Miércoles
06
de julio

3° de Secundaria
Matemáticas

Resolución de problemas integradores. Sentido numérico y pensamiento algebraico II

Aprendizaje esperado: *desarrolla habilidades que le permitan plantear y resolver problemas usando las herramientas matemáticas, tomar decisiones y enfrentar situaciones no rutinarias.*

Énfasis: *consolidar la resolución de problemas. Sentido numérico y pensamiento algebraico II.*

¿Qué vamos a aprender?

Los materiales para utilizar son tu cuaderno de apuntes, bolígrafo, lápiz y goma.

Elabora tus propias notas o resumen con los datos importantes. También anota en tu cuaderno cualquier duda o inquietud que surja al resolver las situaciones de la sesión.

¿Qué hacemos?

En el eje “Sentido numérico y pensamiento algebraico” se destaca el estudio de aritmética y álgebra, lo cual implica utilizar los números y las operaciones en diferentes contextos y modelar situaciones, es decir, expresarlas en lenguaje matemático y efectuar los cálculos necesarios.

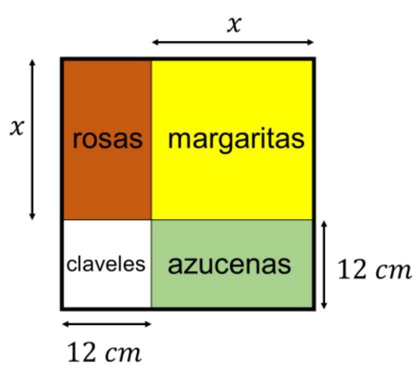
En este eje se desprenden varios temas y para cada uno hay una secuencia de contenidos que van de menor a mayor dificultad, así que en esta sesión estudiarás los productos notables, sucesiones, ecuaciones cuadráticas y la fórmula general.

Los productos notables son productos que se resuelven mediante una determinada regla establecida sin necesidad de una multiplicación extensa. Entre estos productos notables se encuentra el cuadrado de un binomio, el producto de dos binomios conjugados y el producto de dos binomios con termino común.

Revisarás algunas situaciones para tener presente el conocimiento de productos notables.

Situación 1

Doña Amalia compró un pequeño terreno cuadrado, el cual utilizó para sembrar algunas semillas de flores como se muestra en la siguiente figura:



¿Cuál es la expresión algebraica que representa el área que ocupa todo el terreno de doña Amalia?

Observa que la figura es un cuadrado, por lo tanto, su lado mide equis más 12, el área de un cuadrado es igual a la medida de su lado al cuadrado, entonces el área es igual al cuadrado de equis más 12.

Datos	Fórmula	Sustitución
Lado = $x + 12$	$A = x^2$	$A = (x + 12)^2$

Al obtener la expresión algebraica equis más doce al cuadrado, se obtiene un binomio al cuadrado, y aplicando la regla de este producto notable se tiene, el cuadrado del primer término que es igual a equis al cuadrado, más el doble del primer término que es equis por 12 que es el segundo término, que es igual a 24, más el cuadrado del segundo término que es igual a 144.

Binomio al cuadrado

$$(x + 12)^2 = x^2 + 24\,x + 144$$

El primer término elevado al cuadrado: x^2	Más el doble del primer término por el segundo término: $2(x)(12) = 24\,x$	Más el segundo término elevado al cuadrado: $12^2 = 144$

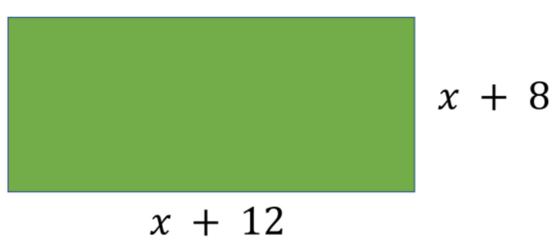
Entonces la expresión algebraica que representa el área que ocupa el terreno de doña Amalia es:

$$x^2 + 24x + 144$$

Situación 2.

