleva un automóvil (variable independiente).

Las dos maneras más usuales de expresar la función cuadrática son

$$D(v) = 0.007v^2 + 0.2v$$

$$y = 0.007v^2 + 0.2v$$

Gráfica 6



2. En la imagen de la izquierda, grafiquen la función de la distancia de seguridad respecto a la velocidad del automóvil, según la expresión algebraica $D(v) = 0.007v^2 + 0.2v$ y los datos de la tabla de la página anterior.

3. Comparen esta gráfica con la obtenida en la actividad 5 de la página 122.

a) ¿Cómo cambian las distancias de frenado seguras en función de la velocidad?

____

b) ¿Para qué velocidad la distancia de seguridad es la misma? ____________

____

Sesión 5

Para terminar

El uso del teléfono celular al conducir

1. Trabajen en equipo. En la sesión anterior utilizaron la función $D(v) = 0.007v^2 + 0.2v$, donde el término $0.007v^2$ representa la distancia de frenado y $0.2v$ representa la distancia de reacción.

Esta última distancia, la de reacción, es la distancia recorrida desde que el conductor se da cuenta de un evento peligroso hasta que pisa el freno.

Los cálculos más conservadores estiman que la distancia de reacción cuando se usa el celular es tres veces mayor cuando se lee un mensaje de texto o se contesta una llamada, y hasta seis veces cuando se escribe y envía un mensaje.

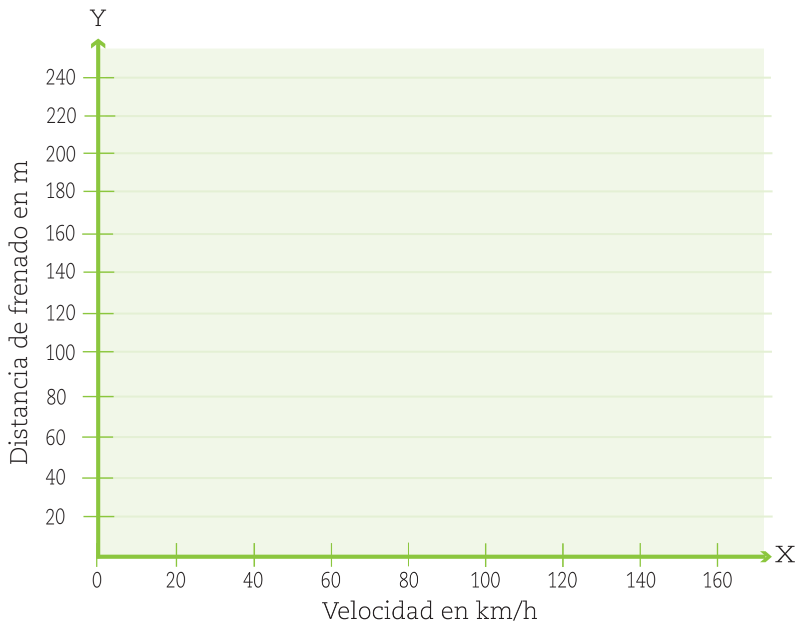
a) En la siguiente página, escriban una expresión algebraica que represente la función de distancia de seguridad respecto a la velocidad cuando se responde una llamada en el teléfono celular y otra para cuando se escribe un mensaje de texto.

Dato interesante
Diversos estudios han encontrado que cuando se usa el teléfono celular al manejar, los conductores tardan más tiempo en detectar y reaccionar a cambios repentinos; esto implica que se requiere de una distancia mayor para frenar sin riesgo.

Función distancia de seguridad respecto a la velocidad cuando se responde una llamada en el teléfono celular	Función distancia de seguridad respecto a la velocidad cuando se envía un mensaje escrito en el teléfono celular

b) Grafiquen las dos funciones obtenidas junto con la de la actividad 2 de la sesión 4, de la página 124.

Gráfica 7



2. En grupo y con apoyo del maestro, comparen las gráficas. Reflexionen cómo afectan las distracciones del conductor para determinar la distancia de seguridad. Respondan las siguientes preguntas: ¿cómo se modifican las distancias de seguridad en función de la velocidad? ¿Qué término de la regla algebraica fue el que se modificó? ¿De qué manera afectan estos ajustes a las gráficas?

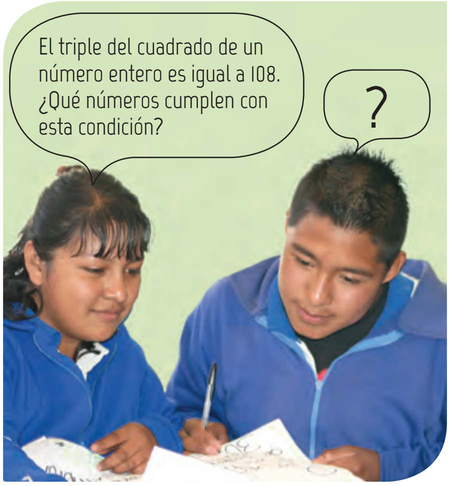
3. Observen el recurso audiovisual *Distancia de seguridad* para analizar por qué las condiciones del clima, las distracciones del conductor o las condiciones del automóvil modifican la función distancia de seguridad.

4. Usen el recurso informático *Análisis de gráficas y expresiones algebraicas de funciones cuadráticas*, que les permitirá aplicar las funciones en la solución de problemas al observar la dependencia del valor de una de las variables respecto de otra en una relación funcional cuadrática.

13. Ecuaciones cuadráticas 2

Sesión 1

Para empezar



Uno de los grandes retos para los matemáticos a lo largo de la historia fue el desarrollo del lenguaje algebraico, considerado como un conjunto de conceptos, expresiones y símbolos que permiten estudiar el conocimiento existente y descubrir uno nuevo. El lenguaje algebraico se inició con los griegos y se le atribuye a Diofanto, en el siglo III, el haber utilizado por primera vez una literal para representar una incógnita en una ecuación. Los griegos se enfocaron en el estudio de la geometría, pero desconocían los números negativos y el cero, por lo que no lograron un mayor avance en el conocimiento algebraico.

Después de los griegos, fueron los matemáticos indios y árabes quienes hicieron aportes importantes al desarrollo del lenguaje algebraico, por ejemplo, el uso de los números negativos y la invención del sistema decimal, que hasta la fecha es la base de nuestro sistema de numeración. Las contribuciones de los matemáticos indios fueron recogidas en una obra del matemático árabe Al-Juarismi (*ca*. 850 n.e.), de cuyo nombre derivan las palabras álgebra y algoritmo.

Fue hasta el siglo XVI cuando aparecieron los primeros ejemplos de álgebra simbólica, en la obra del matemático francés Francisco Vieta (1540-1603).

En esta secuencia aprenderás a distinguir varios tipos de ecuaciones de segundo grado, los casos que se presentan respecto a las soluciones o raíces, y conocerás otros procedimientos para resolver las ecuaciones que te permitirán solucionar problemas de manera más eficiente.

Glosario
Ca. es la abreviatura del término latino *circa*, significa "aproximadamente", se usa cuando no se tienen fechas exactas.

Manos a la obra

Ecuaciones de la forma $ax^2 + c = 0$

1. Resuelve la siguiente situación, al completar el procedimiento que se indica.

El triple del cuadrado de un número entero es igual a 108. ¿Qué números cumplen con esta condición?

____

a) Representa algebraicamente:

- Un número entero cualquiera: ______________
- El cuadrado de un número cualquiera: ______________
- El triple del cuadrado de un número cualquiera: ______________

b) De acuerdo con la situación planteada, la expresión anterior es igual a 108. Escribe la ecuación que representa esta igualdad.________________

c) Comparen con sus compañeros de grupo la ecuación que formularon para ver si es la misma. Si no lo es, expliquen a qué se debe y, con ayuda del maestro, decidan quiénes y por qué tienen la razón.

d) Trabajen en equipo. Comenten lo que conviene hacer para resolver la ecuación.

¿Cuáles son las raíces de la ecuación? x_1 = ________________ x_2 = ________________

Verifiquen, en su cuaderno, si ambas raíces satisfacen la ecuación y comenten si éstas son solución del problema y por qué. ________________

2. Desarrollen un procedimiento similar al de la actividad 1 para resolver, en su cuaderno, el siguiente problema. Usen 3.14 como valor de π. Después de resolver, contesten las preguntas.

El área de un círculo es 153.86 cm^2. ¿Cuánto mide el radio del círculo? ________________

a) En este caso hay dos expresiones algebraicas equivalentes que representan el área del círculo, ¿cuáles son esas expresiones? ________________

b) ¿Cuál es la ecuación que permite resolver el problema? ________________

c) ¿Cuáles son las raíces de la ecuación? r_1 = ________________ r_2 = ________________

d) Expliquen por qué sólo una de las raíces puede ser solución del problema: ________________

____

e) ¿Cuánto mide el radio del círculo? ________________

3. Con base en el siguiente problema, anoten lo que se pide en la tabla: *El largo de un terreno rectangular mide el triple que el ancho y su área es igual a 588 m^2. ¿Cuáles son las medidas del terreno?*

Ancho = ________________ Largo = ________________

Para obtener las raíces de la ecuación pueden usar el método de ensayo y error que utilizaron en la secuencia 4.

Representación algebraica de…			Área conocida	Ecuación	Raíces
ancho	largo	área			x_1 = x_2 =

4. En grupo y con la ayuda de su maestro, lean y comenten lo siguiente:

La forma general de las ecuaciones de segundo grado es $ax^2 + bx + c = 0$, que es un trinomio de segundo grado, donde $a \neq 0$, lo que significa que el valor de a no puede ser cero. Cuando a una ecuación de segundo grado le falta alguno de los términos bx o c, se dice que es una *ecuación incompleta*.

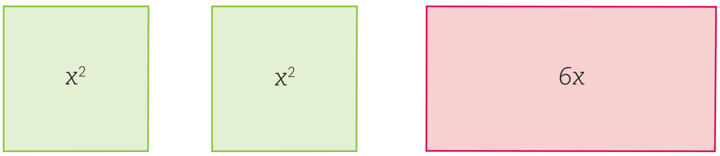
Una ecuación cuadrática, como $2x^2 = 50$, no tiene el segundo término (llamado término lineal). Para resolverla, primero se divide entre 2 cada miembro, en este caso resulta $x^2 = 25$. Después, se extrae la raíz cuadrada de ambos miembros y se obtienen las raíces: $x_1 = 5$, $x_2 = -5$

5. De acuerdo con lo anterior, comenten por qué a una ecuación de segundo grado incompleta no puede faltarle el término ax^2.

Sesión 2

Ecuaciones de la forma $ax^2 + bx = 0$

1. Trabajen en equipo. Completen lo que se pide para resolver el siguiente problema: *Se tienen dos cuadrados iguales, de área x^2 cada uno. La suma de las áreas de estos dos cuadrados es igual a un rectángulo de área 6x. ¿Cuánto mide el lado del cuadrado?*



a) ¿Cuál es la expresión algebraica que representa la suma de las áreas de los dos cuadrados? ________________________________

____

b) ¿Cuál es la ecuación que relaciona el área de los dos cuadrados con el área del rectángulo?

____

c) Comparen la ecuación que escribieron con las de otros equipos. Si no es la misma, averigüen a qué se debe y quién tiene razón. ________________________________

d) Busquen un número que satisfaga la ecuación. Anótenlo aquí: x_1 = ________________________________

e) Anoten en la tabla las medidas que se piden y verifiquen que cumplen con las condiciones del problema.

Lado de un cuadrado	Área de un cuadrado	Área de los dos cuadrados	Ancho del rectángulo	Largo del rectángulo	Área del rectángulo

2. En grupo, comenten la manera en que encontraron las medidas para completar la tabla anterior. Luego, lean y comenten la siguiente información para responder lo que se pide.

A las ecuaciones cuadráticas de la forma $ax^2 + bx = 0$ como $2x^2 = 6x$, que es equivalente a $2x^2 - 6x = 0$ les falta el término c, llamado término independiente.

Un procedimiento para resolver estas ecuaciones, distinto al de ensayo y error, consiste en expresar el primer miembro de la ecuación como un producto de dos factores, es decir, hay que factorizar el primer miembro.

- El primer factor es 2x ya que 2 es el MCD de 2 y 6, mientras que x es el MCD de x^2 y x. Aquí 2x es el MCD de los términos del primer miembro de la ecuación.
- El segundo factor se obtiene al dividir cada término del primer miembro entre el MCD, que es 2x, de donde queda $2x(x - 3) = 0$. Esta ecuación es equivalente a la expresión original. Cuando el producto de dos números es igual a cero, es porque uno de los dos factores es cero. A esto se le conoce como *propiedad del cero en la multiplicación* o *propiedad de producto cero*.

a) La ecuación $2x(x-3) = 0$ expresa una multiplicación de dos factores cuyo resultado es cero. Expliquen por qué al menos uno de los dos factores tiene que ser igual a cero. ____

b) Suponiendo que el primer factor, $2x$, es igual a cero, esto es, que $2x = 0$, ¿cuál es el valor de x?

____

c) Suponiendo que el segundo factor, $x-3$, es igual a cero, esto es, que $x-3=0$, ¿cuál es el valor de x?

____

d) ¿Cuáles son las raíces de la ecuación $2x^2 - 6x = 0$? $x_1 =$ ____ $x_2 =$ ____

e) Comenten y escriban en su cuaderno si las dos raíces son solución al problema que se planteó al inicio de la actividad 1, de la página 128, o sólo una de ellas; digan cuál y por qué.

3. Trabajen en equipo. Hagan un desarrollo similar al de la actividad 1, de la página 128, para resolver el siguiente problema: *Cuatro veces el cuadrado de un número es igual a ocho veces el mismo número. ¿De qué número se trata?* ____

a) ¿Cuál es la ecuación que representa las condiciones del problema? ____ Escriban nuevamente la ecuación, igualada a cero. ____

b) ¿Cuál es el MCD de los términos de la ecuación? ____

c) Escriban la ecuación como producto de dos factores. ____

d) Igualen a cero cada uno de los factores y obtengan: $x_1 =$ ____ $x_2 =$ ____

e) Verifiquen que las raíces obtenidas satisfacen la ecuación. ¿Con cuáles números se cumplen las condiciones del problema? ____

4. Contesten las preguntas y hagan lo que se indica.

a) ¿En cuál de las siguientes factorizaciones el factor común es el MCD de los términos de la ecuación $3x^2 - 6x = 0$? Coloquen una ✓ en la respuesta correcta.

☐ $x(3x - 6) = 0$ ☐ $3(x^2 - 2x) = 0$ ☐ $3x(x - 2) = 0$

b) ¿En cuál de las siguientes factorizaciones el factor común es el MCD de los términos de la ecuación $5x^2 + 2.5x$? Coloquen una ✓ en la respuesta correcta.

☐ $5(x^2 + x)$ ☐ $2.5x(2x + 1)$ ☐ $x(x^2 + 2.5)$ ☐ $5x(x + 2.5)$

c) Formulen una ecuación de segundo grado cuyas raíces sean: $x_1 = 0$ y $x_2 = 5$. ____

5. Entre compañeros y con apoyo del maestro, comparen sus respuestas, identifiquen los errores y corrijan si es necesario.

6. Observen el recurso audiovisual *Ecuaciones cuadráticas incompletas* para analizar la manera de resolver ecuaciones de segundo grado de la forma $ax^2 + bx = 0$ y $ax^2 + c = 0$.

7. Utilicen el recurso informático *Factorización de ecuaciones cuadráticas incompletas* para practicar el método de factorización con el fin de resolver ecuaciones cuadráticas incompletas.

Sesión 3

Ecuaciones de la forma $x^2 + bx + c = 0$

1. Trabajen en equipo. Hagan lo que se indica y contesten las preguntas que se plantean para resolver el siguiente problema: *El producto de dos números enteros consecutivos es 182. ¿Cuáles son los números?*

a) Completen la tabla.

Representación algebraica de…			Producto conocido	Ecuación cuadrática
un número entero	el número consecutivo	producto de dos números consecutivos		

b) Comparen con otros equipos lo que anotaron en la tabla y la solución, que encontraron. Si hay diferencias, averigüen a qué se deben y decidan quiénes tienen razón.

2. Seguramente, la solución que encontraron son dos números enteros consecutivos y positivos cuyo producto es 182. Ahora van a usar otro procedimiento para encontrar tanto la solución positiva, que ya tienen, como la solución negativa. Hagan lo que se indica.

a) Efectúen las operaciones necesarias para que los tres términos de la ecuación queden ordenados en el primer miembro, como en la forma general: $ax^2 + bx + c = 0$.

b) Anoten en la tabla lo que se pide.

Ecuación cuadrática ordenada igualada a cero	Valores de los coeficientes		Valor del término independiente
	a	***b***	***c***

c) Ahora, expresen la ecuación anterior como un producto de dos factores que es igual a cero:

$$(x \qquad)(x \qquad) = 0$$

Observen que el primer término de cada factor es la raíz cuadrada del primer término de la ecuación. Para encontrar el segundo término de cada factor, hay que buscar dos números, que llamaremos p y q, que cumplan con las condiciones que se muestran en el siguiente esquema.

De acuerdo con los datos de la tabla, donde $b = 1$ y $c = -182$, hay que buscar dos números (p y q) que sumados den 1 y multiplicados den –182. Lo que se quiere es obtener un producto de binomios del tipo $(x + p)(x + q)$.

$$x^2 + \overset{p+q}{\overset{\downarrow}{b}}x + \underset{pq}{\underset{\uparrow}{c}} = 0$$

- ¿Cuáles son los números buscados? ____________________

d) Con los números anteriores, completen la ecuación expresada como producto de dos factores.

$$(x \qquad)(x \qquad) = 0$$

e) Finalmente, apliquen la propiedad del producto igual a cero y encuentren las dos raíces de la ecuación. x_1 = ____________________ x_2 = ____________________

f) ¿Cuáles son los dos números negativos que solucionan el problema? ____________________

3. Lean lo siguiente y, si es necesario, regresen a revisar lo que trabajaron.

El procedimiento para resolver una ecuación completa de segundo grado mediante su descomposición en dos factores se llama método de factorización y se resume en lo siguiente. Dada una ecuación cuadrática como $ax^2 + bx + c = 0$ con $a = 1$

Paso 1: Se hacen las operaciones necesarias para que la ecuación quede ordenada y con los tres términos en el primer miembro, esto es, en su forma canónica:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Paso 2: Se buscan dos números p y q, tales que, $p + q = b$ y $pq = c$

Paso 3: Se escribe la ecuación como producto de dos factores igual a cero, esto es, en su forma factorizada:

$$(x + p)(x + q) = 0$$

Paso 4: Se aplica la propiedad de producto cero y se obtienen las raíces.

Si $x + p = 0$ entonces $x_1 = -p$ Si $x + q = 0$ entonces $x_2 = -q$

4. Relacionen cada ecuación con la factorización que le corresponde.

Forma canónica	**Forma factorizada**
$x^2 + 2x - 15 = 0$	$(x + 3)(x + 5) = 0$
$x^2 - 2x - 15 = 0$	$(x - 3)(x - 5) = 0$
$x^2 + 8x + 15 = 0$	$(x - 3)(x + 5) = 0$
$x^2 - 8x + 15 = 0$	$(x - 5)(x + 3) = 0$

5. Con apoyo del maestro comparen sus respuestas. Revisen la formalización de la actividad 2c) que se muestra al comienzo de esta página y corrijan si es necesario.

Sesión 4

De la forma factorizada a la forma canónica

1. Trabajen en equipo. La mitad de los integrantes resuelve el problema A, y la otra mitad, el problema B. Cuando encuentren las raíces de cada problema, intercambien para verificar que cada ecuación se satisface con las raíces que anotaron.

Problema A	Problema B
Juan es siete años mayor que Laura. El producto de sus edades es 294 años. ¿Qué edad tiene cada uno?	*La diferencia entre dos números es siete. El producto de esos números es 294. ¿De qué números se trata?*

a) Anoten en las tablas la información que se pide.

Representación algebraica de…			Expresar el problema A en términos de una sola incógnita	Ecuación cuadrática
edad de Laura	Juan es siete años mayor que Laura	el producto de sus edades es 294 años		

Representación algebraica de…			Expresar el problema B en términos de una sola incógnita	Ecuación cuadrática
un número cualquiera	la diferencia entre dos números es siete	el producto de esos números es 294		

b) Resuelvan cada ecuación cuadrática en su cuaderno.

c) ¿Cuáles son las raíces de cada ecuación?

Problema A	Problema B

2. Con tus compañeros y con apoyo del maestro, comparen sus resultados. En particular, comenten por qué en el problema A una de las raíces no es solución del problema, mientras que en el problema B las dos raíces son solución del problema.

3. Consideren la ecuación factorizada $(x - 2)(x + 5) = 0$ para contestar las preguntas que se plantean y hacer lo que se indica.

a) Escriban la ecuación en su forma canónica. ____________________

b) ¿Cuáles son las raíces de la ecuación? x_1 = ____________ x_2 = ____________

c) Verifiquen en su cuaderno que la ecuación se satisface con las raíces que anotaron.

d) En la ecuación factorizada, el término x es común a los dos factores, -2 y 5 son dos términos no comunes. ¿En qué son diferentes las raíces de la ecuación y los términos no comunes? ____________

____

4. Anoten lo que falta en la tabla.

Ecuación factorizada	Ecuación desarrollada	Raíces
$(x-1)(x+2)=0$		
	$x^2-x-2=0$	
		$x_1 = 4$ $x_2 = 3$
	$x^2-6x=0$	
$(x-3)(x+4)=0$		
	$x^2+5x-14=0$	
		$x_1 = 7$ $x_2 = -2$

5. Consideren la siguiente ecuación factorizada $(x+3)(x+3)=0$ para contestar las preguntas y hacer lo que se indica.

a) ¿Cuál es la ecuación en su forma canónica? ____________________

b) ¿Cuáles son las raíces de la ecuación? x_1 = ____________ x_2 = ____________

c) ¿Cuáles de las siguientes ecuaciones son equivalentes a $(x+3)(x+3)=0$? Coloquen una ✓ en las que consideren que lo son.

☐ $(x+3)^2=0$ ☐ $(x-3)^2=0$ ☐ $(3+x)^2=0$ ☐ $(3-x)^2=0$

6. Lean y comenten lo siguiente.

El primer miembro de la ecuación $x^2+6x+9=0$ se conoce como trinomio cuadrado perfecto y tiene las siguientes características que permiten reconocerlo.

Primera: una vez que el trinomio está ordenado, los términos primero y tercero tienen raíz cuadrada exacta, en este caso, x y 3.

Segunda: el segundo término es el doble del producto de las dos raíces cuadradas. En este caso, el producto es $3x$ y el doble de este producto es $6x$.

La *factorización de un trinomio cuadrado perfecto* es un producto de dos binomios iguales o, dicho de otra forma, un binomio elevado al cuadrado.

Las ecuaciones cuyo primer miembro es un trinomio cuadrado perfecto tienen dos raíces.

7. Resuelvan los problemas.

a) El cuadrado de un número más seis veces el mismo número es igual a –9. ¿De qué número se trata? ________ ¿Por qué? ________________

____

b) ¿Para qué valor de k, la ecuación $x^2 + kx + 16 = 0$ tiene una solución? ________

¿Por qué? ________________________________

c) ¿Para qué valor de k, la ecuación $x^2 + kx + 16 = 0$ tiene dos soluciones? ______

¿Por qué? ________________________________

____

d) ¿Para qué valor de k, la ecuación $x^2 + kx + 16 = 0$ no tiene una solución? ______

Justifiquen su respuesta. ________________________________

8. Con tus compañeros y con el apoyo del maestro comparen sus respuestas, identifiquen los errores y corrijan lo que sea necesario. En particular, comenten cómo pueden inventar ecuaciones de segundo grado a partir de la forma factorizada.

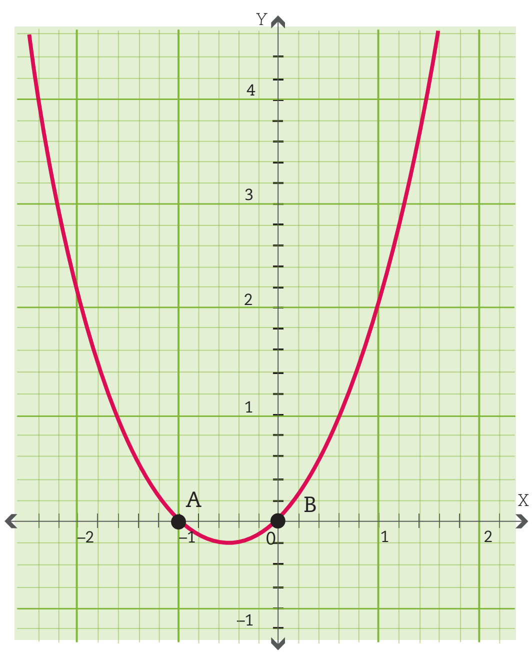
9. Observen el recurso audiovisual *Ecuaciones cuadráticas por factorización* para analizar cómo se resuelven ecuaciones de segundo grado usando este método.

10. Utilicen el recurso informático *Ecuaciones cuadráticas por factorización* para practicar la resolución de ecuaciones cuadráticas usando el método de factorización.

Sesión 5

Para terminar

De la representación gráfica a la expresión algebraica



1. Trabajen en equipo. Analicen la gráfica de la izquierda y contesten las preguntas.

a) ¿Cuáles son las raíces que se muestran en la gráfica?

x_1 = ____________ x_2 = ____________

b) ¿Cuál es la ecuación en forma factorizada?

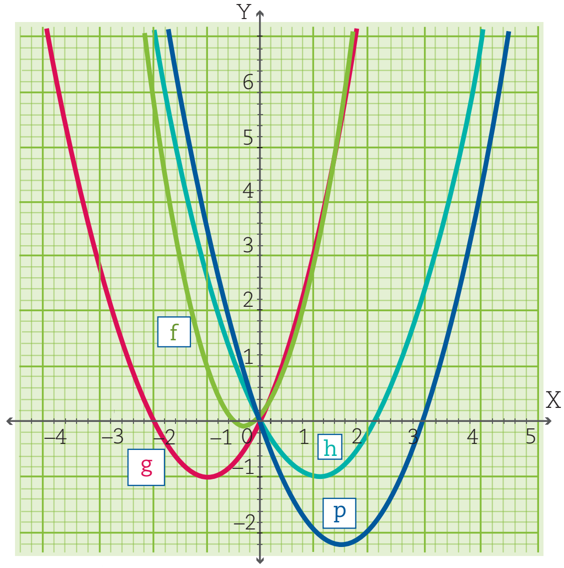
____

c) ¿Cuál es la ecuación desarrollada? ____________

____

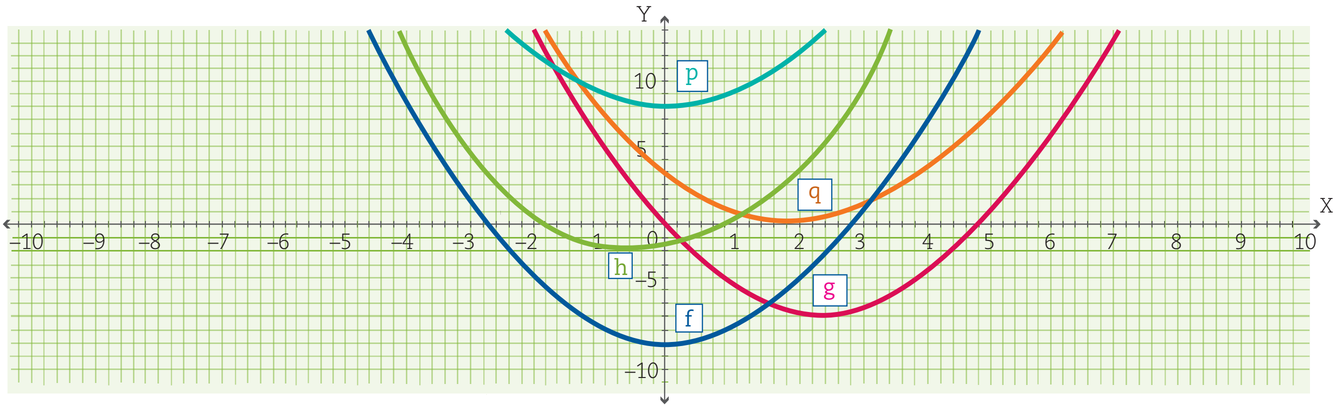
d) La ecuación que anotaron está incompleta. ¿Cuál es el término que le falta? ____________

2. Con base en la gráfica que se muestra, completen la tabla.



Color	Raíces	Ecuación factorizada	Ecuación desarrollada
Azul			
	$x_1 = 0; x_2 = -\frac{1}{2}$		
		$x(x - 3) = 0$	
			$x^2 + 2x = 0$

3. Analicen las siguientes gráficas, completen la tabla y contesten las preguntas.



Gráfica	Raíces	Ecuación factorizada	Ecuación desarrollada
h			
	$x_1 = 0; x_2 = 5$		
		No hay factor común	
			$x^2 - 9 = 0$
q			

a) ¿Cuál es la ecuación que tiene una solución? ________________ ¿De qué color es su gráfica? ________________

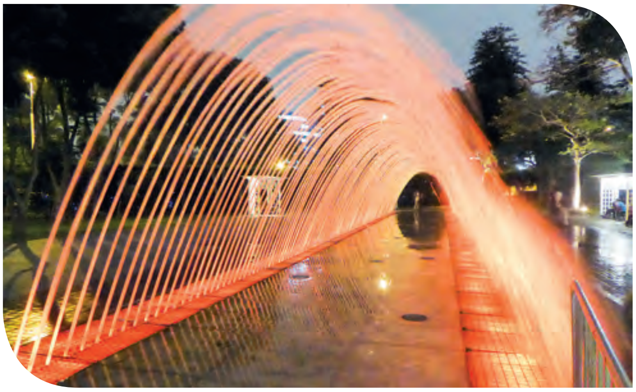
b) ¿Cuál es la ecuación que no tiene solución? ________________ ¿De qué color es su gráfica? ________________

4. Con tus compañeros y con apoyo del maestro, comparen sus respuestas, identifiquen los errores y corrijan si es necesario. Comenten cómo se representa en una gráfica una ecuación sin solución.

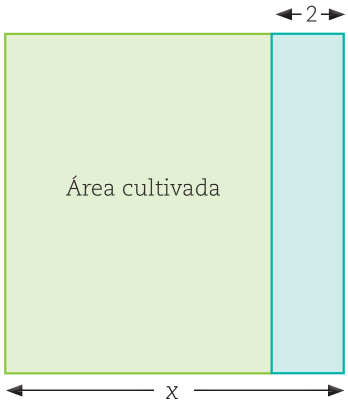
14. ¿Ecuación o función?

Sesión 1

Para empezar



Existen relaciones de correspondencia comunes en nuestra vida cotidiana. Por ejemplo, la relación entre el número de hojas y de páginas de un libro o algún producto que se vende por kilogramo y el pago que se hace por la cantidad que se compre. En el bloque 1 comenzaste a estudiar un tipo particular de relación: la función cuadrática. Este tipo de función se usa para representar la trayectoria que sigue un objeto en movimiento, por ejemplo, la de una pelota que se lanza hacia arriba y cae, o la del agua al salir de una fuente; ambos efectos se deben a la fuerza de gravedad y se pueden expresar mediante una gráfica, una tabla y algebraicamente.



En la secuencia 11 aprendiste a usar expresiones algebraicas cuadráticas y a encontrar expresiones equivalentes, por ejemplo, para representar el área de una chinampa rectangular. La imagen representa una chinampa cuadrada dividida en dos secciones, una de cultivo y la otra para transitar por ella. ¿Cuál sería el área, en metros cuadrados, de la sección cultivada si el valor de x fuera 3 m, 4 m, 5 m o cualquier otro?

En dicha secuencia también iniciaste el estudio y la resolución de las ecuaciones cuadráticas. En esta secuencia aprenderás a resolver problemas que implican el uso de estas funciones y las ecuaciones asociadas a ellas.

Manos a la obra

Medidas variables

1. Considera las dimensiones de la chinampa de la imagen y responde las preguntas.

a) ¿Con qué expresión algebraica puedes representar el área de la sección rectangular cultivada? ____________________

b) Si asignas al área de esa región la literal y, la situación puede representarse con una función, ¿cuáles de las expresiones algebraicas de la siguiente página representarían esa función? Márcalas con una ✓.

☐ $y = x^2 - 2$ ☐ $y = x(x - 2)$ ☐ $y = x^2 - 2x$ ☐ $y = 2x - 2$

Compara con un compañero tu respuesta. En caso necesario, corrijan.

c) Si el valor de x es 5 m, ¿cuál es el área de la sección cultivada? ____________

Y, ¿si el valor de x es 10 m? ____________

d) ¿Cuál es el valor menor que puede asignarse a x para que el área tenga sentido en esta situación? ____________

e) Completa la tabla de valores de la función que representa el área de la sección cultivada. En tu cuaderno, traza la gráfica de esta función.

Tabla de valores								
Lado	x	-1	0	1	2	2.5	3	$\frac{11}{3}$
Área cultivada	$y = x^2 - 2x$							

f) ¿Qué representa el punto más bajo de la gráfica respecto a la situación de área que se está modelando? ____________ ¿Tiene sentido ese valor para esta situación? ____________ Explica tu respuesta. ____________

____

g) ¿Cuáles son los valores de las abscisas de los puntos en que la gráfica corta el eje X? ____________ La ecuación cuadrática asociada a esta función es $x(x - 2) = 0$. ¿Se cumple aquí que esos puntos de corte representan la solución de esta ecuación? ____________

h) En grupo y con el apoyo de su maestro, revisen sus respuestas y, en caso necesario, corrijan.

2. Lee el siguiente planteamiento y contesta lo que se pide. *Luis abre las llaves para llenar una alberca cuadrada de 5 m por lado.*

a) En este caso, el volumen y de agua que habrá en la alberca dependerá de la altura x que alcance sucesivamente el agua. ¿Con cuál de las expresiones de abajo puede representarse la variación del volumen respecto del nivel del agua? Márcala con ✓.

☐ $y = 5x$ ☐ $y = 5x^2$ ☐ $y = 25x$ ☐ $y = 25x^2$

b) Completa la tabla de valores de la función que representa la variación del volumen respecto del nivel que alcanza el agua en la alberca. Puedes usar calculadora. En tu cuaderno, traza la gráfica de esta función.

Altura de la alberca en metros (x)	0	0.4	0.8	$\frac{5}{4}$	$\frac{8}{5}$	2
Volumen en metros cúbicos (y)						

c) ¿Cuál es el valor de la abscisa del punto en que la gráfica corta el eje X? ______ ¿Qué representa este punto respecto a la situación que se está analizando? ____

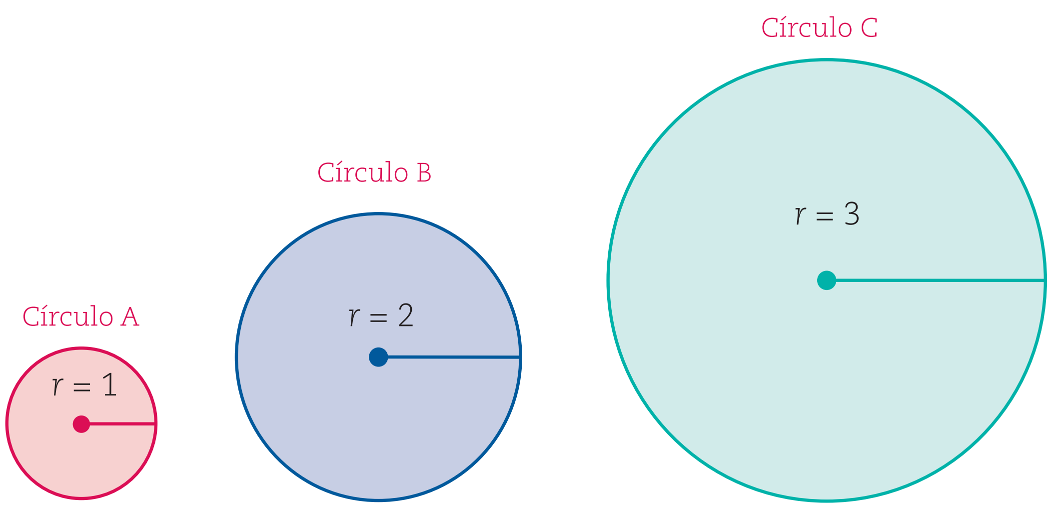
d) La ecuación asociada a esta función es $25x = 0$. ¿Se cumple que ese punto de corte represente la solución de esta ecuación? ____________ Justifica tu respuesta. ____

3. En grupo, y con el apoyo de su maestro, revisen sus respuestas y, en caso necesario, corrijan.

Sesión 2

Una familia de círculos

1. Trabajen en pareja. Consideren las imágenes que se muestran y dibujen en su cuaderno los círculos D, E y F con radio de 4, 5 y 6 cm, respectivamente.



2. En grupo y con apoyo de su maestro, comparen sus dibujos y comenten cómo los trazaron. Consideren las dimensiones de cada círculo para obtener su circunferencia y área. ¿Con qué expresión algebraica se puede representar el área de un círculo cualquiera a partir de la medida de su radio? Y, ¿en el caso de la circunferencia?
3. Lean y analicen la siguiente información.

La circunferencia y el área de un círculo pueden expresarse como funciones del radio de la siguiente manera: $C(r) = \pi(2r)$ y $A(r) = \pi r^2$

Donde r es el radio del círculo y los valores de su circunferencia $C(r)$ y su área $A(r)$ dependen de los que se le asignen a r, que es la variable independiente.

4. Marquen con una ✓ las opciones correctas. Consideren 3.1416 como valor de π.

a) ¿Con cuáles de las siguientes expresiones algebraicas también es posible determinar, aproximadamente, el perímetro de un círculo a partir de la medida de su radio?

☐ $C(r) = 3.1416 \times r$ ☐ $C(r) = 3.1416 \times 2 \times r$

☐ $C(r) = 2\pi r$ ☐ $C(r) = 6.2832r$

b) ¿Con cuáles de las siguientes expresiones también se calcula, aproximadamente, el área de un círculo?

☐ $A(r) = 2 \times 3.1416 \times r$ ☐ $A(r) = 3.1416r^2$

☐ $A(r) = 6.2832r^2$ ☐ $A(r) = 3.1416 \times r \times r$

5. Trabajen en pareja. Calculen las circunferencias y áreas correspondientes para completar la tabla. Pueden utilizar calculadora.

Tabla de valores de la circunferencia y área del círculo en función del radio						
Círculo	A	B	C	D	E	F
r en cm	1	2	3	4	5	6
$C(r)$ en cm						
$A(r)$ en cm^2						

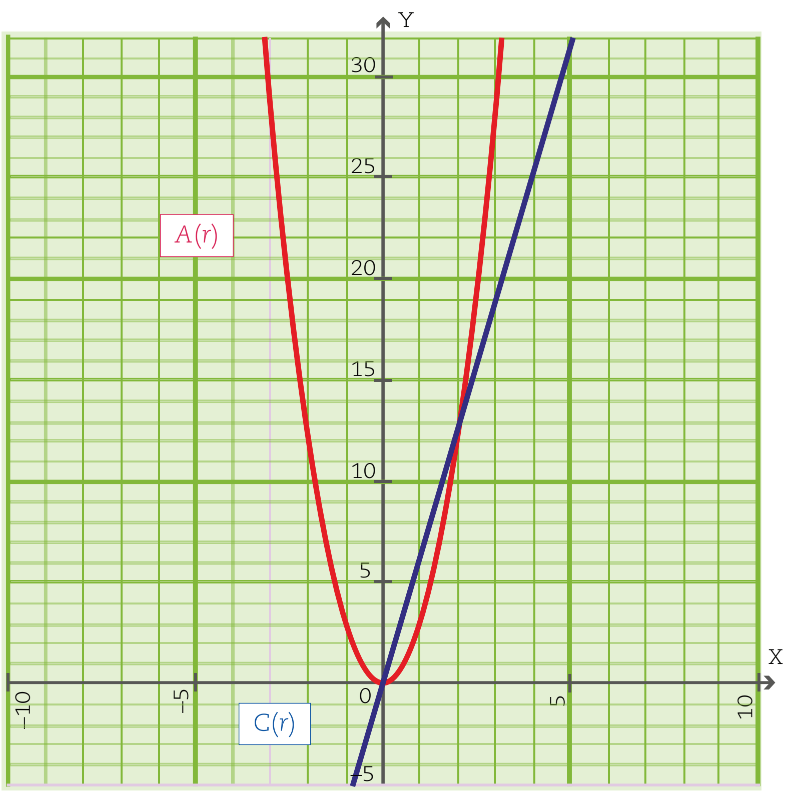
a) En su cuaderno, ubiquen los valores de la tabla anterior en un mismo plano cartesiano para mostrar la relación entre el radio *r* y su circunferencia $C(r)$, así como con su área $A(r)$.

b) Completen las siguientes descripciones de las gráficas en términos de la medida del radio y sus correspondientes circunferencias y áreas.

- *Si el radio mide 4 cm, entonces para el círculo ________________ su circunferencia es ____________, y su correspondiente área es ____________. En las gráficas, estos puntos son (_____, _____) y (_____, _____), respectivamente.*
- *Si un círculo tiene una circunferencia de 31.416 cm, entonces su radio mide ________________ y su correspondiente área es ________________. En las gráficas, estos puntos son (_____, _____) y (_____, _____), respectivamente.*
- *Si el área de un círculo es 113.0976 cm^2, entonces su radio mide __________ y su correspondiente circunferencia es ____________________. En las gráficas, estos puntos son (______, ______) y (______, ______), respectivamente.*

6. Observen las gráficas de las funciones $C(r) = 2\pi r$ y $A(r) = \pi r^2$ para contestar las siguientes preguntas.

a) ¿Qué tipo de gráfica le corresponde a la función $C(r)$ ______________________
¿Por qué? ____
____



b) ¿Qué tipo de gráfica le corresponde a la función $A(r)$? ________________
¿Por qué? ____________________
____
____

c) ¿Existe un círculo que tenga una circunferencia de 5 cm? ____________
____

¿A qué punto de la gráfica corresponden $r = 0.7957$ y (0.7957,5), si es que aparecen en ésta? ______________
____

d) ¿Habrá dos círculos diferentes que tengan el mismo perímetro? __________
¿Por qué? ____________________
____
____

e) La expresión algebraica de este caso es $2\pi r = 5$, que es una ecuación lineal. ¿Con cuál o cuáles de las siguientes expresiones también es posible obtener la circunferencia de este círculo? Márquenlas con una ✓.

☐ $3.1416r = 5$ ☐ $6.2832r = 5$ ☐ $(2)(3.1416)r = 5$

En su cuaderno, resuelvan las ecuaciones para verificar que es posible obtener el perímetro del círculo, recuerden que $\pi \approx 3.1416$.

f) ¿Existe un círculo que tenga un área de 5 cm²? ______________ ¿A qué punto o puntos de la parábola corresponden? ______________________________

____

Tracen una línea paralela al eje X en el punto (0,5). ¿En cuántos puntos corta a la gráfica de la función área $A(r)$? __________ Si se considera el contexto del dibujo de una familia de círculos, ¿es posible dibujar dos círculos diferentes que tengan la misma área? ____________________ ¿Por qué? ______________________

____

g) ¿Cuáles son las ecuaciones que representan un círculo de área 5 cm² en relación con su radio? Márquenlas con una ✓.

☐ $6.2832\,r^2 = 5\text{ cm}^2$ ☐ $\pi r^2 = 5\text{ cm}^2$

☐ $3.1416\,r = 5\text{ cm}^2$ ☐ $3.1416\,r^2 = 5\text{ cm}^2$

- ¿Qué tipo de ecuaciones son? ______________________________________
  En su cuaderno, resuelvan las ecuaciones para verificar que corresponden a la situación indicada.

7. Con ayuda de su maestro, comparen y comenten sus respuestas de las actividades anteriores y, en caso necesario, corrijan.

8. Comparen el comportamiento de la gráfica *A(r)* (parábola) con los valores de la tabla de la actividad 5 y contesten lo que se pide.

a) ¿En qué punto está ubicado el vértice de la parábola? ____________________

____

b) ¿A qué valor corresponderían los valores del radio, la circunferencia y el área en la tabla? ____

____

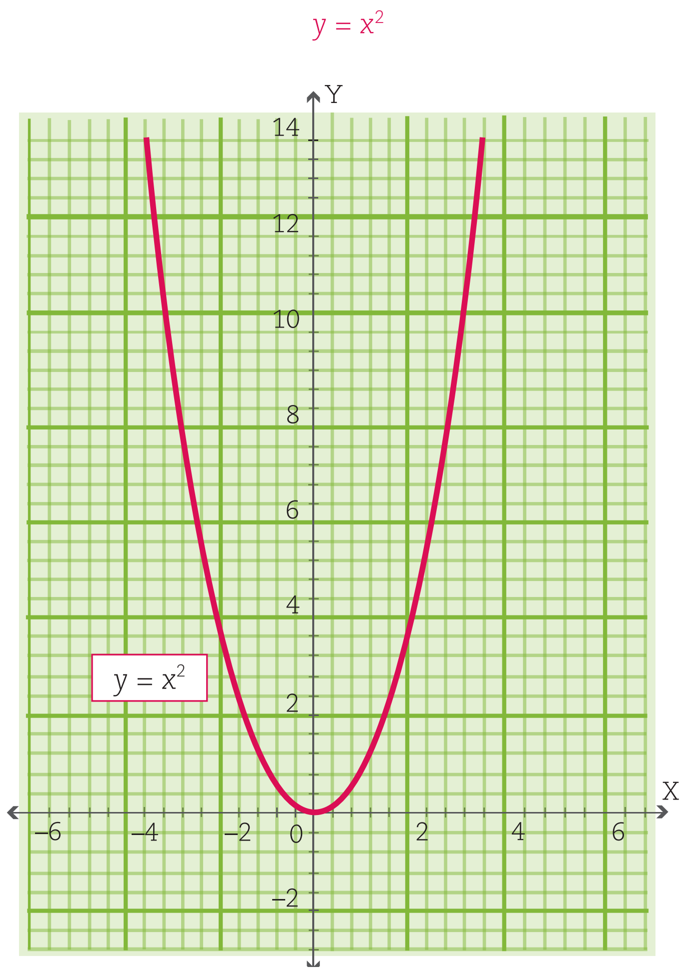
9. Escriban en su cuaderno lo que observan en términos de la medida del radio y el valor de su área y circunferencia.

Sesión 3

Análisis gráfico de $y = x^2$ y $y = x^2 + c$

1. Trabajen en equipo. Contesten las preguntas que se les plantean. La parábola que se muestra es la representación gráfica de la función $y = x^2$.

Dato interesante
Se llama *plano o sistema cartesiano* al diagrama de coordenadas que se usa para representar gráficamente funciones matemáticas y ecuaciones de geometría analítica. Fue creado por el filósofo y matemático René Descartes (1596-1650), de donde tomó su nombre.



a) En esta función, cada valor de y se calcula elevando al cuadrado el valor de x. Completen la tabla de valores de esta función.

Tabla de valores de la función $y = x^2$

x	-4	-3	$-\frac{5}{2}$	-1	0	1	$\frac{5}{2}$	3	4
$y = x^2$									

b) ¿Cuál es el valor de la abscisa del punto en que la gráfica corta el eje X? ______

______

c) La ecuación cuadrática asociada a esta función es $x^2 = 0$. ¿Se cumple que ese punto de corte represente la solución de la ecuación $x^2 = 0$? ______

¿Por qué? ______

______

2. Hagan la gráfica de $y = x^2 - 4$ en el plano cartesiano en el que ya está dibujada la gráfica de $y = x^2$ y describan en qué se parecen y en qué son diferentes. ______

______

a) Completen la tabla de las funciones descritas en las actividades 1 y 2.

Tabla de valores de las funciones $y = x^2$ y $y = x^2 - 4$							
x	-3	$-\frac{5}{2}$	-1	0	1	$\frac{5}{2}$	3
$y = x^2$							
$y = x^2 - 4$							

b) ¿De qué manera se relacionan los valores de la función $y = x^2 - 4$ con los de $y = x^2$? ______

c) ¿En cuántos puntos corta la gráfica de la función $y = x^2 - 4$ al eje X? ______

¿Cuáles son los valores de las abscisas de esos puntos? ______

d) ¿Cuáles son las soluciones de la ecuación $x^2 - 4 = 0$ de acuerdo con la gráfica?

$x_1 =$ ______ $x_2 =$ ______

e) La ecuación $x^2 - 4 = 0$ es de la forma $ax^2 + c = 0$. ¿Cuál es, en este caso, el valor de a? ______ ¿Cuál es el valor de c? ______

f) Verifiquen en su cuaderno que la ecuación $x^2 - 4 = 0$ es equivalente a la ecuación $(x + 2)(x - 2) = 0$ y que ambas se satisfacen con las soluciones que muestra la gráfica que trazaron.

3. En grupo, y con ayuda de su maestro, revisen sus respuestas y, en caso necesario, corrijan.

a) Comenten y contesten en su cuaderno.