Se tiene un rectángulo en el que su base es igual a $x + 12$ y su altura es igual a $x + 8$.

¿Cuál es la expresión algebraica correcta que representa el área de la figura?



La base del rectángulo es equis más 12 y la altura es equis más 8, entonces se toma en cuenta que para calcular el área de un rectángulo se obtiene el producto de la base y la altura.

Datos	Fórmula	Sustitución
Base = $(x + 12)$ Altura = $(x + 8)$	$A = base \times altura$	$A = (x + 12)(x + 8)$

Al representar este producto se puede observar que se obtiene el producto de binomios con término común.

Resolviendo se tiene, el producto de equis más doce por equis más ocho, es igual al cuadrado del término común “x” que es igual a “x” al cuadrado, más la suma de los términos no comunes por el término común, es decir, 12 más 8 y esta suma por equis, que es igual a 20 equis, más el producto de los términos no comunes que son 12 por 8, igual a 96.

Binomio con término común

$$(x + 12)(x + 8) = x^2 + 20x + 96$$

El término común elevado al cuadrado: x^2

Más la suma de los términos no comunes por el término común: $(12 + 8)x = 20x$

Más el producto de los términos no comunes: $(12)(8) = 96$

Por lo tanto, la expresión algebraica que representa el área del rectángulo es:

$$x^2 + 20x + 96$$

Resuelve ahora ¿cuál es el resultado de multiplicar equis menos 5 por equis más 5?

$$(x - 5)(x + 5)$$

Es un binomio conjugado, entonces es igual al cuadrado del primer término equis, que es igual a equis al cuadrado, menos el cuadrado del segundo término que es cinco, igual a cinco al cuadrado, igual a 25.

Binomio conjugado

$$(x-5)(x+5) = x^2 - 25$$

El cuadrado del primer término: x^2

Menos el cuadrado del segundo término: $5^2 = 25$

Por lo tanto, el resultado de multiplicar equis menos 5 por equis más 5 es igual a equis al cuadrado menos veinticinco.

Resuelve las siguientes situaciones. Identifica el producto notable correspondiente.

¿Cuál es el producto del binomio (x – 4) al cuadrado?

Binomio al cuadrado

$$(x-4)^2 = x^2 - 8x + 16$$

El primer término elevado al cuadrado: x^2

Más el doble del primer término por el segundo término: $2(x)(-4) = -8x$

Más el segundo término elevado al cuadrado: $(-4)^2 = 16$

Se eleva al cuadrado el primer término, “x” al cuadrado, más el doble del primer término que es “x”, por el segundo término que es cuatro negativo, es igual a ocho equis negativo, más el cuadrado del segundo término que es cuatro negativo, elevado al cuadrado, que es igual a dieciséis. Entonces el binomio al cuadrado es igual a equis al cuadrado menos ocho equis más dieciséis.

Así se resuelve un binomio al cuadrado.

¿Cuál es el producto de (x – 6) (x + 4)?

Binomio con término común

$$(x - 6)(x + 4) = x^2 - 2x - 24$$

El término común elevado al cuadrado: x^2

Más la diferencia de los términos no comunes por el término común: $(-6 + 4)x = -2x$

Más el producto de los términos no comunes: $(-6)(4) = -24$

El término común que es equis se eleva al cuadrado, más la suma algebraica de los términos no comunes por el término común, es decir la suma de seis negativo más cuatro todo por equis, es igual a dos equis negativa, más el producto de los términos no comunes, que es igual a seis negativo por cuatro, igual a veinticuatro negativo.

Por lo tanto, el producto de (x – 6) (x + 4), es igual a equis al cuadrado, menos dos equis, menos veinticuatro. Corresponde al producto de binomios con término común.

¿Cuál es el producto de (x + 3) (x – 3)?