La función de la cual se obtiene la ecuación $x^2 - 4 = 0$ *es de la forma* $y = ax^2 + c$. ¿Por qué creen que en un caso la expresión $ax^2 + c$ *se iguala a* 0 *y en el otro a la variable* y*? ¿Cuál es la diferencia entre una función y una ecuación?*

b) Lean y comenten lo siguiente.

> En general, a una función $f(x)$ se le puede asociar una ecuación cuando interesa estudiar los puntos donde la gráfica de la función interseca con el eje X, esto es, cuando $f(x) = 0$.

4. Observen el recurso audiovisual *¿Función o ecuación?* para continuar analizando representaciones gráficas y tabulares de funciones y cuándo y cómo se establece una ecuación a partir de ellas.

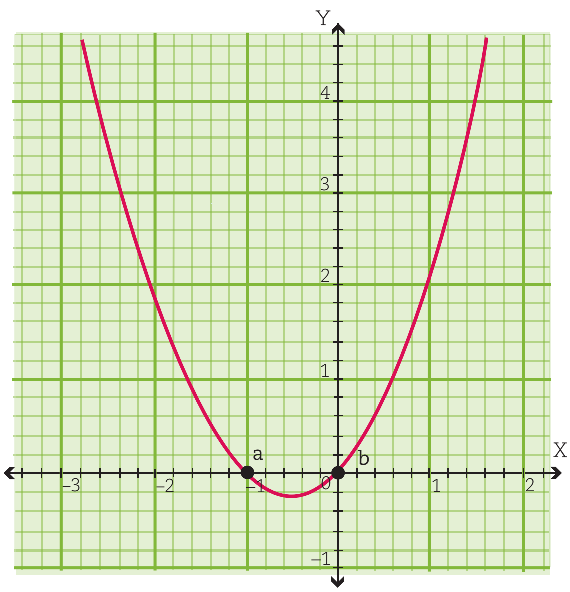
Sesión 4

Para terminar

Funciones con la forma $y = ax^2 + bx$

1. Trabajen en equipo. Contesten las preguntas y hagan lo que se indica. La parábola que se muestra es la representación gráfica de la función $y = x^2 + x$.

$y = x^2 + x$



a) De acuerdo con la gráfica, ¿cuáles son las soluciones (o raíces) de la ecuación $x^2 + x = 0$?

x_1 = ____________________ x_2 = ____________________

b) La ecuación $x^2 + x = 0$ es de la forma $ax^2 + bx = 0$, es decir, una ecuación incompleta, ¿cuál es el término que le falta? ______________ ¿Cuál es el valor de a? ______________

¿Cuál es el valor de b? ____________________

c) Verifiquen en su cuaderno que la ecuación $x^2 + x = 0$ es equivalente a la ecuación en su forma factorizada: $x(x + 1) = 0$ y que ambas se satisfacen con las soluciones que escribieron.

d) La ecuación $x(x + 1) = 0$ se trata de una multiplicación de dos factores cuyo resultado es cero. Expliquen por qué al menos uno de los dos factores tiene que ser igual a cero.

____

e) Si suponemos que el primer factor es $x = 0$, ¿cuál es el valor de x_1? ____________________

f) Si suponemos que el segundo factor es $x + 1 = 0$, ¿cuál es el valor de x_2? ________

____

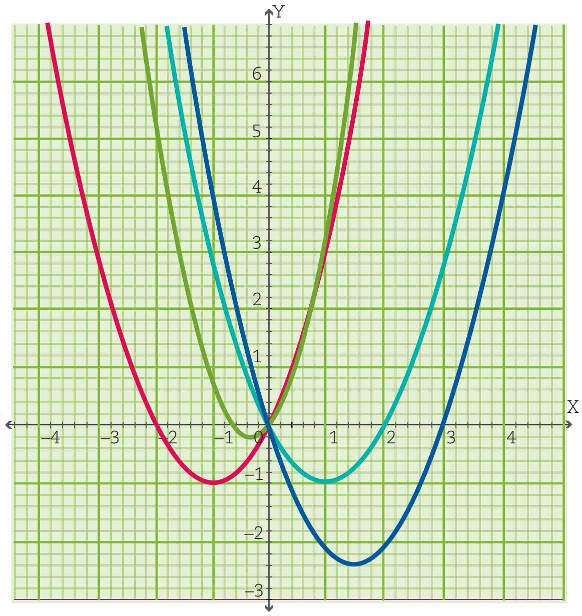
g) Verifiquen que estas soluciones sean las mismas que se aprecian en la gráfica.

h) Describan el procedimiento para resolver una ecuación de segundo grado de la forma $ax^2 + bx = 0$. ____________________

2. Con ayuda del maestro, comparen sus resultados y corrijan si es necesario.

3. Trabajen en equipo. Cada una de las parábolas siguientes corresponde a la gráfica de una función.

Funciones con la forma $ax^2 + bx$



Dato interesante
La parábola tiene una presencia importante en la arquitectura. Por ejemplo, en los puentes colgantes, en el diseño de algunas salas de música y en los diseños arquitectónicos de Gaudí.

Escriban delante de cada función el color que le corresponde y la ecuación con sus soluciones.

Función	Color de la gráfica	Ecuación	Soluciones
$y = x^2 - 3x$			x_1 = ______ x_2 =______
$y = 2x^2 + x$			x_1 = ______ x_2 =______
$y = x^2 + 2x$			x_1 = ______ x_2 =______
$y = x^2 - 2x$			x_1 = ______ x_2 =______

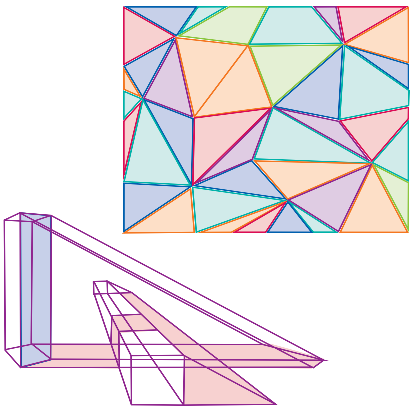
4. Con el apoyo del maestro, comparen sus respuestas y corrijan si es necesario. En particular, traten de explicar por qué en todas las ecuaciones de la forma $ax^2 + bx = 0$, una de las dos soluciones es igual a cero.

5. Utilicen el recurso informático *¿Función o ecuación?* para analizar e interpretar las parábolas asociadas a funciones cuadráticas incompletas e identificar las soluciones de las ecuaciones cuando la función se iguala a cero.

15. Polígonos semejantes 2

Sesión 1

Para empezar



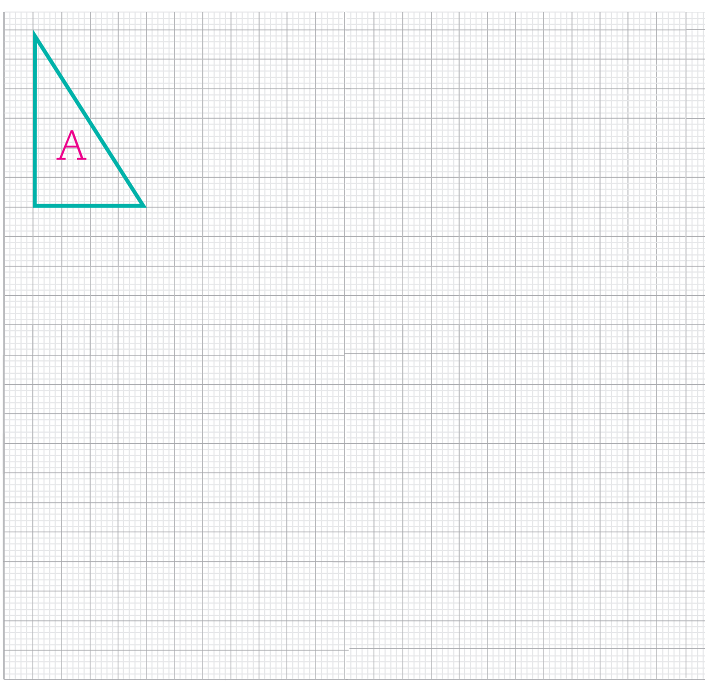
Los triángulos son los polígonos más estudiados, entre otras razones porque cualquier polígono se puede dividir en triángulos. En la secuencia 6 estudiaste que a las figuras hechas a escala unas de otras se les llama figuras semejantes, y que cuando dos polígonos son semejantes, sus ángulos correspondientes son iguales y sus lados correspondientes son proporcionales. ¿Cuántos triángulos identificas en la figura? ¿Cuáles de éstos crees que son semejantes? ¿Por qué?

En esta secuencia establecerás los criterios necesarios y suficientes para determinar si dos triángulos son semejantes o no.

Manos a la obra

¿Semejantes o no semejantes?

1. Trabajen en pareja. En la siguiente cuadrícula, tracen los triángulos B y C, semejantes al A, bajo las siguientes condiciones.



- La razón de semejanza del triángulo B debe ser 3 respecto al A.
- La razón de semejanza del triángulo C debe ser $\frac{1}{2}$ respecto al A.

2. Respondan las siguientes preguntas.

a) ¿Qué significa que la razón de semejanza sea 3? ______________________

____

____

b) ¿Cuánto tienen que medir los catetos correspondientes del triángulo B respecto al A?

____

____

____

c) ¿Qué significa que la razón de semejanza sea $\frac{1}{2}$? ______

______

d) ¿Cuánto tienen que medir los catetos correspondientes del triángulo C respecto al A? ______

e) ¿Cómo es la medida de los ángulos correspondientes del triángulo B respecto a las medidas de los ángulos del triángulo C? ______

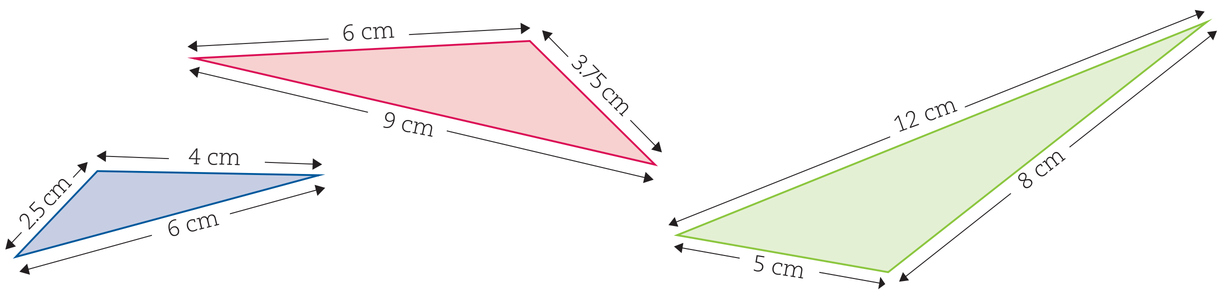
¿Y respecto a los del A? ______

f) ¿Por qué los triángulos B y C también son semejantes entre sí?

______

______

3. Consideren los triángulos semejantes de la imagen y las medidas de sus lados.



a) Identifiquen los lados correspondientes proporcionales y anoten las medidas que faltan para completar la siguiente tabla.

Triángulo rojo	Triángulo verde	Triángulo azul	Relación entre lados
9 cm			Son lados correspondientes
6 cm			Son lados correspondientes
	5 cm		Son lados correspondientes

b) Ahora, completen la tabla con la medida de los ángulos correspondientes faltantes.

Triángulo rojo	Triángulo verde	Triángulo azul	Relación entre ángulos
135°			Son ángulos correspondientes
28°			Son ángulos correspondientes
		17°	Son ángulos correspondientes

c) Anoten en la tabla las razones de semejanza en que se encuentra un triángulo respecto a otro para cada caso.

Triángulo	Azul	Rojo	Verde
Azul			$\frac{1}{2}$
Rojo			
Verde			

4. Comparen sus respuestas con las de sus compañeros de grupo. Comenten con su maestro cómo determinaron la razón de semejanza entre los triángulos.

5. Observen el recurso audiovisual *Lados y ángulos correspondientes* para que conozcan más respecto a la manera en que se deben comparar los triángulos y obtener la razón de semejanza cuando éstos son semejantes.

Sesión 2

Primer criterio de semejanza

1. Trabajen en pareja. Tracen en su cuaderno dos triángulos de diferente tamaño, pero ambos con ángulos de 90°, 45° y 45°.

a) Expliquen el procedimiento que siguieron para trazar los triángulos con las condiciones indicadas. ______

______

b) ¿Los triángulos que trazaron son semejantes entre sí? ______
Argumenten su respuesta. ______

______

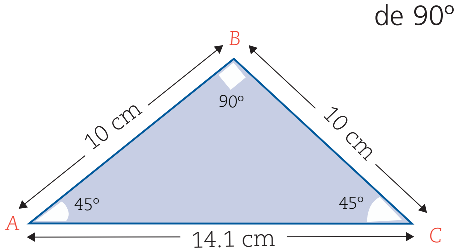
c) ¿Cuántos de los triángulos que trazaron son isósceles? ______
¿Por qué resultaron así? ______

______

d) Observen el triángulo de la izquierda que tiene dos ángulos de 45° y un ángulo de 90° y digan si los lados correspondientes de los triángulos que trazaron son proporcionales a éste. ______
Expliquen el procedimiento que siguieron para comprobar que los lados correspondientes son proporcionales. ______

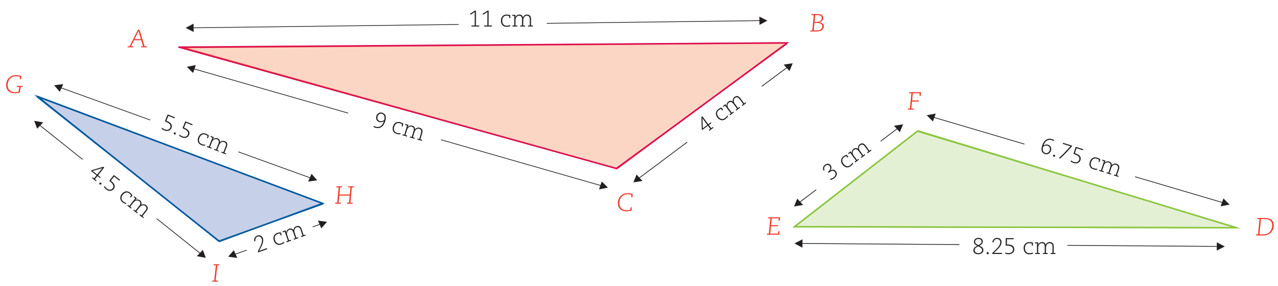
______

______



2. En una telesecundaria se pidió a los alumnos que trazaran un triángulo cuyos ángulos fuesen: 110°, 20° y 50°. Háganlo también ustedes, tracen en su cuaderno un triángulo cuyos ángulos tengan las mismas medidas. Anoten las medidas de los lados: ______________, ______________, ______________.

3. Comparen el triángulo que hicieron ustedes con los siguientes tres triángulos que trazaron los alumnos de telesecundaria.



a) Anoten en cada triángulo la medida de sus ángulos.

b) El triángulo que trazaron, ¿es semejante a alguno de éstos? ______________

Si su respuesta es afirmativa, encuentren la razón de semejanza. ______________

En caso contrario, anoten por qué no son semejantes. ______________

____

____

c) En la telesecundaria concluyeron que los tres triángulos de la imagen son semejantes entre sí. ¿Es correcta esta afirmación? Comenten con el resto de sus compañeros por qué.

d) Completen la siguiente tabla.

Triángulo 1	Triángulo 2	Razón de semejanza del triángulo 1 respecto al triángulo 2	Razón de semejanza del triángulo 2 respecto al triángulo 1
ABC	DEF		
ABC	GHI		
GHI	DEF		
ABC	Mi triángulo		

4. En grupo, y con ayuda de su maestro, comenten cómo son las dos razones que se dan al comparar cada pareja de triángulos.

5. Alina, alumna de telesecundaria, afirmó lo siguiente.

No es necesario conocer la medida de los tres ángulos para saber si son semejantes. Si la medida de dos ángulos correspondientes es igual, entonces los triángulos son semejantes.

a) ¿Crees que Alina tiene razón o no? ¿Por qué?

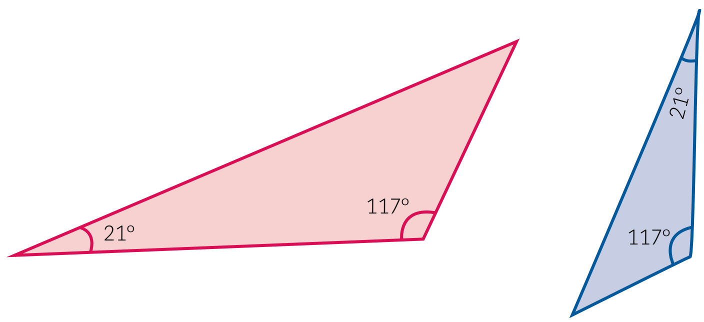
___

___

___

6. Observa los siguientes triángulos y anota la medida del ángulo que falta en cada uno.

Dato interesante
Se le atribuye al filósofo y matemático griego Tales de Mileto (aproximadamente 640 a. n. e.), la forma de calcular la distancia que separa a un barco de la costa con base en la semejanza de triángulos.



7. Con ayuda de su maestro, comenten entre todos por qué los triángulos que tienen la misma medida de dos ángulos correspondientes son semejantes. También comenten por qué, si se conocen dos ángulos de un triángulo, se puede determinar la medida del tercero.

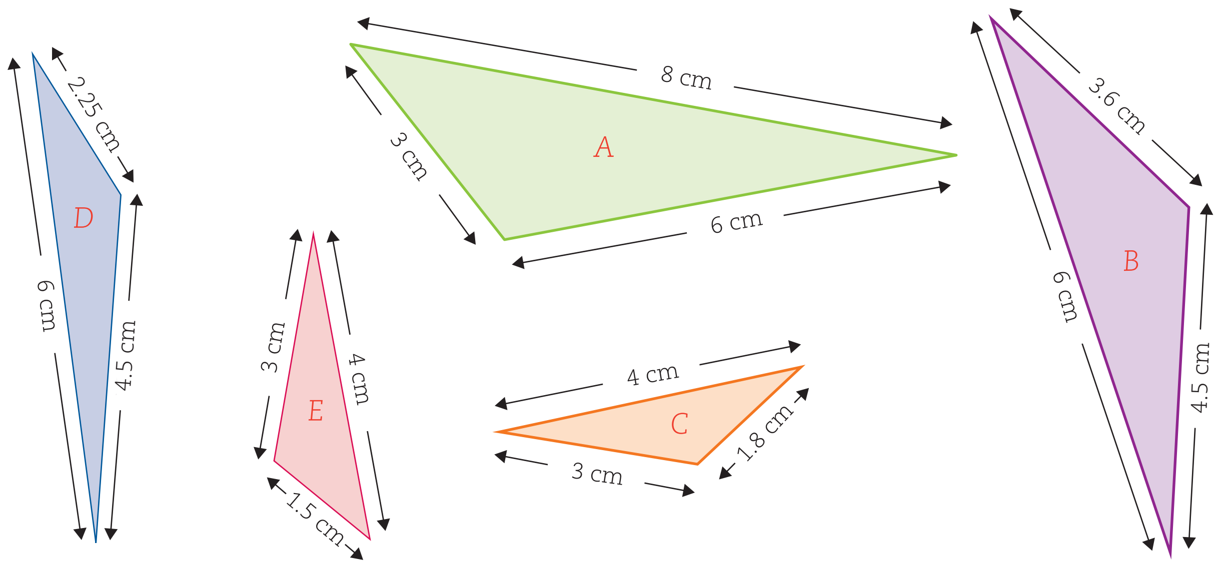
Las condiciones necesarias y suficientes para saber si un triángulo es semejante a otro se llaman *criterios de semejanza*.

Una manera de determinar que dos triángulos son semejantes es ver si sus ángulos correspondientes miden lo mismo. Sin embargo, basta con tener la medida de dos ángulos para determinar la medida del tercero, por lo que el primer criterio de semejanza es *ángulo, ángulo* (AA), ya que la suma de la medida de los tres ángulos interiores de un triángulo es siempre 180°.

Segundo criterio de semejanza

Sesión 3

1. Trabajen en pareja. De la siguiente colección de triángulos, elijan los que sean semejantes entre sí.



a) Expliquen cómo determinaron que los triángulos son semejantes.

b) ¿Por qué el triángulo C no es semejante al A? ________________________

c) ¿Es semejante el triángulo E al A? ____________ Argumenten su respuesta.

d) ¿Qué lados convendría comparar de los triángulos A y B para saber si son proporcionales? ________________________

e) ¿Cuál es la medida de los ángulos de los triángulos que son semejantes entre sí?

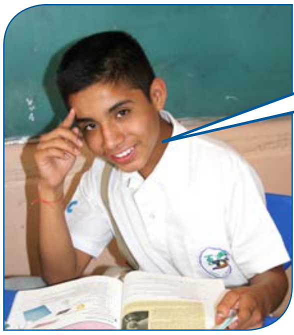
____________, ____________, ____________.

2. Traza en tu cuaderno dos triángulos semejantes al triángulo A de la página 151. El primero con una razón de semejanza igual a 2 y el otro, con una razón de $\frac{1}{2}$ respecto al triángulo A.

a) Anota en tu dibujo la medida de los lados de los triángulos que trazaste.

b) Compara con el resto de tus compañeros las medidas que obtuvieron en los triángulos y verifiquen que sean semejantes al original.

3. Con el resto de tus compañeros y con ayuda de tu maestro, comenten si están de acuerdo o no con lo que Raúl, un alumno de telesecundaria, conjeturó respecto al criterio lado, lado, lado (LLL).



Tal vez no sea necesario conocer la medida de los tres lados para saber si son semejantes. Si la medida de dos lados es proporcional, ¿entonces los triángulos serán semejantes también?

4. Tracen en su cuaderno los triángulos semejantes a E y D, de la página 151, de manera tal que:

- Un lado del triángulo E mida 4 cm y otro 6 cm.
- Un lado del triángulo D mida 9 cm y otro 12 cm.

a) ¿Son proporcionales las parejas de lados de los triángulos E y D? __________

b) ¿Cuál es la razón o constante de proporcionalidad que tienen? __________

c) Midan con su regla la longitud del lado que no conocen en ambos triángulos.

- Medida del tercer lado del triángulo E: __________
- Medida del tercer lado del triángulo D: __________

d) Con su transportador, midan los ángulos de ambos triángulos.

- Medida de los ángulos del triángulo E: ______, ______, ______.
- Medida de los ángulos del triángulo D: ______, ______, ______.

e) Los triángulos que trazaron, ¿son semejantes entre sí? __________

¿Por qué? __________

5. Comparen los triángulos que trazaron con los de sus compañeros para ver si son semejantes. Comenten por qué no es suficiente comparar la medida de dos lados de un triángulo con las medidas de dos lados de otro para determinar que son semejantes.

Otro criterio de semejanza de triángulos es el criterio *lado*, *lado*, *lado* (*LLL*) y ocurre cuando las medidas de los tres lados correspondientes del triángulo son proporcionales.

Tercer criterio de semejanza

1. Trabajen en equipo. Elijan la pareja de triángulos que trazaron en la actividad 4 de la sesión 3.

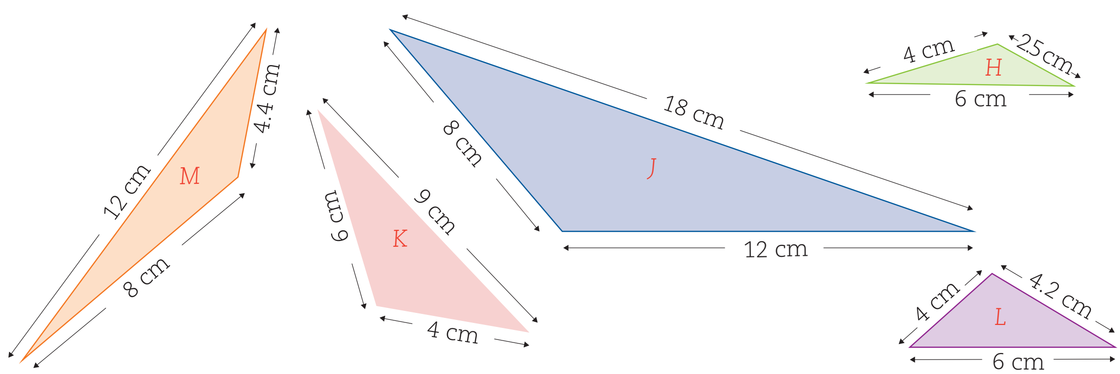
a) En su cuaderno, describan paso a paso lo que hicieron para trazar los triángulos.

b) ¿Cuál es la medida del ángulo que forman los dos lados conocidos de cada triángulo? ____________________

c) El ángulo que formaron esos dos lados, ¿mide lo mismo en todos los triángulos que trazaron? __________ ¿Por qué? ____________________

____

2. Observen los triángulos que trazaron los alumnos de telesecundaria.



a) Marquen los triángulos semejantes entre sí.

b) Midan el ángulo que se forma con los lados que miden 4 cm y 6 cm y anótenlo en todos los casos.

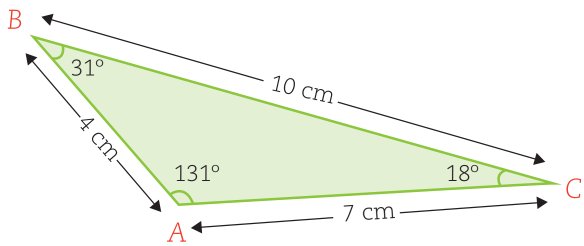
c) Ahora, midan el ángulo que forman los lados que miden 8 cm y 12 cm y también anótenlos.

d) ¿Qué tienen en común los ángulos de los triángulos que son semejantes? ________

____

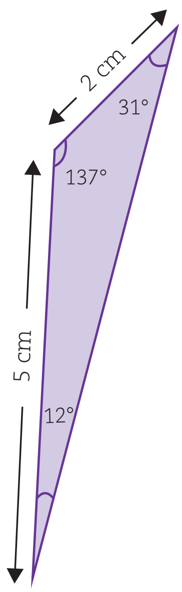
3. En la telesecundaria de Alina jugaron a mandar mensajes. Cada alumno tenía que poner tres datos y la razón de semejanza del triángulo que dibujó para que otro compañero lo trazara.

- Alina trazó el siguiente triángulo y mandó este mensaje:



Tengo un triángulo con un ángulo que mide 31°, un lado que mide 10 cm y otro lado que mide 4 cm. Traza un triángulo semejante a éste a razón de $\frac{1}{4}$ 20:51

- Raúl trazó el triángulo de abajo. Él afirma que cumplió con las condiciones que Alina mandó. Los lados son proporcionales y la razón de semejanza es $\frac{1}{2}$. Además, su triángulo tiene un ángulo cuya medida es 31°.



a) Expliquen las razones por las que son semejantes o no los triángulos de Alina y Raúl. ____

b) Los ángulos correspondientes de los dos triángulos, ¿tienen las mismas medidas? ____

c) El lado que aún no mide Raúl, ¿está a razón de $\frac{1}{2}$ respecto al tercer lado del triángulo de Alina? ____

d) Sin agregar más medidas, ¿qué información podría dar Alina para que Raúl pueda construir un triángulo semejante al de ella? ____

4. Junto con el resto de sus compañeros y con ayuda de su maestro, analicen el mensaje de Alina y la respuesta de Raúl. Comenten las condiciones que se deben dar para que dos triángulos sean semejantes dando dos lados y un ángulo.

El tercer criterio de semejanza de triángulos es el criterio *lado*, *ángulo*, *lado* (*LAL*) y ocurre cuando la medida de dos lados correspondientes es proporcional y la medida del ángulo que forman es igual.

5. Observen el recurso audiovisual *Criterios de semejanza* para que refuercen lo visto en esta secuencia.

Sesión 5

Para terminar

¿Cuáles triángulos son semejantes?

1. Selecciona, en la siguiente página, los triángulos semejantes a otro con un ángulo de 22° y otro de 110°.

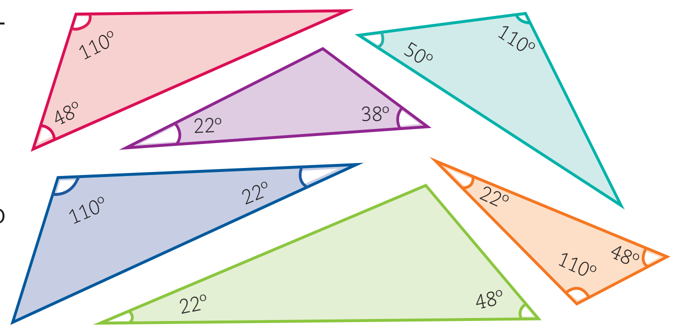
2. Las medidas de dos lados de un triángulo son 13 cm y 7 cm. El ángulo que forman mide 50°. En tu cuaderno, traza un triángulo semejante a éste cuya razón de semejanza sea $\frac{1}{2}$.

a) ¿Cuánto miden los ángulos del triángulo que trazaste? __________, __________, __________.

b) ¿Cuánto miden los lados?

__________, __________, __________.

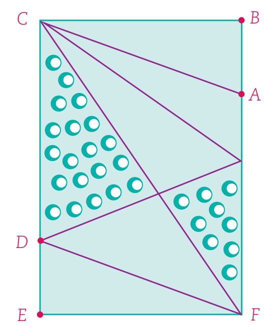
c) Anota la medida del lado faltante del triángulo original. ____________________



3. La imagen de la derecha representa una colcha rectangular hecha con retazos triangulares. Respondan en su cuaderno lo siguiente.

a) ¿Por qué los triángulos de lunares son semejantes? ¿Qué criterio de semejanza se emplea para comparar las figuras?

b) Si el segmento AB = DE, ¿los triángulos ABC y DEF son semejantes? ¿Qué criterio de semejanza se usa para confirmar esto? ¿Cuál es la razón de semejanza de estos triángulos?



4. Trabajen en pareja. Jueguen a los mensajes. Tracen un triángulo, midan los lados y sus ángulos. Anoten en un trozo de papel la razón de semejanza con la cual deben construir el nuevo triángulo con base en las tres medidas del triángulo original, de tal manera que su compañero trace un triángulo semejante al del otro. Consideren los criterios de semejanza que ya conocen para asegurar que esto suceda.

5. En la secuencia 6 estudiaste que, para que dos polígonos sean semejantes, se deben cumplir dos condiciones:

- Sus ángulos correspondientes son iguales.
- Sus lados correspondientes son proporcionales.

¿Recuerdan los ejercicios de comparación entre rectángulos o entre el rombo y el cuadrado? Lean el siguiente texto y, si es necesario, revisen las actividades de esta secuencia.

En el caso de los triángulos, no son necesarias ambas condiciones y es suficiente revisar que se cumple alguno de los tres criterios de semejanza.

- Dos de sus ángulos correspondientes son iguales.
- Las medidas de sus lados correspondientes son proporcionales.
- Las medidas de dos lados correspondientes son proporcionales y la medida del ángulo que forman es igual.

6. Utilicen el recurso informático *Criterios de semejanza* para trazar triángulos semejantes y para determinar si dos o más triángulos son semejantes.

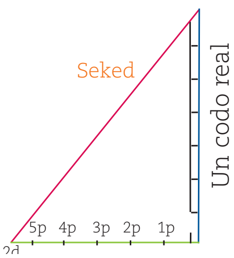
16. Razones trigonométricas 2

Sesión 1

Para empezar

Pirámide de Keops, Egipto.

Se estima que la pirámide de Keops, en Egipto, terminó de construirse en el año 2570 a. n. e. Las monumentales edificaciones egipcias muestran que esta cultura alcanzó un alto grado de conocimientos geométricos. ¿Cómo crees que lograron que la inclinación a lo largo de una de las paredes laterales siempre fuera la misma? Más aún, ¿cómo te imaginas que consiguieron que las cuatro paredes laterales de la pirámide tuvieran la misma inclinación? Los egipcios no usaban los grados para medirla, sino una medida llamada seked, la cual se obtenía de la relación (razón) entre el codo real (formado por siete palmos), y la cantidad de palmos y dedos horizontales, es decir, usaban lo que actualmente se conoce como tangente de un ángulo. En esta secuencia estudiarás ésta y otras razones trigonométricas.



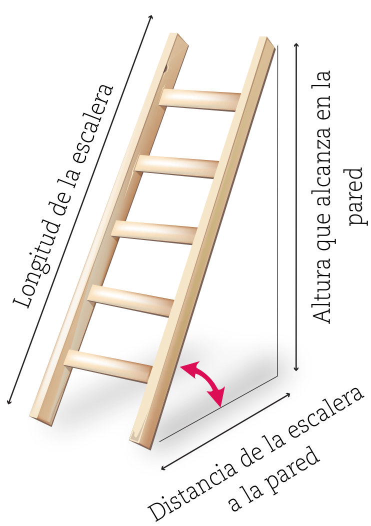
5 palmos
2 dedos

Manos a la obra

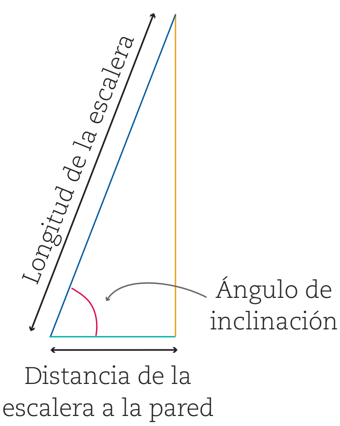
¿Qué cambia y qué no cambia?

1. Trabajen en pareja. En la secuencia 7 se utilizó la imagen de una escalera recargada en una pared, la cual podía representarse mediante un triángulo rectángulo.

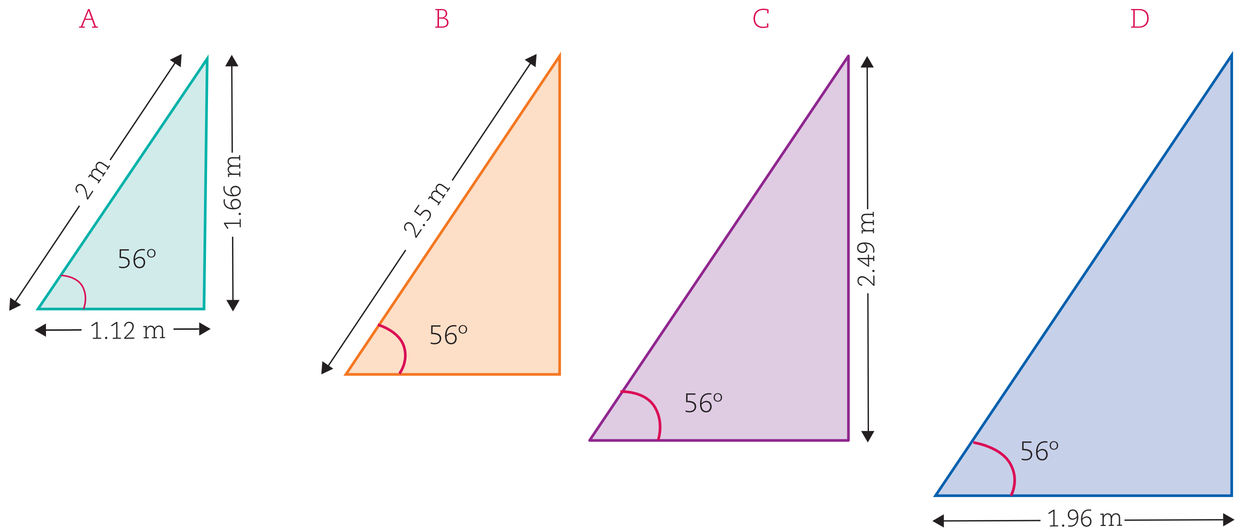
Glosario
Palmo es la longitud formada por cuatro de los dedos de una mano juntos, excepto el pulgar.



El ángulo marcado con rojo es el ángulo de inclinación de la escalera.



Esta situación está representada en las siguientes imágenes. Con base en ellas, respondan las preguntas y completen la tabla, donde *c* significa *cociente*.



¿Por qué son semejantes los triángulos? ____

____

____

	Situación			
	A	**B**	**C**	**D**
Longitud de la escalera				
Distancia de la escalera a la pared				
Altura que alcanza la escalera en la pared				
Ángulo que forma la escalera con el piso				
$c_1 = \dfrac{\textit{altura que alcanza en la pared}}{\textit{longitud de la escalera}}$				
$c_2 = \dfrac{\textit{distancia de la escalera a la pared}}{\textit{longitud de la escalera}}$				
$c_3 = \dfrac{\textit{altura que alcanza la pared}}{\textit{distancia de la escalera a la pared}}$				

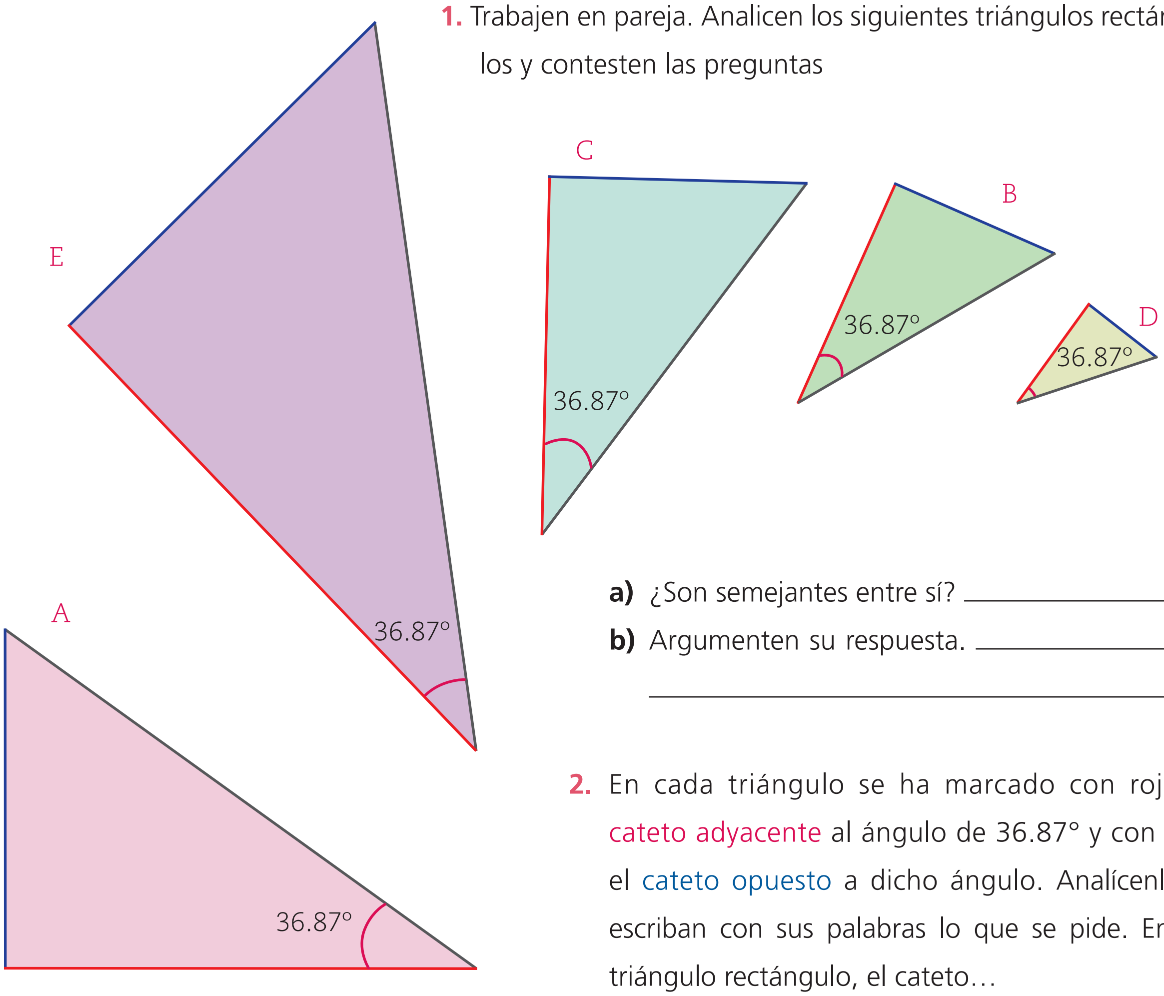
2. Comparen sus resultados con los de otros compañeros. Los cocientes que calcularon en la tabla, ¿se mantuvieron constantes en las cuatro situaciones? ____________
¿Por qué creen que sucedió así? ____

____

Sesión 2

Cateto opuesto, cateto adyacente

1. Trabajen en pareja. Analicen los siguientes triángulos rectángulos y contesten las preguntas



a) ¿Son semejantes entre sí? ____________________

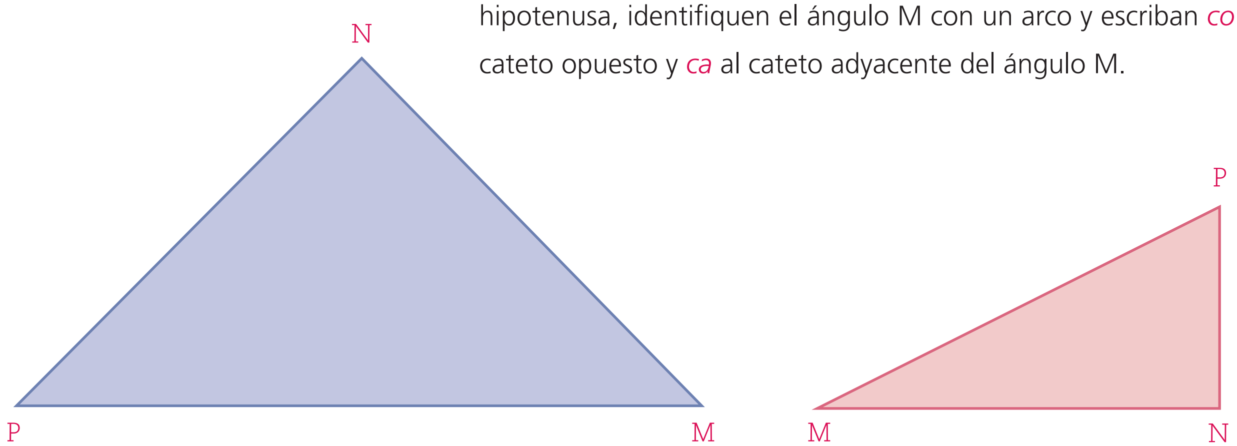
b) Argumenten su respuesta. ____________________

____

2. En cada triángulo se ha marcado con rojo el cateto adyacente al ángulo de 36.87° y con azul el cateto opuesto a dicho ángulo. Analícenlos y escriban con sus palabras lo que se pide. En un triángulo rectángulo, el cateto…

- adyacente a un ángulo es ____________________
- opuesto a un ángulo es ____________________

3. En los siguientes triángulos, anoten 90° al ángulo recto, *h* a la hipotenusa, identifiquen el ángulo M con un arco y escriban *co* al cateto opuesto y *ca* al cateto adyacente del ángulo M.



4. Tomen en cuenta los triángulos de la actividad 1 de la página 158. Usen las medidas que sean necesarias y completen la tabla. Consideren que el cateto opuesto y el cateto adyacente se refieren al ángulo M, que mide 36.87°.

Triángulo	*co*	*ca*	*h*	$\frac{co}{h}$	$\frac{ca}{h}$	$\frac{co}{ca}$
A						
B						
C						
D						
E						

5. Comparen sus respuestas con otros compañeros. Analicen los resultados obtenidos en la tabla y respondan.
   a) ¿Todos obtuvieron los mismos resultados en los cocientes que calcularon? ______
   b) ¿Resultaron constantes esos cocientes en todos los triángulos? ______________
   ¿Por qué? ____

6. Comparen sus respuestas y, si hubo diferencias, consideren si se debió a errores en las medidas, errores de cálculo o de otro tipo. Establezcan conclusiones.

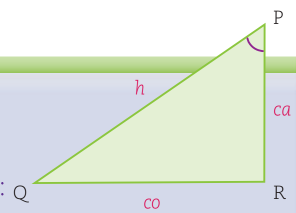
Razones interesantes e importantes

Sesión 3

1. Trabajen en pareja. Lean y comenten la siguiente información.

En la sesión anterior calcularon estos cocientes.

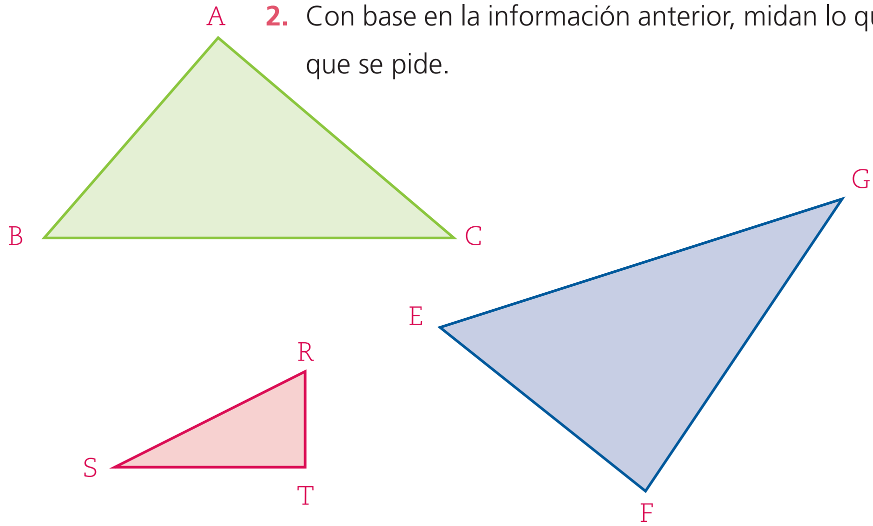
$c_1 = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$ $c_2 = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$ $c_3 = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$



Estos cocientes reciben el nombre de *razones trigonométricas* y cada uno tiene un nombre especial.

Si consideramos el ángulo P, en el triángulo de la derecha, tenemos que:

Razón	Nombre	Se simboliza
$\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$	seno del ángulo P	$\text{sen } P = \frac{co}{h}$
$\frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$	coseno del ángulo P	$\cos P = \frac{ca}{h}$
$\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$	tangente del ángulo P	$\tan P = \frac{co}{ca}$



2. Con base en la información anterior, midan lo que consideren necesario y calculen lo que se pide.

sen S = ____________________

cos S = ____________________

tan S = ____________________

sen C = ____________________

cos C = ____________________

tan C = ____________________

sen G = ____________________

cos G = ____________________

tan G = ____________________

3. En un triángulo rectángulo, identificado como MNP, se sabe que el ángulo recto está en N, que el cateto NP mide 6 cm y que el *sen* M = $\frac{3}{5}$

a) Diseñen en su cuaderno un esquema del problema.

b) ¿Cuánto mide la hipotenusa de este triángulo? ____________________

Dato interesante
La pirámide sur de Dashur, en Egipto, se caracteriza porque sus paredes laterales cambian de inclinación a cierta altura, como se observa en la imagen.

4. Comparen sus respuestas con otros compañeros del grupo. Si en la actividad 2 no llegaron a resultados iguales, pero sí muy aproximados, comenten a qué se debe esto.

5. En grupo, reflexionen acerca de por qué el seked que usaban los egipcios se refiere a la tangente de un ángulo y cómo es que, con el uso de esta medida, lograban que la inclinación siempre fuera la misma en las paredes laterales de las pirámides. ¿Consideran que la tangente del ángulo de la pirámide de Dashur es mayor o menor que la de Keops? Argumenten su respuesta.

____

____

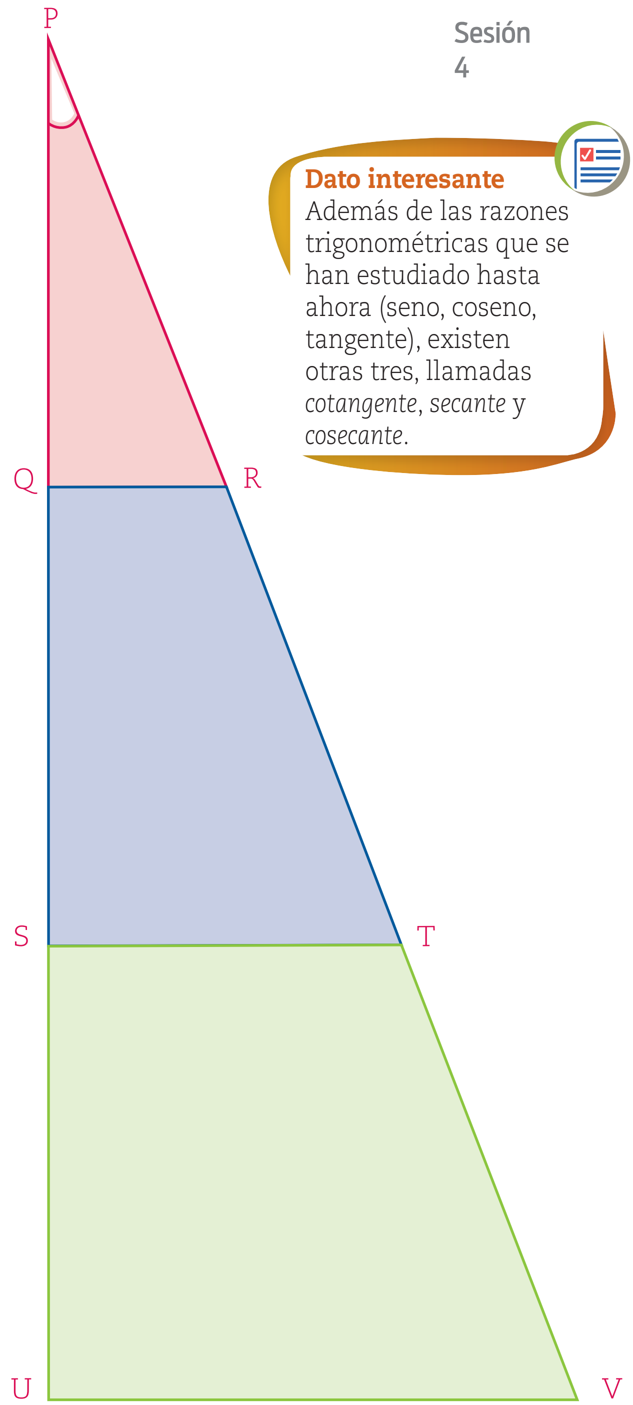
6. Practiquen el cálculo de las razones seno, coseno y tangente de un ángulo en el recurso informático *Cálculo de razones trigonométricas a partir de triángulos rectángulos*.