Binomio conjugado

$$(x - 3)(x + 3) = x^2 - 9$$

El cuadrado del primer término: x^2

Menos el cuadrado del segundo término: $3^2 = 9$

Se eleva al cuadrado el primer término que es igual a equis al cuadro, menos el cuadrado del segundo término que es igual a tres al cuadrado. Por lo tanto, el producto de (x + 3) (x – 3), es igual a equis al cuadrado menos nueve. Es el producto de un binomio conjugado.

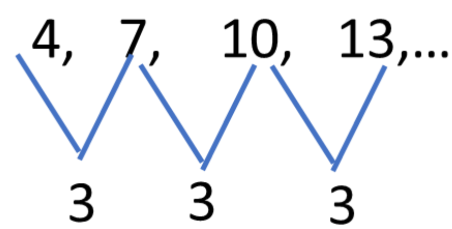
Recuerda aplicar las leyes de los signos para la suma, resta y multiplicación.

Pasa ahora a otro tipo de situaciones matemáticas para consolidar la resolución de problemas aritméticos y geométricos.

Una sucesión es un conjunto de números ordenados que se deducen de otros mediante una regla definida.

Resuelve los siguientes ejercicios de sucesiones.

Dada la sucesión 4, 7, 10, 13... ¿cuál es el término que ocupa el décimo lugar?, ¿cuál es el término que ocupa el veinticincoavo lugar?



El número cuatro ocupa la posición uno, el número siete ocupa la segunda posición, el número 10 ocupa la tercera posición, el número 13 ocupa la cuarta posición.

Entonces si obtienes la expresión algebraica se puede calcular el décimo término.

Observando la sucesión puedes observar que los números aumentan de 3 en 3, y si "n" es la posición de cada uno de los términos de la sucesión, observa que en la posición uno que se tiene un 4, si el 1 de la posición lo multiplicas por 3 y le sumas 1 obtienes ese 4, así que se deduce que la expresión algebraica que modela la sucesión es 3n más 1.

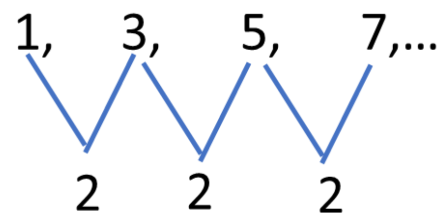
Se verifica para la posición 2 y se tiene, 2 por 3 igual a seis, le sumas 1 y se obtiene el 7 de la sucesión. Del mismo modo para la tercera posición sería 3 por 3 más 1 y se obtiene 10 que corresponde a la tercera posición de la sucesión.

Entonces para conocer el décimo término de la sucesión, se sustituye el diez por "n" y es igual a 3 por 10 más uno, es igual a treinta más 1, es igual a 31.

Entonces el número 31 es el término que ocupa el décimo lugar.

Para calcular el veinticincoavo término se sustituye 25 en el lugar de "n" en la expresión algebraica 3 ene más 1, entonces es igual a tres por veinticinco más uno, es igual a 75 más uno, es igual a 76, por lo tanto 76 ocupa el veinticincoavo lugar en la sucesión.

Resuelve el siguiente ejercicio. Dada la sucesión 1, 3, 5, 7... ¿cuál es el término que ocupa el octavo lugar?, ¿cuál es el término que ocupa el doceavo lugar?



La sucesión va amentando de dos en dos, entonces si se observa bien, se deduce que la regla de la sucesión es 2 ene menos 1. Esto se verifica para n=1, 2 por "n" menos 1 que es 2 menos 1 igual a 1.

En la segunda posición se tiene 2 por 2 menos uno igual a 4 menos uno igual a 3.

Entonces para calcular el término del octavo lugar se sustituye "n" por 8 y se tiene, dos por ocho menos 1, igual a dieciséis menos uno, igual a quince.

Por lo tanto, el número 15 es el término que ocupa el octavo lugar en la sucesión.