¿De qué depende?

Sesión 4

1. Trabajen en pareja. Consideren los siguientes triángulos rectángulos, tomen las medidas indicadas y completen la tabla.

Triángulo	PQR	PST	PUV
Medida del co al ángulo P	QR =	ST =	UV =
Medida del ca al ángulo P	PQ =	PS =	PU =
Medida de la hipotenusa			
sen P			
cos P			
tan P			



Dato interesante
Además de las razones trigonométricas que se han estudiado hasta ahora (seno, coseno, tangente), existen otras tres, llamadas *cotangente*, *secante* y *cosecante*.

a) ¿Son semejantes los triángulos? ____________

b) Argumenten su respuesta. ____________

____

c) En su cuaderno, propongan medidas para otro triángulo semejante a los tres anteriores, consideren P como uno de los ángulos agudos y calculen los siguientes valores.

sen P = ____ *cos* P = ____ *tan* P = ____

2. Comparen sus respuestas con las de sus compañeros de grupo. Si no coinciden, averigüen por qué.

a) ¿Se cumplirá esto para cualquier grupo de triángulos rectángulos semejantes? ________ Indiquen por qué. ____________________________

____

____

3. Lean y discutan qué opinan de la siguiente afirmación. Luego, respondan lo que se pide.

El valor de las razones trigonométricas no depende del tamaño del triángulo sino de la medida del ángulo.

a) ¿Es verdadera o falsa? ______________________________

b) Argumenten su respuesta. ______________________________

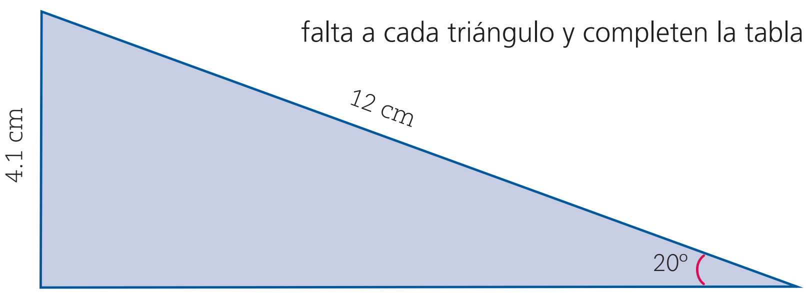
____

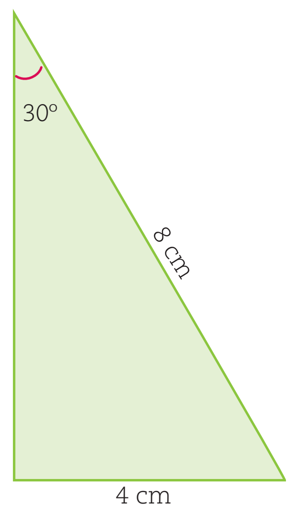
Sesión 5

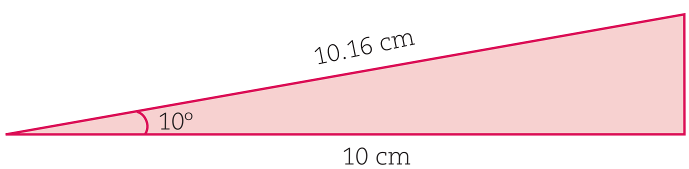
Para terminar

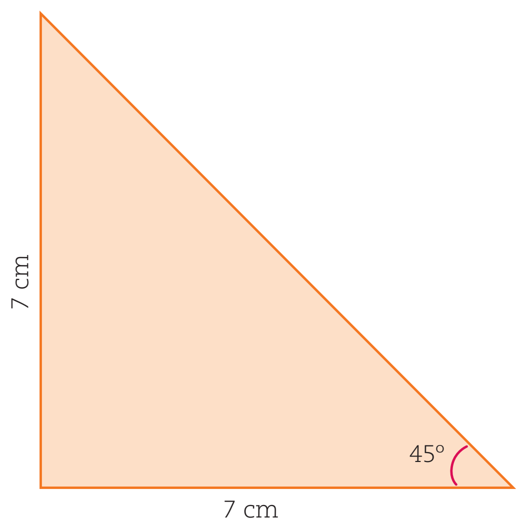
Los valores de las razones

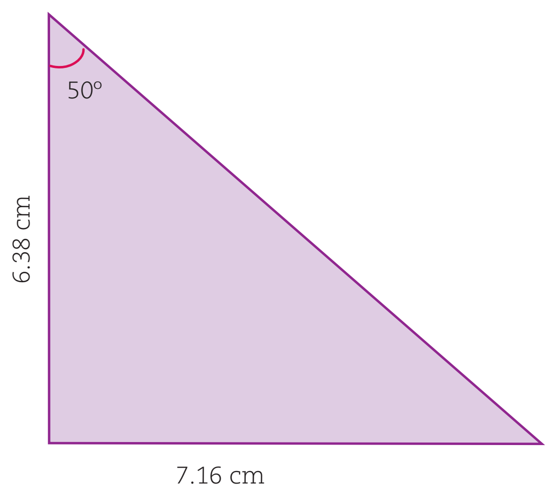
1. Trabajen en pareja para construir una tabla de valores de las razones seno, coseno y tangente de algunos ángulos. Para ello, calculen el valor del lado y del ángulo que falta a cada triángulo y completen la tabla de la siguiente página.





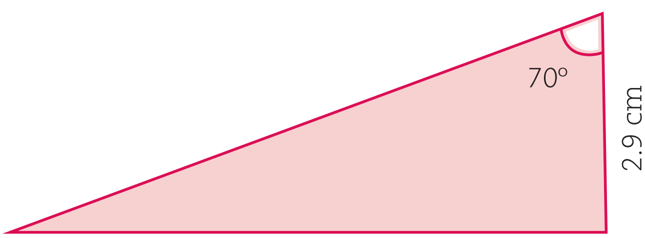






Ángulo	Seno	Coseno	Tangente
10°			
20°			
30°			
45°			
50°			

2. Del siguiente triángulo rectángulo sólo se conoce la medida del cateto adyacente al ángulo de 70°. Planeen la manera de calcular la medida del otro cateto y de la hipotenusa. Cuando lo hayan hecho, anoten su procedimiento y el resultado. ______________________________



Dato interesante
Las técnicas de triangulación también se utilizan para medir distancias entre estrellas próximas y en los sistemas de localización satelital.

3. Comparen su resultado y procedimiento con los de sus compañeros de grupo. En particular, comenten: ¿usaron alguna o algunas razones trigonométricas?, ¿cuál? o ¿cuáles?

4. Observen el recurso audiovisual *A veces Pitágoras no es suficiente*, donde conocerán la utilidad de las razones trigonométricas cuando sólo se conoce un lado del triángulo rectángulo y la medida de los ángulos agudos.

17. Teorema de Pitágoras 2

Sesión 1

Para empezar

Una de las ventajas de estudiar matemáticas es que desarrollamos conocimientos y habilidades que nos permiten anticipar el resultado de una situación. Por ejemplo, cuando se quiere pasar un espejo, un sofá o cualquier otro mueble por la entrada de una habitación, usamos nuestra intuición matemática, la cual nos ayuda a saber de antemano si pasará o no sin necesidad de trasladarlo para verificarlo.

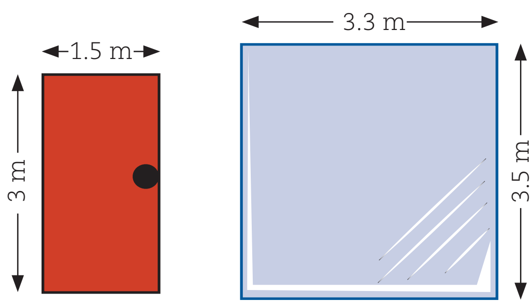
Si una puerta tiene 2.4 m de altura y 1.8 m de ancho, ¿se podrá pasar por ahí un espejo cuadrado que mide 2.9 m de lado? Una manera de saber si pasa o no es usando el teorema que estudiaste en la secuencia 8 del bloque 1, ¿lo recuerdas? ¡Claro! El teorema de Pitágoras. En esta secuencia resolverás problemas que implican su uso.

Manos a la obra

¿Cabe el espejo?

1. Trabajen en pareja. En cada caso, consideren las medidas de la puerta y concluyan si un espejo con las medidas indicadas puede o no pasar por ella. A la derecha, anoten las operaciones y el resultado.

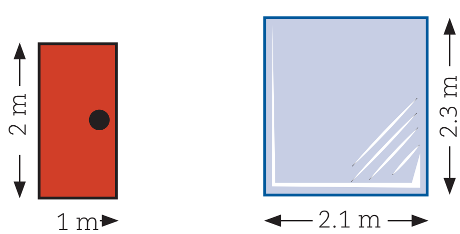
a)



¿Puede pasar? ___________

¿Por qué? ______________

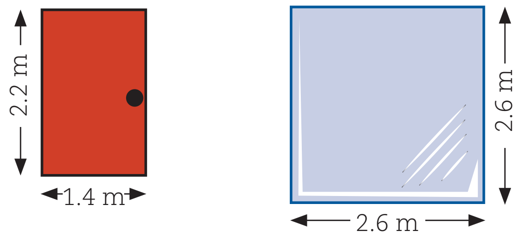
b)



¿Puede pasar? ___________

¿Por qué? ______________

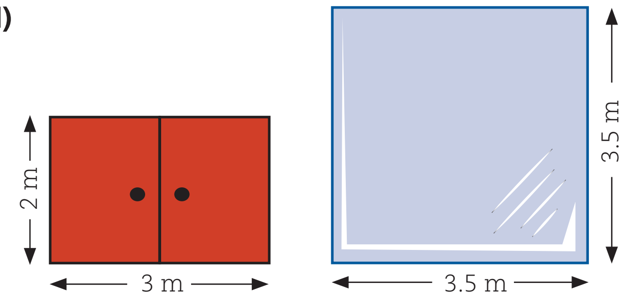
c)



¿Puede pasar? __________

¿Por qué? __________

d)

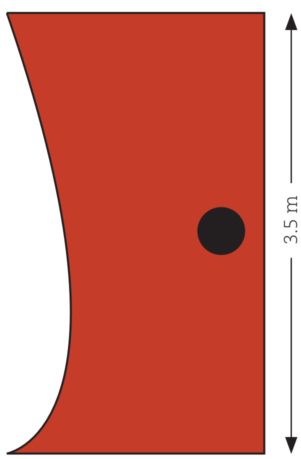


¿Puede pasar? __________

¿Por qué? __________

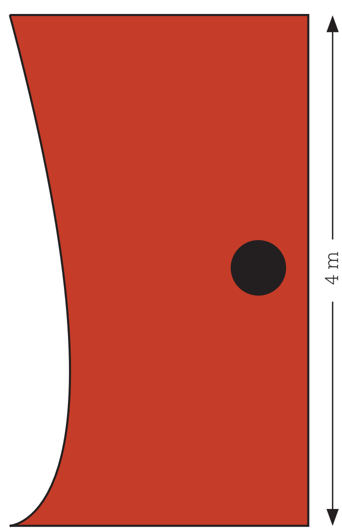
2. En la siguiente imagen se ven sólo fragmentos de puertas. ¿Cuál es el ancho mínimo que deben tener éstas para que por ellas pueda pasar un vidrio cuadrado que mida 5 m por lado?

a)



Ancho mínimo __________

b)



Ancho mínimo __________

Dato interesante

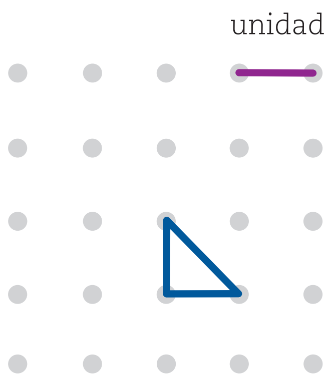
Actualmente los espejos se elaboran con polvo de aluminio, sin embargo, en la antigüedad, los egipcios utilizaban cobre pulido porque dicho metal se asociaba con la diosa Hathor. Por su parte, los aztecas empleaban la obsidiana y consideraban que Tezcatlipoca los usaba para cruzar del reino terrenal al inframundo.

3. Comparen sus respuestas y procedimientos con los de sus compañeros de grupo. En particular, comenten si usaron el teorema de Pitágoras y de qué manera lo hicieron, por ejemplo, ¿qué datos tenían y cuál debían obtener?

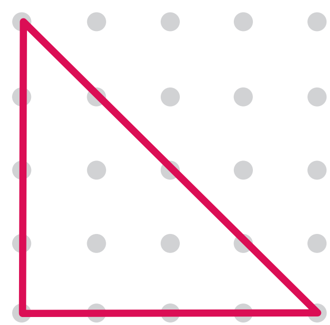
Sesión
2

Perímetros

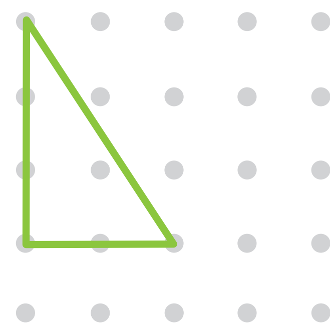
1. Trabajen en pareja. Calculen el perímetro de los siguientes polígonos.



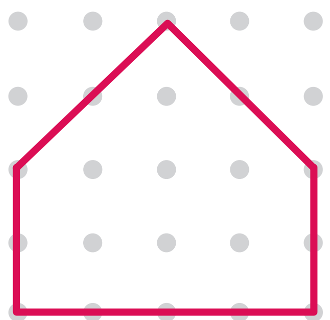
Perímetro ______________



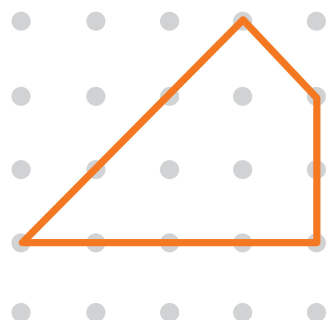
Perímetro ______________



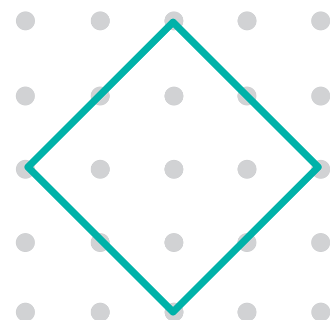
Perímetro ______________



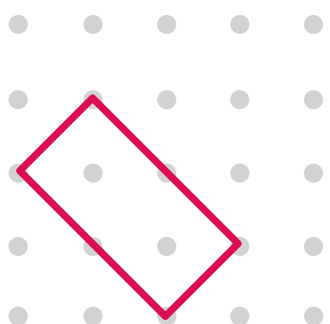
Perímetro ______________



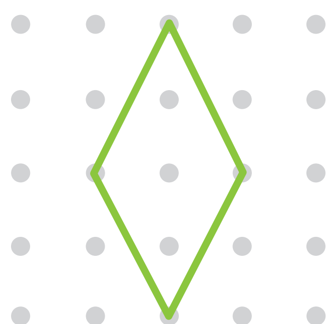
Perímetro ______________



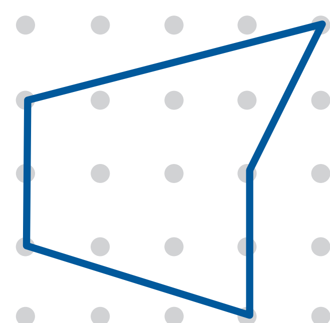
Perímetro ______________



Perímetro ______________



Perímetro ______________



Perímetro ______________

Describan en su cuaderno de qué manera determinaron el perímetro de cada polígono.

2. En los siguientes conjuntos de puntos, tracen el cuadrilátero con el área indicada y calculen su perímetro.

Área = 1 unidad cuadrada

Perímetro = ______________

Área = 9 unidades cuadradas

Perímetro = ______________

Área = 2 unidades cuadradas

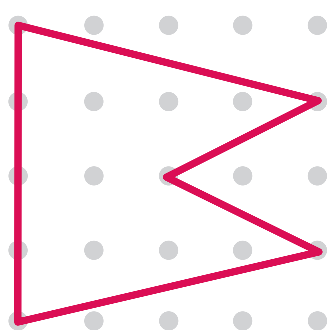
Perímetro = ______________

Área = 5 unidades cuadradas

Perímetro = ______________

Dato interesante
El diseño de muebles multifuncionales ha sido una estupenda alternativa para los espacios pequeños en los que un banco para sentarse puede ser también un cajón para guardar objetos.

3. Calculen el perímetro del polígono siguiente y en el segundo conjunto de puntos tracen un polígono que tenga mayor perímetro.



Perímetro = ______________

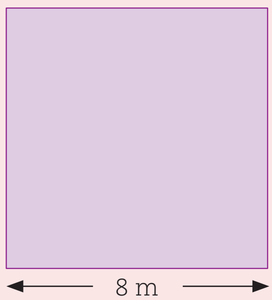
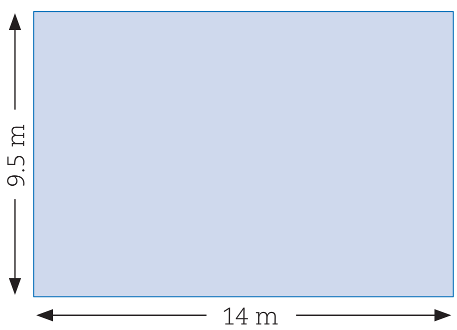
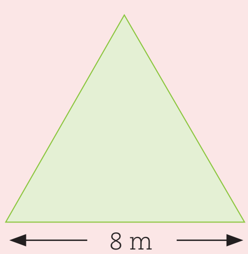
Perímetro = ______________

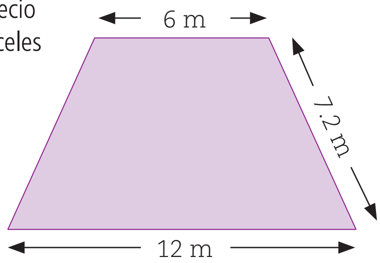
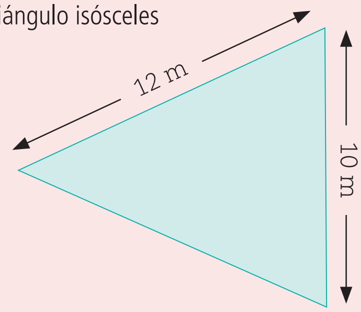
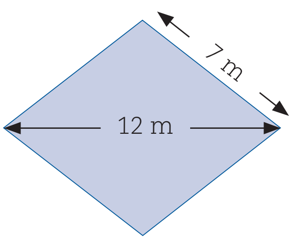
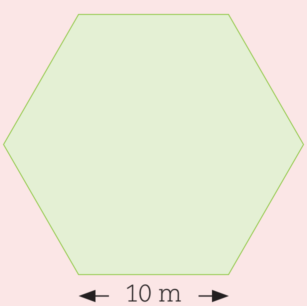
Glosario
Polígono proviene del griego *polygonos*, de *poli*, "muchos", y *gono*, que significa "ángulo".

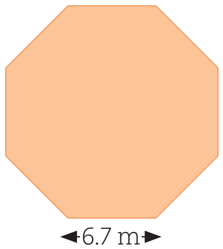
4. Comparen sus respuestas y procedimientos con los de otros compañeros de grupo. Analicen qué hizo la pareja que trazó un polígono con perímetro mayor en la actividad 3.

Teorema de Pitágoras y área

1. Trabajen en pareja. Calculen el área de los siguientes polígonos y en la segunda columna anoten los cálculos que hicieron. Después, anoten 1 al polígono con mayor área, 2 al siguiente y así sucesivamente en la tercera columna.

Forma y medidas	Cálculos y área	Orden de las áreas
a) Cuadrado  *Área = lado × lado*		
b) Rectángulo  *Área = base × altura*		
c) Triángulo equilátero  $\text{Área} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$		

Forma y medidas	Cálculos y área	Orden de las áreas
d) Trapecio isósceles  $\text{Área} = \frac{(\text{base mayor} + \text{base menor}) \times \text{altura}}{2}$		
e) Triángulo isósceles  $\text{Área} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$		
f) Rombo  $\text{Área} = \frac{\text{diagonal mayor} \times \text{diagonal menor}}{2}$		
g) Hexágono regular  $\text{Área} = \frac{\text{perímetro} \times \text{apotema}}{2}$		

Forma y medidas	Cálculos y área	Orden de las áreas
h) Octágono regular  $\text{Área} = \frac{\text{perímetro} \times \text{apotema}}{2}$		

2. Comparen sus resultados y procedimientos con los de sus compañeros de grupo. En particular, comenten en cuáles casos fue necesario usar el teorema de Pitágoras y argumenten por qué.

3. Practiquen el uso del teorema de Pitágoras con el recurso informático *Uso del teorema de Pitágoras en las figuras geométricas*.

Sesión 4

Para terminar

Cálculo de distancias

1. Trabajen en pareja. Resuelvan los siguientes problemas.

a) Paula salió de su casa rumbo al trabajo. Avanzó 8 km al este y 12 km al norte. Si hubiera un camino recto desde la casa de Paula a su trabajo, ¿qué distancia recorrería por ese camino? ______ ¿Cómo la calcularon? ______

______

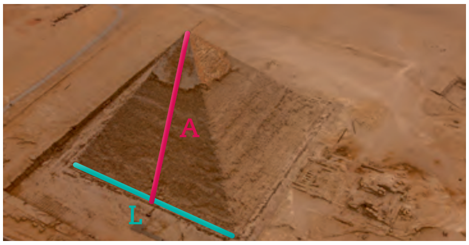
______

b) Investiguen en la sesión 4 de la secuencia 7, "Escaleras de mano", cuáles son la menor y mayor distancia a la que es conveniente colocar una escalera, pues Juan va a usar una que mide 3 m y necesita ayuda. Respondan las siguientes preguntas.

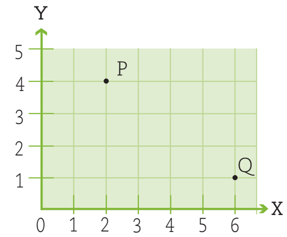
- Para el caso de la distancia mínima:
  ¿Cuánto mide el ángulo que forma el piso con la escalera? ______
  ¿Qué altura alcanza ésta en la pared? ______
- Para el caso de la distancia máxima:
  ¿Cuánto mide el ángulo que forma el piso con la escalera? ______
  ¿Qué altura alcanza ésta en la pared? ______

c) La imagen muestra la gran pirámide de Guiza, también conocida como pirámide de Keops. ¿Cuánto medirá la longitud A, marcada con rojo en la imagen, si se sabe que la medida del lado del cuadrado de la base (L) es de 230.36 m y la altura de la pirámide mide 138.8 m?

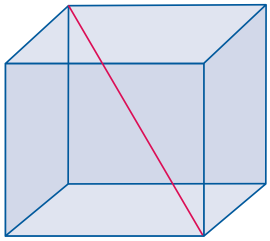
____



d) En la gráfica de la derecha, ¿cuál es la distancia entre los puntos P y Q? ______________________________



e) ¿Cuál es la medida de la diagonal del cubo de abajo cuyos lados miden 5 cm? ______________________________



f) Se tiene un triángulo cuyos lados miden 1.2 cm, 1.3 cm y 0.5 cm. ¿Es un triángulo rectángulo? ______________ ¿Cómo lo saben? ______________________________

____

____

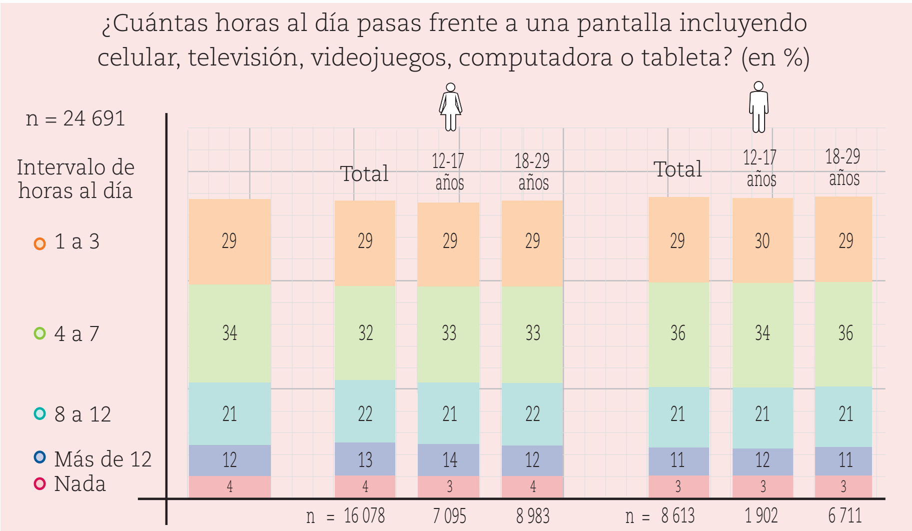
2. Comparen sus resultados y procedimientos con los de sus compañeros de grupo, si hay diferencias, analicen por qué y corrijan lo que sea necesario. Comenten en qué otras situaciones podrían aplicar el teorema de Pitágoras.

3. Observen el audiovisual *Aplicaciones del teorema de Pitágoras*, donde tendrán la oportunidad de analizar otros problemas en los que se usa.

18. Tendencia central y dispersión de dos conjuntos de datos 1

Sesión 1

Para empezar



Fuente: Texto y gráficas elaborados con base en el documento publicado por la CDMX, "Encuesta de tendencias juveniles 2018".

La estadística está vinculada con la salud, economía, tecnología, entre otras áreas. La mayoría de las actividades y organizaciones requieren de datos numéricos para responder a diversas preguntas de interés y tomar decisiones.

Un ejemplo en el área de salud es cuando se requiere encontrar el mejor tratamiento para una enfermedad; una vez planteada la pregunta de interés, se recurre a las herramientas estadísticas disponibles para buscar soluciones. ¿Y por qué la estadística? Porque ésta permite expresar hechos en términos numéricos a partir de algunos valores, como la media aritmética y la desviación media que ya conoces. Además, la estadística permite analizar y procesar grandes cantidades de datos y hacer predicciones.

En esta secuencia compararás las medidas de tendencia central y de dispersión de dos conjuntos de datos estadísticos para analizar situaciones que implican tomar decisiones de manera informada.

Manos a la obra

¿Cuántas horas al día pasas frente a una pantalla?

1. Trabajen en pareja. Analicen la gráfica que muestra los resultados de una pregunta de interés en la "Encuesta de tendencias juveniles 2018. Ciudad de México" para contestar lo siguiente.
   a) ¿Qué información se presenta? ______________________
   b) ¿Cómo se organizaron los datos para presentarlos? ______________________

c) En total, ¿cuántas personas contestaron la pregunta de interés? ______
d) ¿Cuál es el porcentaje máximo de horas al día que los jóvenes pasan frente a una pantalla? ______

______

e) ¿Es posible conocer el promedio del número de horas al día que los jóvenes pasan al frente de la pantalla de algún dispositivo? ______
f) ¿Quiénes pasan más horas frente a una pantalla, las mujeres o los hombres? ______ ¿En qué intervalo de edad se concentra la mayoría? ______ ¿Qué tan dispersos están esos datos? ______
g) ¿Con qué propósito creen que interesa conocer esta información? ______
h) ¿Creen que si hacen esta pregunta a los jóvenes de su escuela o localidad obtendrán resultados similares? ______

2. Trabajen en equipo. Consideren la siguiente situación para contestar y hacer lo que se indica. Si lo requieren, pueden utilizar calculadora.

En una telesecundaria se preguntó a dos grupos de 25 alumnos cada uno por la cantidad de horas al día que pasan frente a una pantalla de televisión, celular, computadora, videojuego u otro dispositivo. A continuación, se muestran los datos registrados.

Número de horas al día frente a una pantalla de televisión, celular, computadora, entre otros dispositivos electrónicos	
Grupo A	**Grupo B**
0, 2, 0, 15, 9, 5, 2, 12, 12, 4, 13, 5, 0, 6, 10, 0, 11, 8, 7, 3, 7, 7, 5, 5, 15	13, 5, 0, 4, 12, 0, 6, 2, 6, 4, 12, 11, 2, 10, 11, 2, 4, 15, 10, 4, 13, 3, 12, 13, 9

a) ¿En cuál de los dos grupos los alumnos pasan más tiempo al día frente a la pantalla de algún dispositivo? ______ ¿Por qué? ______
b) ¿Cómo se podrían comparar los datos de estos dos grupos? ______ ¿Por qué? ______
c) En su cuaderno, hagan una tabla de frecuencia que muestre la distribución de cada grupo.
d) ¿Qué significa que un joven dé como respuesta 0 horas? ______
e) De acuerdo con lo que indicaron los alumnos del grupo B, ¿cuál es el número más frecuente de horas al día que pasan frente a un dispositivo? ______ Y, ¿en el grupo A? ______ Justifiquen sus respuestas. ______
f) ¿Cuál es el promedio del número de horas al día que los jóvenes del grupo A pasan frente a la pantalla de algún dispositivo? ______ Y, ¿del grupo B? ______
g) En el grupo A, ¿cuál es la diferencia entre el número máximo de horas al día que pasan frente a una pantalla y el mínimo? ______ Y, ¿en el grupo B? ______
h) ¿Cuál de los dos grupos analizados muestra mayor variabilidad en los datos? ______

3. En grupo y con la ayuda de su maestro, revisen la manera en que organizaron los datos en su cuaderno y las respuestas a las preguntas. Comenten cuáles son las medidas de tendencia central y de dispersión que requirieron calcular para dar respuesta a cada pregunta. En caso necesario, corrijan sus respuestas. Consideren lo siguiente.

> La *desviación media* es una medida de dispersión relacionada directamente con la media aritmética. Para conocerla, primero se requiere calcular la media aritmética, luego se obtiene la diferencia entre ésta y cada uno de los datos y, finalmente, se suman los valores absolutos obtenidos de estas diferencias y el resultado se divide entre el número total de datos del conjunto.

4. Con la información obtenida de estos grupos, ¿consideran que estos alumnos de telesecundaria pasan demasiado tiempo frente a una pantalla, ya sea mirando televisión o usando un celular? ______________________________

____

Justifiquen su respuesta. ______________________________

____

____

____

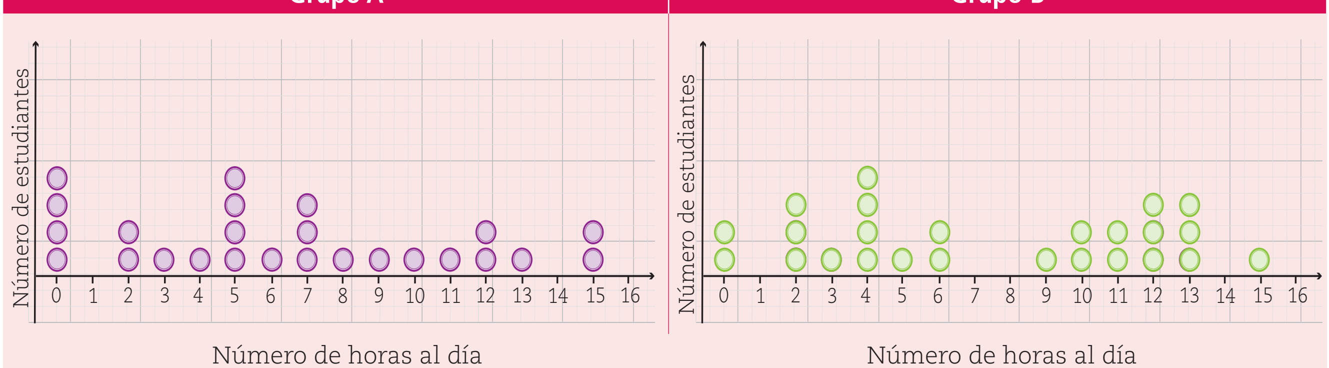
Sesión 2

En busca de los datos

1. Trabajen en pareja. Emma y su equipo elaboraron las siguientes gráficas de puntos para mostrar la distribución de los datos de la sesión anterior.

Número de horas al día frente a la pantalla de algún dispositivo electrónico

Grupo A | **Grupo B**



a) Interpreten las gráficas y completen la tabla de la siguiente página.

Pregunta	Gráfica grupo A	Gráfica grupo B
¿Se forma algún bloque de datos? ¿Dónde?		
¿Hay algún hueco o corte? ¿Dónde?		
¿Hay valores atípicos de los datos? ¿Cuáles?		

Glosario
Valor atípico es el valor de los datos que está más lejos de los demás por ser inusualmente mayor o menor que el resto. En inglés se dice *outlier*.

b) En grupo y con apoyo de su maestro, comparen sus respuestas y, si encuentran diferencias, analicen el porqué. Comenten la importancia de la correcta interpretación de las gráficas.

2. En pareja, ubiquen en cada gráfica el número que representa la media aritmética de horas al día que pasan frente a una pantalla los alumnos de cada grupo. Márquenlas en color rojo y, con base en ellas, tracen una línea perpendicular al eje horizontal que divida a los datos en dos partes.

a) De manera semejante, ubiquen el valor de la mediana del número de horas al día que pasan frente a una pantalla los alumnos de cada grupo. Márquenla en color verde.

b) Consideren el valor obtenido en la sesión 1 de la desviación media y, a partir del valor de la media aritmética, marquen a la derecha e izquierda tantos tramos como se puedan formar. Observen el siguiente ejemplo que corresponde al grupo A.

Gráfica | Grupo A

c) En la gráfica del grupo A, ¿cuántos datos quedan juntos, considerando el primer tramo a la izquierda y a la derecha de la media? ________________ ¿Entre qué valores se encuentran estos datos? ________________________________

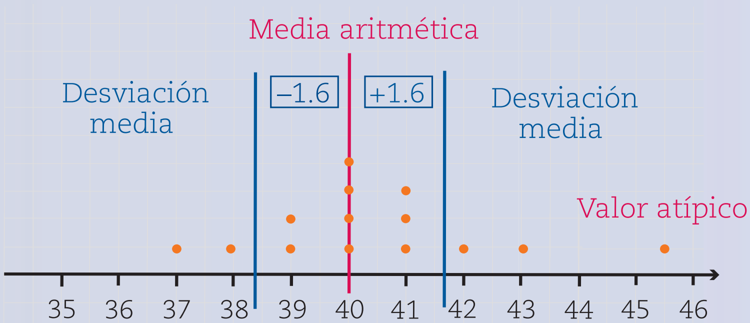
d) En la gráfica del grupo B, ¿cuántos datos quedan juntos, considerando el primer tramo a la izquierda y a la derecha de la media? ________________ ¿Entre qué valores se encuentran estos datos? ________________________________

e) Al comparar lo que ocurre en cada una de las dos gráficas, ¿en cuál se presentan más datos concentrados alrededor del valor de la media aritmética y los tramos que se forman a la derecha e izquierda de ella? ____________________

3. Con el apoyo de su maestro, expongan y argumenten en el grupo sus respuestas, procedimientos y cálculos. Después, lean y comenten lo siguiente.

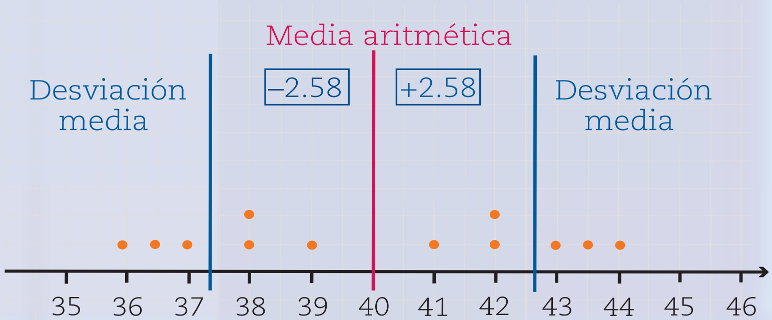
Los valores de las medidas de tendencia central y de dispersión resumen la distribución y variabilidad de un conjunto de datos. Particularmente, la media aritmética nos indica el valor central que representa la mayoría de los valores de los datos y la desviación media nos dice qué tan alejados o cercanos están los datos respecto al valor de la media aritmética. Si se consideran ambos valores, comprenderemos mejor, al comparar dos o más conjuntos, cuál tiene mayor variabilidad (menos datos alrededor de la media aritmética) o menor variabilidad (más datos alrededor de la media aritmética), lo cual se puede apreciar con el valor de la desviación media.

Gráfica | Temperaturas máximas mensuales de 1971 a 2000 en la ciudad A (°C)



Menor variabilidad entre los datos

Gráfica | Temperaturas máximas mensuales de 1971 a 2000 en la ciudad B (°C)



Mayor variabilidad entre los datos

4. Emma le comentó a su familia la situación que analizaron en clase. En su familia hay ocho personas y les preguntó cuántas horas al día pasan frente a la pantalla de algún dispositivo, ya sea televisión, computadora, celular, etcétera. Si la media aritmética de los ocho valores fuera de cinco horas, ¿cuáles son los valores que podrían representar el tiempo que pasa cada integrante frente a la pantalla de un dispositivo? ____________________

a) ¿Hay más de un conjunto de ocho cantidades con una media aritmética de cinco horas? ____________________

Si su respuesta es afirmativa, anoten uno o dos ejemplos. Si es negativa, justifiquen por qué. ____________________

b) Cuando Emma le contó a su padre lo que había hecho, él le preguntó cómo podrían cambiar los valores si la media fuera de cinco horas y la mediana de cuatro horas. Anoten un ejemplo de ocho datos que cumplan con lo anterior. ______

______

c) ¿Hay más de un conjunto de ocho datos que satisfaga ambas condiciones? ______

______

En caso afirmativo, anoten un ejemplo del conjunto. Si su respuesta es negativa, expliquen por qué. ______

______

d) La mamá de Emma le pidió escribir ocho valores con una media aritmética de cinco horas y un rango de siete horas. Anoten un ejemplo. ______

______

e) Escriban ocho posibles cantidades de tiempo transcurrido frente a una pantalla que tengan una media aritmética de cinco horas, una mediana de cuatro horas y un rango de siete horas. ______

______

f) ¿Hay más de un conjunto de datos que satisfaga todas las condiciones? ______ ______ En caso afirmativo, anoten un ejemplo de conjunto. Si la respuesta es negativa, expliquen por qué. ______

______

5. Comparen sus respuestas y comenten las estrategias que siguieron para obtenerlas.

Comparación de estadísticas

Sesión 3

1. Trabajen en equipo. Completen la tabla de abajo para organizar los datos de la sesión 1 en forma de intervalos. En la tabla de la siguiente página, anoten las medidas de tendencia central y de dispersión.

Intervalo de horas al día	Grupo A	Grupo B	Total (en ambos grupos)
☐ De 1 a 3			
☐ De 4 a 7			
☐ De 8 a 12			
☐ Más de 12			
☐ Nada			

Medidas	Grupo A	Grupo B	Total (en ambos grupos)
Media aritmética			
Desviación media			
Mediana			
Moda			
Rango			

2. Consideren la información de las tablas anteriores y completen la siguiente conclusión.

Los alumnos del grupo A pasan _______________ *horas al día,* _______________ *que el grupo B*
(más / menos)
frente a la pantalla de algún dispositivo.

En conjunto, los alumnos de los dos grupos de esa telesecundaria pasan _______________ *horas al*
(media aritmética)
día frente a una pantalla en promedio con una desviación media de _______________ *horas al día.*

a) ¿Cuál de los dos grupos pasa más tiempo frente a una pantalla? _______________ ¿En cuál grupo los datos son menos dispersos, es decir, son más consistentes? _______________

b) Si los padres de los alumnos observaran la información anterior, ¿creen que llegarían a la conclusión de que los alumnos del grupo A y B pasan demasiado tiempo mirando televisión? _______________
¿Por qué? _______________

3. Conocer cuánto tiempo al día pasan los jóvenes frente a la pantalla de algún dispositivo es un aspecto importante para conocer cuál es el consumo de contenidos audiovisuales que tiene una población; otro aspecto importante es conocer qué contenidos ven o consultan mientras están frente a una pantalla.

4. Realicen una encuesta a máximo 50 personas y pregunten: ¿cuántas horas al día pasan frente a la pantalla de un dispositivo? Registren sus resultados en el cuaderno. No olviden registrar el género de las personas.

Sesión 4

Para terminar

Presentación de resultados

1. Reúnanse con el equipo con que trabajaron en la sesión anterior para realizar lo que se les pide. Organicen los datos que recolectaron en su encuesta mediante tablas y gráficas como las que analizaron en las sesiones anteriores.

2. Obtengan las medidas de tendencia central y de dispersión y escríbanlas en su cuaderno.

3. Completen la tabla siguiente con los datos que obtuvieron y den una conclusión en su cuaderno sobre los resultados finales.

Intervalo de horas al día	Mujeres	Hombres	Total
☐ De 1 a 3			
☐ De 4 a 7			
☐ De 8 a 12			
☐ Más de 12			
☐ Nada			

Medidas	Mujeres	Hombres	Total
Media aritmética			
Desviación media			
Mediana			
Moda			

4. Ciertos datos obtenidos en una encuesta señalan que las personas pasan en promedio 45 minutos diarios escuchando música grabada. Los siguientes 30 datos corresponden a un grupo de personas que contestaron cuál es la cantidad de minutos al día que lo hacen.

10, 90, 5, 10, 0, 30, 5, 45, 120, 90, 60, 30, 15, 100, 0, 35, 15, 0, 90, 60, 45, 10, 60, 10, 45, 0, 60, 60, 60, 90

a) Anoten la media aritmética, moda y mediana de este grupo. ____________________

b) Calculen la desviación media y el rango. ____________________

c) ¿Parecen coincidir estos resultados con la media que menciona la encuesta? ____________________
¿Por qué? ____________________

5. Observen el recurso audiovisual *Comparación de dos conjuntos de datos estadísticos* para conocer otras situaciones en las que se comparan dos o más conjuntos de datos estadísticos sobre la misma pregunta de interés a partir de los valores de la media aritmética, mediana, moda y desviación media.

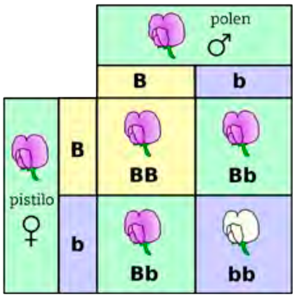
6. Utilicen el recurso interactivo *Memorama: tus derechos* para conocer los derechos que tienes como audiencia de los medios de comunicación disponible en el micrositio de Somos Audiencias en la siguiente liga: https://bit.ly/2UTZzLw.

19. Eventos mutuamente excluyentes 2

Sesión 1

Para empezar


Reginald Crundall Punnett.



Cuadro de Punnett. Muestra los resultados de la cruza de semillas.

Glosario

Genotipo es el conjunto de genes que hay en el núcleo celular de cualquier ser vivo.

Fenotipo es el conjunto de caracteres visibles que un ser vivo presenta como resultado de la interacción entre su genotipo y el medio.

Una manera útil de tomar decisiones consiste en examinar la información que se tiene y considerar la probabilidad de que ciertos eventos ocurran, algo que han aprovechado tanto científicos como empresarios. Por ejemplo, a mediados del siglo XIX, en el libro *Experimentos sobre hibridación de plantas*, Gregor Mendel (1822-1884) registró una de las primeras aplicaciones de la teoría de la probabilidad a las ciencias naturales; esta obra representa también el inicio del estudio de la genética.

Entre los primeros genetistas también está el inglés Reginald Crundall Punnett (1875-1967), quien creó una herramienta para predecir las proporciones de los genotipos y fenotipos de la descendencia de una cruza, la cual todavía se utiliza: el cuadro de Punnett. Se trata de una tabla de doble entrada que representa cómo se pueden realizar las combinaciones aleatorias de una descendencia.

El gráfico de la izquierda es de Punnett y muestra una cruza de semillas de una misma especie de flor, pero de diferente color. Los retoños mostrarán la coloración morada dominante en una proporción de 3:1; esto en términos de probabilidad equivale a decir que aproximadamente 75% de los retoños será de color morado. ¿Cuál es la probabilidad de que uno de los retoños tenga el genotipo *Bb*? Si se definen los eventos: “el retoño será de color blanco” y “el retoño tendrá genotipo *BB*”, ¿qué tipo de eventos son?, ¿cómo calcularías la probabilidad de que uno de los retoños tenga genotipo *Bb* o *bb*?, y ¿la probabilidad de que los retoños sean de color morado o de genotipo *BB*? ¿Cuáles de estos eventos son mutuamente excluyentes?, ¿cuáles no?

Con lo que aprenderás en esta secuencia, podrás calcular la probabilidad de los eventos mutuamente excluyentes y de los no excluyentes mediante la regla de la suma.

Manos a la obra

Resultados de la prueba de laboratorio

1. Trabajen en pareja. La siguiente tabla muestra los resultados de una prueba de laboratorio realizada para la detección de infecciones causadas por la bacteria estafilococo áureo o dorado (*Staphylococcus aureus*) resistente a varios antibióticos comunes, en la cual participó un grupo de 1 850 personas.

Intervalo de edad (años)	Infectados	No infectados	Total de resultados
Menor o igual que 30	490	70	
Mayor que 30	160	1 130	
Total			

Utilicen los datos de la tabla anterior para contestar las siguientes preguntas.

a) ¿Cuántas personas mayores de 30 años participaron en la prueba? ________

¿Cuántas personas de 30 años o menos participaron en la prueba? ________

b) ¿Cuántas personas están infectadas por la bacteria estafilococo dorado? ________

¿Cuántas personas no están infectadas? ________

c) ¿Qué representa el número 70 en la tabla? ________

d) Si se selecciona una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que esté infectada por esta bacteria? ________

2. Completen la siguiente tabla de probabilidades con las razones y el cociente que corresponda.

Intervalo de edad (años)	Infectados	No infectados	Total de resultados
Menor o igual que 30	$\frac{490}{1\,850} =$		
Mayor que 30		$\frac{1\,130}{1\,850} =$	
Total			$\frac{1\,850}{1\,850} = 1$

Consideren los siguientes eventos que pueden ocurrir al seleccionar al azar a una persona de la muestra.

A: "Que la persona esté infectada por la bacteria estafilococo dorado".

B: "Que la persona sea mayor de 30 años".

C: "Que la persona tenga 30 años o menos y no esté infectada por la bacteria estafilococo dorado".

Con base en lo anterior, respondan lo que se pide

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la persona seleccionada al azar esté infectada por la bacteria estafilococo dorado? *P* (Que la persona esté infectada por la bacteria estafilococo dorado) = *P* (*A*) = ____________________

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la persona seleccionada al azar sea mayor de 30 años? *P* (Que la persona sea mayor de 30 años) = *P* (*B*) = ____________________

c) ¿Cuál es la probabilidad de que la persona seleccionada al azar tenga 30 años o menos y no esté infectada por la bacteria estafilococo dorado? *P* (Que la persona tenga 30 años o menos y no esté infectada por la bacteria estafilococo dorado) = *P* (*C*) = ____________________

d) Si se selecciona al azar a una persona mayor que 30 años, ¿puede ocurrir que esté infectada por la bacteria estafilococo dorado? ____________________

e) ¿Son mutuamente excluyentes los eventos *A* y *B*? ____________________

¿Por qué? ____________________

____

f) Si se selecciona al azar a una persona que esté infectada por la bacteria estafilococo dorado, ¿puede ocurrir que también tenga 30 años o menos y no esté infectada por dicha bacteria estafilococo dorado? ____________________

g) ¿Son mutuamente excluyentes los eventos *A* y *C*? ____________________

¿Por qué? ____________________

____

3. ¿Cuál o cuáles de las siguientes parejas de eventos son mutuamente excluyentes? En todas las parejas de eventos se selecciona una persona al azar. Marquen con una ✓ sus respuestas.

☐ La persona seleccionada resultó mayor de 30 años o es una persona de 30 años o menos que no está infectada por la bacteria estafilococo dorado.

☐ La persona tiene 30 años o menos o la persona no está infectada por la bacteria estafilococo dorado.

☐ La persona está infectada por la bacteria estafilococo dorado o la persona es mayor de 30 años y no está infectada por la bacteria.

4. De manera grupal comparen sus respuestas y, con apoyo de su maestro, comenten cómo determinaron qué eventos son mutuamente excluyentes.