Y para el término doceavo de la sucesión, se sustituye 12 por la ene en la expresión algebraica obteniendo dos por doce menos 1, igual veinticuatro menos uno, igual 23. Por lo tanto, el número 23 es el término que ocupa el lugar doce en la sucesión.

Revisa el siguiente ejercicio de sucesiones, pero observa que tienes cuatro opciones para determinar la respuesta.

El número de producción de una fábrica de balones de futbol en el primer, segundo y tercer año en miles son 4, 12 y 24, respectivamente, ¿cuál es la expresión que representa el crecimiento del número de balones?

A) $n^2 + 3n$

C) $n^2 + 5n - 2$

B) $2n^2 + 2n$

D) $2n^2 + 3n - 1$

Observen que "n" representa el número de producción. También considera que, si se puede representar por medio de una expresión algebraica el crecimiento, entonces estos datos forman una sucesión.

Considera que analizando y comprobando los valores se decide la opción que corresponde a la expresión algebraica que representa la sucesión.

$$
\begin{aligned}
2n^2 + 2\,n &= 2(1)^2 + 2\,(1) \\
&= 2(1) + 2 \\
&= 2 + 2 \\
&= 4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2n^2 + 2\,n &= 2(2)^2 + 2\,(2) \\
&= 2(4) + 4 \\
&= 8 + 4 \\
&= 12
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2n^2 + 2\,n &= 2(3)^2 + 2\,(3) \\
&= 2(9) + 6 \\
&= 18 + 6 \\
&= 24
\end{aligned}
$$

De este modo, la opción 2 que es dos ene al cuadrado más 2 ene es la opción correcta porque al sustituir ene por el número de años de obtiene que dos ene al cuadrado más dos ene, sustituyendo el primer año, es igual a dos por uno al cuadrado más dos por uno, igual a dos por uno más dos, es igual a dos más dos, igual a cuatro.

Sustituyendo el segundo año, es igual a dos por dos al cuadrado, más dos por dos, igual a dos por cuatro, más cuatro, igual a ocho más cuatro, igual a doce.

Para el tercer año, es igual a dos por tres al cuadrado, más dos por tres, es igual a dos por nueve más seis, es igual a dieciocho más seis, igual a 24.

Es así como la expresión dos ene al cuadrado más dos ene cumple con el número de balones producidos por cada año.

Es muy importante saber deducir la regla matemática o expresión algebraica para calcular el enésimo término de una sucesión, es decir cualquier posición de una posición en la sucesión y así puede ser más fácil contestar ejercicios de sucesiones de figuras.

Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones, denominadas miembros de la ecuación.

La solución de una ecuación son los valores de las incógnitas que transforman dicha ecuación en una igualdad.

Se han trabajado ecuaciones lineales, las cuales tienen exponente igual a uno en la incógnita y cuadráticas y tienen el exponente igual a dos en la incógnita.

Ahora, ¿qué métodos de solución existen para las ecuaciones de segundo grado?

Las ecuaciones de segundo grado pueden resolverse despejando la incógnita que se busca, por factorización, completando un trinomio cuadrado perfecto y por fórmula general.

Trabaja en la solución de problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas, utilizando la fórmula general.

Resuelve los siguientes ejercicios.

El maestro de matemáticas dejó una tarea para ganarse un premio, pero Andrea no sabe calcular el valor de “x” en una ecuación cuadrática y ella quiere ganar el premio.

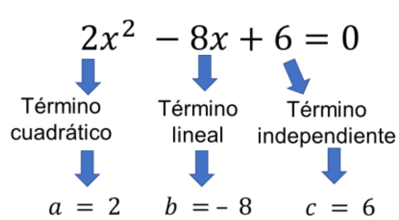
Ayudemos a Andrea a encontrar el valor de la x de la siguiente ecuación: $2x^2 - 8x + 6 = 0$, mediante la fórmula general. ¿Cuál es un valor de la x?