5. Con su maestro, lean y comenten la siguiente información.

> Si dos eventos son *mutuamente excluyentes*, significa que si ocurre uno no puede ocurrir el otro y, por lo tanto, no tienen resultados favorables en común.

Vínculo con...

Lengua materna

Los conectores son palabras que sirven para unir o relacionar elementos en una oración o en un párrafo. Por ejemplo, la letra o se conoce en matemáticas como conectivo u operador lógico e indica que se deben considerar todos los elementos de los conjuntos involucrados.

6. De manera grupal, contesten lo siguiente.
   a) ¿Cuál consideran que es la probabilidad de seleccionar a una persona que sea mayor de 30 años o que no esté infectada por la bacteria estafilococo dorado y tenga 30 años o menos?

   ____

   b) ¿Cómo obtuvieron la respuesta anterior? ______________________________

   ____

Cálculo de la probabilidad de eventos mutuamente excluyentes

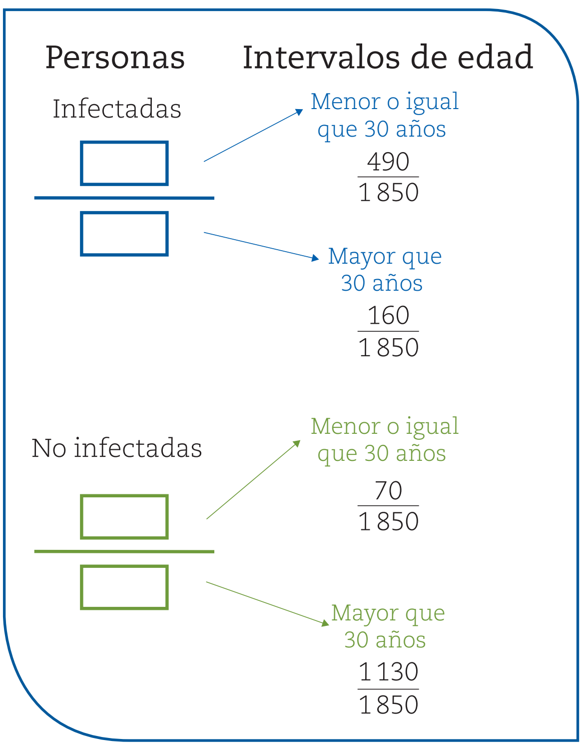
Sesión 2

1. Trabajen en pareja. Consideren la tabla de la actividad 2 de la sesión anterior para completar el diagrama de árbol y responder las preguntas.
   a) ¿Cuántas personas están infectadas por estafilococo dorado o tienen 30 años o menos y no están infectadas? ______________
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que la persona seleccionada al azar esté infectada por estafilococo dorado o tenga 30 años o menos y no esté infectada? Es decir, P (A o C) =

   ____

   c) Completen la tabla.

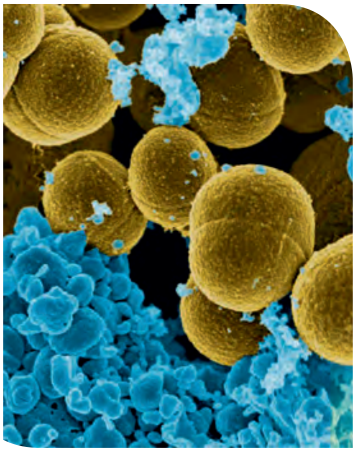
$P(A)$	+	$P(C)$	=	



d) Comparen el valor de la probabilidad que obtuvieron en el inciso b) y el de la suma de las probabilidades del inciso c). ¿Son iguales o diferentes? ____________

e) ¿Cuántas personas están infectadas por estafilococo dorado y tienen más de 30 años? ____________

f) ¿Cuántas personas están infectadas por estafilococo dorado o tienen más de 30 años? No consideren a las personas que cumplen con ambos eventos a la vez. ____________



Bacteria *Staphylococcus aureus* vista en el microscopio.

g) ¿Cuál es la probabilidad de que la persona seleccionada esté infectada por estafilococo dorado o sea mayor de 30 años? $P(A \text{ o } B) =$ ____________

Completen la tabla.

$P(A)$	+	$P(B)$	=	

h) Comparen el valor de la probabilidad que obtuvieron en el inciso f) con la suma de la probabilidad del evento A y del B. ¿Son iguales o diferentes? ____________
Si son diferentes, ¿cuál es la diferencia? ____________
¿A qué valor corresponde esa diferencia? ____________ ¿Por qué consideran que se obtiene esa diferencia? ____________

2. Con ayuda de su maestro, comparen sus respuestas con las de sus compañeros del grupo y comenten de qué manera calcularon las probabilidades de los incisos anteriores.

3. En grupo, lean y comenten lo siguiente.

Cuando los eventos no son mutuamente excluyentes, la probabilidad de que ocurra uno u otro se obtiene sumando las probabilidades de cada evento menos la probabilidad de que ocurran los dos eventos al mismo tiempo.

$$P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ y } B)$$

A esta expresión se le conoce como *regla de la suma de las probabilidades*.

Cuando dos eventos son mutuamente excluyentes, la probabilidad de que ocurra uno u otro de los eventos es igual a la suma de las probabilidades de los eventos.

$$P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B)$$

Esto es debido a que la probabilidad de que haya resultados favorables comunes es cero, es decir, no hay resultados que cumplan con las dos condiciones al mismo tiempo. Esto se representa como

$$P(A \text{ y } B) = 0$$

A formar números

1. Trabajen en equipo. Con los cuatro primeros números primos (2, 3, 5 y 7), formen números de tres cifras con la condición de no repetir ninguno; por ejemplo, 232 o 755 no forman parte de la lista.

a) En total, ¿cuántos números creen que se pueden formar? ______________________

b) Observen los ejemplos a la derecha y elaboren un listado con todos los números.

c) Seleccionen aleatoriamente uno de esos números de 3 cifras y definan los siguientes eventos.

A: "El número elegido es múltiplo de 3."

B: "El número elegido es mayor que 500."

C: "El número elegido es menor que 200."

D: "El número elegido tiene 2 en la primera cifra."

d) ¿Cuántos resultados favorables tiene el evento *A*? __________ ¿Cuáles son? __________

____

e) ¿Cuántos resultados favorables tiene el evento *B*? ______________________

¿Cuáles son? ______________________

____

f) ¿Cuántos resultados favorables tiene el evento *C*? ______________________

¿Cuáles son? ______________________

g) ¿Cuántos resultados favorables tiene el evento *D*? ______________________

¿Cuáles son? ______________________

2	3	5

3	5	7

5	7	2

7	2	3

2. Comparen sus respuestas con las de otros equipos, revisen si formaron los mismos números con tres cifras diferentes y si no hay números repetidos en cada equipo.

3. Consideren el conjunto de números y los eventos definidos de la actividad anterior. Seleccionen al azar un número de tres cifras. Marquen con una ✓ los eventos que son mutuamente excluyentes.

- ☐ "El número es múltiplo de 3" o "es mayor que 500".
- ☐ "El número es múltiplo de 3" o "es menor que 200".
- ☐ "El número es múltiplo de 3" o "tiene 2 en la primera cifra".
- ☐ "El número es mayor que 500" o "tiene 2 en la primera cifra".

4. Consideren los números y eventos de la actividad 1 de esta sesión para seleccionar la fórmula que les permita calcular la probabilidad del evento indicado en cada caso, y aplíquenla. Marquen con una ✓ sus respuestas.

a) ¿Cuál es la probabilidad del evento (A o B)?

☐ $P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B)$ ☐ $P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ y } B)$

b) ¿Cuál es la probabilidad del evento (A o C)?

☐ $P(A \text{ o } C) = P(A) + P(C)$ ☐ $P(A \text{ o } C) = P(A) + P(C) - P(A \text{ y } C)$

c) ¿Cuál es la probabilidad del evento (B o C)?

☐ $P(B \text{ o } C) = P(B) + P(C)$ ☐ $P(B \text{ o } C) = P(B) + P(C) - P(B \text{ y } C)$

d) ¿Cuál es la probabilidad del evento (A o D)?

☐ $P(A \text{ o } D) = P(A) + P(D)$ ☐ $P(A \text{ o } D) = P(A) + P(D) - P(A \text{ y } D)$

e) ¿Cuál es la probabilidad del evento (C o D)?

☐ $P(C \text{ o } D) = P(C) + P(D)$ ☐ $P(C \text{ o } D) = P(C) + P(D) - P(C \text{ y } D)$

5. De manera grupal, comparen sus respuestas de las actividades 3 y 4 y expliquen cómo determinaron si los eventos son mutuamente excluyentes o no, así como la forma en que calcularon la probabilidad cuando ambos eventos ocurren al mismo tiempo, por ejemplo, $P(A \text{ y } D)$.

6. Definan dos eventos, M y N, uno que sea mutuamente excluyente con el evento A y otro que sea mutuamente excluyente con el evento D. Descríbanlos en su cuaderno. Posteriormente, calculen la probabilidad del evento (A o M) y (D o N).

7. Con ayuda de su maestro, comparen sus respuestas y comenten en qué situaciones de la vida cotidiana podrían determinar si algunos eventos son mutuamente excluyentes o no, e indiquen cómo calcularían la probabilidad de ocurrencia de los mismos.

Sesión 4

Para terminar

Población y probabilidad

1. Trabajen en pareja. Resuelvan los siguientes problemas. En el sitio oficial de la Organización de las Naciones Unidas (ONU) se publica lo siguiente respecto a la población mundial.

Dato interesante
Se espera que en 2027 India supere a China como el país más poblado del mundo. Por el contrario, se estima que China reduzca su población en 31.4 millones (2.2% menos) entre 2019 y 2050.
Fuente: https://bit.ly/2V70p7K

Los países más poblados: China e India
Un 61% de la población mundial vive en Asia (4 700 millones), 17% en África (1 300 millones), 10% en Europa (750 millones), 8% en Latinoamérica y el Caribe (650 millones) y 5% restante en América del Norte (370 millones) y Oceanía (43 millones). Por su parte, China (1 440 millones) e India (1 390 millones) continúan siendo los países con mayor población, ya que cuentan con más de 1 000 millones de personas y representan 19% y 18% de la población mundial, respectivamente.

Fuente: https://bit.ly/2V70p7K

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona sea de Asia o de América del Norte? ______

b) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona sea china o india? ______

c) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona viva en el continente americano? ______

2. Si en una comunidad 62% de las personas ve televisión abierta, 27% usa internet y 7% usa ambos, ¿cuál es la probabilidad de que una persona de esa localidad, tomada al azar, vea al menos televisión abierta o use internet? ______

3. Consideren el cuadro de Punnett de la sección "Para empezar" que muestra una cruza de semillas de una misma especie de flor, pero de diferente color.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que uno de los retoños tenga el genotipo *Bb*? ______

b) Si se definen los eventos: "el retoño será de color blanco" y "el retoño tendrá genotipo *BB*", ¿qué tipo de eventos son? ______ ¿Cómo calcularían la probabilidad de que uno de los retoños tenga genotipo *Bb* o *bb*? ______ ¿Y la probabilidad de que los retoños sean de color morado o de genotipo *BB*? ______

4. Con ayuda de su maestro, revisen los procedimientos y resultados que obtuvieron para calcular las probabilidades que se piden y, si hay diferencias, analicen en qué consistieron.

5. Observen el recurso audiovisual *Probabilidad de eventos mutuamente excluyentes* para analizar más situaciones aleatorias en las que se calcula la probabilidad de eventos mutuamente excluyentes.

6. Usen el recurso informático *Probabilidad de eventos mutuamente excluyentes* para calcular la probabilidad de otros eventos que son mutuamente excluyentes en diferentes situaciones.

Evaluación

Subraya la opción correcta.

1. La descomposición en factores primos del número 472.

(A) 2 × 2 × 2 × 3 × 3 × 3 (B) 2 × 2 × 2 × 59

(C) 2 × 2 × 2 × 5 × 11 (D) 2 × 2 × 2 × 3 × 3 × 5 × 11

2. Para combatir una enfermedad, una persona debe tomar tres medicamentos al día. El primero cada 2 horas, el segundo cada 3 y el tercero, cada 4. Si tomó los tres medicamentos a las 9 de la mañana, ¿después de cuántas horas los volverá a tomar juntos?

(A) 2 horas (B) 6 horas (C) 12 horas (D) 24 horas

3. Subraya la ecuación que permite resolver el problema y contesta la pregunta. El perímetro de una lona rectangular mide 30 m y su área 50 m².

(A) $x(15 - x) = 50$ (B) $x(15 + x) = 50$

(C) $x(30 - x) = 50$ (D) $x(30 + x) = 50$

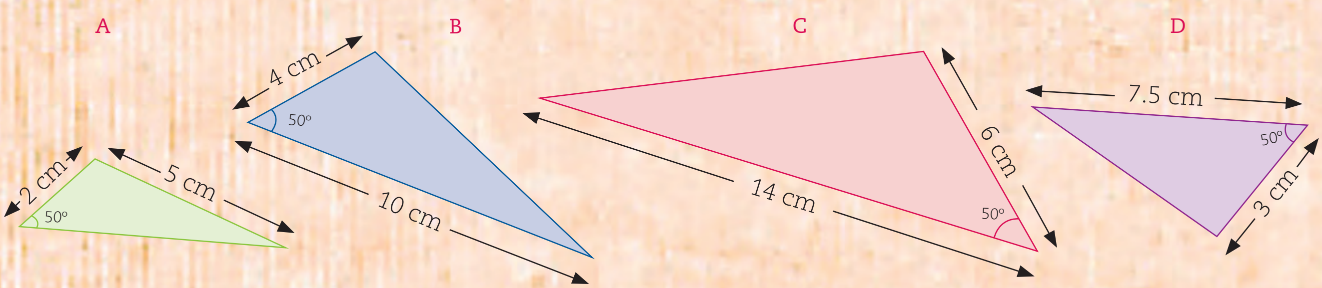
¿Cuáles son las medidas de la lona? Largo = ______ Ancho = ______

4. Los lados de un triángulo miden 5 cm, 9 cm y 12 cm. Si se traza un triángulo semejante a éste, cuya razón de semejanza es de 2.5, ¿cuál es la medida de los lados del nuevo triángulo trazado?

(A) 2 cm, 3.6 cm, 5 cm (B) 12.5 cm, 22.5 cm, 30 cm

(C) 10 cm, 18 cm, 24 cm (D) 12.5 cm, 22.5 cm, 32.5 cm

5. De los siguientes triángulos, ¿cuáles son semejantes entre sí? Subráyalos.



(A) A, D (B) A, C (C) B, D (D) B, C

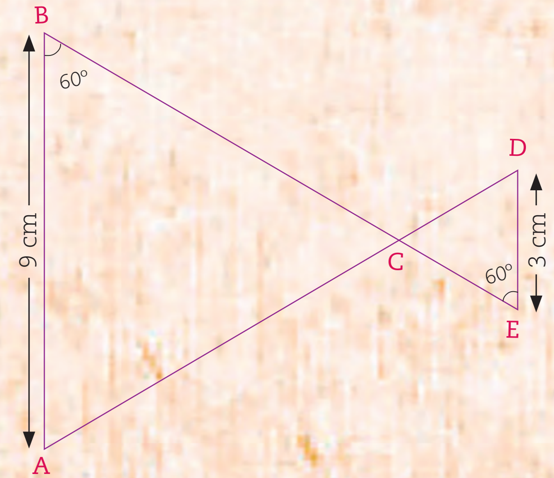
6. ¿Qué criterio de semejanza sirve para determinar que los siguientes dos triángulos son semejantes?

Ⓐ LLL

Ⓑ LAL

Ⓒ AA

Ⓓ LA



7. Los puntos A y B están en un plano cartesiano, sus coordenadas son A (2, 3) y B (6, 6). ¿Cuál es la distancia entre ellos?

Ⓐ 3 Ⓑ 4 Ⓒ 5 Ⓓ 6

8. Una escalera que mide 3 m está recargada en una pared, si el pie de la escalera está a 1 m de distancia de ésta, ¿qué altura alcanza, aproximadamente?

Ⓐ 1.41 m Ⓑ 2 m Ⓒ 2.83 m Ⓓ 3 m

9. ¿Cuánto mide la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyo cateto opuesto al ángulo de 30° mide 1.05 cm? El *sen* 30° = $\frac{1}{2}$

Ⓐ 0.525 cm Ⓑ 2.010 cm Ⓒ 2.01 cm Ⓓ 2.1 cm

10. Si *cos A* = $\frac{3}{5}$, ¿cuánto vale la tangente de A?

Ⓐ $\frac{3}{4}$ Ⓑ $\frac{3}{5}$ Ⓒ $\frac{5}{3}$ Ⓓ $\frac{4}{3}$

11. ¿Cuáles de los siguientes eventos son mutuamente excluyentes?

a) Tres monedas son lanzadas al aire. El evento A es que aparezcan dos soles y el B, que aparezcan menos de 3 soles. ¿Cuál es la probabilidad de que ocurran los eventos A y B al mismo tiempo?	**b)** Tres monedas son lanzadas al aire. El evento A es que aparezcan dos soles y el B que aparezca 1 o más soles. ¿Cuál es la probabilidad de que ocurran los eventos A y B al mismo tiempo?	**c)** Tres monedas son lanzadas al aire. El evento A es que aparezcan dos soles y el B que aparezcan 3 soles. ¿Cuál es la probabilidad de que ocurran los eventos A y B al mismo tiempo?	**d)** Tres monedas son lanzadas al aire. El evento A es que aparezcan dos soles y el B que no aparezcan águilas. ¿Cuál es la probabilidad de que ocurran los eventos A y B al mismo tiempo?

Lee cada situación y realiza lo que se pide.

1. Considera los siguientes números y su factorización en primos para contestar las preguntas.

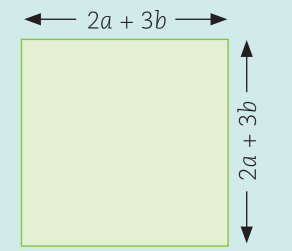
$420 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7$ $\quad 630 = 2 \times 3^2 \times 5 \times 7$ $\quad 330 = 2 \times 3 \times 5 \times 11$

a) ¿Cuál es el MCD de los tres números? ______________________

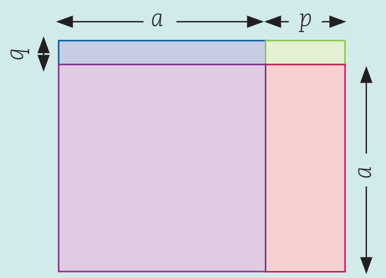
b) ¿Cuál es el mcm de los tres números? ______________________

2. Escribe tres expresiones algebraicas equivalentes para representar el área de las siguientes figuras.

a)



b)



Expresión 1	Expresión 2	Expresión 3	Expresión 1	Expresión 2	Expresión 3

3. En el recuadro, haz un dibujo que represente la distribución de un área cuya expresión algebraica es: $x^2 + 5x + 4$ y enseguida del dibujo anota esta expresión como un producto de dos factores.

4. Relaciona cada ecuación con las raíces que le corresponden.

a) $x^2 + 2x - 15 = 0$ ( ) $x_2 = 5$

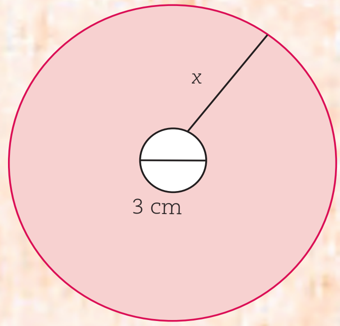
b) $x^2 - 25 = 0$ ( ) $x_2 = -5$

c) $x^2 - 5x = 0$ ( ) $x_2 = -5$

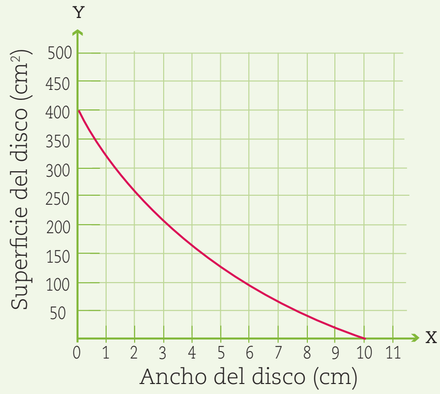
5. Se quiere hacer varios discos de madera para un juego de niños. Cada disco debe tener superficies distintas, pero el agujero central debe ser siempre de 3 cm de diámetro.

La expresión algebraica que modela la superficie de cada disco en función del valor de x es: $y = 3.14x^2 + 9.42x$

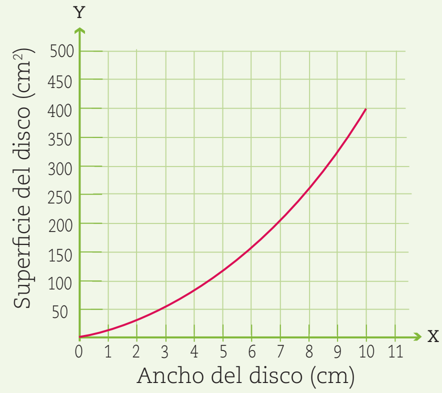
¿De las 4 gráficas de abajo, cuál es la representación de la superficie del disco en función de su ancho? Márcala con una ✓.



a)

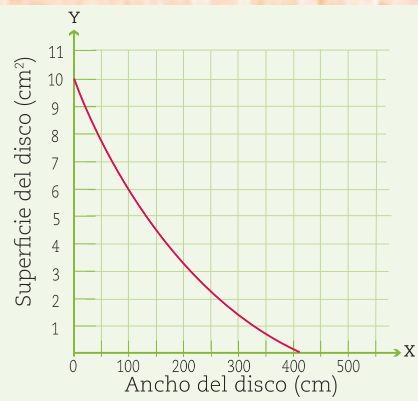


b)



c)

d)



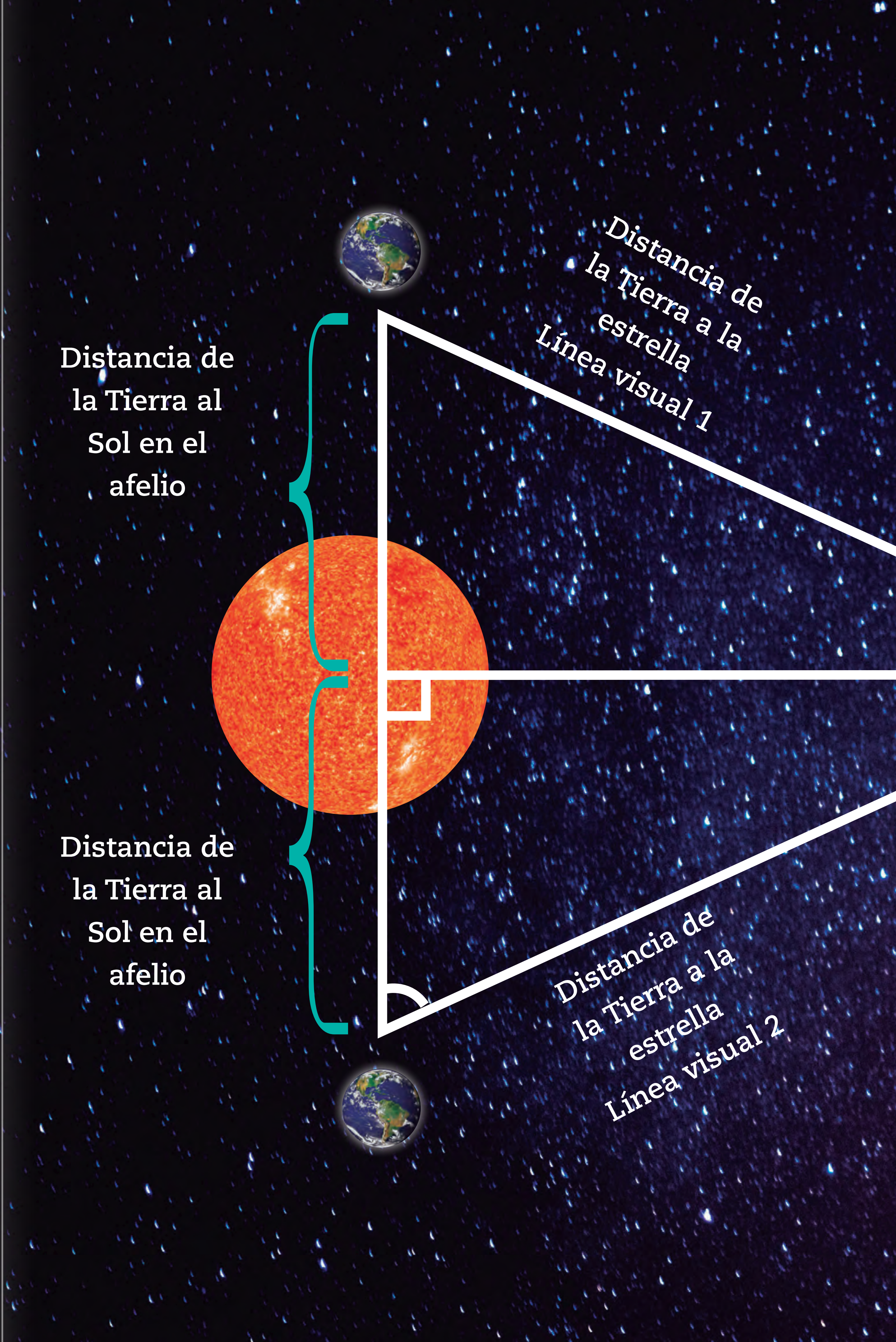
6. Si el área de un disco mide 56.52 cm², ¿cuál es la medida del ancho? Plantea la ecuación y resuelve. ______________________________

7. Los siguientes datos corresponden a la cantidad de automóviles que llegan a dos casetas de cobro diferentes en intervalos de 10 minutos cada uno.

Caseta de cobro A	Caseta de cobro B
20, 19, 15, 21, 35, 24, 28, 31, 31, 32	26, 26, 58, 24, 22, 22, 15, 33, 19, 30

a) ¿En qué caseta es mayor el promedio de automóviles que llegan? ____________

b) ¿En qué caseta es mayor la dispersión de los automóviles que llegan? ____________

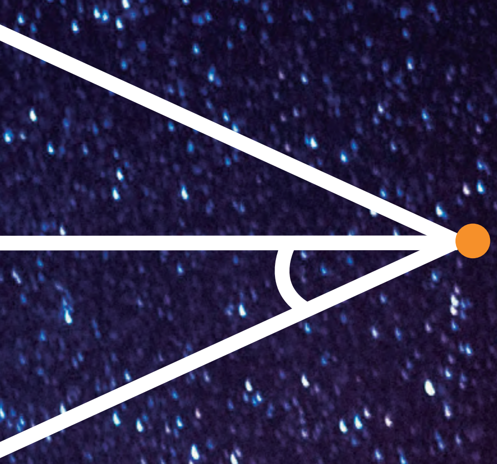

Distancia de la Tierra a la estrella Línea visual 1
Distancia de la Tierra al Sol en el afelio
Distancia de la Tierra al Sol en el afelio
Distancia de la Tierra a la estrella Línea visual 2

Bloque 3

La trigonometría en el Universo

Todos nos hemos maravillado al ver, en alguna noche despejada, el cielo lleno de estrellas. Es maravilloso pensar en la inmensidad del Universo y en la posibilidad de conocer la distancia a la que se encuentran esas estrellas.

¿Sabías que existe un método para saberlo? Se le conoce como *paralaje estelar* y consiste en establecer relaciones entre algunas distancias que ya se conocen y un objeto fijo en dos momentos diferentes, además se hace uso de las razones trigonométricas que estudiarás en este bloque.



20. Mínimo común múltiplo y máximo común divisor 2

Sesión 1

Para empezar

Christian Goldbach (1690 – 1764). Conjetura de Goldbach: "Todo número par mayor que 2 puede escribirse como suma de dos números primos".

El conjunto de los números enteros tiene sorprendentes regularidades y continúa siendo un reto para los matemáticos. Por ejemplo, uno de los problemas aún sin resolver es el de la conjetura de Goldbach.

¿Será cierto que la suma de tres números enteros consecutivos siempre es un múltiplo de 3? Esta pregunta puede ser contestada mediante el uso del álgebra y de un concepto ya estudiado en la secuencia 10: el máximo común divisor (MCD).

Recordarás que tres números consecutivos pueden representarse de manera general así: a, $a + 1$ y $a + 2$. La suma de esos tres números se expresa: $a + (a + 1) + (a + 2) = a + a + 1 + a + 2 = 3a + 3$.

La expresión $3a + 3$ es un binomio y sus dos términos tienen un factor común. ¿Lo puedes identificar? Una vez identificado, se puede encontrar la expresión algebraica equivalente en forma factorizada como $3(a + 1)$. ¿Qué nos dice esta expresión? Que independientemente del valor de a, siempre será múltiplo de 3, puesto que lo contiene como factor.

En esta secuencia profundizarás tus conocimientos sobre el mcm y el MCD en el conjunto de los números enteros y los podrás generalizar al utilizar el álgebra.

Manos a la obra

Factores, divisores y lenguaje algebraico

1. Trabajen en pareja. Escriban expresiones equivalentes a cada monomio de manera que sean el producto de dos factores. Anótenlas en cada celda.

Monomios	Expresiones algebraicas equivalentes como producto de dos factores			
$6x^2$	$3(2x^2)$			
$12ab^2$	$2a(6b^2)$			
$8x^2y^3$	$2xy(xy^2)$			

a) ¿Cómo pueden verificar que las expresiones factorizadas que escribieron en cada fila de la tabla son equivalentes entre sí? ___________________________

b) ¿Hay otras expresiones factorizadas que sean equivalentes a cada monomio? En caso afirmativo, anoten otro ejemplo en su cuaderno.

2. ¿Cuáles son todos los factores comunes de cada binomio y trinomio? Anótenlos en la celda correspondiente. Observen el ejemplo.

$4x^3 + 2x^2$	$12xy^2 - 3y^2$	$8a^2 b^2 - ab^2$	$3x^2 - 6xy$	$3x^2 - 6xy + 9y$
$1, 2, x, 2x, x^2, 2x^2$				

3. Con sus compañeros, y con apoyo del maestro, comparen sus resultados, identifiquen los errores y corrijan si es necesario. Después, lean y comenten la siguiente información.

Un factor común de dos o más números o expresiones algebraicas es cualquier número o expresión que es factor de todos los números o términos que componen la expresión algebraica, ya sea binomio, trinomio o polinomio. Por ejemplo, un factor común de los números 12 y 18 es el 3, pero no es el único. De esta forma, un factor común de las expresiones $3a^2 b^3$ y $6ab^2$ es ab.

El mayor factor común de dos o más números o monomios es su Máximo Común Divisor (MCD) y se obtiene con el producto de sus factores comunes con menor exponente. En el caso de 12 y 18 es 6, mientras que, en el caso de $3a^2 b^3$ y $6ab^2$ es $3ab^2$.

4. En la actividad 2 encontraron todos los factores comunes de cada expresión algebraica. Identifiquen ahora el MCD de cada una de esas expresiones y anótenlos en su cuaderno.

5. Clasifiquen las siguientes expresiones algebraicas. Anoten una M si es monomio, B si es binomio, T cuando sea trinomio y P si es polinomio.

☐ $3x^2 + 2x - 1$	☐ $2x^3y^2z$	☐ $5x^4y + 2x^3y^2 - x^2y^3 + xy^4$	☐ $6x^3y^2z$
☐ $5x^2 + 10x$	☐ $ax^2 + bx + c$	☐ $a^3b + a^2b^2 - ab^3 + 1$	☐ xy

6. Ahora, contesten lo siguiente.

a) La expresión xy es un factor de $2x^3y^2z$. Encuentren el otro factor que multiplicado por xy dé como producto $2x^3y^2z$. Esto es $xy(\qquad) = 2x^3y^2$.

b) Consideren las expresiones $2x^3y^2z$ y $6x^3y^2z$. Escriban una expresión que sea factor común de ambas. ________________ Escriban el mayor factor común de las dos expresiones anteriores, es decir, el MCD. ________________

7. Marquen con una ✓ las expresiones equivalentes a las de los incisos a) y b).

a) $5x^2 + 10x$ ☐ $x(5x + 10)$ ☐ $x(x + 10)$ ☐ $5x(x + 10)$ ☐ $5x(x + 2)$

b) $2x^3 + 4x^2 - 6x$ ☐ $2(x^3 + 2x^2 - 3x)$ ☐ $x(x^3 + x^2 - x)$ ☐ $2x(x^2 + 2x - 3)$

c) De las expresiones equivalentes que marcaron, encierren la que contiene como factor común el MCD.

8. Subrayen las expresiones de los incisos en los cuales, al factorizar, se extrajo el MCD.

a) $2a^3b^2 + 4a^2b = a^2b(2ab + 4)$

b) $3x^2y^4 - 6x^3y^2 = 3x^2y(y^3 - 2xy)$

c) $5m^3n^4 + 10m^2n^2 = 5(m^3n^4 + 2m^2n^2)$

d) $8p^5q^3 - 4p^3q^5 = 4p^3q^3(2p^2 - q^2)$

9. Con sus compañeros, y con apoyo del maestro, comparen sus respuestas y comenten cómo las obtuvieron.

Sesión 2

Algunas propiedades de los números

1. Trabajen en equipo. Analicen las preguntas y hagan lo que se indica.

¿Será cierto que la suma de dos números impares siempre es un número par? ________

En su cuaderno, prueben con algunos ejemplos y escriban las respuestas a los incisos.

a) Representen algebraicamente en su cuaderno lo que se pide.

- Un número impar.
- Otro número impar diferente del anterior.
- La suma de esos números impares reduciendo términos semejantes.
- La suma que escribieron, ¿tiene algún factor común? ¿Cuál o cuáles?
- Una expresión factorizada de la suma de dos números impares.

b) ¿Cuál es la conclusión que se obtiene de la expresión anterior?

2. Completen la tabla y después hagan lo que se indica. Hay dos columnas resueltas.

Números de dos cifras diferentes	27			97		
Mismos números con las cifras invertidas	72			79		
Diferencia entre ambos números	45			18		

a) Verifiquen que, en todos los casos, la diferencia entre ambos números es divisible entre 9.

b) Completen el proceso siguiente para mostrar que la propiedad anterior se cumple siempre.

- Representación algebraica de un número de dos cifras: $10a + b$.
- Representación algebraica del mismo número con las cifras invertidas. ______

______
- Diferencia entre ambos números: $(10a + b) - (\qquad) =$ ______
- La expresión obtenida, ¿tiene algún factor común? ______

  ¿Cuál o cuáles? ______

  ______
- Expresión factorizada de la diferencia. ______

c) En su cuaderno, anoten la conclusión que se obtiene de la expresión factorizada.

3. Contesten en su cuaderno: ¿será cierto que cualquier número de dos cifras, en el que la cifra de las decenas es igual a la cifra de las unidades, uno de sus factores es 11?

a) Si su respuesta es no, anoten un ejemplo que lo muestre.

b) Si su respuesta es sí, muéstrenlo algebraicamente haciendo lo que se indica.

- Representen algebraicamente un número de dos cifras en el que la cifra de las decenas sea igual a la de las unidades donde uno de los dos factores es 11.
- Simplifiquen la expresión anterior.
- Anoten la conclusión que obtuvieron de la expresión anterior.

Dato interesante
En 1742, el matemático Christian Goldbach envió una carta al también matemático Leonhard Euler, en la que afirmaba, sin demostrarlo, que: “Todo número par mayor que 2 es la suma de dos números primos”. Por ejemplo, 30 = 23 + 7. Hasta ahora, dicha afirmación no ha podido ser demostrada.

4. Relacionen ambas columnas con una línea.

Múltiplo de 5	a^4b^4
Factor común de $(3a + a)$	$3a + 2$
MCD de $a^5\,b^4$ y $a^4\,b^4$	$5a$
Múltiplo de 3 más dos	a

5. Con tus compañeros, y con apoyo del maestro, comparen sus respuestas, identifiquen los errores y corrijan. Luego, lean y comenten lo siguiente.

Un número par se representa de manera general como $2n$, puesto que, independientemente del valor entero de n, el número $2n$, siempre será múltiplo de 2.

Un número impar se representa, de manera general, como $2n + 1$, puesto que, si a un número par se le suma 1, se obtiene un número impar.

Para terminar

El factor común de una expresión algebraica

1. Trabajen en equipo. Resuelvan los siguientes problemas en su cuaderno.
Anoten las medidas de los lados del rectángulo para que el área sea la que se indica. Usen expresiones algebraicas.

Área = $3x^2 + 6x$

   a) Verifiquen que, al multiplicar largo por ancho, obtienen el área.
   b) Luego, asignen un valor a x y obtengan el valor del área y del perímetro.

2. Anoten las medidas de los lados del rectángulo para que el perímetro sea el que se indica. Usen expresiones algebraicas.

Perímetro = $8x + 12$

   a) Verifiquen que, al sumar las medidas de los cuatro lados, obtienen el perímetro.
   b) Después, asignen un valor a x y obtengan el valor del área y del perímetro de este rectángulo.

3. En grupo, comparen sus respuestas y comenten de qué manera determinaron las medidas de las dimensiones de los rectángulos.

4. En su cuaderno, expresen como producto de dos factores el número 168, luego, usen cada pareja de factores para elaborar una tabla basada en el ejemplo de la izquierda.

Sumandos	84 y 2
Suma	86
Producto	168

   a) Con la suma y el producto de la primera columna se puede formular la ecuación $x^2 + 86x + 168 = 0$.
   - ¿Cuál es la forma factorizada de esta ecuación? ____________
   - ¿Cuáles son las soluciones de la ecuación?

   x_1 = ____________ x_2 = ____________

   b) En su cuaderno, formulen otra ecuación de segundo grado con la suma y el producto de alguna de las columnas y procedan de manera similar al inciso a).

5. Comparen los resultados de la tabla con los de sus compañeros. Con apoyo de su maestro, comenten en grupo cuáles son las factorizaciones de las ecuaciones que plantearon y sus soluciones, así como en qué casos hubo respuestas diferentes que son correctas.

6. Inventen una división en la que el divisor sea 12 y el residuo 5. Después, comparen sus respuestas en grupo y contesten las preguntas de la siguiente página en su cuaderno.

a) ¿Cuántas y cuáles divisiones pueden inventar que cumplan con las condiciones mencionadas?

b) Marquen con una ✓ la expresión general que permite encontrar el dividendo de la operación que inventaron.

☐ $12n + 5$ ☐ $12n - 5$ ☐ $5n + 12$ ☐ $5n - 12$

c) ¿Cuál de los términos de la división está representado por *n*?

7. El producto de dos números es 2 688. Escriban en su cuaderno, ¿cuál es el producto del doble del primer número por el triple del segundo número? Justifiquen su respuesta.

8. Respondan lo siguiente: ¿será cierto que si se suma un número más su doble, más su triple, más su cuádruple, el resultado es un número que termina en cero? ____________
Justifiquen su respuesta. ____

9. Consideren tres números enteros consecutivos cualesquiera y hagan en su cuaderno lo que se indica.

a) Representen algebraicamente los tres números.

b) Eleven al cuadrado el número de en medio.

c) Obtengan el producto del primer número por el tercero.

d) Al cuadrado del número de en medio, réstenle el producto del primero por el tercero. ¿Cuál es el resultado?

e) Describan la propiedad anterior.

Dato interesante
En matemáticas aún falta mucho por descubrir, por ejemplo, la conjetura de Collatz que dice: "Dado cualquier número natural, se aplica una de estas dos sencillas reglas: si es par, se divide entre dos; si es impar, se multiplica por 3 y se le suma 1. Al número restante se le aplican las mismas reglas, y así hasta terminar. Los últimos números terminarán irremediablemente en 4, 2 y el final en 1". ¿Por qué ocurre esto?

10. Con apoyo de sus compañeros y del maestro, comparen sus resultados, identifiquen los errores y corrijan.

11. Como hemos visto, la suma de tres números enteros consecutivos es múltiplo de 3. Comenten y respondan en su cuaderno: ¿será múltiplo de 4 la suma de cuatro números consecutivos?, y ¿múltiplo de 5 la suma de cinco números consecutivos? ¿Qué condición debe cumplir *n* para que la suma de *n* números consecutivos sea múltiplo de *n*?

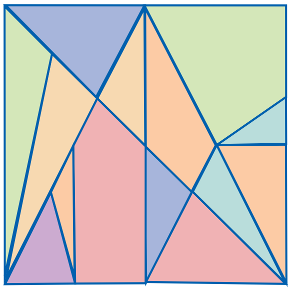
12. Observen el recurso audiovisual *Factor común de una expresión algebraica* para analizar otras expresiones algebraicas en que se aplican el mcm y el MCD.

13. Utilicen el recurso informático *Aplicaciones del mcm y del MCD* para resolver situaciones en las que se aplican el mcm y el MCD.

21. Figuras geométricas y equivalencia de expresiones de segundo grado 3

Sesión 1

Para empezar


Stomachion, rompecabezas geométrico.

El Stomachion es el rompecabezas geométrico más antiguo que se conoce; está integrado por 14 piezas que, juntas, forman un cuadrado. Fue diseñado por Arquímedes (*ca.* 287-212 a. n. e.), filósofo, físico y matemático que vivió en la antigua Grecia. El Stomachion también recibe el nombre de Loculus de Arquímedes, quien lo creó con la finalidad de investigar diversas formas de construir un cuadrado a partir de los diferentes reacomodos que se pueden dar a sus piezas. Recientemente se encontraron 536 formas diferentes de acomodar las piezas para armarlo. ¿Reconoces las figuras geométricas que lo forman? ¿Recuerdas cómo se expresa la fórmula para calcular el área de cada una? ¿Cambiará el área del cuadrado si se acomodan las piezas de diferente forma? ¿Cambiará el área de cada figura que forma parte del rompecabezas al colocarlas en diferente posición? ¿Cuál es el área total del cuadrado? Si representáramos con literales las medidas de las figuras que forman el rompecabezas, ¿cuántas expresiones algebraicas equivalentes podríamos obtener para representar el área del cuadrado?

En esta secuencia aplicarás los conocimientos adquiridos en secuencias anteriores para determinar si dos o más expresiones algebraicas cuadráticas son equivalentes.

Manos a la obra

Expresiones cuadráticas equivalentes

1. Trabajen en pareja. Escriban una expresión cuadrática equivalente a cada una de las anteriores, pero que esté factorizada, es decir, que esté expresada como el producto de dos factores. Luego, anoten cómo encontraron los dos factores de cada una de las expresiones.

Polinomio	Factorización	Cómo encontrar los factores que permiten obtener el polinomio
a) $x^2 + 2xy + y^2$		
b) $x^2 + ax + bx + ab$		

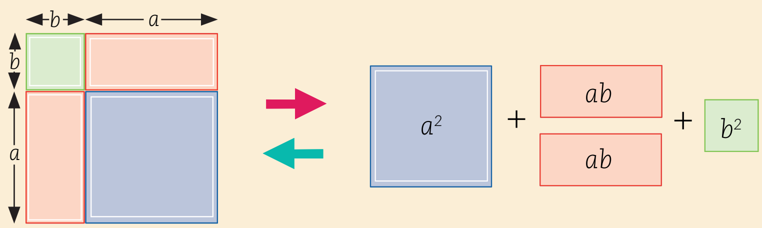
2. Completen la siguiente tabla según se indica.

Expresión 1	Signo = o ≠	Expresión 2	Justificación
a) $(x + y)^2$		$x^2 + y^2$	
b) $x^2 + ax + bx + ab$		$x^2 + (a + b)x + ab$	
c) $(x + a)(x + b)$		$x^2 + 2x(ab) + (a + b)$	
d) $x^2 + 2xy + y^2$		$x + xy + x + xy$	

3. Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Comenten qué hicieron para comprobar si sus expresiones eran o no equivalentes.

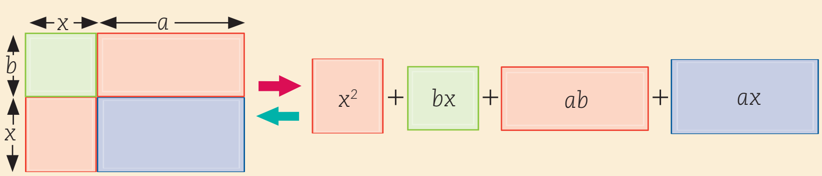
4. Enseguida, con apoyo del maestro, realicen una lectura comentada del siguiente recuadro.

En un trinomio de la forma
$a^2 + 2ab + b^2$
se observa que:
Los términos primero y tercero, a^2 y b^2 son cuadrados.
El segundo término corresponde al doble del producto de sus raíces.
Por lo tanto, para descomponer en dos factores el trinomio, se extrae la raíz cuadrada a los términos elevados al cuadrado y se obtienen los dos factores cuyo producto será el trinomio dado.



$$a^2 + 2ab + b^2$$
$$\sqrt{a^2} \qquad \sqrt{b^2}$$
$$(a+b)(a+b) = (a+b)^2$$

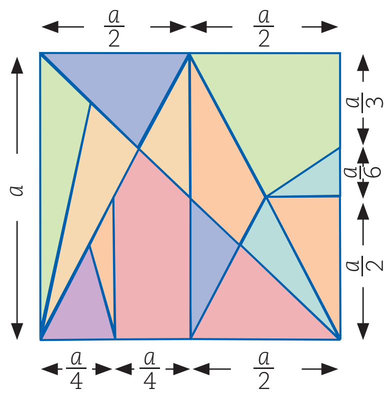
En un trinomio de la forma
$x^2 + (a + b)\,x + ab$
se observa que:
El trinomio sólo tiene un término elevado al cuadrado.
El tercer término es el producto de dos números diferentes.
El segundo término resulta de sumar los dos números diferentes y multiplicarlos por la raíz del primer término.



Para factorizarlo, se extrae la raíz cuadrada del término elevado al cuadrado y se buscan dos números que, al multiplicarse, den el término independiente del trinomio y que al sumarse se obtenga el coeficiente del término lineal.

Sesión 2

El rompecabezas de Arquímedes

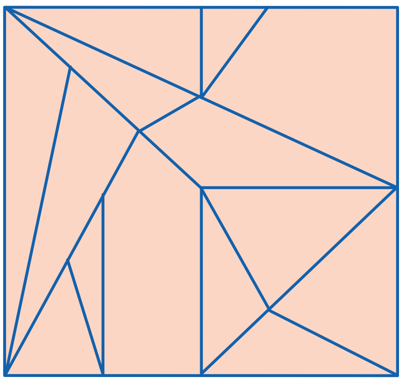


1. Trabajen en equipo. Con la información anotada en el rompecabezas que se muestra a la izquierda, y considerando que todas sus piezas forman un cuadrado, realicen lo que se pide en su cuaderno.

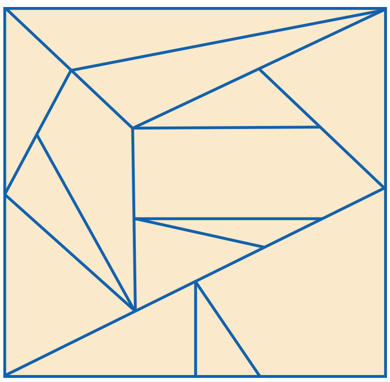
a) Escriban tres expresiones equivalentes que representen el área que ocupa todo el rompecabezas.

b) Respondan, ¿cómo comprobaron que son equivalentes las expresiones anteriores?

2. Recorten el rompecabezas de la página 279 y armen las dos figuras que se muestran enseguida.



Rompecabezas 1



Rompecabezas 2

3. Escriban debajo de cada rompecabezas la expresión algebraica que identifique la medida de los lados de sus figuras en función de la longitud del cuadrado que forman.

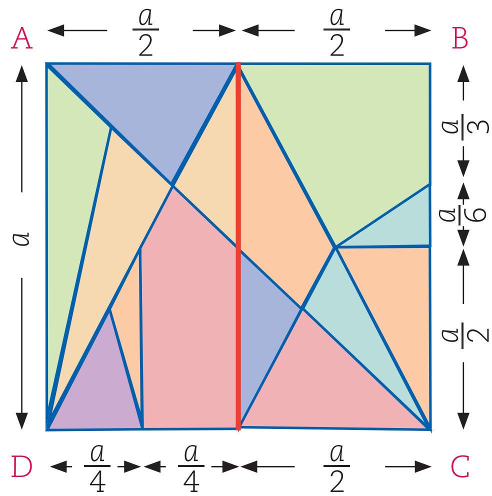
4. Anoten una expresión que represente el área de cada rompecabezas y, en su cuaderno, hagan lo que consideren necesario para verificar si las dos expresiones son equivalentes.

Área del rompecabezas 1	Área del rompecabezas 2

5. Comparen sus respuestas con las de sus compañeros de grupo. Si hay diferencias, analicen a qué se deben y con ayuda de su maestro lleguen a conclusiones.

6. Observen que la distribución de las piezas del rompecabezas, mostrado a la derecha, permite ver el cuadrado dividido perfectamente en dos rectángulos delimitados por el segmento vertical rojo.

a) Anoten una expresión algebraica que represente el área de cada rectángulo.



Rectángulo	Área
Izquierdo	
Derecho	

b) ¿Son iguales las áreas de los dos rectángulos? ____________________

Justifiquen su respuesta. ____________________

____

7. Ahora identifiquen con la letra *Y* la diagonal que se ha trazado en el cuadrado. Los triángulos ABC y ADC son congruentes, por tanto, las medidas de sus lados correspondientes son iguales. Escriban las expresiones que corresponden a los tres lados de cada triángulo y comprueben que esto es verdad, dando un valor cualquiera a la literal.

Triángulo ABC		Triángulo ADC	Comprobación
AB	=	CD	
BC	=	AD	
AC	=	AC	

8. Con algún color, tracen la otra diagonal del cuadrado e identifíquenla con la letra Z y escriban una expresión que represente su longitud. Puesto que las diagonales de un cuadrado tienen la misma longitud, igualen las expresiones que las representan y comprueben que son equivalentes las expresiones anotadas.

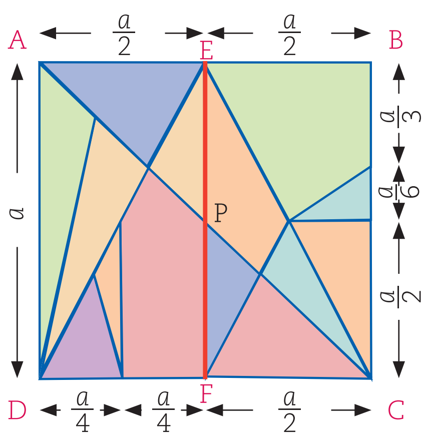
Diagonal Y		Diagonal Z	Comprobación
	=		
	=		

9. Comparen sus respuestas con las de sus compañeros de grupo. Si hay diferencias, analicen a qué se deben y, con ayuda de su maestro, lleguen a conclusiones.

Para terminar

La genialidad de Arquímedes

1. Trabaja individualmente. Las piezas del Stomachion o Loculus de Arquímedes tienen relaciones que pueden resultar sorprendentes e interesantes. Con base en la información del rompecabezas de la izquierda, y considerando que éste es un cuadrado, realiza lo que se pide.



a) El punto P divide la diagonal del cuadrado en dos segmentos iguales. ¿Qué expresión algebraica representa la longitud de los segmentos AP y PC? ______________________________

b) Los triángulos APE y FPC son congruentes porque sus lados correspondientes tienen la misma medida. Escribe las expresiones que representan la longitud de los segmentos correspondientes y realiza las transformaciones necesarias para comprobar que son equivalentes.

Triángulo APE		Triángulo FPC	Comprobación
AP	=	PC	
AE	=	FC	
EP	=	PF	

2. De acuerdo con la imagen del rompecabezas, responde en tu cuaderno.

a) ¿Cuál es la expresión algebraica que representa la longitud del segmento EC?

b) ¿Qué expresión representa la longitud del segmento ED?

c) ¿Consideras que estas dos longitudes son iguales? ¿Cómo demostrarías que tu respuesta es correcta?

d) Los triángulos ADE y CBE son congruentes por el criterio LLL. Escribe una expresión que represente el área de ADE. Y una que represente el área de CBE.

____

e) Iguala ambas expresiones y haz las operaciones necesarias para demostrar que las dos expresiones que anotaste son equivalentes.

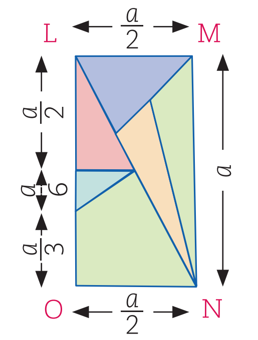
3. Con algunas piezas del Stomachion se formó el rectángulo que se muestra en la siguiente página. Con base en éste, responde lo siguiente en tu cuaderno.

a) Anota tres expresiones equivalentes que representen el área del rectángulo LMNO.

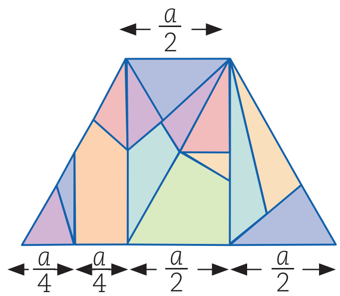
b) Calcula el área de los triángulos LMN y LON. ¿Tienen la misma área? Justifica tu respuesta.

4. Completa las frases siguientes:

Los triángulos LON y LMN son congruentes por el criterio ____________, ya que el segmento LN es congruente con __________ por ser ____________________; el segmento LM es congruente con el segmento ___________________ por ser ______________________ y el segmento LO es congruente con el segmento _____________ por ser ____.

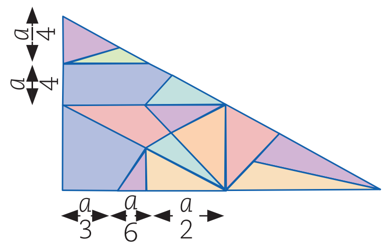


5. Determina la altura del trapecio isósceles de acuerdo con la información que se da en el Stomachion de la actividad 1, página 204, y escribe dos expresiones algebraicas equivalentes que representen su área. Explica de qué manera puedes comprobar que las expresiones que anotaste representan lo mismo.



Expresión 1	=	Expresión 2	Comprobación

6. El triángulo rectángulo que aparece enseguida está formado por las 14 piezas del Stomachion. Calcula los datos que hacen falta y anótalos en la imagen.



7. Escribe dos expresiones algebraicas que representen su área y realiza las transformaciones necesarias para comprobar que son equivalentes.

Expresión 1	=	Expresión 2	Comprobación

Dato interesante
El cubo tridimensional más famoso es el de Rubik, cuyas caras tienen un color diferente cada una. Su mecanismo permite girar cada cara de manera independiente y así combinar los seis colores. El reto consiste en regresar las piezas hasta que todas las caras queden de un solo color.

8. Revisen sus respuestas con sus compañeros de grupo. Analicen las expresiones anotadas y verifiquen que sean equivalentes. Corrijan si es necesario.

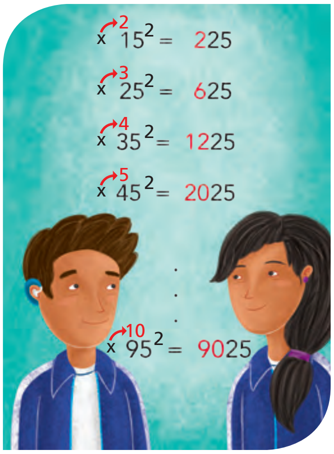
9. Observen el recurso audiovisual *De la geometría al álgebra en los antiguos griegos* para que conozcan cómo usaron en la antigüedad las literales para representar medidas generales.

10. Utilicen el recurso informático *Expresiones algebraicas cuadráticas* para practicar el uso de expresiones equivalentes y su comprobación.

22. Ecuaciones cuadráticas 3

Sesión 1

Para empezar



¿Conoces el "truco" para encontrar rápidamente el resultado de multiplicar por sí mismo un número de dos cifras terminado en 5? Por ejemplo, 15 x 15, 25 x 25, 35 x 35. Consiste en multiplicar la cifra de las decenas por su sucesor y al resultado ponerle un 25 a la derecha. En el primer caso, sería 1 x 2 = 2, seguido de 25, con lo cual se obtiene 225. Prueba con las otras multiplicaciones y verás que siempre resulta. Lo importante es encontrar la explicación de por qué funciona el "truco" y cómo el lenguaje algebraico resulta útil. Propón una manera de explicarlo. Aquí verás que no hay truco, sino la aplicación de lo que sabes de álgebra hasta ahora. En esta secuencia analizarás la relación entre este "truco" y el álgebra, aprenderás a resolver ecuaciones cuadráticas por medio de la fórmula general y continuarás con el uso del lenguaje algebraico para resolver problemas.

Manos a la obra

El procedimiento de completar el cuadrado

1. Trabajen en equipo. Analicen el "truco" que se comentó en la sección "Para empezar". Observen que $(15)(15) = 15^2 = (10 + 5)^2$. Esta última expresión puede escribirse como el producto de dos binomios iguales, y este producto es equivalente a un trinomio.

a) ¿Cómo se obtiene el primer término de ese trinomio? _______________

b) ¿El segundo término? _______________ Y ¿el tercer término? _______________

Este trinomio se conoce como *trinomio cuadrado perfecto*. De acuerdo con lo anterior:

$$\underbrace{(10 + 5)^2}_{\text{Binomio al cuadrado}} = \overbrace{10^2 + 2(10)(5) + 5^2}^{\text{Trinomio cuadrado perfecto}}$$

Si en el segundo miembro se extrae el 10 como factor común de los dos primeros términos del trinomio, se obtiene:

$$\overbrace{10\ [10 + (2)(5)]}^{\text{Factorización}} + 5^2 = 10(10 + 10) + 5^2 =$$

$$(10)(20) + 5^2 = \underbrace{(1)(2)(100)}_{\text{Producto de las cifras de las decenas de los dos factores por cien}} + 25$$

Se observa que para obtener el resultado se multiplican las cifras de las decenas de 10 y 20, y al producto se le agregan los dos ceros de las unidades de esos números, que es lo mismo que multiplicar por 100 y, por último, a este producto se le suma el cuadrado de 5, que es 25. Por tanto, se tiene:

$$(1)(2)(100) + 25 = 200 + 25 = 225$$

De manera general, tenemos que el binomio al cuadrado es $(10a + 5)^2$, donde a es cualquier número positivo del 1 al 9. Al desarrollarlo se tiene:

$$\overbrace{(10a + 5)^2}^{\text{Binomio al cuadrado}} = \overbrace{100a^2 + 2(10a)5 + 5^2}^{\text{Trinomio cuadrado perfecto}} = \underbrace{100a^2 + 100a}_{\text{Términos con factor común}} + 5^2 = \overbrace{100\underbrace{a\,(a + 1)}_{\text{Números consecutivos}}}^{\text{Factorización}} + 5^2$$

2. Prueben este procedimiento para calcular el producto de las siguientes operaciones:

a) 25 x 25 =

b) 95 x 95 =

3. Analicen el siguiente enunciado: *El triple del cuadrado de un número menos cuatro veces el mismo número es igual a 15*.

a) En la tabla, expresen algebraicamente lo que se pide a partir del problema.

Un número cualquiera	El triple del cuadrado del número	El triple del cuadrado del número menos cuatro veces el mismo número	Ecuación: el triple del cuadrado de un número menos cuatro veces el mismo número es igual a 15	Ecuación en su forma canónica (igualada a cero)

b) Analicen la ecuación que formularon y apliquen el método de factorización para resolverla. Comenten cuáles son algunas de las dificultades que tienen al aplicar ese método y expliquen por qué. ______________________________

____

c) Encuentren al menos un número que cumpla con lo que plantea el enunciado y anótenlo aquí. ______________________________

4. Lean y analicen con apoyo de su maestro el procedimiento de la siguiente página para completar y obtener un trinomio cuadrado perfecto.

Una ecuación cuadrática siempre tiene dos raíces que pueden ser valores distintos o iguales. Por ejemplo, la ecuación $x^2 - 5x + 6 = 0$ tiene *dos raíces diferentes*: $x_1 = 2$ y $x_2 = 3$.

En cambio, la ecuación cuadrática $x^2 + 2x + 1 = 0$ tiene *dos raíces iguales*, lo cual puede verse si se expresa como producto de dos factores:

$$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)(x + 1) = 0.$$

Entonces, si se habla de los valores de las soluciones de esta ecuación, podría pensarse en $x = -1$ (una solución); pero si se habla de raíces, se tienen $x_1 = -1$ y $x_2 = -1$, y en este caso los valores de las raíces son iguales, es decir, la ecuación tiene *dos raíces iguales* o *raíz doble*.

Cuando se tienen ecuaciones cuadráticas de la forma: $x^2 + bx = 0$, $x^2 + bx + c = 0$, $ax^2 + bx = 0$ o $ax^2 + bx + c = 0$ es posible resolverlas utilizando el método para completar el trinomio cuadrado perfecto: $x^2 + 2xy + y^2$ en el primer miembro de la ecuación y, así, luego factorizar y resolver.

Si la ecuación es $x^2 + bx + c = 0$, entonces se puede expresar como: $x^2 + bx = -c$.

En el primer miembro de la ecuación anterior hay dos términos que corresponderán a los dos primeros términos del trinomio cuadrado perfecto: x^2 es el primer término al cuadrado y falta encontrar y^2. Así, $2y = b$, y al despejar y, se obtiene $y = \frac{b}{2}$ y, por lo tanto, $y^2 = \frac{b^2}{4}$. De este modo se obtiene el trinomio $x^2 + bx + \frac{b^2}{4}$, que es equivalente al binomio al cuadrado $\left(x + \frac{b}{2}\right)^2$. Al sustituir en la ecuación original, se agrega $\frac{b^2}{4}$ en ambos miembros para mantener la igualdad $x^2 + bx + \frac{b^2}{4} = \frac{b^2}{4} - c$.

Al factorizar el trinomio, queda: $\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{4} - c$, y al obtener la raíz cuadrada para encontrar las soluciones, se tiene: $\sqrt{\left(x + \frac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$ de donde $x + \frac{b}{2} = \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$

Al despejar: $x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$, se tienen dos raíces:

$$x_1 = -\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - c} \qquad x_2 = -\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$$

Si la ecuación cuadrática es de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, con el valor de a distinto de 0 y 1, esencialmente el procedimiento es el mismo que el anterior, sólo que primero se deben dividir los términos de la ecuación cuadrática entre el coeficiente a de x^2.

5. Con sus compañeros, y con apoyo de su maestro, usen el procedimiento para completar en su cuaderno el trinomio cuadrado perfecto que corresponde al enunciado de la actividad 3 y poder usar el método de factorización para encontrar sus soluciones.

6. Completen el trinomio cuadrado perfecto para resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas.

a) $2x^2 + 5x = -2$ **b)** $4x^2 - 11x - 3 = 0$

Uso de la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas

Sesión 2

1. Trabajen en equipo. Consideren el enunciado: *El triple del cuadrado de un número entero menos cuatro veces el mismo número es igual a 15*. Ahora, completen la siguiente tabla.

Ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$	**Coeficientes**		
	a	b	c
$3x^2 - 4x - 15 = 0$			

2. Lean la siguiente información y utilicen la fórmula para encontrar las soluciones de la ecuación que representan el enunciado.

Una ecuación cuadrática de cualquier tipo se puede resolver usando la *fórmula general*: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Para usarla, se requiere que la ecuación cuadrática esté expresada en su forma canónica: $ax^2 + bx + c = 0$

Y así identificar fácilmente los valores de los coeficientes a, b y c.
En la fórmula general se sustituyen a, b y c por los valores respectivos para realizar las operaciones indicadas y obtener las soluciones de acuerdo con los valores de las raíces, que son:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Posteriormente, se comprueba que son soluciones de la ecuación original.

Utilicen la fórmula general para encontrar las soluciones de la ecuación $3x^2 - 4x - 15 = 0$.

Dato interesante
La obra *De numeris datis* es el primer texto escrito, dedicado al álgebra, publicado en Europa Occidental en el siglo XIII. Su autoría se atribuye al matemático Jordanus Nemorarius.

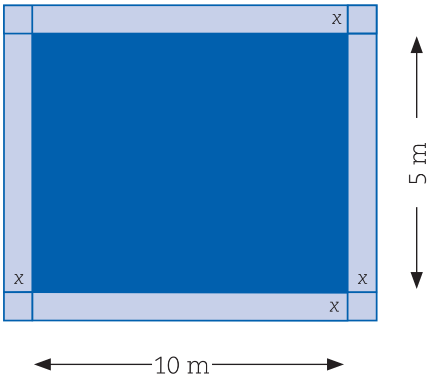
Fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas	
Primera solución	**Segunda solución**
$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

a) ¿Qué representan las soluciones en el contexto del problema? ____________________

____

3. Con sus compañeros, y con el apoyo de su maestro, comparen lo que escribieron en la tabla y traten de justificar cada uno de los pasos que hicieron. En su cuaderno, verifiquen que la solución con número negativo también satisface la ecuación.

4. Analicen el proceso para resolver el siguiente problema mediante la fórmula general. *La parte interna de una alberca rectangular mide 10 m de largo por 5 m de ancho. La alberca está rodeada por un andador de forma rectangular cuya área es de 16 m², como se muestra en la imagen de abajo*. ¿Cuánto mide el ancho del andador? ____________________



La superficie más oscura representa el agua de la alberca y la más clara, el andador.

a) Formulen una ecuación que permita resolver el problema y escríbanla en seguida. ____________________

b) Con apoyo del maestro, comparen las ecuaciones que formularon y vean si es la misma ecuación o si son equivalentes. Es importante que expliquen qué pensaron para formularla.

c) En la ecuación que formularon, identifiquen los valores de a, b y c, y anótenlos.

a = ____________ b = ____________ c = ____________

d) Sustituyan en la fórmula los valores correspondientes y simplifiquen la expresión obtenida.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} =$$

e) Anoten las soluciones de la ecuación con base en los resultados que se obtienen en cada raíz cuadrada. x_1 = ____________ x_2 = ____________

f) Anoten la solución del problema. ____________________________________

5. Con apoyo del maestro, comparen sus resultados, identifiquen los errores y corrijan. Verifiquen que la solución del problema de la actividad 4 es correcta y comenten por qué una de las raíces no puede ser solución del problema.

6. En su cuaderno, usen la fórmula general para resolver las siguientes ecuaciones. Comprueben sus respuestas.

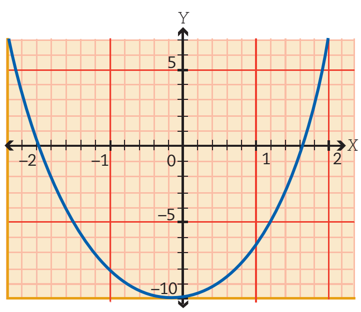
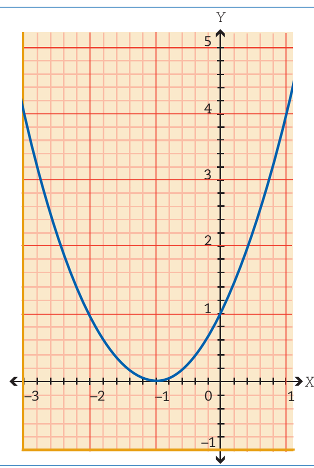
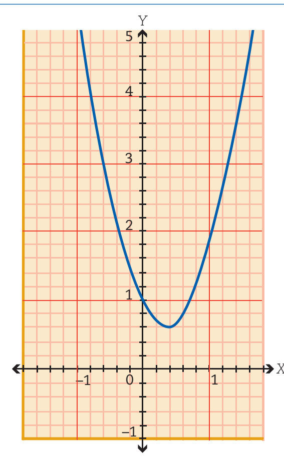
a) $4x^2 + 5x - 6 = 0$ **b)** $3x^2 + x - 10 = 0$ **c)** $3x^2 - 10x = 25$ **d)** $7x^2 - 16x + 9 = 0$

7. Observen el recurso audiovisual *Fórmula general* para analizar la manera de resolver ecuaciones cuadráticas por medio de esta fórmula y también para observar cómo se usa el método para completar un trinomio cuadrado perfecto.

Discriminante de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$

Sesión 3

1. Trabajen en equipo. Consideren la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ y completen la tabla. Después contesten las preguntas.

	Ecuación 1 $3x^2 + x - 10 = 0$	**Ecuación 2** $x^2 + 2x + 1 = 0$	**Ecuación 3** $3x^2 - 2x + 1 = 0$
Valor de $b^2 - 4ac$			
Representación gráfica			
¿En cuántos puntos corta la parábola al eje X? ¿Cuál es el valor de x?			

a) En su cuaderno, describan la relación que hay entre el valor numérico de $b^2 - 4ac$ y el tipo de valores que son las soluciones que tiene la ecuación.

b) Con base en lo que concluyeron en el inciso anterior, anoten sobre la línea el tipo de valores de las soluciones que tiene cada ecuación, sin resolverlas.

- $4x^2 - 3x + 1 = 0$ ____________
- $2x^2 - 3x - 1 = 0$ ____________
- $x^2 + 6x + 9 = 0$ ____________

2. Revisen y comparen sus respuestas con las de sus compañeros de grupo.

3. Lean y analicen junto con su maestro el siguiente texto.

La expresión $b^2 - 4ac$ se llama *discriminante* de la ecuación de segundo grado y permite determinar la cantidad de soluciones de una ecuación antes de resolverla. Como podrás observar, el discriminante, el cual se abreviará como D, es parte de la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado, que se expresa así: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Si el discriminante es un número positivo, $D > 0$, la ecuación tiene dos raíces distintas que son números racionales o irracionales.

Si el discriminante es cero, $D = 0$, la raíz cuadrada valdrá cero y la ecuación tiene dos raíces iguales, que son un número racional o irracional.

Si el discriminante es un número negativo, $D < 0$, la ecuación no tiene raíces en los números racionales o irracionales.

4. En su cuaderno, determinen si existen las raíces de las siguientes ecuaciones en los números racionales o irracionales.

a) $2x^2 - 3x = -1$ **b)** $2x^2 + 5 = -3x$ **c)** $9x^2 + 6x + 1 = 0$ **d)** $4x^2 - 12x + 9 = 0$

e) En una de las ecuaciones anteriores, el discriminante es igual a cero ($D = 0$). ¿Cuál es esa ecuación? ____________________

f) Verifiquen que en la ecuación que escribieron la solución es $\frac{-b}{2a}$ y expliquen por qué sucede esto. ____________________

g) Inventen tres ecuaciones de segundo grado que cumplan con las condiciones dadas en la tabla y complétenla.

Ecuación	Discriminante	Soluciones
	$D > 0$	
	$D = 0$	
	$D < 0$	

5. Unan con una línea la ecuación cuadrática de la columna A, con el valor del discriminante que aparece en la columna B.

A	B
$3x^2 + 14x - 5 = 0$	$D = 0$
$4x^2 - 28x = -49$	$D < 0$
$2x^2 + 4x + 3 = 0$	$D > 0$

6. Con sus compañeros, y con apoyo del maestro, comparen sus respuestas. En particular, analicen las del inciso g) de la actividad 4 y comenten cómo hicieron para formular las ecuaciones que se piden. Recuerden que la factorización permite formular ecuaciones.

¿Cuál procedimiento conviene?

Sesión 4

1. Trabajen en equipo. En muchos casos, antes de resolver una ecuación es necesario simplificarla y ordenarla para obtener la forma canónica: $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$. En su cuaderno, expresen cada una de las siguientes ecuaciones en su forma general.

a) $(2x + 3)^2 = 2(6x + 4)$ **b)** $8(2 - x)^2 = 2(8 - x)^2$ **c)** $3x(x - 2) - (x - 6) = 4(x - 3) + 10$

2. Una vez que las ecuaciones anteriores están en su forma canónica, analicen el siguiente esquema y úsenlo para encontrar las raíces de cada ecuación. Si la ecuación está incompleta, no es necesario recurrir al esquema.

$ax^2 + bx + c = 0$

¿Se puede descomponer en factores fácilmente?

↓	↓
Sí	*No*
Se descompone en factores	*Se identifican los valores de a, b y c*
↓	↓
Se iguala a cero cada factor	*Se calcula* $D = b^2 - 4ac$
↓	↓
Se despeja x en cada factor y se obtienen las raíces	*Se usa la fórmula general y se obtienen las raíces*
↓	↓

¿La ecuación se satisface con las raíces obtenidas?

↓	↓
Sí	*No*
Se escribe la solución	*Se revisa el proceso para identificar errores*

3. Las raíces de las ecuaciones de segundo grado tienen una propiedad interesante que puede servir para saber si son correctas. Se expresa de la siguiente manera:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \qquad\qquad x_1(x_2) = \frac{c}{a}$$

a) Usen la propiedad anterior para verificar que las raíces obtenidas en la actividad 1 son correctas.

b) Consideren la ecuación $6x^2 - 19x + 10 = 0$ y marquen con una ✓ sus soluciones correctas.

☐ $x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = \frac{2}{5}$ ☐ $x_1 = -\frac{2}{3}, x_2 = \frac{5}{2}$ ☐ $x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = \frac{5}{2}$ ☐ $x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = -\frac{5}{2}$

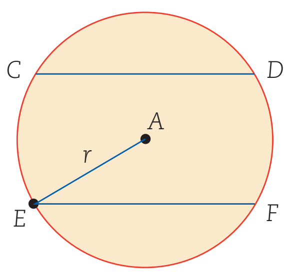
c) Consideren las soluciones $x_1 = \frac{1}{6}, x_2 = \frac{4}{3}$ y marquen con una ✓ la ecuación a la que corresponde.

☐ $4x^2 - 27x + 18 = 0$ ☐ $18x^2 - 27x + 4 = 0$ ☐ $27x^2 - 18x + 4 = 0$

d) Relacionen cada ecuación de la columna A con las soluciones de la columna B que le corresponden.

A	B
$2x^2 - 3x - 5 = 0$	$x_1 = \frac{5}{2}, x_2 = -4$
$2x^2 + 3x - 20 = 0$	$x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = -\frac{3}{2}$
$4x^2 + 8x + 3 = 0$	$x_1 = \frac{5}{2}, x_2 = -1$

4. Consideren la figura que se muestra a la izquierda, analicen la información y den respuesta a los incisos.



- Los segmentos CD y EF son cuerdas que están a la misma distancia del centro de la circunferencia.
- La distancia entre las dos cuerdas es de 12 cm.
- Cada cuerda mide 6 cm más que el radio.

a) ¿Cómo se expresa algebraicamente la medida de cada cuerda? ____________

b) Agreguen en la figura las líneas que faltan para formar un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide $2r$.

c) Escriban la ecuación que permite conocer el valor de r. ____________

d) Simplifiquen la ecuación y usen el procedimiento que consideren adecuado para encontrar el conjunto solución.

e) ¿Cuánto mide el radio? ____________

f) ¿Cuánto mide cada cuerda? ____________

5. Con sus compañeros, y con apoyo del maestro, comparen sus resultados, identifiquen los errores y corrijan lo que sea necesario. En particular, comenten en qué tipo de ecuaciones conviene usar la factorización y cuándo hay que usar la fórmula cuadrática.

6. Observen el recurso audiovisual *Discriminante de la fórmula general* para distinguir el número de raíces que tiene una ecuación cuadrática en los números racionales o irracionales, considerando el valor del discriminante: $b^2 - 4ac$.

Tipos de problemas y tipos de ecuaciones

Sesión 5

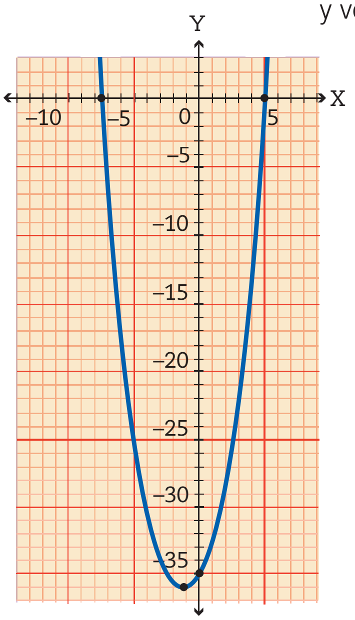
1. Trabajen en equipo. A lo largo de la secundaria han aprendido a usar ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones y ecuaciones cuadráticas. Analicen cada uno de los siguientes problemas y usen sus conocimientos para resolverlos en su cuaderno.
   a) Al sumar dos números se obtiene 184. Al dividir el número mayor entre el menor, el cociente es 2 y el residuo 7. ¿Cuáles son los números? ______
   b) En un museo de la Ciudad de México, el costo regular de la entrada es de \$80; los estudiantes con credencial pagan la mitad. Un grupo de 20 personas pagó en total \$1 080, ¿cuántos eran estudiantes? ______
   c) Un terreno rectangular mide el doble de largo que de ancho. Al aumentar 6 m de ancho y 40 m de largo, el área del terreno se duplicó. Calculen las medidas que se piden.

Medidas originales del terreno			Medidas aumentadas del terreno		
Ancho	Largo	Área	Ancho	Largo	Área

2. Con sus compañeros, y con ayuda del maestro, comparen sus respuestas, identifiquen los errores y corrijan. En particular, comenten qué tipo de ecuaciones utilizaron, si usaron diferentes ecuaciones para el mismo problema, o si no usaron ninguna.

3. Consideren la ecuación $x^2 + (x + 1)^2 + (x + 2)^2 = 110$. Pongan una ✓ a los problemas que pueden resolverse con esta ecuación.
   a) La suma de los cuadrados de tres números consecutivos es igual a 110. ¿Cuáles son los números? ☐
   b) El producto de los cuadrados de tres números consecutivos es igual a 110. ¿Cuáles son los números? ☐
   c) Las tres cifras que forman un número son números consecutivos. La suma de los cuadrados de dichas cifras es igual a 110. ¿Cuáles son los números? ☐
   d) La suma de los cuadrados de tres números pares consecutivos es igual a 110. ¿Cuáles son los números? ☐

4. Simplifiquen la ecuación y resuélvanla en su cuaderno con el procedimiento que les parezca adecuado. Anoten la solución junto a los problemas que marcaron con una ✓ y verifiquen que cumple con las condiciones del enunciado.



5. Con sus compañeros, y con apoyo del maestro, comparen lo que hicieron en la actividad 3. Si hay diferencias, averigüen a qué se deben y corrijan. Expliquen por qué sí o por qué no, la ecuación permite resolver cada problema. ¿Cuáles son las soluciones del problema de la actividad 3, inciso a)? ¿Cuál es la solución del problema de la actividad 3, inciso c)?

6. Analicen la siguiente gráfica y contesten.

a) ¿Cuáles son las raíces de la ecuación asociada a la gráfica?

x_1 = ______________________

x_2 = ______________________

b) Escriban la ecuación en forma factorizada. ______________

c) Escriban la ecuación en forma general. ______________

Sesión 6

Para terminar

¿Ecuación o función?

1. Trabajen en equipo. Analicen los siguientes problemas y hagan lo que se indica.

Problema 1	Problema 2
Se dispone de 16 m de tela de alambre para hacer un gallinero de forma rectangular. ¿Cuánto debe medir cada lado para obtener la mayor área posible?	Un gallinero rectangular mide 16 m de perímetro y 15 m^2 de área. ¿Cuáles son las medidas de sus lados?

a) Si el perímetro del gallinero mide 16 m, ¿cuánto suman el largo y el ancho?

Problema 1 = ______________ Problema 2 = ______________

b) Si la suma del largo y el ancho es __________ , y el largo está en función del ancho representado por *a*, ¿cómo se expresa el largo en función del ancho? ______

c) En el problema 1, supongan que el ancho mide 1 m, ¿cuánto mediría el largo? __________ ¿Cuál sería el área del gallinero en este caso? __________

d) Completen los procedimientos para resolver los problemas 1 y 2.

Problema 1

a	$8 - a$	Área ($8a - a^2$)
1	7	

Solución del problema:

Problema 2

Ancho	Largo	Área

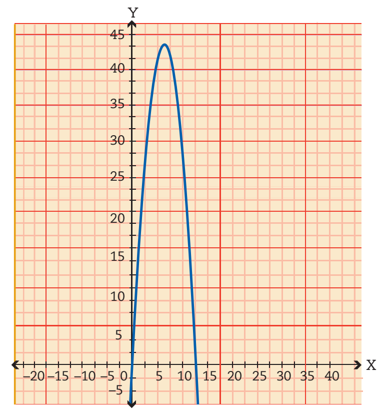
Valor numérico del área:

Ecuación:

Raíces de la ecuación:

Solución del problema:

Problema 1



2. Analicen la representación gráfica de la función $y = a(8 - a)$ que corresponde al problema 1 y, con base en ella, contesten las preguntas.

a) ¿Cuál es el punto máximo que alcanza la gráfica? ________

b) Verifiquen que el punto máximo de la parábola responde a la pregunta que se plantea en el problema 1.

c) Ubiquen los puntos que representan las soluciones del problema 2 y anótenlos en el recuadro correspondiente.

3. Consideren un problema 3 y un problema 4, similares a los problemas 1 y 2 de la actividad 1. En el problema 3, en vez de 16 m de tela de alambre, consideren 20 m. En el problema 4, en vez de 15 m^2 de área, consideren 24 m^2.

Resuelvan en su cuaderno, realicen la gráfica correspondiente y respondan las preguntas.

Problema 3: ¿cuánto debe medir cada lado para obtener el área máxima?

Ancho: ______________________________ Largo: ______________________________

Problema 4: ¿cuáles deben ser las medidas para que el área sea 24 m^2?

Ancho: ______________________________ Largo: ______________________________

4. Escriban en su cuaderno las diferencias entre una función y una ecuación.

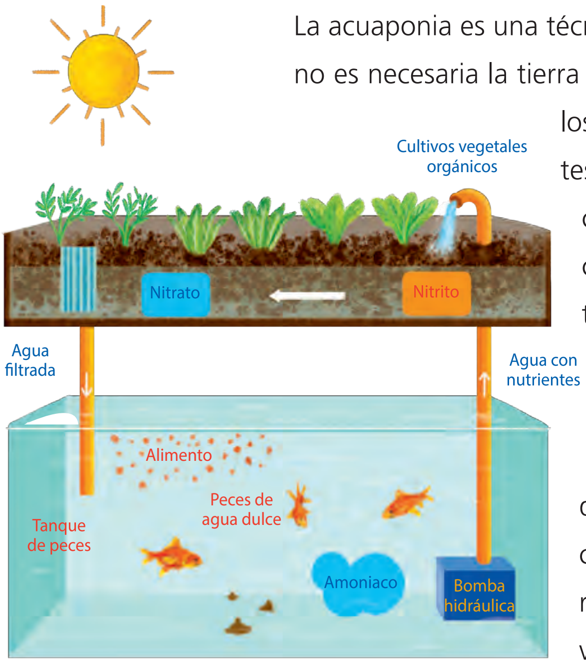
5. Con sus compañeros y con apoyo del maestro, comparen sus respuestas, identifiquen los errores y corrijan. Comenten sobre las diferencias entre una función y una ecuación y completen lo anotado en su cuaderno.

6. Utilicen el recurso informático *Fórmula general* para resolver ecuaciones cuadráticas.

23. Funciones 3

Sesión 1

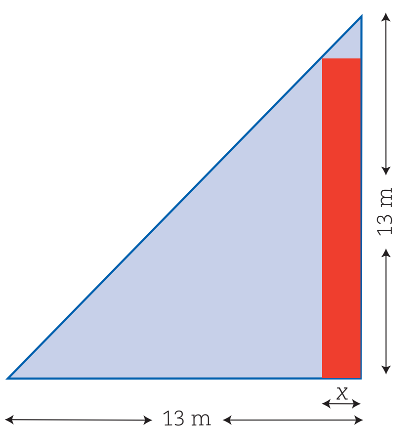
Para empezar



La acuaponia es una técnica de producción sustentable de peces y hortalizas en la que no es necesaria la tierra para el cultivo. Se caracteriza porque las plantas se nutren de los desechos de los peces y, una vez que absorben esos nutrientes, el agua regresa limpia al estanque donde los peces viven y crecen. El principio fundamental de este sistema se basa en el ciclo del nitrógeno y en la convivencia de peces, plantas y bacterias. Los peces, con sus desechos, generan amoniaco, compuesto tóxico que las bacterias transforman en nitratos. Las plantas los consumen y actúan como un filtro biológico que limpia el agua para que regrese a los peces. ¿Cómo creen que afecta lo que comen los peces a su desarrollo?, ¿afectará al crecimiento de las plantas que se siembran? En esta secuencia resolverás problemas que implican el análisis de la relación de variación cuadrática para modelar fenómenos vinculados a la acuaponia. Además, te ayudará a conocer las propiedades y características de las gráficas asociadas a una función cuadrática y trabajarás con su representación algebraica.

Manos a la obra

Cálculo del área para un proyecto de acuaponia



1. Trabajen en pareja. En una telesecundaria hay un terreno con forma de triángulo rectángulo isósceles donde se quiere instalar un proyecto de acuaponia. Se dedicará una parte rectangular a la construcción de un estanque para los peces y el resto se dejará para las plantas que se cultiven. Dos lados del rectángulo deben estar sobre los catetos del triángulo, y el otro vértice sobre la hipotenusa, como se muestra en la figura.

a) Si varía el tamaño de la base x del rectángulo, cambia el tamaño de la superficie que se quiere dedicar al estanque. Completen la tabla de la siguiente página para mostrar los diferentes valores de x y el área correspondiente. Pueden utilizar calculadora.

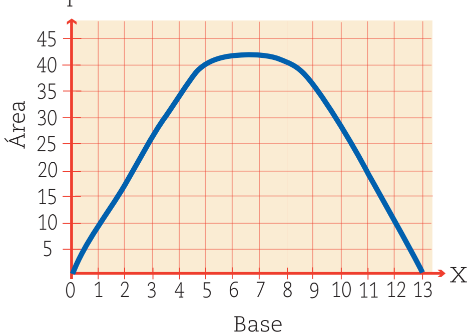
Base $x(m)$	1	2	3	4	4.75						$\frac{25}{2}$	
Área (m^2)				36								

b) ¿Cuántos rectángulos diferentes, cuya área sea de 42 m², se pueden construir? ____________

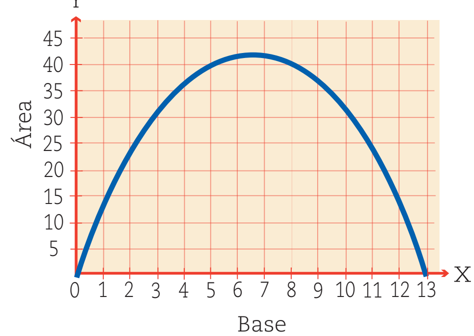
c) ¿Cuál es la medida de la base de estos rectángulos? ____________________________

d) Si se quiere construir un estanque cuya área sea de 30 m², ¿de cuántas maneras diferentes se puede hacer? ________________ ¿Cuál de las siguientes gráficas modela mejor la función entre la base del rectángulo y su área? Márcala con una ✓.

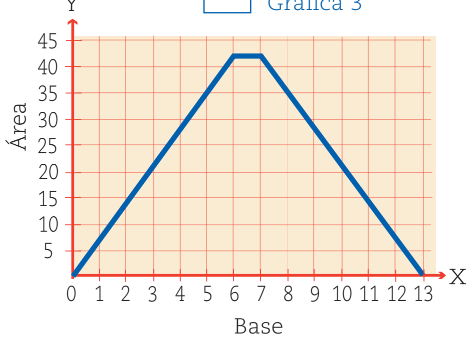
☐ Gráfica 1



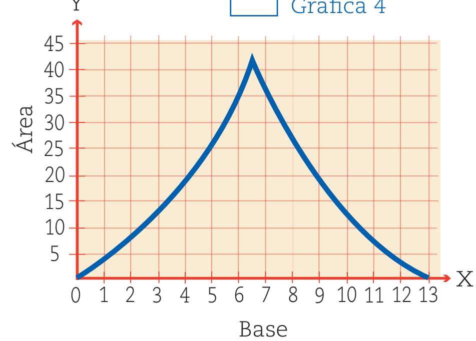
☐ Gráfica 2



☐ Gráfica 3



☐ Gráfica 4



e) Comenten con otra pareja por qué razones eligieron esa gráfica y por qué descartaron las otras tres.

f) Si x corresponde a la base, representen la altura del rectángulo algebraicamente en función de x.

____

g) Si designan con la literal y el área de la superficie dedicada al estanque y con la literal x la medida de la base, escriban la representación algebraica que modela la función. ____________

2. Cuatro alumnos escribieron la representación algebraica de la función, ¿quién tiene la razón? Subrayen cuál o cuáles expresiones son correctas.

a) Alicia: $y = x\,(13 - x)$

b) Bernardo: $y = x^2 - 13$

c) Carlos: $y = -x^2 + 13x$

d) Diana: $y = -x^2 + 13$

3. Si se quiere que el estanque ocupe la máxima superficie posible, ¿cuáles tienen que ser las dimensiones del rectángulo? ______________ ¿Hay una sola manera de hacerlo? ______________ Argumenten su respuesta. ______________

____

4. En grupo y con ayuda de su maestro, argumenten cuál de las gráficas representa la función que describe el problema y comprueben con la representación algebraica y tabular que esto es correcto.

5. Observen el recurso audiovisual *Maximización de áreas en un proyecto de acuaponia* para conocer más acerca del aprovechamiento del área destinada a un proyecto de este tipo.

Sesión 2

Optimización del peso de los peces

1. Trabajen en pareja. Un grupo de telesecundaria decide participar en un proyecto de acuaponia. En un proyecto así es importante la alimentación de los peces para su crecimiento. Quien asesora al grupo recomendó darles una taza de alimento diario y un suplemento alimenticio que ayudaría al crecimiento tanto de los peces como de las plantas, pero advirtió que exceder ciertas cantidades podría ser dañino para los peces.

Decidieron experimentar varias opciones para probar el suplemento. Cuando no alimentaron a los peces con el suplemento, notaron que éstos aumentaron su peso alrededor de 6 g por semana. Cuando agregaron 1 cucharada del suplemento, los peces también ganaban peso. En cambio, cuando se vertieron 6 cucharadas de suplemento, los peces perdían peso.

Descubrieron que la ganancia de peso promedio de los peces variaba en función de las cucharadas de suplemento alimenticio, y que esta ganancia se podría modelar con la siguiente función cuadrática:

$$y = -3\,(x - 2.5)^2 + 24$$

Donde x es la cantidad de cucharadas de suplemento que se agregaban al alimento.

a) Completen la siguiente tabla de acuerdo con la función dada. Usen calculadora. Después realicen lo que se les indica.

x	Cucharadas de suplemento	0	1	2	3	4	5	6
y	Peso que ganaron los peces en una semana (en gramos)							

b) Comparen con otra pareja los valores que obtuvieron en la tabla.

c) ¿Qué conviene más para el crecimiento de los peces?, ¿verter 2 o 4 cucharadas de suplemento en el estanque? ____________________

d) En promedio, ¿cuánto peso perdieron los peces al verter 6 cucharadas de suplemento? ____________________

e) ¿Con cuántas cucharadas se tiene el mismo resultado (aumento de peso) que si no se vertiera suplemento alimenticio? ____________________

f) ¿Cuántas cucharadas de suplemento alimenticio se tienen que agregar para obtener el mismo resultado que con tres? ____________________

g) ¿Cuántos gramos aumentarían los peces si se agregara $\frac{1}{2}$ cucharada? __________

h) Comenten cuántas cucharadas pondrían ustedes para obtener el máximo aumento de peso y por qué.

2. Grafiquen la función de la actividad anterior que modela la ganancia de peso de los peces cuando varía la cantidad de suplemento alimenticio. Luego, contesten las preguntas de los incisos.

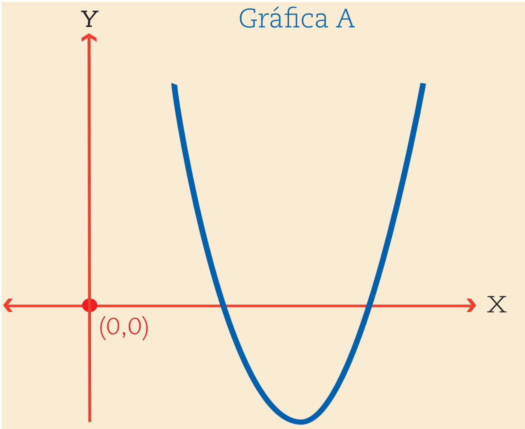
Dato interesante
Las técnicas de cultivo basadas en la interacción entre plantas y peces han sido utilizadas desde hace mucho tiempo. Los pueblos del valle de México aplicaban estos principios para cultivar hortalizas y maíz en las chinampas aprovechando los nutrientes de los peces que habitaban los canales. Esta técnica se sigue empleando en Xochimilco.

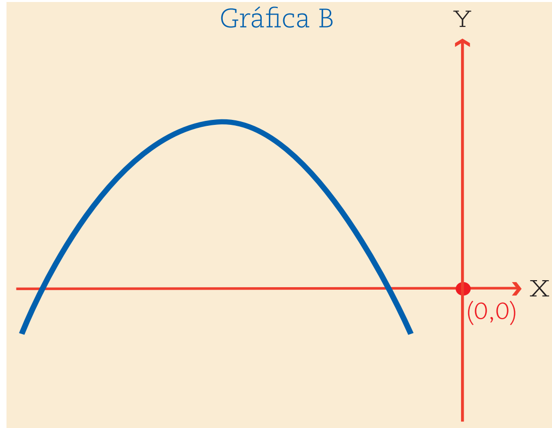
a) ¿Con qué cantidad de suplemento no hay ganancia ni pérdida de peso? ____________________
¿Cómo obtuvieron esta cantidad? ____________________

b) ¿Cuántos gramos forman la ganancia máxima que se puede obtener a partir de este alimento y este suplemento alimenticio? ____________________ g

c) ¿Qué punto representa la mayor ganancia de peso en función del número de cucharadas? P (________, ________). A este punto se le llama *vértice de la parábola*.

3. En la siguiente página, hagan lo que se pide para cada una de las dos parábolas.





a) Encuentren el vértice.

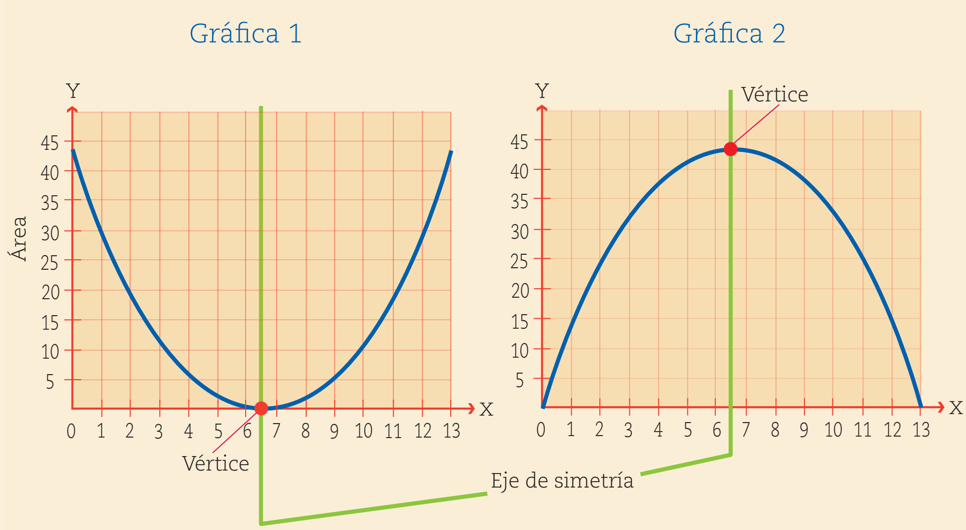
b) Tracen una recta paralela al eje Y que pase por el vértice.

c) ¿Qué características tiene esta recta con respecto a la parábola? ____________

d) Copien en una hoja aparte cada parábola y dóblenla por la recta que trazaron, ¿qué observan? ____

4. Comenten con el resto de sus compañeros y con el maestro las características de las parábolas que tienen un eje de simetría.

Cuando se trabaja con funciones, lo importante es analizar la relación que hay entre la variable dependiente y la independiente. Las gráficas de las funciones sirven para visualizar y analizar algunas de estas relaciones. Por ejemplo, dependiendo de la orientación de la parábola, ésta puede tener un punto mínimo (gráfica 1) o un punto máximo (gráfica 2). En las funciones cuadráticas, a estos puntos se les llama *vértices* de la parábola. En el caso de la construcción del estanque, nos interesó saber cuál era el punto máximo o vértice de la parábola, pues este punto representa la medida de la base del rectángulo donde se obtiene la máxima área. Asimismo, el vértice representa la mayor ganancia de peso promedio en función del número de cucharadas de suplemento alimenticio que se les da a los peces.



Además, las parábolas se pueden representar algebraicamente como

$$y = ax^2 + bx + c$$

y tienen un eje de simetría que es la recta paralela al eje Y que interseca a la parábola en el vértice.

5. El agua dulce disponible está disminuyendo a un ritmo alarmante. La agricutura utiliza casi 70% del total mundial de este recurso. El ahorro y mejor aprovechamiento del agua es uno de los principales retos para el desarrollo sostenible. La acuaponia puede reducir el consumo de agua hasta en 90% en comparación con la agricultura tradicional. Para conocer más sobre el tema, visita la página de internet http://www.fao.org/fao-stories/article/es/c/1113809/

Ganancia de peso en el cultivo de las lechugas

Sesión 3

1. Trabajen en pareja. Lean la información y contesten las preguntas.

Como en un sistema acuapónico también interesan el crecimiento y el desarrollo de las plantas, se analizó cuál era el peso promedio en kilogramos de cada lechuga al cosecharlas en función de las cucharadas del suplemento alimenticio que se echó a los peces junto con su comida. La función que modela el experimento está representada por:

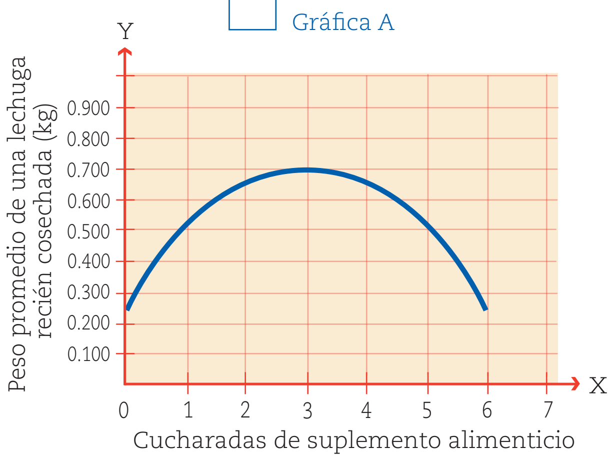
$$y = -0.05(x - 3.5)^2 + 0.8$$

a) Completen la tabla para diferentes valores de *x*. Utilicen calculadora.