A) -3 C) 6

B) -1 D) 3

Se identifican los datos de los coeficientes numéricos del término cuadrático, lineal e independiente, siguiendo la forma general de la ecuación de segundo grado. Entonces, el término cuadrático es igual a 2, el término lineal es igual a 8 negativo, y el término independiente es igual 6.

La tarea de José es encontrar el valor de la x de la siguiente ecuación: $2x^2 - 8x + 6 = 0$, mediante la fórmula general. ¿Cuál es un valor de la x?



Después se sustituye en la fórmula general el coeficiente numérico de cada término, es decir, los valores de “a”, “b” y “c”. Entonces se tiene que equis es igual a menos por 8 negativo, más menos la raíz cuadrada de ocho negativo al cuadrado, menos el producto de cuatro por dos, por seis, todo entre el producto de dos por dos.

$$a = 2 \qquad b = -8 \qquad c = 6$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(2)(6)}}{2(2)}$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{4}$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{4}$$

$$x = \frac{8 \pm 4}{4}$$

$$x_1 = \frac{8 + 4}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

$$x_1 = \frac{8 - 4}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

“X” es igual a ocho, más menos la raíz cuadrada de sesenta y cuatro menos cuarenta y ocho, todo entre cuatro, es igual a ocho, más menos la raíz cuadrada de dieciséis, todo entre cuatro. Esto es igual a ocho, más menos cuatro, todo entre cuatro.

Ya sabes que una ecuación de segundo grado tiene dos soluciones. Para el primer valor de equis, sea equis uno es igual a ocho más cuatro, entre cuatro, que es igual a doce entre cuatro, es igual a tres.

Entonces el valor de equis uno es igual a tres.

Para el segundo valor de equis, sea equis dos, es igual a ocho menos cuatro, todo entre cuatro, es igual a cuatro entre cuatro, igual a uno. Entonces el valor de equis dos es igual a uno.

De acuerdo con las opciones dadas en la pregunta la correcta es la opción 4, que marca que uno de los valores de equis es igual a 3.

El siguiente ejercicio es calcular las raíces o solución de la ecuación “x” cuadrada menos 4x más 3 igual a cero.

¿Cuáles son las raíces de la siguiente ecuación?

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

A) $x_1 = 4 \; ; \; x_2 = 3$

C) $x_1 = -1 \; ; \; x_2 = -3$

B) $x_1 = 3 \; ; \; x_2 = 1$

D) $x_1 = -4 \; ; \; x_2 = -3$

Se identifican los coeficientes del término cuadrático que es igual a uno, el término lineal que es igual a cuatro negativo, el término independiente que es igual a tres.

¿Cuáles son las raíces de la siguiente ecuación?

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x^2 \quad - 4x \quad + 3 = 0$$

Término cuadrático — Término lineal — Término independiente

$$a = 1 \qquad b = -4 \qquad c = 3$$

Después se sustituyen los valores de “a”, “b” y “c” en la fórmula general, donde equis es igual a menos por cuatro negativo, más menos la raíz cuadrada de cuatro negativo al cuadrado menos el producto de cuatro por uno por tres, todo entre el producto de dos por uno.

$$a = 1 \qquad b = -4 \qquad c = 3$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(3)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2}$$

$$x = \frac{4 \pm 2}{2}$$

$$x = \frac{4 + 2}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$x = \frac{4 - 2}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

“X” es igual a cuatro, más menos la raíz cuadrada de dieciséis menos doce, todo entre dos “x” es igual a cuatro, más menos, la raíz cuadrada de cuatro, todo entre dos, y esto es igual a cuatro, más menos dos, todo entre dos.

Como sabes se obtienen dos soluciones.

Para el valor de la primera solución de equis, sea equis uno, se tiene que es igual a cuatro más dos, todo entre dos, es igual a seis entre dos, es igual a tres.

Para el valor de la segunda solución de equis, sea equis dos, se tiene que es igual a cuatro menos dos, todo entre dos, es igual a dos entre dos, que es igual a uno.