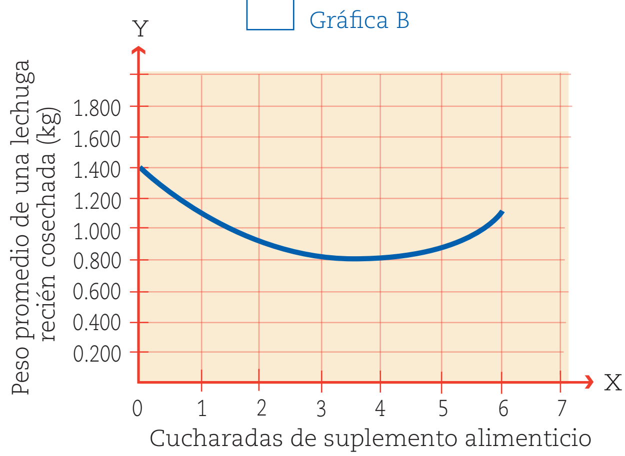
x	Cucharadas de suplemento	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	5	6
y	Peso promedio de una lechuga recién cosechada (en kg)								

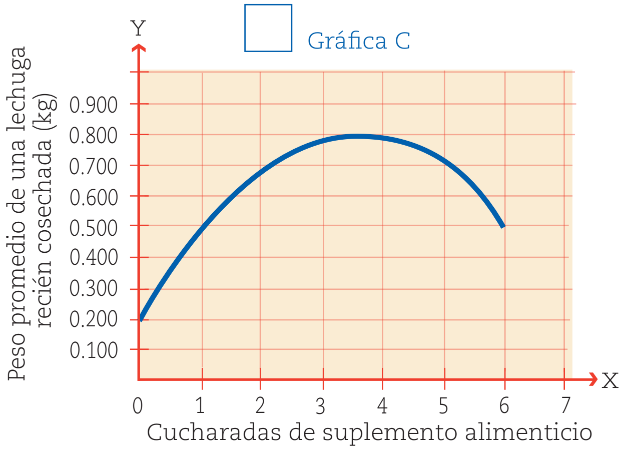
b) Seleccionen con una ✓ la parábola que representa la función dada.

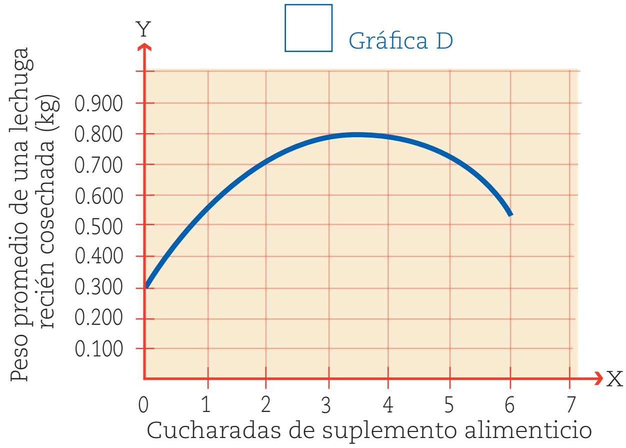
☐ Gráfica A



☐ Gráfica B







c) ¿A qué altura corta la gráfica que eligieron el eje de las Y? ____________________

d) ¿En qué punto está el vértice de la parábola? V(____________, ____________)

e) Desarrollen la representación algebraica de la función cuadrática $y = -0.05(x - 3.5)^2 + 0.8$ para llevarla a la forma $y = ax^2 + bx + c$.

¿Cuánto vale c? ____

f) ¿Cuál es el peso máximo que puede alcanzar una lechuga? ________________

¿Con cuántas cucharadas de suplemento alimenticio se obtiene este resultado?

____

Dato interesante
La lechuga orejona es un alimento de poco aporte calórico, pues contiene mucha agua. Por otro lado, es rica en vitaminas A y C, así como en minerales, pues contiene fósforo, hierro, calcio y potasio.

2. Revisen los resultados que obtuvieron en la actividad 1 de la sesión 2. Si consideran el número de cucharadas de suplemento alimenticio que da la mayor ganancia de peso promedio de los peces, entonces, ¿cuál es el peso que obtendrían por cada lechuga? ________________________________

3. En grupo, y con la ayuda de su maestro, discutan cuántas cucharadas pondrían ustedes para tener el mayor crecimiento tanto de peces como de plantas. Argumenten y escriban en su cuaderno sus respuestas.

Sesión 4

Para terminar

La mayor ganancia por la venta de las lechugas

Trabaja individualmente las siguientes actividades.

1. En una pequeña empresa de acuaponia se consideraron los gastos, las características y la cantidad de lechugas que se produjeron para determinar cuál sería el mejor precio de venta de cada pieza de lechuga para así obtener la máxima ganancia posible.

Determinaron que la ganancia, según el precio que pongan a la pieza de lechuga, estará determinada por la siguiente función

$$G = -0.4(p - 25.5)^2 + 36.5$$

Donde p es el precio de la pieza de lechuga y G, la ganancia obtenida por su venta dada en miles de pesos.

Dato interesante
La trucha es un pez común en los estanques de acuaponia. Se caracteriza por tener poco contenido, ya que sólo 3% es grasa corporal, de la cual la mayor parte es omega 3. Además, es rica en vitaminas B3 y D.

a) Completa la tabla para diferentes valores de p. Utiliza calculadora. Después, responde las preguntas.

p	Precio de la pieza de lechuga								
G	Ganancia obtenida por su venta								

b) ¿A qué precio se tiene que vender cada lechuga para obtener la ganancia máxima?

____

c) Y, ¿cuál es la ganancia máxima que se obtiene con la venta? ____________

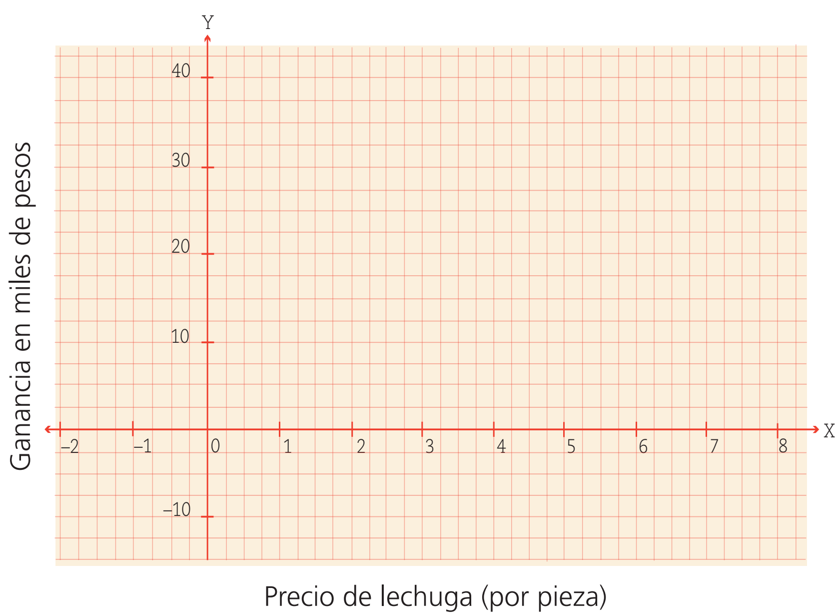
d) ¿Qué precios no generarían ni ganancias ni pérdidas? ____________

2. Usa la información que obtuviste en la actividad anterior para graficar los valores de la función $G = -0.4(p - 25.5)^2 + 36.5$ y contesta las siguientes preguntas.

a) ¿Se perdería más dinero al vender la lechuga a \$40 o a \$15? ____________
Argumenta tus respuestas.
____
____

b) Aproximadamente, ¿cuánto se perdería en cada caso?
____

c) ¿A qué precio se tendría que vender cada lechuga para ganar \$20 000 ____________
____



d) Comenten por qué vender más caras las lechugas no siempre implica mayor ganancia. ____________________

3. Discute con el resto del grupo por qué venderlas a menos de \$16 o a más de \$35 produce pérdidas. ____________________

- ¿Qué pasa cuando son muy baratas? ____________________
- ¿Sucede lo mismo cuando son muy caras? ____________________

4. La cantidad de cucharadas de suplemento alimenticio también afecta la cantidad de nitratos que se encuentran en el agua. La función cuadrática que mejor modela la situación está dada por:

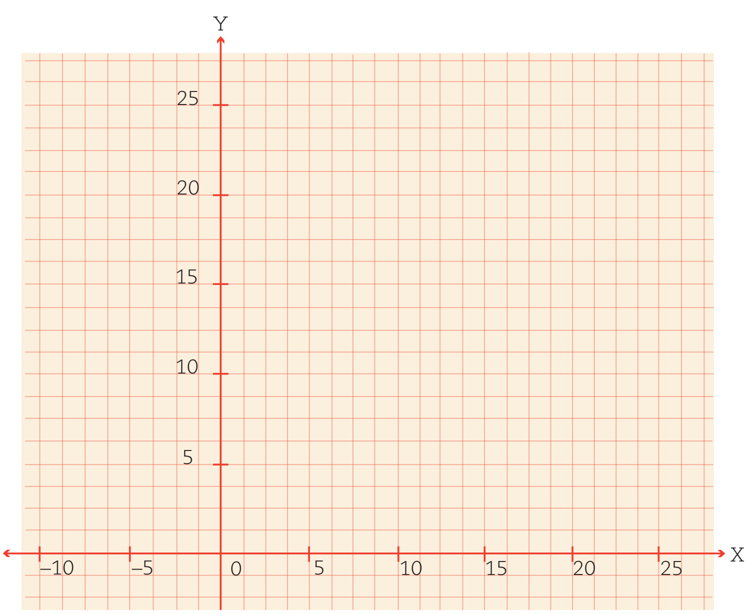
$$N = 2.25s^2 - 9s + 11$$

Donde N es la cantidad de nitratos (mg/L) y s es el número de cucharadas de suplemento que se agregan.

a) Completen la tabla para diferente número de cucharadas de suplemento, valores de s. Utilicen calculadora.

s	Número de cucharadas	0	1						
G	Cantidad de nitratos en el agua (mg/L)								

b) ¿Cuántos mg/L de nitratos hay cuando no se agrega suplemento alimenticio? ____________________



c) Grafica los valores de la función $N = 2.25s^2 - 9s + 11$.

d) ¿La gráfica de la parábola abre hacia abajo o hacia arriba? ____________________

e) ¿Tiene un punto máximo o un punto mínimo? ____________

f) Encuentra el vértice de la parábola V (________, ________)

g) ¿Cuántas cucharadas se necesitan para obtener el mínimo de nitrato en el agua? ____________________

5. Comenta con tus compañeros y con el maestro la importancia de la simetría y el vértice de las parábolas. ¿Qué información puede aportar para entender las relaciones dadas por una función cuadrática y las situaciones que representan?

6. En tu cuaderno dibuja un plano cartesiano y apóyate en él para contestar las siguientes preguntas y argumentar tus respuestas.

   a) ¿Es posible trazar una parábola que tenga el vértice en el origen y que pase por los puntos (5, –3) y (–4, –3)? ______________________________

   b) ¿Cuántas parábolas que pasen por los puntos (5, 0) y (10, 0) se pueden trazar? ______________

   c) ¿Por qué no es posible trazar una parábola que pase por los puntos (5, 0) y (10, 0) y que su vértice esté en el punto (8, 3)? ______________________________

   d) ¿Cuáles pueden ser las coordenadas del vértice de una parábola que pasa por los puntos (–12, 7) y (18, 7)? ______________________________

   Pregunta a tus compañeros si alguien obtuvo un vértice diferente al que encontraste, en caso de que haya distintos, ¿por qué es esto posible? ______________________________

   e) Da la coordenada donde interseca la parábola al eje X si su vértice está en el punto (–3, 4) y la otra intersección con el eje es (4, 0). Explica cómo encontraste la coordenada solicitada ______________

   ____

7. De manera grupal y con apoyo de su maestro, comparen sus respuestas anteriores y corrijan si es necesario.

8. Comenten las diferencias entre las variaciones lineales y cuadráticas que trabajaron en las secuencias 5, 12 y ésta.

9. Con la pesca, un mundo sin hambre es posible. Sólo en 2016 se produjeron 171 millones de toneladas de pescado que contribuyeron a la alimentación y al empleo de millones de personas. Entérate de estos beneficios en “El estado mundial de la pesca y la acuicultura”, disponible en https://bit.ly/3bTu89Y

10. Observen el recurso audiovisual *Modelación de fenómenos con funciones cuadráticas* y analicen la variedad de situaciones que se pueden modelar a partir de este tipo de funciones.

11. Utilicen el recurso informático *Elementos y características de una función cuadrática*, donde resolverán problemas que implican conocer sus propiedades y características para expresarlas algebraicamente.

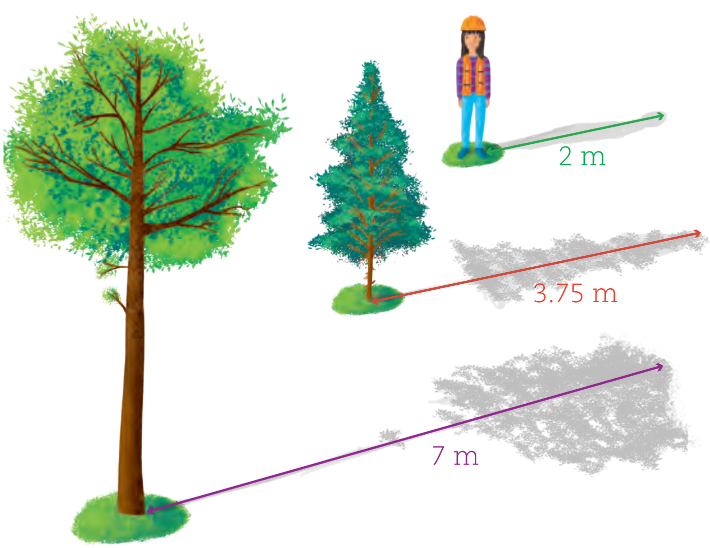
24. Polígonos semejantes 3

Sesión 1

Para empezar

La silvicultura nos enseña cómo cuidar los recursos forestales, pues se enfoca en la conservación, el cultivo y el aprovechamiento racional de los bosques y las selvas.

A lo largo de la historia, la humanidad se ha servido de los recursos naturales de los bosques y los ha explotado para su beneficio y subsistencia. En este proceso ha aprendido a conservarlos y regenerarlos; sin embargo, no siempre ha tenido éxito. En México y en el mundo se han cortado más árboles de los que se han sembrado y estamos en una etapa crítica de sobreexplotación de los bosques y las selvas, pues no se les ha permitido recuperarse. La ciencia y la ingeniería forestal se han preocupado, entre otras cosas, por encontrar métodos para medir, calcular y estimar las dimensiones de los árboles y los bosques para saber su estado de salud, edad y las condiciones óptimas para cuidarlos y aprovecharlos. ¿Para qué creen que sirve calcular la altura o el diámetro de los árboles? ¿Cómo creen que se pueda medir una distancia muy grande y lejana? ¿Cuál será el uso del conocimiento de los triángulos y de la semejanza para hacer este tipo de mediciones o estimaciones? Cuando se trata de distancias o longitudes de objetos, no siempre es posible realizar las mediciones o la estimación de distancias de manera directa, por lo que se buscan métodos indirectos para hacerlo.



En esta secuencia estudiarás cómo calcular distancias desconocidas o inaccesibles usando la semejanza de triángulos.

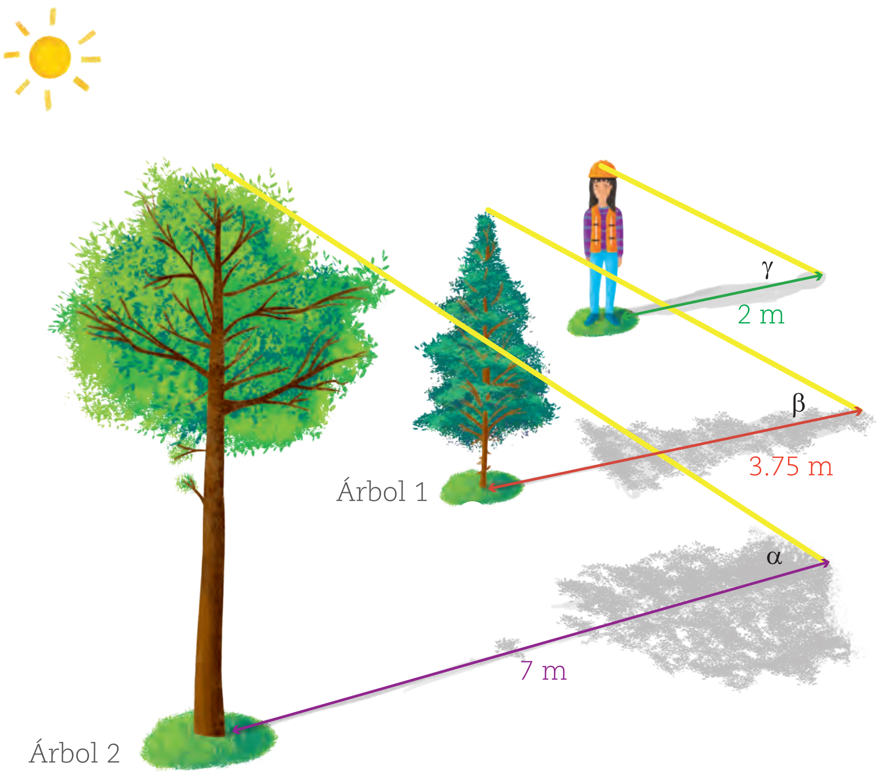
Manos a la obra

¿Qué altura tiene el árbol?

1. Trabajen en pareja. Observen el dibujo para contestar las preguntas de los incisos. A la misma hora del día, Josefina y dos árboles proyectan las sombras indicadas.

a) ¿Qué medida tiene el ángulo que forma cada árbol con su sombra? ____________
Y, ¿el ángulo que forma Josefina con la sombra que proyecta en el suelo?
____

b) Los rayos del sol llegan paralelos a la Tierra. Observen la siguiente imagen. ¿Cómo son entre sí los ángulos α, β y γ que se forman con los rayos del sol y las sombras? Justifiquen su respuesta.______________________________



c) ¿Por qué los tres triángulos imaginarios que se forman son semejantes? ________
____

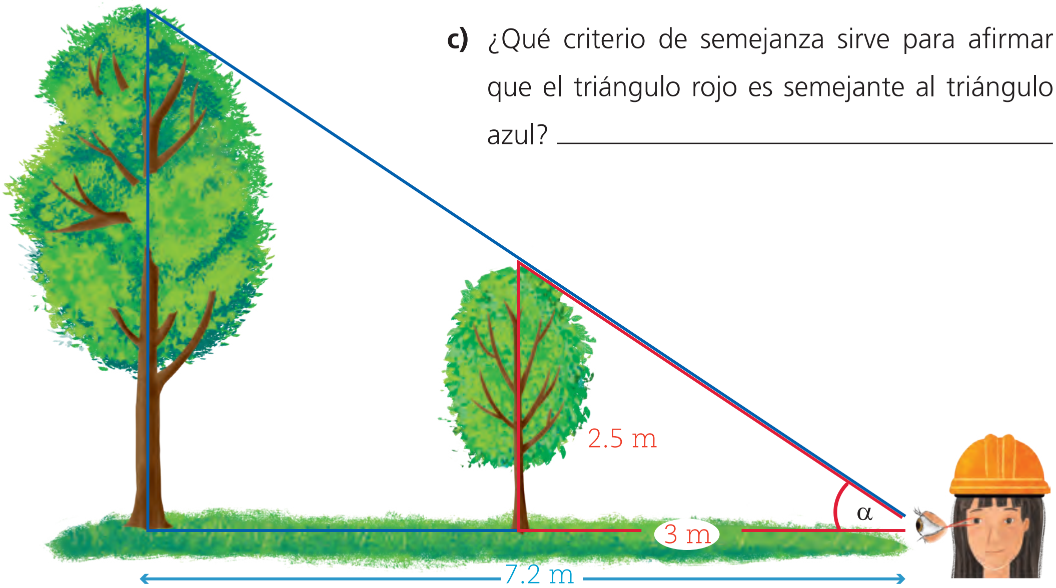
d) Si Josefina mide 1.60 m, ¿qué altura tiene cada uno de los árboles?

- Medida de la altura del árbol 1: ______________________ m
- Medida de la altura del árbol 2: ______________________ m

2. Como no siempre hay sombras bien definidas o algunos árboles tapan a otros, Josefina utiliza el siguiente método para medir otros dos árboles: recostada en el suelo, alinea con la vista los puntos más altos de los dos árboles. Uno de ellos lo puede medir de manera directa, pues no es muy alto, pero el otro no.

a) Ubica en la imagen los ángulos rectos. ¿Cómo sabes que miden 90°? __________
____

b) El ángulo α, ¿a qué triángulos pertenece? ______________________________



c) ¿Qué criterio de semejanza sirve para afirmar que el triángulo rojo es semejante al triángulo azul? ______

d) Indica qué lados del triángulo rojo son correspondientes con los lados del triángulo azul. ______

e) ¿Cuál es la razón de semejanza del triángulo rojo con respecto al triángulo azul?

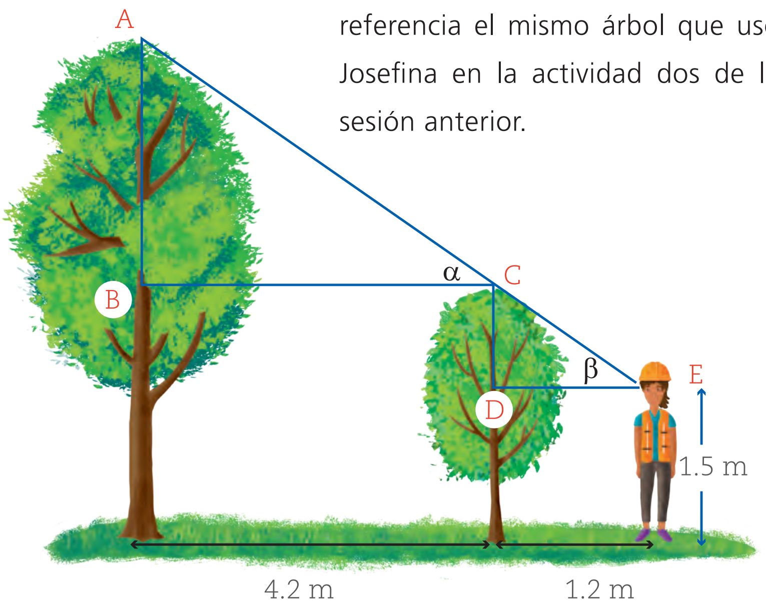
______

f) Sabiendo que ambos triángulos son semejantes, calcula la altura del árbol más alto. ______

Sesión 2

Más alturas

1. Trabajen en pareja. Para medir el mismo árbol que Josefina, Lucía prefiere usar el siguiente método. Como se ve en la imagen, ella no se tumba en el piso, pero sí usa como referencia el mismo árbol que usó Josefina en la actividad dos de la sesión anterior.



Dato interesante
La tercera parte del territorio nacional son bosques y selvas. Sin embargo, el Inegi reporta que de 1985 a 2014 se perdió una tercera parte de los bosques primarios y las selvas, lo cual equivale a casi 245 000 km², extensión similar a la superficie de Sinaloa y Sonora juntos. En nuestro país, en promedio, se pierden casi 2 500 km² de áreas verdes por año.

Respondan con base en la imagen de la página anterior.

a) El lado AB es paralelo al lado ____________ y BC es paralelo al lado____________.

b) ¿Cómo son entre sí los ángulos α y β? ____

¿Por qué? ____

____

c) Argumenten por qué los triángulos ABC y CDE son semejantes. ____________

____

d) Si sabes que la distancia desde la altura de los ojos de Lucía al suelo es de 1.5 m, y la altura del árbol pequeño es 2.5 m, ¿cuánto mide el lado CD? ____________

e) ¿Cuál es la razón de semejanza? ______________________________________

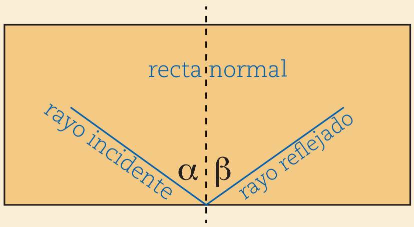
f) ¿Cuánto mide el lado AB? ____

g) ¿Qué le falta hacer a Lucía para encontrar la altura total del árbol?_______

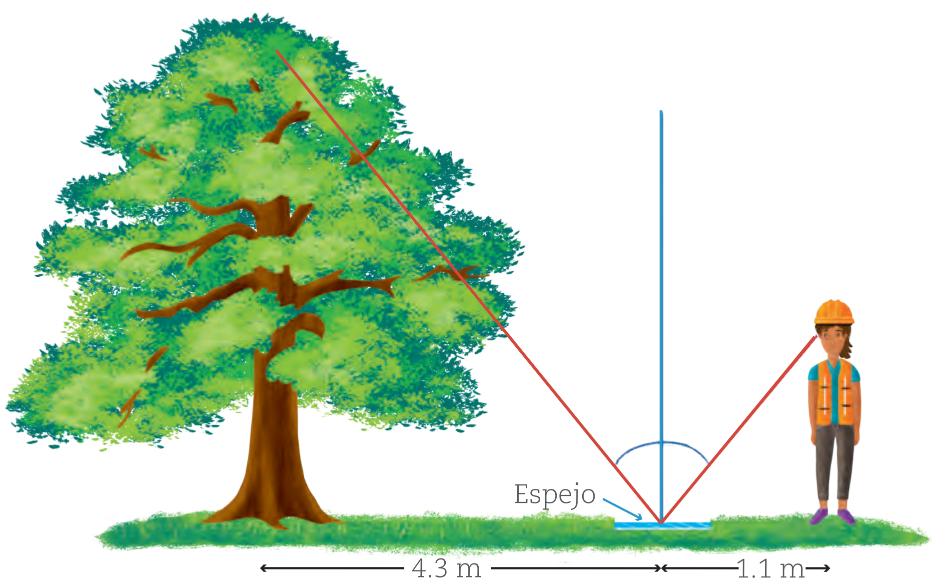
____

2. Lean y analicen la información que se presenta a continuación y, luego, resuelvan la situación que se plantea en la actividad 3.

La reflexión de la luz ocurre cuando los rayos de luz llegan a una superficie totalmente reflejante, chocan con ella y se regresan formando un ángulo igual al ángulo con el que llegaron. Por ejemplo, si un rayo de luz llega a una superficie plana reflejante, como puede ser un espejo, será reflejado con un ángulo β igual al ángulo de incidencia α. Ambos ángulos se miden respecto a la recta normal que, en este caso, es perpendicular al espejo en el punto de incidencia.



3. Ahora Lucía, para medir otro árbol, coloca en el piso un espejo, de manera que puede ver el extremo más alto del árbol reflejado en él, como se muestra en la figura. Con base en ella, contesten las preguntas.



Dato interesante
En Oaxaca está el árbol más ancho del mundo: un ahuehuete conocido como el Árbol del Tule; su tronco tiene un diámetro de 14 m y, para rodearlo, se necesitan cerca de 30 personas con las manos entrelazadas. Su altura es de 42 m.

a) ¿Cómo son los ángulos que se forman con el reflejo del árbol y el punto de visión de Lucía? ______

b) Localicen los ángulos rectos en los triángulos que se forman.

c) ¿Por qué los triángulos formados son semejantes? ______

______

d) ¿Cuál es la altura del árbol? Recuerda que la distancia desde la altura de los ojos de Lucía hasta el suelo es de 1.5 m.

______

4. Comenta con el resto de tus compañeros cuál de los métodos usados por Lucía y Josefina usarían ustedes para medir la altura de un árbol, edificio o cualquier objeto alto que les sea inaccesible. Argumenten por qué lo harían de ese modo y escríbanlo en su cuaderno. Den un ejemplo.

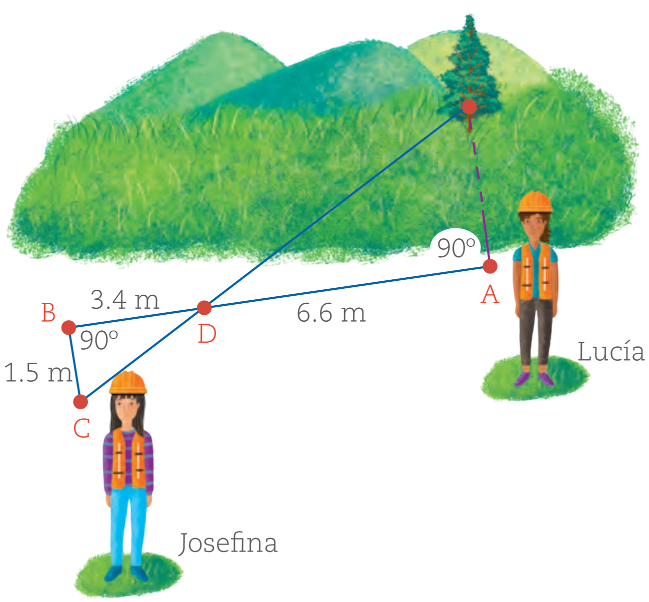
5. Tener bosques sanos y productivos de manera sostenible es indispensable para generar bienestar y mejorar la salud de las personas y del planeta. El uso adecuado de los recursos forestales permitirá que sigamos obteniendo de éstos los alimentos, las medicinas y los biocombustibles que necesitamos, además de tener un medio ambiente cada vez más sano. Conoce más sobre el tema en el video: https://bit.ly/3gOUI6M

Sesión 3

¿Qué tan lejos está?

1. Analiza la siguiente situación y después contesta las preguntas.

Lucía y Josefina quieren saber a qué distancia de ellas está un árbol que se encuentra al otro lado del pastizal. Para esto, colocan las siguientes estacas como referencia.



- Lucía pone una vara en el suelo, alineada con ella y el árbol, y clava una estaca (punto A).
- Desde ese punto, Josefina camina 10 m en dirección perpendicular a la vara del piso, y coloca otra estaca (punto B).
- Luego, camina 1.5 m de manera perpendicular al segmento AB, y coloca una tercera estaca (punto C).
- Josefina le pide a Lucía que clave una estaca alineada entre el árbol y ella sobre el segmento AB (punto D).

a) Argumenta por qué los triángulos que se forman son semejantes. ____________

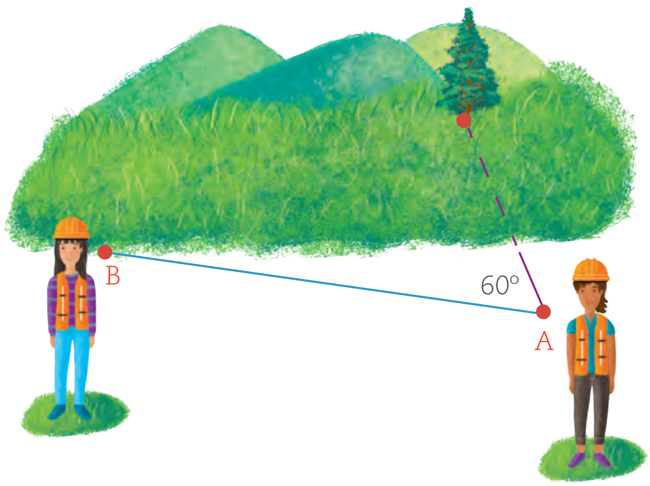
____

b) ¿Qué distancia hay del punto A hasta el árbol? ____________________

2. Trabajen en pareja. En la siguiente imagen, tracen una construcción que ayude a medir la distancia que hay entre Lucía y el árbol, considerando que Josefina no caminó en dirección perpendicular con la vara, sino formando un ángulo de 60°. Expliquen qué se tiene que cumplir para que los triángulos que tracen sean semejantes.

____

____

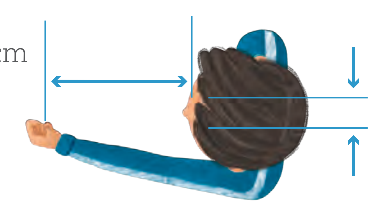


3. En grupo, comenten y escriban en su cuaderno sus conclusiones acerca de lo que tendrían que hacer Lucía y Josefina si quisieran calcular la distancia más corta de la orilla del pastizal al árbol.

4. Trabajen en equipo. Van a estimar distancias usando el pulgar, para lo cual deben hacer lo que se indica a continuación.

- Definan al medidor, quien extenderá su brazo y levantará el pulgar justo a la altura de los ojos, de manera que esté en el centro de la cara. Un compañero debe verificar esto y medir con una cinta métrica. Otro anotará las siguientes distancias:

Distancia del pulgar al ojo: ______ cm



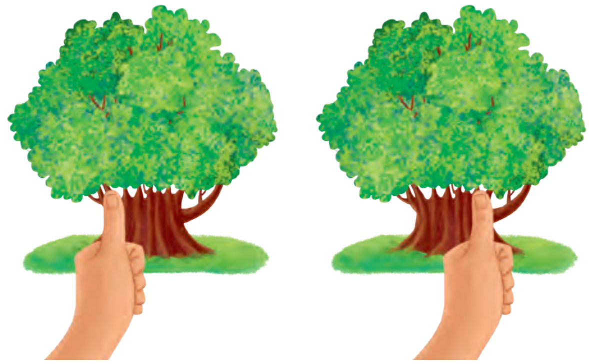
Distancia entre los ojos: ______ cm

- Calcula la razón que hay entre estas dos distancias

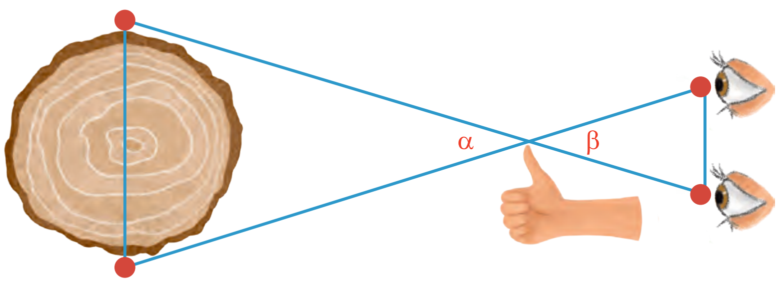
$$\frac{\textit{distancia del pulgar al ojo}}{\textit{distancia entre los ojos}} = \_\_\_\_$$

- Con el brazo estirado, el medidor debe utilizar como referencia el dedo pulgar para ubicar dos puntos de un objeto que se encuentre distante, mirando primero con un ojo y después con el otro. Al hacer esto, se crean dos ejes o líneas visuales y parece que el objeto se mueve.

Dato interesante
Las secuoyas son los árboles más altos del mundo, llegan a medir hasta 115 m de altura y el diámetro del tronco puede ser de hasta 7 m. En California, EUA, existe un bosque con este tipo de árboles.



- De esta manera, se forman dos triángulos, como se observa en la ilustración.



5. Con base en lo anterior, respondan las siguientes preguntas.

a) ¿Cómo son las medidas de los ángulos α y β entre sí? __________________
¿Por qué? __________________________________

b) ¿Cómo es la distancia del pulgar al ojo izquierdo, comparada con la distancia del pulgar al ojo derecho? ________________________
¿Por qué? __________________________________

c) El triángulo que se forma con los vértices del pulgar y los dos extremos del tronco, ¿es isósceles? ________ ¿Por qué? ________________________

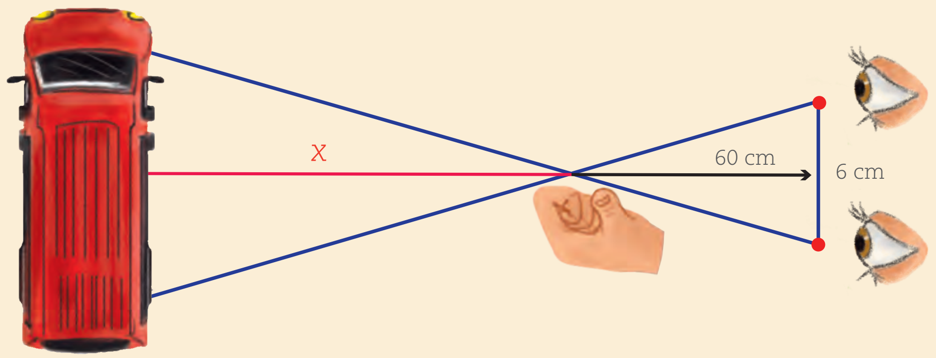
d) ¿Para qué sirve obtener la razón: $\frac{\textit{distancia del pulgar al ojo}}{\textit{distancia entre los ojos}} = \_\_\_\_$?

e) Si el diámetro del tronco es de 1 m, ¿qué distancia hay del pulgar al centro del tronco? __________________________________

6. En grupo y con apoyo del maestro, lean la siguiente información.

Este método, llamado *paralaje*, es útil para estimar distancias, pero no es muy preciso, salvo que se conozca el ancho o la longitud de los objetos que se están observando. Además, depende de la distancia a la que te encuentres del objeto, y no siempre es posible que los ejes que se forman con los ojos y el pulgar coincidan con los extremos del objeto. Sin embargo, este principio sirve para entender cómo se calculan distancias inaccesibles, como la que hay entre la Tierra y los objetos estelares.

Por otra parte, en el ejemplo se puede hacer una estimación de que la camioneta mide aproximadamente 5 m, y entonces determinar que lo que abarca la visión de la camioneta es 4.5 m.



Como los triángulos son semejantes, para encontrar la distancia x se utiliza la razón:

$$\frac{\text{distancia del pulgar al ojo}}{\text{distancia entre los ojos}} = \frac{60}{6} = \frac{x}{4.5} = \frac{\text{distancia del pulgar al objeto}}{\text{longitud estimada de la camioneta}}$$

De donde, si despejamos:

$$\frac{60}{6} = \frac{x}{4.5}$$

$$(10)\,(4.5) = x$$

La distancia entre el pulgar y la camioneta es de 45 m, aproximadamente.

7. Observen el recurso audiovisual *Estimación de distancias usando el pulgar* para analizar aspectos importantes que se deben considerar para calcular distancias.

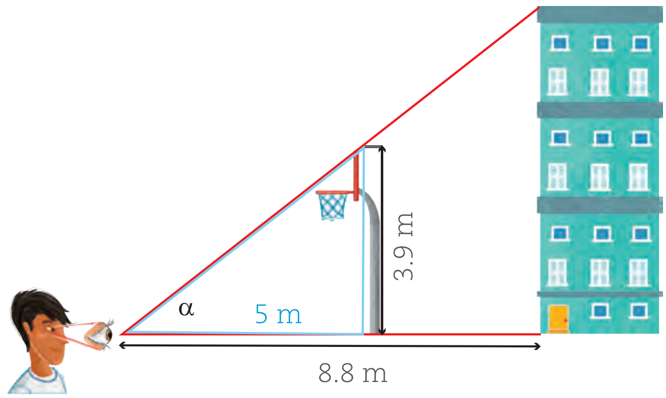
8. Salgan al patio y usen el método del pulgar para calcular distancias. Pueden usar como referencia el ancho de la puerta, la distancia que hay entre los marcos de una ventana, la distancia entre un hombre y otro. Comenten qué podrían usar como referencia y si conocen cuánto miden dichos objetos o distancias que usen como referencia.

Para terminar

¡A calcular medidas!

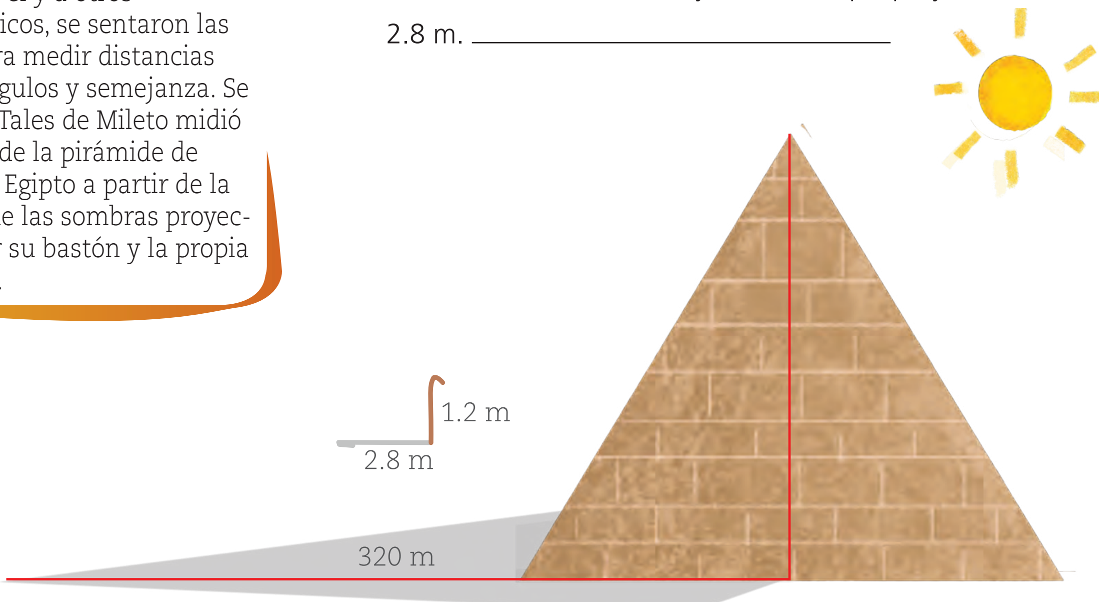
1. Es importante que todas las actividades de esta sesión las integres a tu carpeta de evidencias. Analiza las situaciones que se presentan y realiza lo que se pide.

   Los alumnos de una telesecundaria midieron la altura de un edificio que se localiza cerca de la escuela. Para hacerlo, emplearon el mismo método que Josefina en la actividad 2 de la sesión 1 y, como referencia, la canasta de basquetbol. Observa la imagen y calcula la altura del edificio.

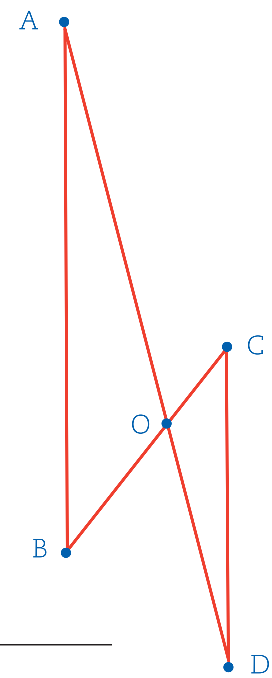


Dato interesante
Hace cerca de 2 600 años, Tales de Mileto hizo grandes aportaciones a la geometría y al razonamiento deductivo. Gracias a él y a otros matemáticos, se sentaron las bases para medir distancias con triángulos y semejanza. Se dice que Tales de Mileto midió la altura de la pirámide de Keops en Egipto a partir de la medida de las sombras proyectadas por su bastón y la propia pirámide.

2. Encuentra la altura de la pirámide de Keops o Gran Pirámide, en Egipto, con la información que se da. Puedes suponer que ésta fue la situación en que se encontró Tales de Mileto cuando, a cierta hora del día, la sombra de la pirámide medía 320 m, su bastón, 1.2 m, y la sombra que proyectaba era de 2.8 m. ______________________________



3. Sin conocer nada sobre la medida de los lados, muestra que los triángulos AOB y DOC son semejantes. Considera que el segmento AB es paralelo al segmento DC.



a) Los ángulos OCD = OBA porque ____.

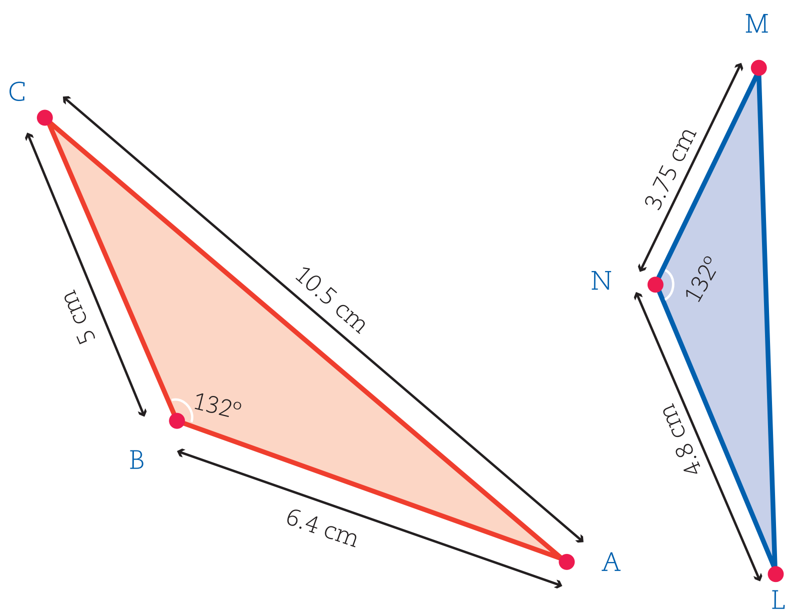
b) ¿Cómo son los ángulos BAO y CDO entre sí? ______________________

c) Con base en esto, ¿qué criterio de semejanza se puede usar para afirmar que los triángulos AOB y DOC son semejantes? ______________________

d) Si el lado AB mide 6 cm y la razón de semejanza del triángulo DOC es $\frac{2}{3}$ respecto al triángulo AOB, ¿cuánto mide el lado CD? ______________________

4. Observa la imagen y contesta.

a) ¿Por qué los siguientes triángulos son semejantes? ______________________



Dato interesante
Tres siglos antes de nuestra era nació Eratóstenes de Siena, en Egipto, quien calculó la circunferencia de la Tierra basándose en la sombra que proyectaba un objeto en dos lugares diferentes, Siena y Alejandría. Para una época en que no se tenía la tecnología que ahora existe, su cálculo fue bastante preciso al señalar que medía 40 000 km, aproximadamente.

b) El lado BA es correspondiente con el lado ______________________.

c) ¿Cuál es la razón de semejanza que hay entre los triángulos? ______________________

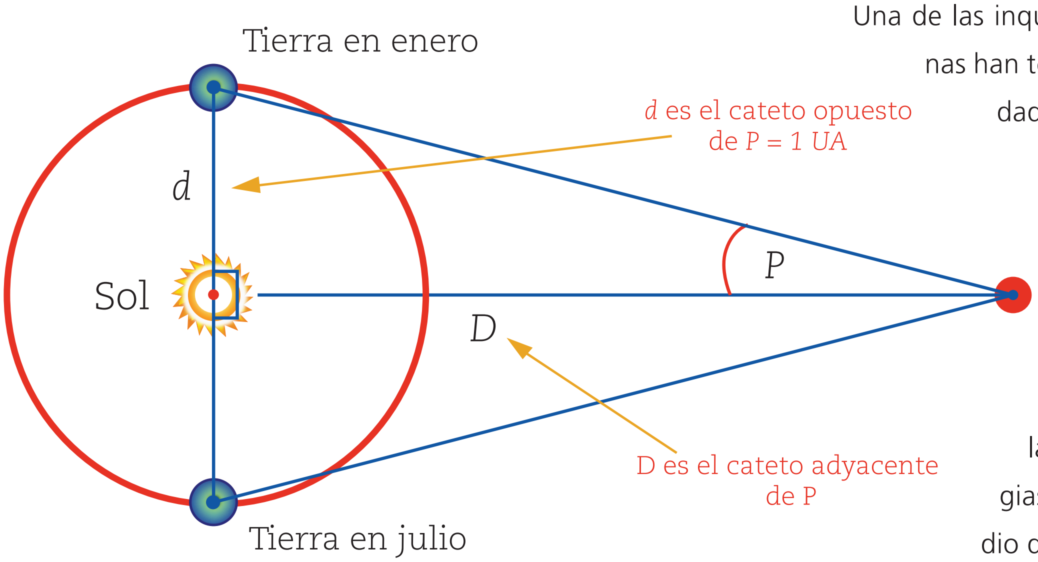
d) Calcula la medida del lado ML. ______________________

5. Usen el recurso informático *Cálculos de distancias usando la semejanza de triángulos* para encontrar distancias o longitudes no conocidas.

25. Razones trigonométricas 3

Sesión 1

Para empezar



$$\tan(p) = \frac{\text{cateto opuesto} = d = 1\ UA}{\text{cateto adyacente} = D}$$

$$D = \frac{1\ UA}{\tan(p)}$$

Una de las inquietudes que las personas han tenido desde la antigüedad es conocer la distancia entre dos lugares u objetos alejados entre sí, en el mar o, incluso más allá de la Tierra, como el Sol o la Luna. Esta inquietud propició la búsqueda de estrategias de medición, el estudio de la semejanza y de los triángulos, en particular de los triángulos rectángulos. Entre los primeros aportes en este sentido está el cálculo que Aristarco, astrónomo y matemático griego del siglo IV a. n. e., elaboró de las distancias aproximadas de la Tierra al Sol y de la Tierra a la Luna. Eratóstenes utilizó la semejanza para calcular la circunferencia de la Tierra y, más adelante, Hiparco construyó una tabla de cuerdas que es considerada la primera tabla trigonométrica. Apoyado en ésta, mostró la relación entre los lados y los ángulos de un triángulo. Actualmente, además de estos conocimientos, se utilizan complejos instrumentos y herramientas que permiten obtener mayor precisión en las mediciones y los cálculos.

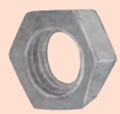
En las secuencias 7 y 18 aprendiste que los cocientes entre las medidas de los lados de un triángulo rectángulo dan lugar a las razones trigonométricas, y éstas son útiles para calcular la medida de algunas longitudes o distancias.

En esta secuencia aprenderás a usar las razones trigonométricas para calcular indirectamente alturas que no es posible medir de manera directa.

Manos a la obra

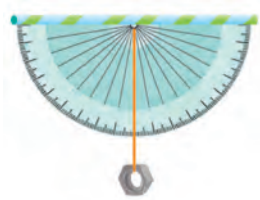
Cálculo de alturas

1. Trabajen en equipo. En esta actividad construirán un instrumento que les servirá para medir ángulos. Consigan el siguiente material:

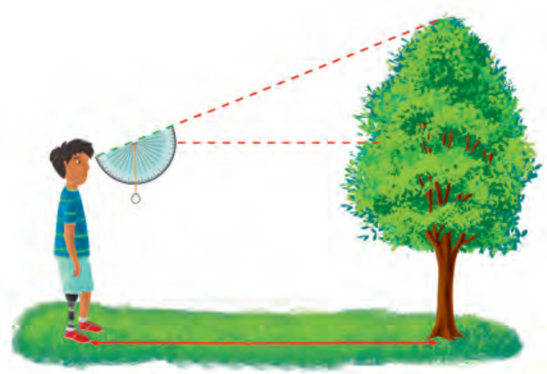
• Hilo resistente 	• Un transportador 
• Pegamento blanco 	• Una tuerca 
• Popote de cartón 	

Dato interesante
El teodolito es un instrumento de medición mecánico-óptico y visual. En ingeniería se emplea para medir distancias, desniveles y ángulos. El primer teodolito fue construido en 1787 por Jesse Ramsden (1735-1800). Abajo se muestra la evolución del diseño de los teodolitos. La fotografía de la derecha es de uno actual.

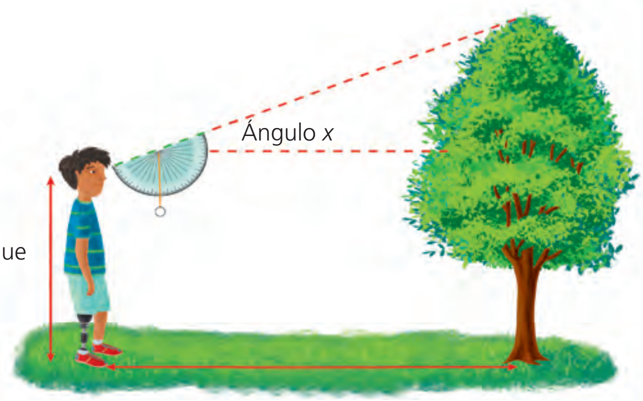
Usen el hilo para colgar la tuerca en el centro del lado recto del transportador. Luego peguen el popote de tal manera que pase por las marcas del 0° y 180°.



2. Elijan una altura para medirla con el instrumento que elaboraron. Puede ser un objeto o un lugar, como el asta bandera, el aro de la cancha de basquetbol, un árbol, el edificio de la escuela, la torre de una iglesia. Uno de ustedes se coloca a cierta distancia de lo que vayan a medir y, usando el popote como mira, localizará la punta superior del objeto elegido.



a) Tomen las medidas que se indican en el siguiente esquema y anótenlas. Con base en el ángulo que marca el hilo, calculen el valor del ángulo *x*.



b) Analicen los datos y determinen un plan para calcular la altura que están investigando. En la página 180 encontrarán una tabla de valores de las razones trigonométricas. ¿Cuánto mide la altura que están investigando? ____________________

Dato interesante

El 1° de julio de 1999 nació el programa de construcción, operación y custodia de las astas banderas y banderas monumentales. Una acción de este programa es la colocación de banderas de enorme tamaño en diferentes sitios del país para reforzar el sentido patriótico de los mexicanos. En la ciudad de Piedras Negras, Coahuila, está una bandera monumental cuya asta mide 125 m de altura.

3. Elijan otras dos alturas para medir. Coloquen su teodolito como se observa en la figura anterior. Hagan los diagramas y cálculos correspondientes en su cuaderno.

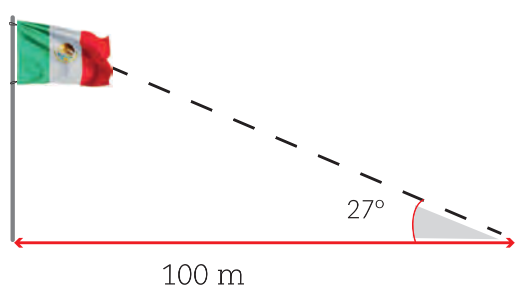
4. Comparen sus trabajos con los de otros compañeros. Comenten cómo usaron la tabla de valores de las razones trigonométricas. Si varios eligieron el mismo objeto y llegaron a resultados diferentes, comenten por qué y, si es necesario, corrijan.

Sesión 2

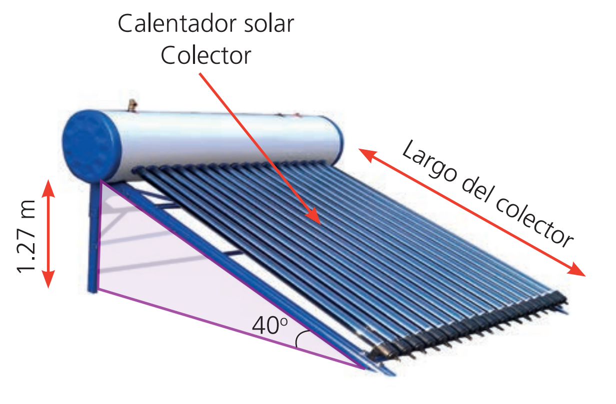
¿Cuál es la altura del asta bandera?

1. En pareja, calculen la distancia que se indica. En todos los casos, el triángulo que se considera es rectángulo. En el recuadro de la derecha, realicen sus cálculos.

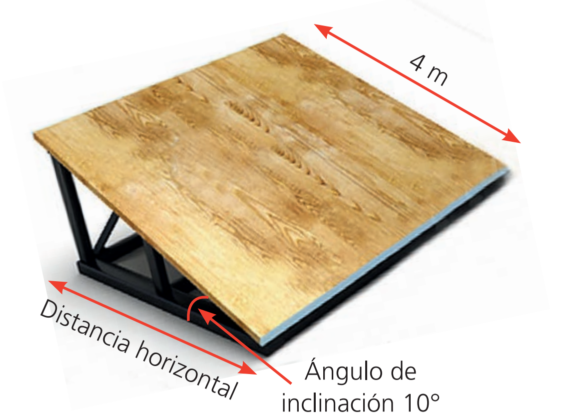
a) ¿Cuánto mide la altura del asta bandera? ____________________________



b) ¿Cuánto mide el largo del calentador solar? ___________________

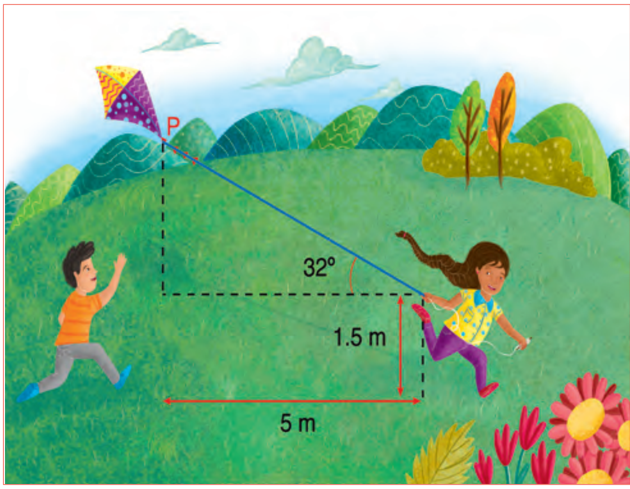


c) ¿Cuánto mide la distancia horizontal de la rampa? ___________________



d) En el triángulo isósceles ABC se marca la altura correspondiente al lado AC. El ángulo A mide 34° y el lado AC mide 6 m, ¿cuánto mide la altura del triángulo ABC? ___________________

e) ¿Cuánto mide el hilo que sostiene al papalote?____________________ ¿A qué altura está el punto P? ____



2. Inventen un problema similar a los anteriores donde tengan que usar una razón trigonométrica para calcular una distancia, y resuélvanlo.

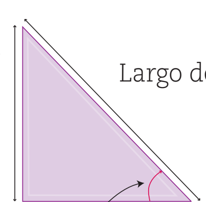
3. Comparen sus resultados y procedimientos con dos compañeros y, con ayuda de su maestro, si llegaron a resultados diferentes, analicen por qué; en caso necesario, corrijan. No olviden considerar que sus resultados pueden diferir en la parte decimal, según hayan considerado dos o más cifras decimales.

Sesión 3

¿Cuánto mide el ángulo?

1. Trabajen en pareja. En la secuencia 7 se dijo que la inclinación a la que debe colocarse un calentador solar depende de la latitud del lugar y del largo del calentador. Recuerden que el colector es la parte de los tubos del calentador solar.

Calentador solar



Con base en los siguientes datos, calculen la medida del ángulo.

Zacatecas se localiza a 23° latitud norte. En dicho territorio se recomienda que un colector solar como el de la imagen se coloque a una altura que sea $\frac{6}{10}$ del largo del colector.

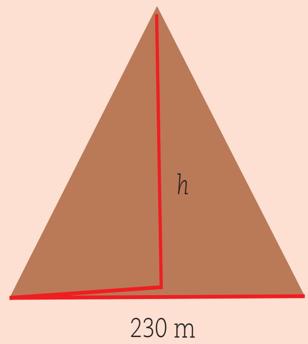
a) ¿Cuánto mide el ángulo de inclinación? ____________________

b) ¿Cómo lo calcularon? ____________________

2. Comparen sus resultados y procedimientos con los de otros compañeros. En particular, comenten cómo usaron la tabla de las razones trigonométricas para calcular el ángulo de inclinación.

3. Resuelvan los siguientes problemas.

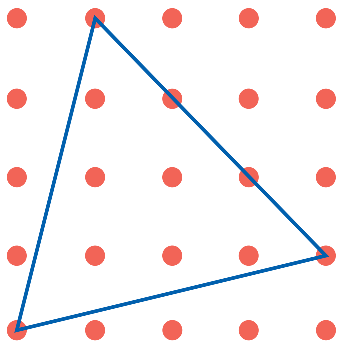
a) ¿Cuánto mide el ángulo de inclinación de las paredes laterales de la pirámide de Keops si su altura es, aproximadamente, de 139 m, y su base es un cuadrado de 230 m de lado? ____________________



b) Una buena inclinación para los techos de dos aguas es de 40°. En el siguiente esquema, ¿cuánto debe medir la altura x para lograr esta inclinación?

Dato interesante
En varios países los techos de dos aguas son comunes, ya que protegen las casas al evitar que se acumule la nieve y con ello minimizar el riesgo de un derrumbe.

c) Recordarás que una recomendación para colocar una escalera de mano es que la distancia entre ella y la pared sea, como mínimo, $\frac{1}{4}$ de la longitud de la escalera. Si se coloca de esta manera, ¿cuál es la medida del ángulo que la escalera forma con el piso? ______________________________



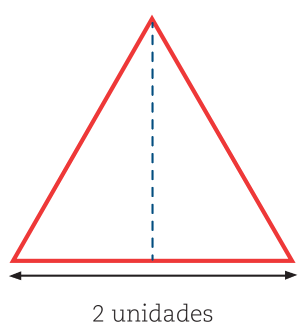
4. En un triángulo equilátero, sus tres ángulos miden 60°. Analicen si el triángulo es equilátero con base en la medida de sus ángulos; calculen y anoten la medida de cada ángulo interior (no se permite usar transportador).

5. Comparen resultados y procedimientos con otros compañeros. Si llegaron a resultados diferentes, analicen por qué y, en caso necesario, corrijan.

6. Usen el recurso informático *Cálculo de distancias y ángulos* para que analicen y usen las razones trigonométricas en este tema.

Sesión 4

Ángulos notables y relaciones interesantes

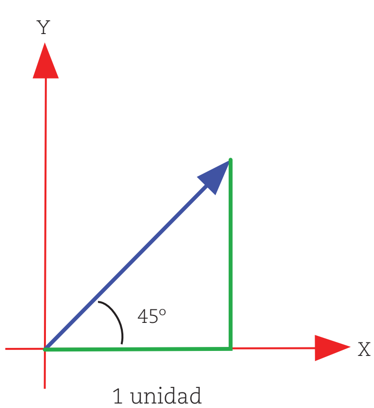


1. Trabajen en pareja. Hagan y respondan lo que se indica.

a) Para calcular el seno, el coseno y la tangente de los ángulos de 30° y 60°, es útil un triángulo equilátero cuyos lados midan dos unidades y al cual se le ha trazado una altura.

Hagan los cálculos necesarios y completen la siguiente tabla:

Ángulo	Seno	Coseno	Tangente
30°			
60°			



b) En el plano cartesiano de la izquierda se ha marcado un triángulo rectángulo isósceles, cuyos lados iguales miden una unidad. Hagan los cálculos necesarios y completen la tabla.

	Seno	Coseno	Tangente
45°			

2. Completen la siguiente tabla. En caso de que la afirmación sea verdadera, den un argumento de por qué lo es a partir de los conceptos, las definiciones y las propiedades que han estudiado. En caso de que sea falsa, basta con que den un ejemplo que contradiga la afirmación (contraejemplo).

Afirmación	¿Es falsa o verdadera?	Argumento o contraejemplo
a) El seno de un ángulo es igual al coseno de su ángulo complementario.		
b) El seno de un ángulo puede tener cualquier valor.		
c) El coseno de un ángulo puede tener cualquier valor.		
d) La tangente de un ángulo puede tener cualquier valor.		
e) Si se divide el seno de un ángulo entre el coseno del mismo ángulo, se obtiene el valor de su tangente.		
f) Si se elevan al cuadrado el seno y el coseno de un ángulo y se suman ambos resultados, siempre se obtiene 1.		

3. Comparen y analicen sus respuestas y argumentos con los de otros compañeros, con apoyo del maestro.

Para terminar

Sesión 5

¿Crece o decrece?

1. Trabajen en pareja. Hagan o respondan lo que se indica.

a) Analicen la tabla de valores de las razones trigonométricas de la página 266 y completen la siguiente tabla.

	Seno	Coseno	Tangente
Valor mínimo			
Valor máximo			

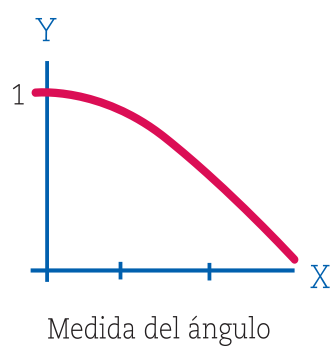
b) A partir de las definiciones del seno, el coseno y la tangente de un ángulo, en la sesión 3 de la secuencia 18, argumenten por qué esas razones trigonométricas tienen esos valores mínimo y máximo y completen las siguientes afirmaciones.

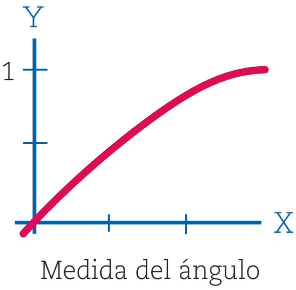
- El valor mínimo del seno de un ángulo es __________ porque ______________________________ y el valor máximo es ______________ porque ____.
- El valor mínimo del coseno de un ángulo es ______________ porque ______________________________________ y el valor máximo es ____________ porque ______________________________.
- El valor mínimo de la tangente de un ángulo es ______________ porque ______________________________ y el valor máximo es ___________ porque ______________________________________.

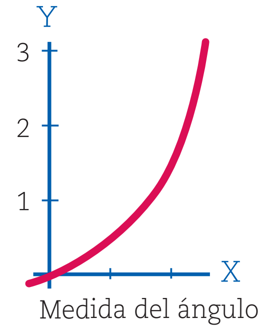
c) Consideren los valores de 0° a 90° del seno, el coseno y la tangente y anoten si esos valores crecen o decrecen.

	Seno	Coseno	Tangente
De 0° a 90°, ¿crece o decrece?			

d) En las siguientes gráficas se ha considerado la medida del ángulo en el eje X y los valores del seno, el coseno y la tangente de los ángulos en el eje Y. Anoten a cada gráfica si corresponde al seno, al coseno o a la tangente de un ángulo.







e) Completen la siguiente tabla.

Afirmación	¿Es falsa o verdadera?	Argumento o contraejemplo
El seno de 30° es igual a la mitad del seno de 60°.		
El coseno de 10° es igual al doble del coseno de 5°.		
La tangente de 60° es igual al triple de la tangente de 20°.		

f) En su cuaderno, respondan las siguientes preguntas y argumenten sus respuestas.

- ¿El seno de un ángulo es proporcional a la medida del ángulo?
- ¿El coseno de un ángulo es proporcional a la medida del ángulo?
- ¿La tangente de un ángulo es proporcional a la medida del ángulo?

2. Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Si dieron respuestas diferentes, analicen los argumentos con ayuda de su maestro.

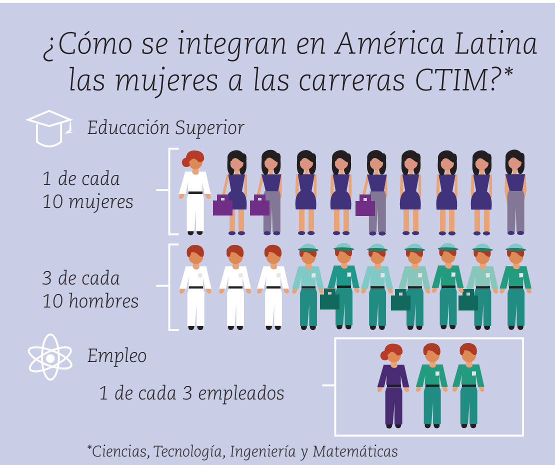
3. Observen el recurso audiovisual *Maravillas de la trigonometría* para conocer la manera en que Eratóstenes calculó la circunferencia de la Tierra.

Dato interesante
Casi 150 años después de Eratóstenes, Posidonio (135-51 a. n. e.), creó un método para calcular la circunferencia de la Tierra y obtuvo una medida menor que la obtenida por su antecesor. Ptolomeo (100-170), otro matemático y astrónomo griego, adoptó ese valor y probablemente en él se basó Cristóbal Colón (*ca*. 1451-1506) para emprender su viaje a las Indias Orientales por el océano Atlántico.

Sesión 1

26. Tendencia central y dispersión de dos conjuntos de datos 2

Para empezar



Fuente: Texto y gráficas elaborados con base en el documento publicado por el IFT, "La educación de las niñas y jóvenes mujeres en CTIM".

Un ejemplo de la aplicación actual de la estadística es la infografía que muestra la proporción de mujeres y hombres estudiantes en una carrera de Ciencias, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas (CTIM), así como la proporción de empleos que corresponden a esas profesiones en América Latina. ¿De qué manera crees que se recopilaron los datos? ¿Qué les pudieron preguntar a las personas interrogadas para obtenerlos? ¿Se incluye en la infografía el dato del número de personas que contestó las preguntas?

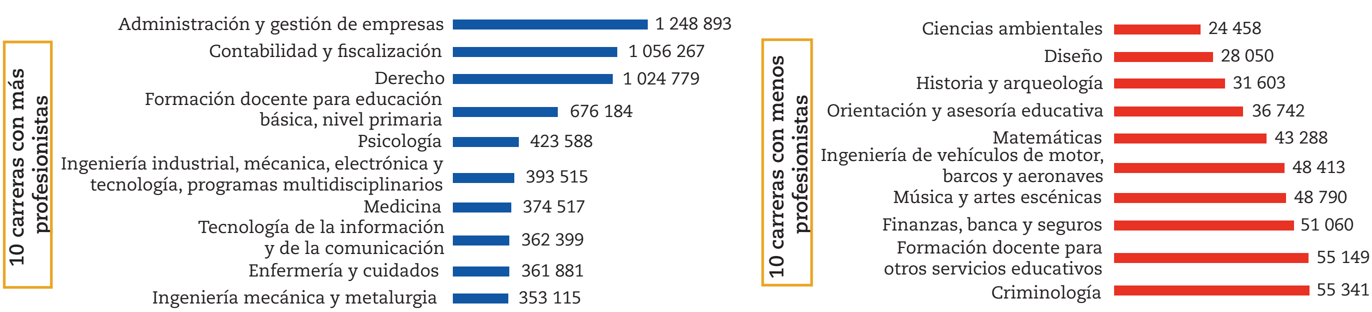
En esta secuencia aplicarás tus conocimientos de medidas de tendencia central, rango y desviación media para comparar la tendencia y distribución de dos conjuntos de datos estadísticos que corresponden a una misma situación o para comparar la tendencia y distribución de datos estadísticos que corresponden a dos aspectos diferentes de la misma situación.

Manos a la obra

Número de profesionistas por carrera

1. Lee e interpreta las gráficas para hacer lo que se indica en los incisos.

Promedio general de profesionistas por carrera: 237 105



Fuente: IMCO, A. C., "Compara carreras 2019".

a) Describe en tu cuaderno qué información presenta cada gráfica y de qué manera está representada.

b) ¿Cuál es la carrera con menos profesionistas? ______________________ ¿Cuántos profesionistas hay en esta carrera? ______________________

c) ¿Cuál es la carrera con más profesionistas? ______________________ ¿Cuántos profesionistas hay en esta carrera? ______________________

d) ¿Cuál es el promedio general de profesionistas por carrera? __________ ¿Entre qué números de profesionistas y de carreras se ubica el promedio general de profesionistas por carrera? __________

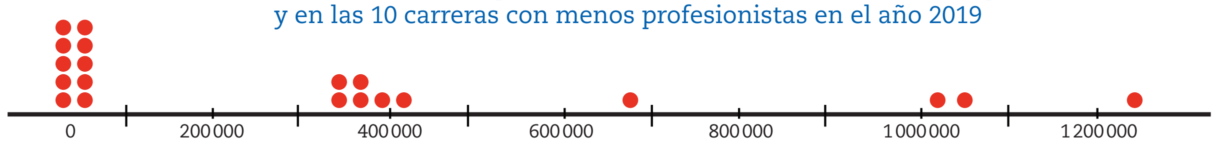
e) Entre los 10 datos que presenta cada gráfica, ¿en cuál de los conjuntos se observa mayor variación? ______________ ¿Por qué? ______________________

f) Si tuvieras que elegir una carrera entre las 20 antes mencionadas, ¿cuál escogerías?, ¿por qué?

____

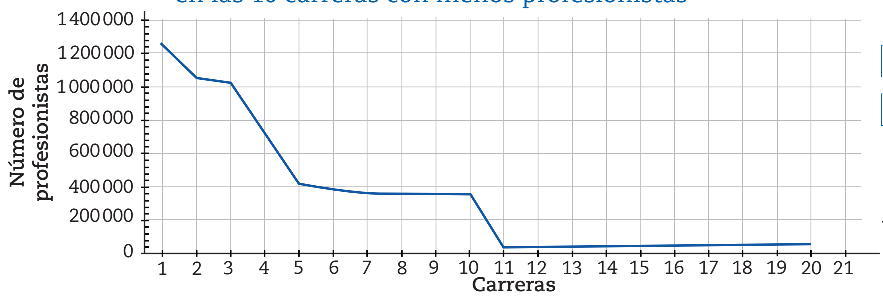
2. Si los datos que presentan las dos gráficas anteriores se reúnen y reorganizan en una sola gráfica, ¿cuáles de las siguientes gráficas representan correctamente la situación?, ¿por qué?

Distribución del número total de profesionistas en las 10 carreras con más profesionistas y en las 10 carreras con menos profesionistas en el año 2019



☐ Sí corresponde ☐ No corresponde ¿Por qué? ______________________

Número de profesionistas en las 10 carreras con más profesionistas y en las 10 carreras con menos profesionistas



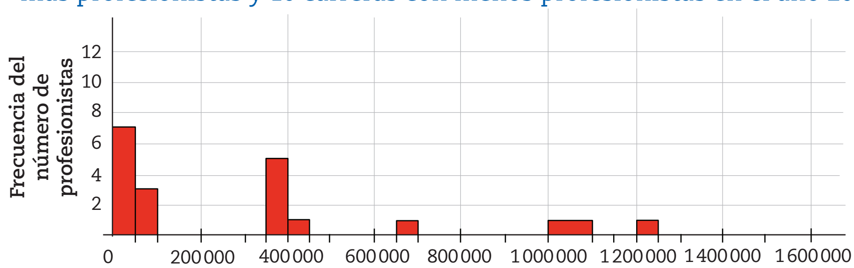
☐ Sí corresponde

☐ No corresponde

¿Por qué? ______________________

____

Distribución del número de profesionistas en las 10 carreras con más profesionistas y 10 carreras con menos profesionistas en el año 2019



☐ Sí corresponde

☐ No corresponde

¿Por qué? ______________________

____

a) ¿Cuál es el rango en la distribución del número de profesionistas por carrera?

____

b) ¿Hay algún dato atípico? ______ En caso afirmativo, ¿cuál es? ______________

En caso negativo, ¿por qué? ______________________________

c) Ubica el valor del promedio general de profesionistas por carrera (media aritmética) en la gráfica o gráficas que elegiste como correctas. Traza una línea de color rojo para destacarlo.

d) ¿Cuál es el número típico de profesionistas por carrera? Expliquen por qué creen que su respuesta es correcta. ______________________________

____

e) ¿Es posible obtener el valor de la desviación media del promedio general de profesionistas por carrera? ________ Justifica tu respuesta. ______________

____

3. Con ayuda de tu maestro, compara tus respuestas de las actividades con las de tus compañeros de grupo. En caso necesario, corrige los errores.

Glosario

Base de datos es un conjunto de información almacenada y organizada sobre diversas materias con la finalidad de acceder a ella con rapidez y precisión.

4. Comenten con sus compañeros y maestro de qué manera creen que se hayan obtenido los datos: encuesta, censo o consulta de las bases de datos de una institución, y por qué. ¿Qué preguntas habrán planteado para recopilar los datos? ¿Se conoce cuántas personas participaron en el estudio? Si consideran otra carrera (una que no esté en la encuesta), ¿cuántos profesionistas creen que tendría? Expliquen por qué creen que su respuesta es correcta.

5. Trabajen en equipo. Preparen tarjetas iguales a la que se muestra a la izquierda para realizar una encuesta a sus compañeros de grupo o de la telesecundaria, según el número de estudiantes que haya.

1. *Género* **2.** *Estatura en cm*

3. *Color de cabello* **4.** *Talla de calzado*

5. *Hoy, ¿cuál es una de tus preocupaciones?*

6. *Carrera universitaria que te gustaría estudiar*

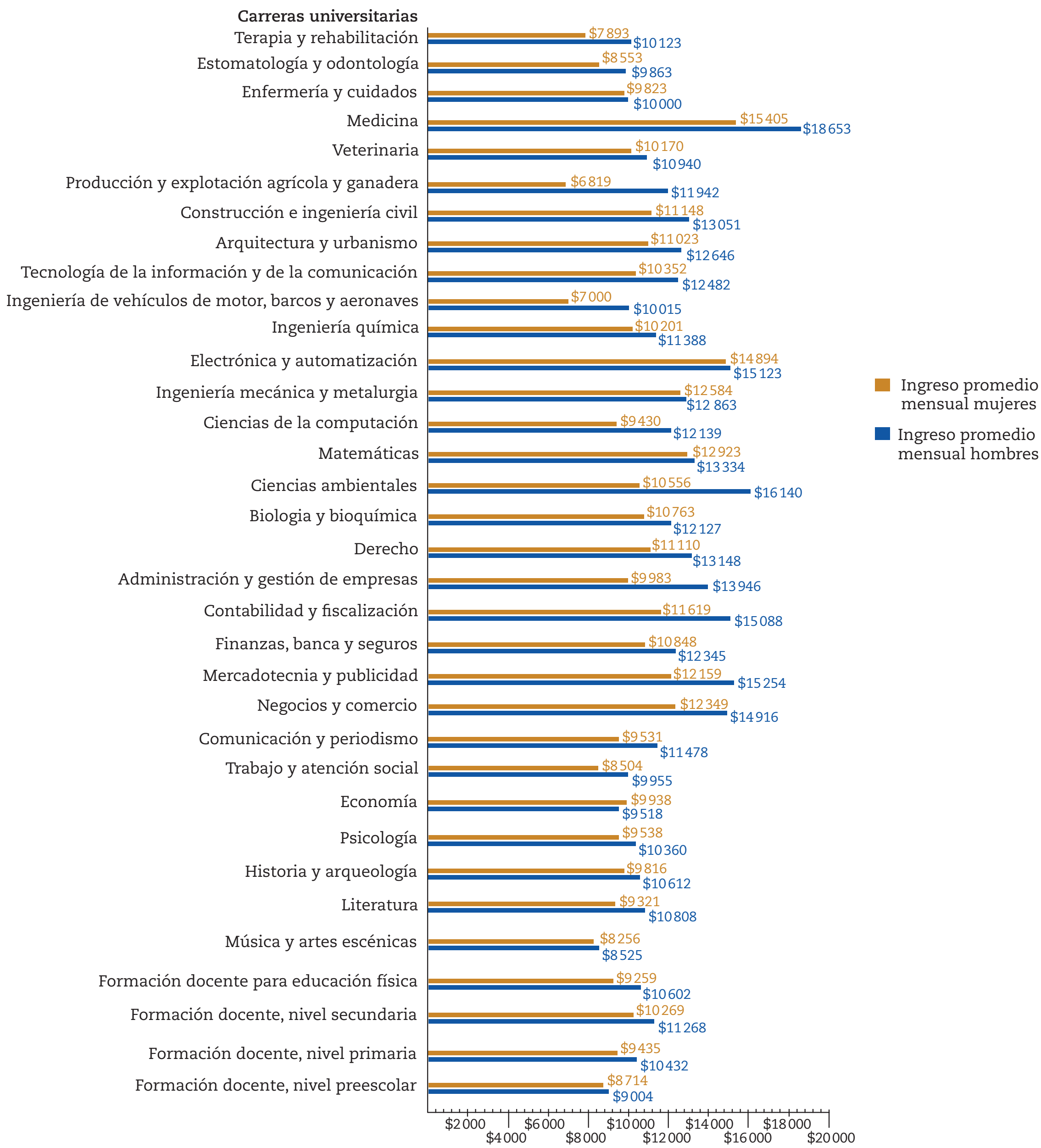
Si lo consideran adecuado, incluyan alguna pregunta que les permita obtener datos sobre otro aspecto que les interese conocer relacionado con sus compañeros, grupo, escuela o comunidad.

6. Entreguen una tarjeta a cada compañero para que la completen. Posteriormente, con las respuestas registradas, formen una base de datos. Pueden elaborarla en su cuaderno o en una computadora. Los datos que obtengan los usarán en la sesión 3.

Ingreso mensual promedio de un profesionista

1. Trabajen en equipo. Lean e interpreten la información de la siguiente gráfica; luego, realicen en su cuaderno lo que se les indica.

Ingreso promedio mensual de acuerdo con la carrera universitaria por género



Ingreso promedio mensual por género en pesos

Fuente: Instituto Mexicano para la Competitividad. Centro de Investigaciones en Política Pública.

a) Describan qué información presenta la gráfica anterior.

b) ¿Cuántos ingresos mensuales promedio son igual que $10 000 o más? ¿Cómo pueden saberlo?

c) ¿El ingreso mensual promedio de mujeres y hombres de cuántas carreras universitarias diferentes se registraron en total?

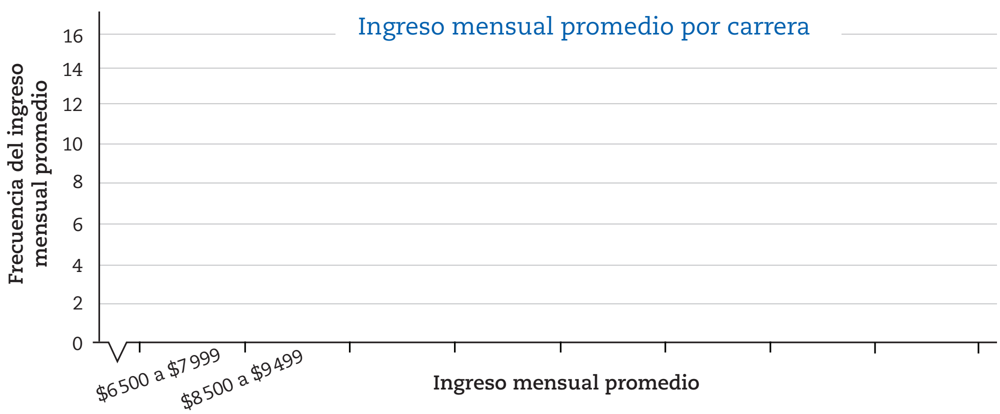
d) ¿Cuál es la carrera mejor pagada para las mujeres?

e) ¿En qué carrera o carreras pagan más a una mujer que a un hombre?

2. Utilicen el recurso informático *Estadísticas en la hoja de cálculo* para obtener la media aritmética, la mediana, la moda y la desviación media de conjuntos de datos.

3. Para continuar con el análisis de la información de la gráfica de la actividad 1, algunos de ustedes consideren los ingresos mensuales promedio por carrera universitaria de las mujeres y otros consideren los de los hombres.

a) Reorganicen los datos y elaboren el histograma o polígono de frecuencias de los ingresos mensuales promedio para hombres o para mujeres, según les corresponda.



b) Completen la tabla de abajo con los valores de las medidas estadísticas del conjunto de datos que les corresponde (ingreso mensual promedio de hombres o de mujeres). Si disponen de una calculadora u hoja de cálculo electrónica, pueden utilizarla para realizar los cálculos necesarios.

c) Ubiquen los valores de la mediana, media aritmética y desviación media en la gráfica y usen una línea vertical que interseque el eje horizontal para marcar el valor de cada medida del conjunto de datos. Luego, describan en su cuaderno la distribución de los conjuntos de datos que observan. Por ejemplo, ¿qué se observa sobre los valores del número de datos que quedan en cada lado del valor de la mediana? ¿Hay algún ingreso mensual promedio atípico?

Conjuntos de datos	
Mediana	
Rango	
Media aritmética	
Desviación media	

4. Con ayuda de su maestro, comparen sus respuestas de las actividades con las de sus compañeros. En caso necesario, corrijan los errores.

   a) Ahora, completen el párrafo con los valores que obtuvieron en la actividad anterior:

> Al analizar la información presentada en la gráfica de Ingreso mensual promedio de acuerdo con la carrera universitaria por género, se observa que el mínimo ingreso mensual promedio de las mujeres profesionistas es de ________ y el máximo es de ________, lo que representa un rango de ________. En el caso del mínimo ingreso mensual promedio de los hombres, se tiene que éste es de ________ y el máximo es ________, lo que representa una diferencia de ________.
>
> Al ordenar los ingresos mensuales promedio de los hombres, el valor del ingreso mensual promedio que está en el centro es ________, mientras que, en el conjunto de los ingresos mensuales promedio de las mujeres, la mediana es ________.
>
> El promedio general del ingreso mensual promedio de una mujer profesionista es de ________ con una variación media de ________, mientras que el promedio general del ingreso mensual promedio de un hombre profesionista es de ________ y la desviación media entre los ingresos mensuales promedio es ________.
>
> Se puede afirmar que los ingresos mensuales promedio de ________ (los hombres / las mujeres) tienen ________ (mayor / menor) variación que los ingresos mensuales promedio de ________ (los hombres / las mujeres).

   b) Consideren el análisis de la situación y respondan en su cuaderno: ¿cuál es el ingreso mensual promedio típico? Pueden usar un intervalo de ingresos para responder esto. Luego, expliquen por qué creen que su respuesta es correcta.

   c) Si se consideran los ingresos mensuales promedio tanto de los hombres como de las mujeres de una carrera universitaria que no esté incluida en el estudio o encuesta, ¿qué cantidades creen que tendrían? Expliquen por qué creen que su respuesta es correcta.

5. Elaboren un periódico mural que muestre los datos relevantes sobre el ingreso promedio mensual por carrera universitaria. Si es posible, investiguen e incluyan cuántos profesionistas, artesanos, técnicos, agricultores, pescadores o de otras actividades hay en su comunidad y qué ingreso mensual promedio tienen.

6. Comenten con su grupo y maestro cuál o cuáles carreras universitarias les interesan y cuáles no sabían que existían. Si les es posible, consulten el estudio cualitativo "La educación de las niñas y jóvenes mujeres en Ciencias, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas (CTIM)", disponible en https://bit.ly/3fkH2ik

Para terminar

¿Qué nos preocupa hoy en día?

1. Trabajen en pareja. Consideren la información que muestran la gráfica y la tabla de distribuciones de frecuencias relativas de las respuestas diferentes que dieron 24 691 jóvenes a la pregunta "¿Cuáles son tus preocupaciones hoy en día?", de la "Encuesta de Tendencias Juveniles. Ciudad de México, 2018", disponible en https://bit.ly/2XaliQp

¿Cuáles son tus preocupaciones hoy en día? (%)

Total de jóvenes que contestaron la encuesta: 24 691

	Porcentajes totales por respuesta	Porcentajes por género e intervalo de edad					
		Total	12-17 años	18-29 años	Total	12-17 años	18-29 años
No tener dinero	41	38	29	44	45	27	48
Sacar buenas calificaciones	38	40	57	29	34	62	28
Fracasar	33	33	29	35	33	26	35
Tener amigos	15	15	20	12	13	23	11
No cumplir con las expectativas de los demás	11	12	12	12	11	11	11
La muerte	11	11	11	12	12	11	12
No tener las cosas que me gustaría poseer	10	10	10	11	11	9	11
No tener a alguien o algo en quien creer	8	8	8	8	8	7	9
No ser como los demás	8	8	8	7	8	10	8
Me da flojera casi todo y no sé por qué	7	8	10	6	7	9	6
Bajar de peso y verme bien para los demás	5	6	7	5	4	4	4
No tener novio / novia	5	5	6	5	5	5	5
Subtotales		16 078	7 095	8 983	8 613	1 902	6 711

a) De acuerdo con la información anterior, ¿cuántos jóvenes en total contestaron que les preocupa no tener dinero? ______________________

b) Si consideran sumar los porcentajes totales de las respuestas registradas, ¿qué porcentaje obtienen? ____________ ¿Qué significado tiene ese valor en el contexto de la situación? ______________________

c) ¿Cuántas mujeres de entre 12 y 17 años contestaron la pregunta? ____________

d) ¿Cuál es la mayor preocupación de las mujeres? ______________________

¿Hay algún intervalo de edad en que les preocupe más? ______________

En caso afirmativo, ¿en cuál? ______________________________

e) ¿Cuántos hombres en total contestaron la pregunta de la encuesta? ________

f) ¿Cuál es la mayor preocupación de los hombres? ______________________

¿Hay algún intervalo de edad en que les preocupe más? ______________

En caso afirmativo, ¿en cuál? ______________________________

g) ¿A quién le importa más no tener novio o novia, a los hombres o a las mujeres? ____________________ Justifica tu respuesta. ______________

____

h) ¿En qué intervalo de edad hay mayor variabilidad en el porcentaje de respuestas de los hombres y de las mujeres? ______________ Justifica tu respuesta.

____

i) ¿En qué intervalo de edad hay menor variabilidad en el porcentaje de respuestas de los hombres y de las mujeres? ______________ Justifica tu respuesta.

____

____

2. Comparen sus respuestas de las actividades con las de sus compañeros y con su maestro. En caso necesario, corrijan los errores. Además, continúen analizando la información que presentan los resultados. Por ejemplo, a cuántas mujeres de 12 a 17 años les interesa tener amigos, y realicen un sondeo en su grupo sobre si les inquietan las mismas situaciones o si existen otras que les preocupen.

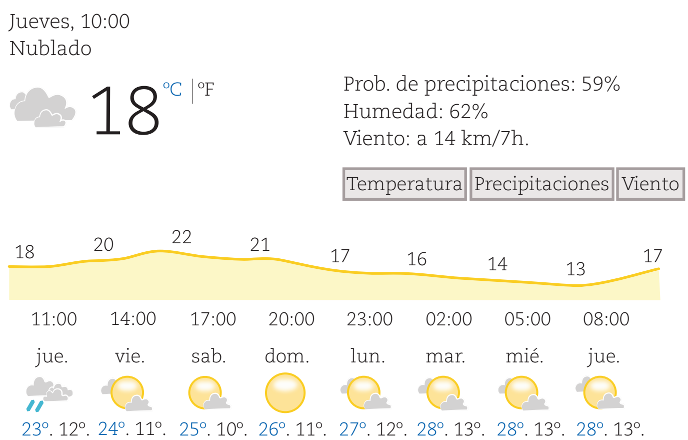
3. Trabajen en equipo. En su cuaderno, elaboren una tabla y gráfica de distribución de frecuencias que muestren los resultados para cada una de las respuestas completadas en las tarjetas de la actividad 5 de la sesión 1, así como los valores de las medidas de tendencia central, rango y desviación media en los casos en los que sea posible obtenerlos. Cada integrante debe recopilar las respuestas a una de las preguntas. Incluyan las gráficas y tablas en el periódico mural de la sesión anterior. Si es posible, usen una hoja de cálculo electrónica o *software* que les permita organizar y presentar sus resultados. Conserven las tarjetas con los datos, ya que posteriormente se utilizarán como barajas en la secuencia 27 para extraer información.

4. Observen el recurso audiovisual *Comparación de conjuntos de datos estadísticos* para analizar cómo se maneja y se presenta la información en distintas oficinas públicas y privadas para comparar conjuntos de datos generados por ellas.

27. Eventos mutuamente excluyentes 3

Sesión 1

Para empezar



Ejemplo de pronóstico del estado del tiempo.

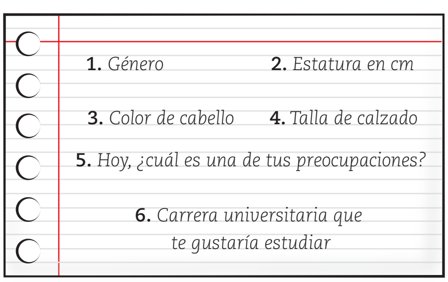
En la vida existen algunos sucesos que se pueden predecir. Su probabilidad de ocurrencia se mide en una escala de números entre el cero (evento imposible) y el uno (evento seguro). En medio, entre lo imposible y lo seguro, está lo probable.

La imagen muestra la vista de un pronóstico del estado del tiempo en determinado día y lugar. En un informe de este tipo se proporciona la temperatura probable en diferentes horas del día, así como la temperatura promedio; la probabilidad de precipitación o lluvia; el porcentaje de humedad y la velocidad del viento, entre otros aspectos. En la imagen se observa que hay un pronóstico de temperatura de 18 °C a las 10:00 horas, y se espera que la temperatura máxima sea de 23 °C y la mínima de 12 °C. ¿Cómo crees que fue posible predecir esas medidas de la temperatura? ¿Qué probabilidad hay de que se cumpla ese pronóstico? ¿Con base en qué datos crees que se determinan?

En esta secuencia calcularás la probabilidad de ocurrencia de diferentes eventos que pueden ser simples, compuestos o mutuamente excluyentes, para analizar situaciones aleatorias, como los juegos de azar y la consideración de si un juego es justo o no y, en este último caso, identificar si es posible compensar las condiciones o premios prometidos.

Manos a la obra

Pronóstico y oferta



1. Trabajen en pareja. Utilicen las tarjetas con los registros de las respuestas que recopilaron en la secuencia 26.

   Primero, revuelvan las tarjetas y, sin ver, extraigan una. Anoten los resultados que se piden en la tabla de la siguiente página.

Regresen la tarjeta y tomen otra al azar para extraer una tarjeta nueva y registrar sus resultados. Completen 10 registros para llenar la tabla y contesten las preguntas.

Registro de 10 tarjetas										
Tarjeta	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Género										
Estatura en cm										
Talla de calzado										

a) Si se toma un alumno al azar, ¿es más probable que sea hombre o mujer? ______

b) ¿Cuál es la probabilidad frecuencial de que sea hombre y mida más de 165 cm? ______

c) ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer y su talla de calzado sea mayor que 23 cm? ______

d) ¿Cuál es la probabilidad de que mida 160 cm de estatura y la talla de calzado sea 24 cm? ______

Dato interesante
Una de las maneras de saber qué les preocupa a los jóvenes es conocer sus hábitos. En los países desarrollados, 94% de los jóvenes de entre 15 y 24 años están conectados a internet, cifra que representa un porcentaje muy elevado si se considera que el promedio de conectividad de la población general es de 50%.

2. Utilicen la tabla de frecuencias que elaboraron en la secuencia 26. Consideren los valores de las frecuencias relativas de género, estatura y talla de calzado para contestar en su cuaderno.

a) Si se toma un alumno al azar, ¿es más probable que sea hombre o mujer? Justifiquen su respuesta.

b) ¿Cuál es la probabilidad frecuencial de que sea hombre y mida más de 165 cm?, ¿y de que sea mujer y su talla de calzado sea mayor de 23 cm?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que mida 160 cm de estatura y la talla de calzado sea 24 cm?

3. En grupo y con ayuda de su maestro, comparen y comenten las respuestas de las actividades 1 y 2. Describan lo que ocurre con los valores de los resultados que se obtienen en cada caso.

4. En algunos estados de la República se apoya a los padres de familia con vales de descuento para que los canjeen en algunos comercios y reciban uniformes y calzado para sus hijos. Contesten en su cuaderno: ¿de qué manera los responsables de ese tipo de comercios podrían usar información como la recolectada? ¿Qué es más posible que ocurra, recibir vales para uniformes de mujer o de hombre? Si suponen que los datos de la tabla de arriba pertenecen a uno de los comercios participantes, ¿qué número de talla o tallas de calzado para mujer es más posible que pidan?, ¿y para hombre?

5. Consideren las respuestas a la pregunta 6 de la tarjeta: *Carrera universitaria que te gustaría estudiar*. En parejas, organicen las respuestas de mujeres y hombres que quieren estudiar una carrera de Ciencias, Tecnología, Ingeniería o Matemáticas (CTIM), y completen la tabla de doble entrada que se muestra a la izquierda.

¿Le gustaría estudiar una carrera CTIM?			
Género	**Sí**	**No**	**Total**
Mujer			
Hombre			
Total			

6. Respondan en su cuaderno. Si se selecciona al azar a un alumno que haya respondido a la pregunta 6 de la tarjeta y se definen los eventos:

A: Le gustaría estudiar una carrera de CTIM.

B: Es mujer.

C: No le gustaría estudiar una carrera de CTIM.

a) ¿Puede ocurrir que el alumno seleccionado al azar cumpla con los eventos A y el C a la vez? ______________ ¿Por qué? ______________________

____

¿Cuál es la probabilidad de que…

b) el alumno seleccionado aleatoriamente sea mujer? ______________

c) el alumno seleccionado aleatoriamente quiera estudiar una carrera de CTIM?

____

d) ocurran los eventos A y B? ______________________

e) ocurran los eventos A y C? ______________________

f) ocurran los eventos A o C? ______________________

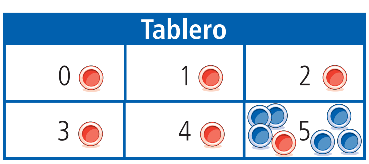
7. En grupo y con apoyo de su maestro, comparen y comenten sus respuestas. En caso de ser necesario, corrijan.

Sesión 2

Un juego de dados usando la diferencia

1. Trabajen en pareja. Jueguen "A quitar fichas".

Tablero		
0	1	2
3	4	5

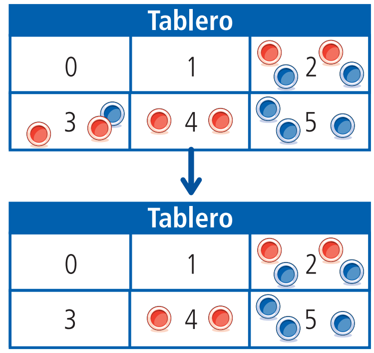


- Para jugar, requieren de dos dados de seis caras y de un tablero como el que se muestra a la izquierda.

  Además, cada jugador debe tener seis fichas de un mismo color y puede colocarlas como quiera en las casillas del 0 al 5. Por ejemplo, un jugador tiene seis fichas de color rojo y decide colocar una ficha en cada casillero, mientras que el otro jugador tiene seis fichas de color azul y coloca todas sus fichas en la casilla 5.

- Una vez que los jugadores colocan sus fichas, por turno, cada uno lanza ambos dados y quitan, si hay, la ficha o fichas de la casilla que indica la diferencia entre los puntos de la cara superior de los dados.

  Por ejemplo, si se distribuyen las fichas como se muestra en el tablero de la derecha y a un jugador, al lanzar los dados, le salen 5 y 2, la diferencia es 5 - 2 = 3. Entonces, deberá quitar sus fichas que están en la casilla 3.



- Gana el jugador que quite primero todas sus fichas del tablero. Registren en la tabla de abajo la diferencia que obtuvieron en cada lanzamiento.

Juego 1										
Número de lanzamiento	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Diferencia entre los puntos de la cara superior de los dados										

¿Quién ganó el juego 1? ______________________________

2. Realicen los juegos 2, 3 y 4. Antes de iniciar cada juego predigan, ¿quién de los dos jugadores creen que ganará y por qué?

En su cuaderno, registren los resultados de los lanzamientos y quién ganó en cada juego. Indiquen si se cumplió lo que esperaban o qué ocurrió.

Juego 2	**Juego 3**	**Juego 4**
Jugador 1. Casillas con número par.	Jugador 1. Casillas con números mayores que 2.	Jugador 1. Casilla del número 3.
Jugador 2. Casillas con número impar.	Jugador 2. Casillas con números menores o iguales que 2.	Jugador 2. Casillas con números diferentes de 3.

3. En grupo y con ayuda de su maestro, comenten y comparen sus resultados. Respondan en su cuaderno: ¿encontraron alguna estrategia para ganar el juego? ¿Creen que la estrategia que usaron les servirá para aumentar la probabilidad de ganar en cualquier juego?, ¿por qué?

Después, calculen la probabilidad teórica de los eventos indicados en los juegos anteriores para distinguir sus tipos, a fin de buscar la mejor colocación de las fichas para ganar un juego y seleccionar eventos que permitan que los jugadores tengan las mismas ventajas.

4. Lean y comenten la siguiente información.

Dos maneras de tener un juego de azar justo o equitativo son:
- Cuando, en cada turno, todos los jugadores tienen las mismas probabilidades de ganar.
- Cuando las reglas del juego favorecen de igual manera a todos los jugadores.

Comenten con sus compañeros de grupo y con su maestro qué condiciones se requieren para que los juegos anteriores sean justos considerando lo que acaban de leer.

Sesión 3

Para terminar

Otro juego de dados

1. Trabajen en pareja. Emma y Joel conocen un juego con dados en el que también se determina la diferencia y se disponen a jugarlo.

El juego es...

- Lanzan dos dados sucesivamente y calculan la diferencia de puntos entre ambos dados.
- Emma se anota un punto cuando el valor de la diferencia es 0, 1 o 2.
- Joel se anota un punto cuando la diferencia es 3, 4 o 5.
- El juego inicia con 20 puntos a repartir y termina cuando se han repartido todos los puntos.

a) Antes de iniciar el juego, predigan: ¿ambos jugadores tienen la misma posibilidad de ganar? __________ ¿Por qué? ______________________________

En caso contrario, ¿quién de los dos jugadores creen que ganará y por qué?

____

Realicen cinco veces el juego y registren sus resultados en una tabla de frecuencias como la siguiente.

Jugador	Evento: la diferencia de puntos es…	Conteo	Número de veces que ocurrió la diferencia (frecuencia absoluta)	Frecuencia relativa
Emma gana	0			
	1			
	2			
Joel gana	3			
	4			
	5			
			100	

b) Consideren los resultados de la tabla y revisen sus respuestas a las preguntas del inciso a). ¿Se confirma su predicción, o qué ajustes debe hacen para lograrla?

____

____

2. En su cuaderno realicen lo que se pide.

a) Elaboren un diagrama de árbol con todos los resultados posibles que pueden tener al lanzar dos dados cúbicos no cargados sucesivamente. Por ejemplo, (1,1), (1,2),… etcétera.

b) En el diagrama de árbol, identifiquen los dos resultados posibles del evento compuesto A: la diferencia es 5 puntos. Márquenlos con color rojo.

c) Ahora, marquen todos los resultados posibles de los eventos. B: la diferencia es 4 puntos (de azul); C: la diferencia es 3 puntos (de verde); D: la diferencia es 2 puntos (de amarillo); E: la diferencian es 1 punto (de café); F: la diferencia es 0 (de gris).

d) Escriban los resultados posibles que son favorables a los eventos A y B.

e) Calculen la probabilidad de cada uno de los seis eventos.

f) ¿Cuál es la probabilidad de que Emma gane el juego?, ¿y la probabilidad de que gane Joel?

3. Lean y comenten la información.

Otra manera de tener un juego de azar justo o equitativo es cuando hay eventos que tienen mayor probabilidad de ocurrencia o reglas que favorecen un resultado en particular, entonces se compensa con la distribución de los premios de los eventos con menor probabilidad.

4. ¿Es equitativo el juego de Emma y Joel? ______________. Si se decide compensar con puntos al jugador que tiene menos posibilidades de ganar, ¿cuántos puntos se le podrían dar? ______________________________________

____

____

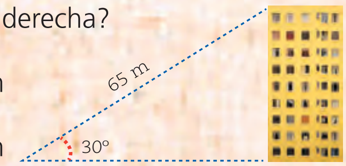
5. Observa el recurso audiovisual *Juegos de azar* para identificar los resultados y definir eventos que permitan generar juegos equitativos.

6. Usa el recurso informático *Juegos de azar* para calcular la probabilidad de eventos simples, compuestos, mutuamente excluyentes y complementarios.

Evaluación

Marca con una ✓ las respuestas correctas.

1. ¿Cuánto mide la altura del edificio que se muestra a la derecha?

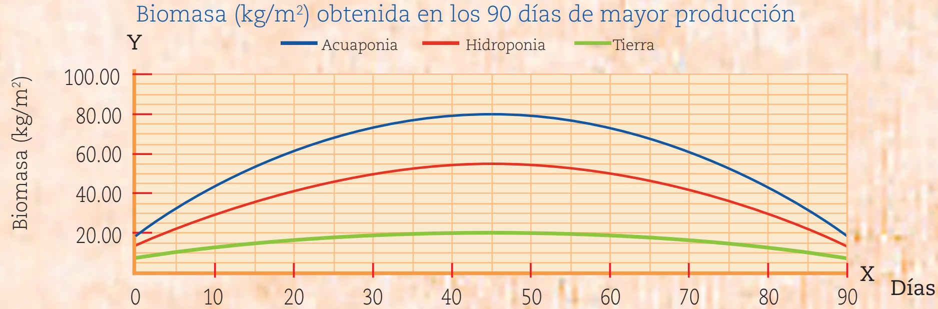


Ⓐ 56.29 m Ⓑ 37.52 m

Ⓒ 32.50 m Ⓓ 30.30 m

2. Una manera de medir el rendimiento de los cultivos es calcular cuántos kilogramos de materia viva o biomasa se producen por metro cuadrado. La siguiente gráfica registra la biomasa por metro cuadrado en los 90 días de mayor producción de jitomate en tres tipos distintos de cultivo: sembrado en tierra, sembrado en hidroponia y mediante un sistema de acuaponia (donde también se agregó a lo obtenido a este cálculo la producción de peces). Con esta información, responde lo que se te pide.

Biomasa (kg/m²) obtenida en los 90 días de mayor producción



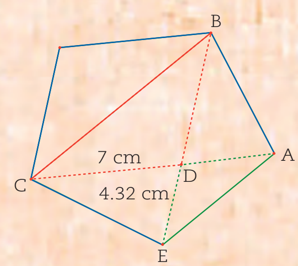
¿Cuál de los cultivos tiene mejor rendimiento en kilogramos por metro cuadrado?

Ⓐ Acuaponia Ⓑ Hidroponia Ⓒ Tierra Ⓓ Todos por igual

3. Con base en la gráfica anterior, ¿a los cuántos días se observa la máxima producción para los tres tipos de cultivo?

Ⓐ 45 Ⓑ 50 Ⓒ 70 Ⓓ 90

4. Indica cuál es la razón de semejanza ΔBCD: ΔAED de los triángulos que se forman en el pentágono regular que se muestra a la derecha.



Ⓐ $\frac{1}{2}$ Ⓑ 1.62

Ⓒ 4.32 Ⓓ 7

5. ¿Cuál es la medida del lado AE del pentágono?

Ⓐ 4.32 cm Ⓑ 7 cm Ⓒ 7.5 cm Ⓓ 11.32 cm

6. ¿Qué opción corresponde a un múltiplo de 5, siendo x un número natural cualquiera?

Ⓐ $5 + x$ Ⓑ $\frac{5}{x}$ Ⓒ $5x$ Ⓓ $5 - x$

7. En una urna hay 50 canicas numeradas del 1 al 50. Sin ver, se saca una canica de la urna. Consideren los siguientes eventos.

La canica que sale tiene un número…

A: menor que 10. **B:** de dos dígitos.

C: mayor que 25. **D:** terminado en número par.

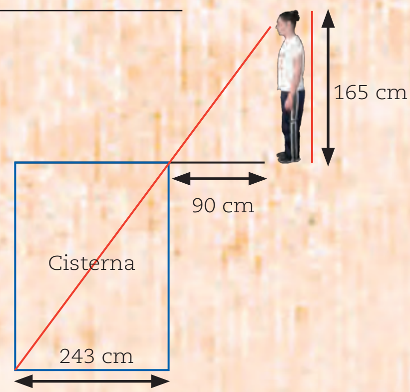
E: que es múltiplo de 5.

Si Manuel y Fernanda desean sacar canicas de la urna, ¿cuáles de los eventos deben realizar para que el juego sea justo?

Ⓐ A y B Ⓑ A y E Ⓒ C y D Ⓓ D y E

Lee cada situación y haz lo que se te pide.

1. Según los datos de la imagen, ¿cuál es la profundidad de la cisterna? ________________



2. De acuerdo con el valor del discriminante, escribe dentro del paréntesis correspondiente cuántas soluciones en los números racionales o irracionales tiene cada una de las siguientes ecuaciones cuadráticas.

a) $x^2 - 20x + 100 = 0$ (________________)

b) $x^2 - 3x + 2 = 0$ (________________)

c) $x^2 - 2x + 3 = 0$ (________________)

3. El largo de un terreno rectangular mide el triple de lo que mide el ancho. Al aumentar 12 m el largo y 6 m el ancho, el área original se duplicó.

Con base en esta información, anota lo que se pide.

a) Medidas originales del terreno.

Largo: ____________ Ancho: ____________ Área: ____________

b) Medidas aumentadas del terreno.

Largo: ____________ Ancho: ____________ Área: ____________

c) Ecuación que permite hallar la medida original del ancho del terreno.

____

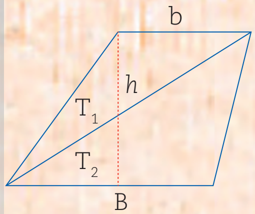
d) Soluciones de la ecuación: x_1 = ____________ x_2 = ____________

4. ¿Cuál o cuáles son los valores de la abscisa en que la gráfica de cada función corta al eje X?

a) $y = x^2 - 4x + 4$ ____________________

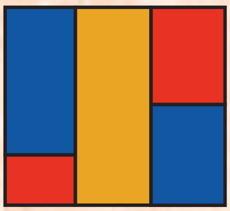
b) $y = x^2 + 4x + 3$ ____________________

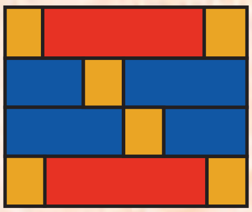
c) $y = x^2 - 5x + 6$ ____________________

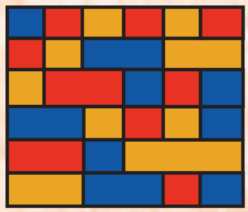


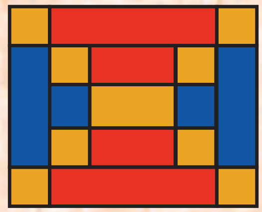
5. En el trapecio que se muestra, las áreas de los triángulos T_1 y T_2 son $\frac{bh}{2}$ y $\frac{Bh}{2}$, respectivamente. El área del trapecio es la suma de las áreas de los dos triángulos. Expresa el área del trapecio en forma factorizada. ____________________

6. En una feria tienen los siguientes tableros para jugar tiro al blanco. Si al lanzar el dardo cae en la zona amarilla, el jugador obtiene un premio de $50.


Tablero 1


Tablero 2


Tablero 3


Tablero 4

a) ¿Qué tablero eliges para jugar? ________________ Justifica tu respuesta. ________

____

____

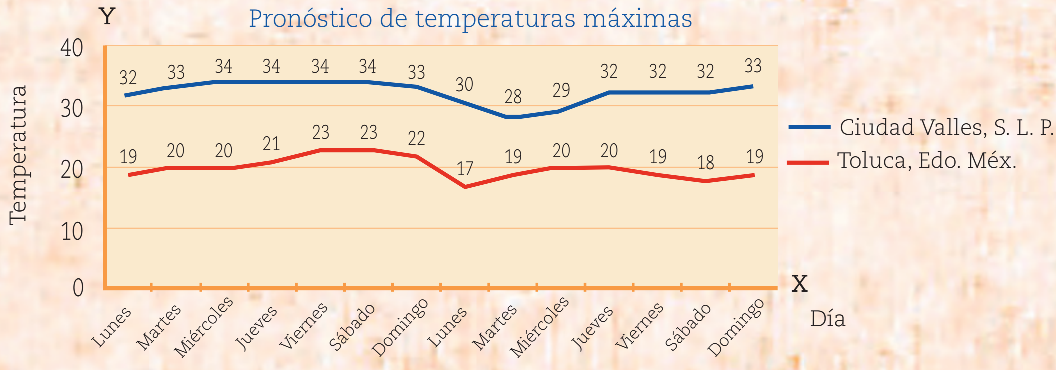
b) Si eliges el tablero 3, ¿cuál es la probabilidad de ganar? ____________________

c) ¿Cuál es la probabilidad de ganar en el tablero 1? ____________________

d) Si se cambian las condiciones del juego para que sea justo, ¿qué opciones son convenientes? Márcalas con una ✓.

☐ Quitar el tablero 2 ya que quedarán solamente tres tableros en los que la probabilidad de caer en la zona amarilla es igual.	☐ Cambiar el tablero 2 por un tablero en el que la probabilidad de caer en la zona amarilla sea igual que en el tablero 4.	☐ Cambiar el tablero 2 ya que los dos cuadritos azules del centro del tablero deben cambiar a color amarillo para que haya cuatro cuadritos y que la probabilidad de la zona amarilla sea $\frac{1}{3}$.	☐ Quitar el tablero 3 ya que quedarán solamente tres tableros en los que la probabilidad de caer en la zona amarilla será igual.

7. Utiliza la información de las gráficas y realiza los procedimientos necesarios para completar las afirmaciones. Las siguientes gráficas de línea muestran el pronóstico de las temperaturas máximas en °C para los próximos 14 días en dos ciudades de la República Mexicana.

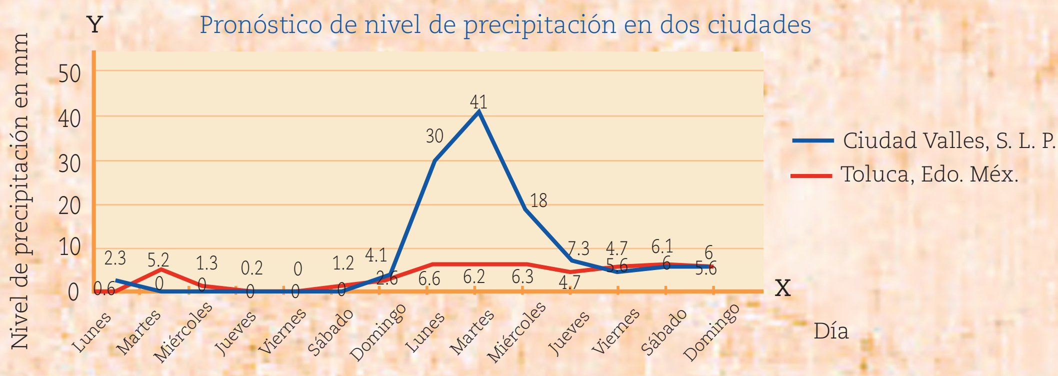


En Ciudad Valles, la menor temperatura que se espera es ________ y la mayor es ________ , mientras que en la ciudad de Toluca la menor temperatura es ________ y la mayor temperatura pronosticada es ________. En ambas ciudades, el rango de la temperatura máxima y mínima pronosticada es ________ y ________.

En Toluca, la temperatura máxima más frecuente pronosticada es ________ y, en Ciudad Valles, la más frecuente es ________ .

La temperatura máxima media pronosticada para Ciudad Valles es ________ con una desviación media de ________ . En el caso de la ciudad de Toluca, se pronostica que la temperatura máxima media sea ________ con una variación media de ________. De acuerdo con esta información, se espera que la temperatura máxima para las próximas dos semanas tenga ________ variación.
poca/mucha

8. Las siguientes gráficas de línea muestran el pronóstico del nivel de precipitación para los próximos 14 días en dos ciudades de la República.



a) De acuerdo con el pronóstico para la primera semana, ¿en qué ciudad se espera un mayor nivel de precipitación? ________________________________

b) ¿En qué ciudad se pronostica una posible tormenta? ________ ¿En qué datos basas tu respuesta?
____

c) Si se busca resumir la información de las gráficas, ¿cuál o cuáles valores del nivel de precipitación esperado para cada ciudad representan mejor el pronóstico? Marca con una ✓ tu elección.

- ☐ Media: Cd. Valles, 8.54 mm / Toluca, 3.72 mm, porque ________________________.
- ☐ Mediana: Cd. Valles, 4.40 mm / Toluca, 4.95 mm, porque ________________________.
- ☐ Moda: Cd. Valles, 0 mm / Toluca, 5.6 mm, porque ________________________.
- ☐ Rango: Cd. Valles, 41 mm / Toluca, 6.6 mm, porque ________________________.

Tablas trigonométricas

Ángulo	Seno	Coseno	Tangente
1°	0.0175	0.9998	0.0175
2°	0.0349	0.9994	0.0349
3°	0.0523	0.9986	0.0524
4°	0.0698	0.9976	0.0699
5°	0.0872	0.9962	0.0875
6°	0.1045	0.9945	0.1051
7°	0.1219	0.9925	0.1228
8°	0.1392	0.9903	0.1405
9°	0.1564	0.9877	0.1584
10°	0.1736	0.9848	0.1763
11°	0.1908	0.9816	0.1944
12°	0.2079	0.9781	0.2126
13°	0.2250	0.9744	0.2309
14°	0.2419	0.9703	0.2493
15°	0.2588	0.9659	0.2679
16°	0.2756	0.9613	0.2867
17°	0.2924	0.9563	0.3057
18°	0.3090	0.9511	0.3249
19°	0.3256	0.9455	0.3443
20°	0.3420	0.9397	0.3640
21°	0.3584	0.9336	0.3839
22°	0.3746	0.9272	0.4040
23°	0.3907	0.9205	0.4245
24°	0.4067	0.9135	0.4452
25°	0.4226	0.9063	0.4663
26°	0.4384	0.8988	0.4877
27°	0.4540	0.8910	0.5095
28°	0.4695	0.8829	0.5317
29°	0.4848	0.8746	0.5543
30°	0.5000	0.8660	0.5774
31°	0.5150	0.8572	0.6009
32°	0.5299	0.8480	0.6249
33°	0.5446	0.8387	0.6494
34°	0.5592	0.8290	0.6745
35°	0.5736	0.8192	0.7002
36°	0.5878	0.8090	0.7265
37°	0.6018	0.7986	0.7536
38°	0.6157	0.7880	0.7813
39°	0.6293	0.7771	0.8098
40°	0.6428	0.7660	0.8391
41°	0.6561	0.7547	0.8693
42°	0.6691	0.7431	0.9004
43°	0.6820	0.7314	0.9325
44°	0.6947	0.7193	0.9657
45°	0.7071	0.7071	1.0000

Ángulo	Seno	Coseno	Tangente
46°	0.7193	0.6947	1.0355
47°	0.7314	0.6820	1.0724
48°	0.7431	0.6691	1.1106
49°	0.7547	0.6561	1.1504
50°	0.7660	0.6428	1.1918
51°	0.7771	0.6293	1.2349
52°	0.7880	0.6157	1.2799
53°	0.7986	0.6018	1.3270
54°	0.8090	0.5878	1.3764
55°	0.8192	0.5736	1.4281
56°	0.8290	0.5592	1.4826
57°	0.8387	0.5446	1.5399
58°	0.8480	0.5299	1.6003
59°	0.8572	0.5150	1.6643
60°	0.8660	0.5000	1.7321
61°	0.8746	0.4848	1.8040
62°	0.8829	0.4695	1.8807
63°	0.8910	0.4540	1.9626
64°	0.8988	0.4384	2.0503
65°	0.9063	0.4226	2.1445
66°	0.9135	0.4067	2.2460
67°	0.9205	0.3907	2.3559
68°	0.9272	0.3746	2.4751
69°	0.9336	0.3584	2.6051
70°	0.9397	0.3420	2.7475
71°	0.9455	0.3256	2.9042
72°	0.9511	0.3090	3.0777
73°	0.9563	0.2924	3.2709
74°	0.9613	0.2756	3.4874
75°	0.9659	0.2588	3.7321
76°	0.9703	0.2419	4.0108
77°	0.9744	0.2250	4.3315
78°	0.9781	0.2079	4.7046
79°	0.9816	0.1908	5.1446
80°	0.9848	0.1736	5.6713
81°	0.9877	0.1564	6.3138
82°	0.9903	0.1392	7.1154
83°	0.9925	0.1219	8.1443
84°	0.9945	0.1045	9.5144
85°	0.9962	0.0872	11.4301
86°	0.9976	0.0698	14.3007
87°	0.9986	0.0523	19.0811
88°	0.9994	0.0349	28.6363
89°	0.9998	0.0175	57.2900
90°	1.0000	0.0000	Infinito

Bibliografía

Blatner, David (2003). *El encanto de pi*, México, Aguilar.

Bosch Giral, Carlos *et al*. CDMX (2002). *Una ventana a las incógnitas*, México, Santillana (Biblioteca Juvenil Ilustrada).

_________ (2002). *Una ventana al infinito*, México, Santillana (Biblioteca Juvenil Ilustrada).

Castelnuovo, Emma (2001). *De viaje con la matemática. Imaginación y razonamiento matemático*, México, Trillas.

CDMX (2018). "Encuesta de tendencias juveniles 2018", México, CDMX.

Crilly, Tony (2014). *50 cosas que hay que saber sobre matemáticas*, Barcelona, Ariel.

Guedj, Denis (2011). *El imperio de los números. Descubrir la ciencia y la tecnología*, Barcelona, Blume (Biblioteca Ilustrada).

Hernández Garciadiego, Carlos (2002). *La geometría en el deporte*, México, Santillana (Biblioteca Juvenil Ilustrada).

_________ (2002). *Matemáticas y deportes*, México, Santillana (Biblioteca Juvenil Ilustrada).

IFT (2019). "La educación de las niñas y jóvenes mujeres en ciencias, tecnología, ingeniería y matemáticas", México, IFT.

IMCO, A. C. (2019). "Compara carreras 2019", México. IMCO.

Jiménez, Douglas (2010). *Matemáticos que cambiaron al mundo. Vidas de genios del número y la forma que fueron famosos y dejaron huella en la historia*, Providencia, Chile, Tajamar Editores.

Jouette, André (2000). *El secreto de los números*, Barcelona, Ediciones Robinbook.

Noreña Villarías, Francisco *et al*. (2002). *El movimiento*, México, Santillana (Biblioteca Juvenil Ilustrada).

Peña, José Antonio de la (2002). *Geometría y el mundo*, México, Santillana (Biblioteca Juvenil Ilustrada).

_________ (2002). *Matemáticas y la vida cotidiana*, México, Santillana (Biblioteca Juvenil Ilustrada).

_________ (2005). *Números para contar y medir, crear y soñar*. México, Santillana (Huellas de Papel).

Peña, José Antonio de la y Michael Barot (2006). *Retos. Un acercamiento de la educación para la vida*, México, Santillana.

Perelman, Yakov (1995). *Álgebra recreativa*, México, Planeta.

Reid, Constance (2008). *Del cero al infinito. Por qué son interesantes los números*, Pablo Martínez Lozada (trad.), México, Consejo Nacional para la Cultura y las Artes.

Rodríguez Vidal, Rafael y María del Carmen Rodríguez Rigual (1986). *Cuentos y cuentas de los matemáticos*, Barcelona, Reverté.

Ruiz, Concepción *et al*. (2002). *Crónicas geométricas*, México, Santillana (Biblioteca Juvenil Ilustrada).

Ruiz, Concepción y Sergio de Régules (2002). *Crónicas algebraicas*, México, Santillana (Biblioteca Juvenil Ilustrada).

S/A (2018), *Guía básica de accesibilidad para personas con discapacidad en edificios y áreas de atención ciudadana de la Secretaría de Finanzas*, Estado de México, Gobierno del Estado de México.

Sánchez Torres, Juan Diego (2012). *Recreamáticas. Recreaciones matemáticas para jóvenes y adultos*, Madrid, Rialp.

Tahan, Malba (2005). *El hombre que calculaba*, Basilio Lozada (trad.), México, SEP-Limusa (Libros del Rincón).

Referencias electrónicas

FAO. "Cada gota cuenta". Disponible en http://www.fao.org/fao-stories/article/es/c/1113809/ (Consultado el 11 de octubre de 2020).

_______ *El estado mundial de la pesca y la acuicultura*. Disponible en http://www.fao.org/3/CA0190es/CA0190es.pdf (Consultado el 11 de octubre de 2020).

Geogebra. Disponible en http://www.geogebra.org (Consultado el 11 de octubre de 2020).

Instituto Mexicano para la Competitivdad. Centro de Investigaciones en Política Pública. Disponible en https://imco.org.mx/ (Consultado el 11 de octubre de 2020).

IXL Math On line. Disponible en http://www.ixl.com/math/ (Consultado el 11 de octubre de 2020).

Khan Academy. Disponible en https://es.khanacademy.org/math/eb-1-secundaria-nme (Consultado el 11 de octubre de 2020).

ONU, "Los países más poblados". Disponible en https://www.un.org/es/sections/issues-depth/population/index.html (Consultado el 11 de octubre de 2020).

Strathern, Paul (1999). *Pitágoras y su teorema*, Siglo XXI, España (Los científicos y sus descubrimientos). Disponible en http://www.librosmaravillosos.com/pitagorasysuteorema/pdf/Pitagoras%20y%20su%20teorema%20-%20Paul%20Strathern.pdf (Consultado el 11 de octubre de 2020).

Créditos iconográficos

Ilustración

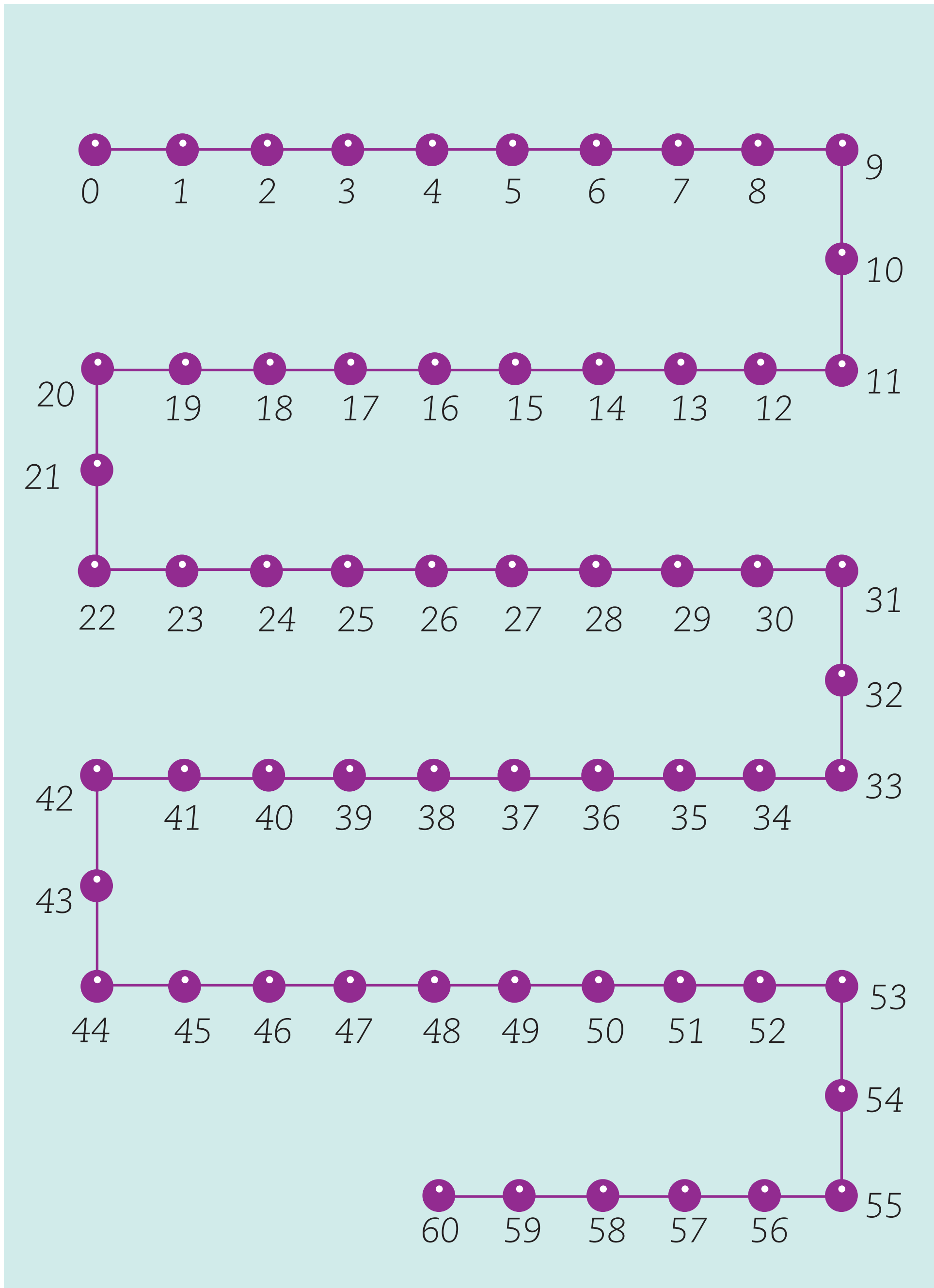
María Itzel Alcántara Jurado: **pp.** 10, 16, 20, 23, 33, 34, 57-59, 69, 72, 76, 85, 92, 156, 172, 238, 248, 250 y 256.
Roberto Flores Angulo: **pp.** 10, 68.
Carolina Tovar González: **pp.** 22, 38, 53, 54, 66, 89, 116, 120, 137, 206, 218, 228-236, 239, 240 y 242.

Fotografía

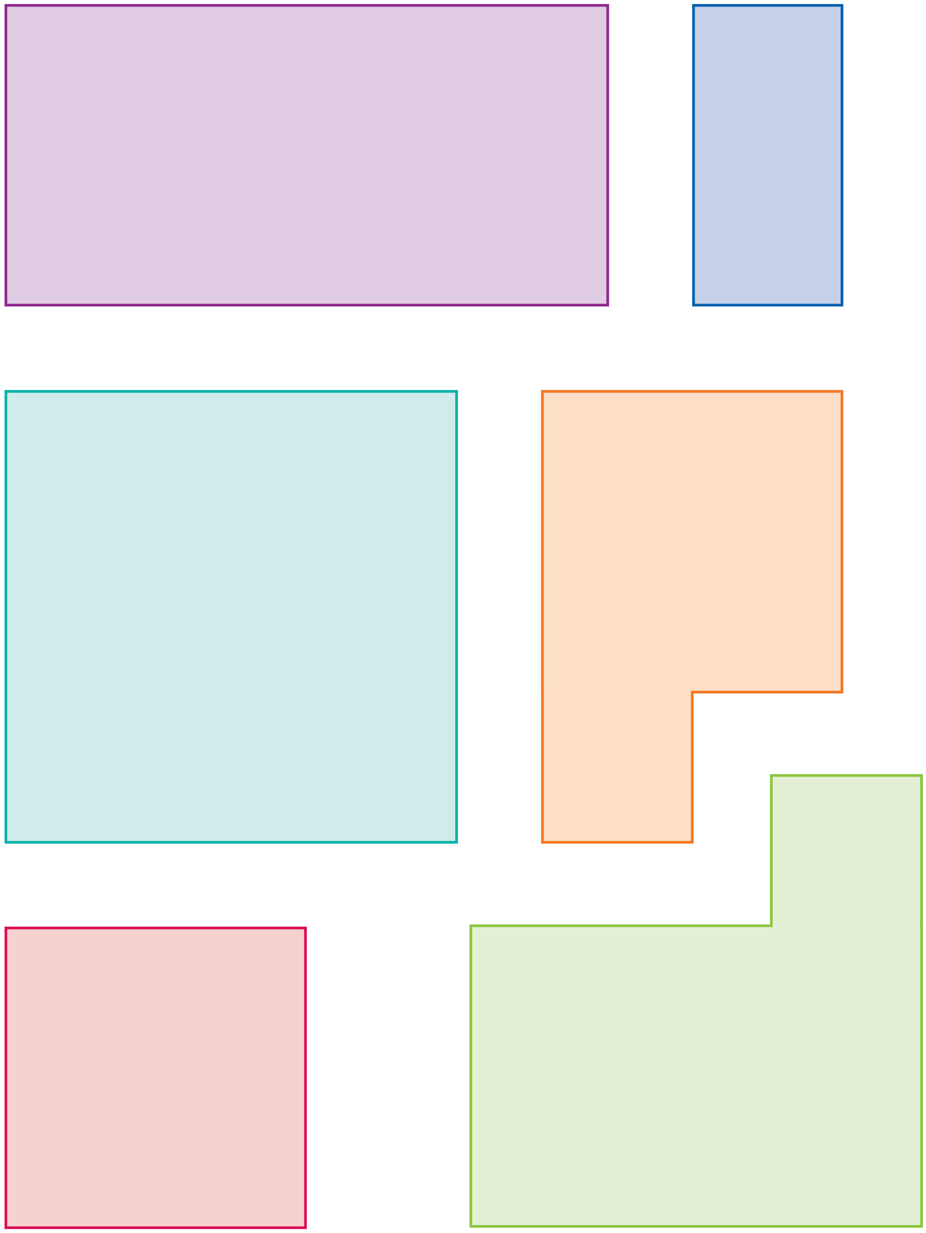
pp. 14-15: *Orígenes del universo*, vidriera, © Humberto Ortega/Shutterstock.com; **p. 30:** (arr.) vitral de las rosetas del coro alto, Artes Liberales del pórtico sur de la fachada principal de la catedral de San Esteban de Auxerre, en Borgoña, Francia; (ab.) personaje en vitral de plomo, fotografía de scholty1970, bajo licencia CC0/Pixabay 3984958; **p. 31:** (arr.) vitral en ventana, fotografía de tikhonnetpro, bajo licencia CC0/Pixabay 1710368; (centro izq.) *Hombre Sol* del Cosmovitral Jardín Botánico, 1978-1980, Leopoldo Flores Valdés (1934-2016), aproximadamente 3200 m², Toluca, México, fotografía de Alejandro Linares García, bajo licencia CC BY-SA 3.0; (centro der.) *Búho gigant*e del Cosmovitral Jardín Botánico, 1978-1980, Leopoldo Flores Valdés (1934-2016), aproximadamente 3200 m², Toluca, México, fotografía de Lexaxis7, bajo licencia CC BY-SA 3.0; (ab.) vista exterior de la entrada principal del Cosmovitral Jardín Botánico, 1978-1980, Leopoldo Flores Valdés (1934-2016), aproximadamente 3200 m², Toluca, México, fotografía de Alejandro Linares García, bajo licencia CC BY-SA 3.0; **p. 32:** ventana de corte de piedra de ágata de Sigmar Polke en Grossmünster (Gran catedral) de Zúrich, fotografía de Erwin Meier, bajo licencia CC BY-SA 3.0; **p. 33:** vitral en forma de rosetón, fotografía de falco bajo licencia CC0/Pixabay 515229; **p. 36:** *Ventanas americanas*, 1977, Marc Chagall (1887-1985), vitral, 244 × 978 cm, Art Institute of Chicago, Estados Unidos, fotografía de Karen Arnal; **p. 46:** la hora de la Tierra, fotografía de sumitsahare bajo licencia CC0/Pixabay 4439728; **p. 52:** Museo de las Californias, Centro Cultural Tijuana (CECUT), Baja California, fotografía de vladimix, bajo licencia CC BY-SA 2.0; **p. 56:** (arr.) modelo simple de ferrocarril a escala H0 (1:87), bajo licencia CC BY-SA 4.0; (ab.) paisaje de montañas, fotografía de Bessi, bajo licencia CC0/Pixabay 736886 **p. 66:** rampa para silla de ruedas, Ciudad de México, fotografía de Irene León Coxtinica/Archivo iconográfico DGME/SEB/SEP; **p. 70:** calentador de agua solar, © mipan/Shutterstock.com; **p. 73:** escalera de metal, © denisik11/Shutterstock.com; **p. 79:** calculadora, bajo licencia CC0/Freepng.es; **p. 84:** escaramuza o Adelita, 2018, Apizaco, México, © Cris_mh/Shutterstock.com; **p. 94:** técnico trabajando con equipos, © PICADORPICTURES/Shutterstock.com; **pp. 96-97:** puente de arco moderno, © doraisa/Shutterstock.com; **p. 98:** juego activo fórmula uno, aislado y en carretera, para tráfico o juego de carreras, © MakeMore Move/Shutterstock.com; **p. 101:** fotografía de Ana Laura Delgado/Archivo iconográfico DGME/SEB/SEP; **p. 106:** fotografía de Raúl Barajas/Archivo iconográfico DGME/SEB/SEP; **p. 108:** (arr.) *Las chinampas*, siglo XIV-XVI, Museo de la Ciudad de México; (centro) planta de verdolaga, © wimfirm/ Shutterstock.com; (ab.) planta de perejil, © Izf/Shutterstock.com; **p. 126:** fotografía de Ana Laura Delgado/Archivo iconográfico DGME/SEB/SEP; **p. 136:** Circuito Mágico del Agua del Parque de la Reserva, Lima, Perú, fotografía de Matt Werner, bajo licencia CC BY-NC-SA 2.0; **p. 150:** fotografía de Ana Laura Delgado/Archivo iconográfico DGME/SEB/SEP; **p. 152:** fotografía de Ana Laura Delgado/Archivo iconográfico DGME/SEB/SEP; **p. 156:** pirámide egipcia de Giza, © O. Alexey/Shutterstock.com; **p. 160:** pirámide en Dahshur, desierto del Sahara, Egipto, © Sergey-73/Shutterstock.com; **p. 164:** pareja llevando sofá en casa, © Monkey Business Images/Shutterstock.com; **p. 171:** pirámide de Giza, © timothy parrant/Shutterstock.com; **p. 180:** (arr.) retrato de Reginald Crundall Punnett, © 2012 por la Genetics Society of America (GSA), cortesía del Master and Fellows de Gonville y Caius College, Cambridge, en https://bit.ly/2WGo4MU (Consultado el 18 de mayo de 2020); (ab.) cuadro de Punnet, diagrama de Madeleine Price Ball, bajo licencia CC0 1.0; **p. 184:** *Staphylococcus aureus* y glóbulos, National Institutes of Health (NIH), bajo licencia CC BY-NC 2.0; **p. 191:** pirámide de plástico de juguete, © Olga Kovalenko/Shutterstock.com; **p. 192:** (centro) Sol, fotografía de WikiImages, bajo licencia CC0/Pixabay 11582; (arr. y ab.) la Tierra, fotografía de WikiImages, bajo licencia CC0/Pixabay 11015; **pp. 192-193:** Vía Láctea, fotografía de Nikiko, bajo licencia CC0/Pixabay 472971; **p. 194:** (2009) Hermann Günther Graßmann, en: Petsche H.J., Keßler G., Kannenberg L., Liskowacka J. (eds.) Hermann Graßmann Roots and Traces. Birkhäuser Basel, en https://bit.ly/3ntHqA7 (Consultado el 10 de septiembre de 2020); **p. 196:** lápiz, bajo licencia CC0/Freepng.es; **p. 228:** ingeniero forestal, © Serrgey75/Shutterstock.com; **p. 239:** (izq.) teodolito, fotografía de qfwfq78, bajo licencia CC BY-NC-ND 2.0; (der.) teodolito DTM-A20, fotografía de PhY, bajo licencia CC BY-SA 3.0; **p. 240:** bandera de México, © railway fx/Shutterstock.com; **p. 241:** (arr.) calentador solar, bajo licencia CC0/Freepng.es; (centro) trampolín pequeño para parques de skate, © 3DMAVER/Shutterstock.com; (ab.) carpa, bajo licencia CC0/Freepng.es; **p. 242:** calentador solar de agua, © mi- pan/Shutterstock.com; **p. 243:** (arr.) pirámide de Keops, bajo licencia CC0/Pexels.com; (ab.) casa noruega, fotografía de Manolo Franco, bajo licencia CC0/Pixabay 1288864; **p. 262:** edificio, fotografía de Afonso Lima, bajo licencia CC0/FreeImages.com 1223429; **p. 263:** joven de perfil, fotografía de Mar Molina Aja.

Matemáticas. Tercer grado. Telesecundaria.
se imprimió por encargo
de la Comisión Nacional de
Libros de Texto Gratuitos, en los
talleres de , con domicilio en
en el mes de de 20 .
El tiraje fue de ejemplares.

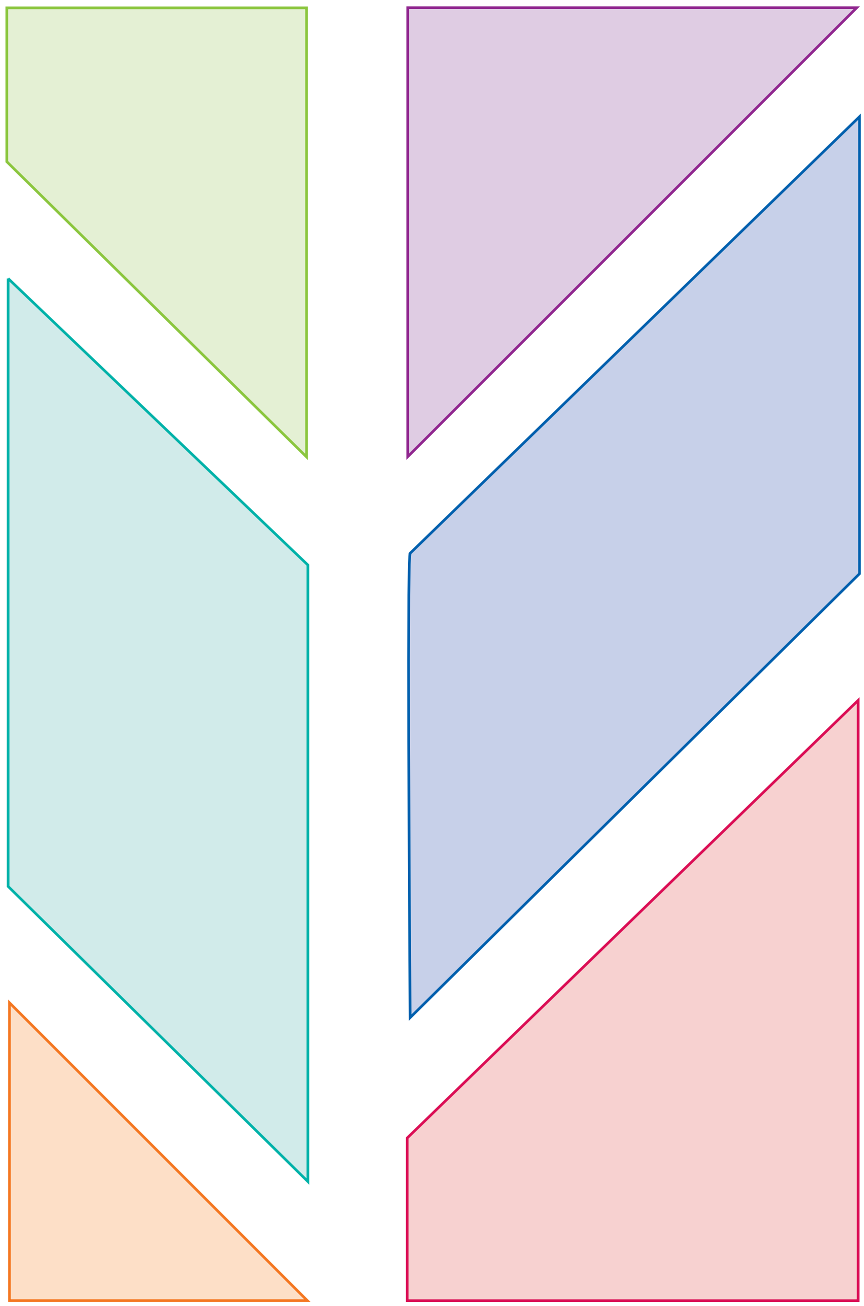
Recortable 1



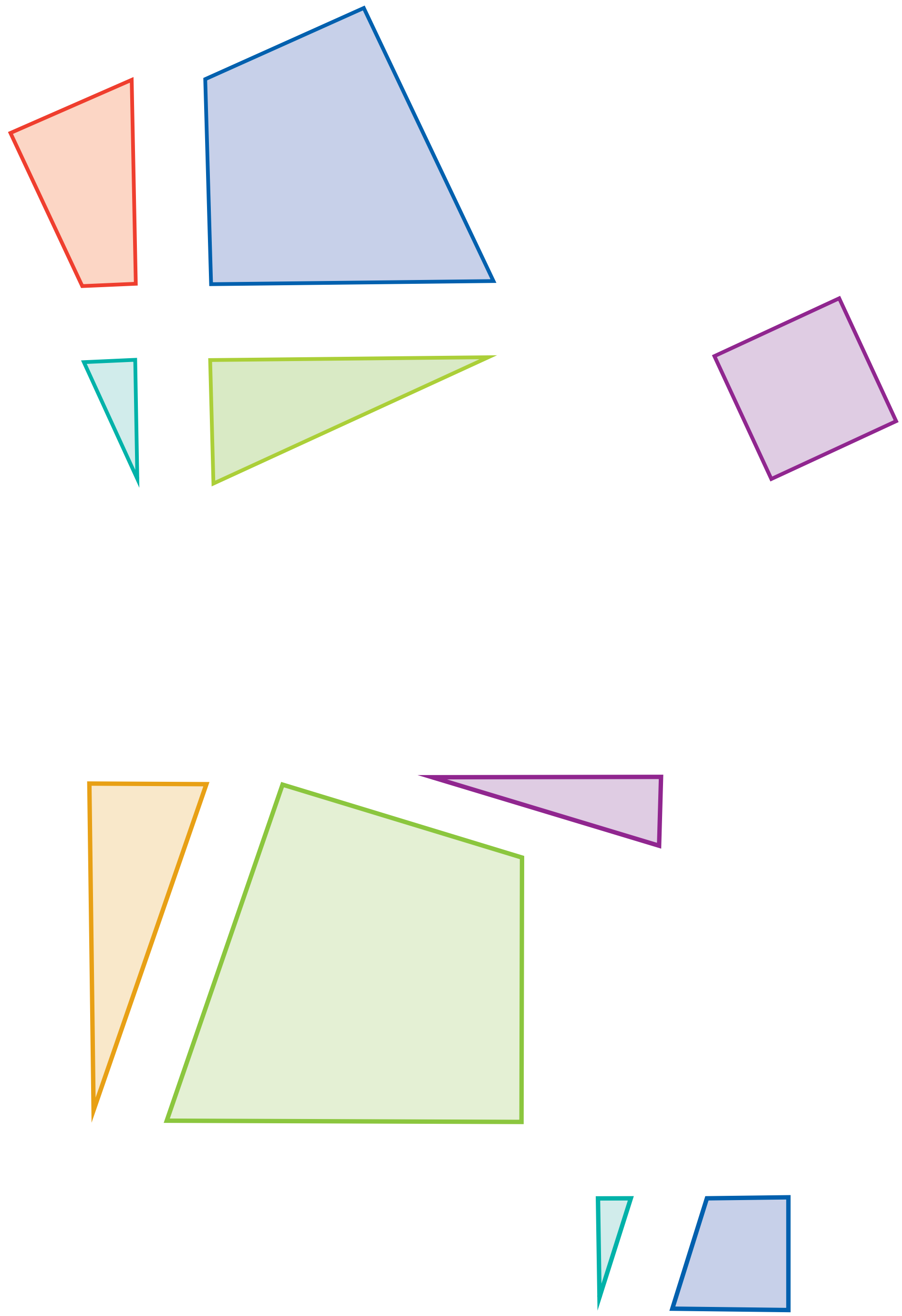
Recortable 2



Recortable 3



Recortable 4



Recortable 5