De acuerdo con las opciones la correcta es la opción 2, debido a que el valor de equis uno es igual a 3 y el valor de equis dos es igual a uno.

Revisa otro ejercicio.

Dos veces el cuadrado de un número, más tres veces el mismo número, más nueve unidades, es igual a 44. ¿Qué números cumplen con esta condición?

A) $x_1 = 3.5$; $x_2 = -5$

B) $x_1 = 2$; $x_2 = 6$

C) $x_1 = -3.5$; $x_2 = -5$

D) $x_1 = -7$; $x_2 = -1$

Primero se debe de plantear la ecuación para después identificar los términos cuadrático, lineal e independiente para resolver por la fórmula general.

Dos veces el cuadrado de un número, más tres veces el mismo número, más nueve unidades, es igual a 44. ¿Qué números cumplen con esta condición?

Datos

Dos veces el cuadrado de un número	$2x^2$
Más tres veces el mismo número	$+\ 3x$
Más nueve unidades	$+\ 9$
Es igual a 44	$= 44$

Ecuación $2x^2 + 3x + 9 = 44$

La ecuación planteada es dos equis al cuadrado, más tres equis, más nueve, igual a cuarenta y cuatro.

Pero se observa que la ecuación no está igualada a cero, entonces, por trasposición de términos, miembro a miembro se puede igualar a cero, por lo tanto, la ecuación queda: dos equis al cuadrado, más tres equis, menos treinta y cinco, es igual a cero.

Dos veces el cuadrado de un número, más tres veces el mismo número, más nueve unidades, es igual a 44. ¿Qué números cumplen con esta condición?

Ecuación $2x^2 + 3x + 9 = 44$

$$2x^2 + 3x + 9 - 44 = 0$$

$$2x^2 + 3x - 35 = 0$$

Ahora se identifica el término cuadrático, lineal e independiente de la ecuación.

Dos veces el cuadrado de un número, más tres veces el mismo número, más nueve unidades, es igual a 44. ¿Qué números cumplen con esta condición?

$$2x^2 \; + \; 3x \; - \; 35 \; = \; 0$$

Término cuadrático | Término lineal | Término independiente

$$a \; = \; 2 \qquad b \; = - \; 3 \qquad c \; = - \; 35$$

Después se sustituyen los valores de “a”, “b”, y “c” en la fórmula, donde equis es igual a menos tres, más menos raíz cuadrada de tres al cuadrado, menos el producto de cuatro por dos por treinta y cinco negativo, todo entre el producto de dos por dos.

$$a \; = \; 2 \qquad b \; = \; 3 \qquad c \; = - \; 35$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(3) \pm \sqrt{(3)^2 - 4(2)(-35)}}{2(2)}$$

$$x = \frac{-\,3 \;\pm \sqrt{9 + 280}}{4}$$

$$x = \frac{-3 \;\pm \sqrt{289}}{4}$$

$$x = \frac{-3 \;\pm 17}{4}$$

$$x = \frac{-3 + 17}{4} = \frac{14}{4} = 3.5$$

$$x = \frac{-3 - 17}{4} = \frac{-20}{4} = -5$$

“X” es igual a tres negativo, más menos la raíz cuadrada de nueve más doscientos ochenta, todo entre cuatro.

“X” es igual a tres negativo más menos la raíz cuadrada de doscientos ochenta y nueve, todo entre cuatro, es igual a tres negativo, más menos diecisiete, entre cuatro.

Para el primer valor de equis, sea equis uno es igual a tres negativo más diecisiete, todo entre cuatro, es igual catorce entre cuatro, es igual a tres punto cinco.

Para equis dos se tiene tres negativo, menos diecisiete todo entre cuatro, es igual a veinte negativo entre cuatro, igual a cinco negativo

Así la opción correcta es la 1, por lo tanto, los números que cumplen con la condición son 3.5 y 5 negativo.

El reto de hoy:

Revisa los casos que estudiaste a lo largo de la sesión. Anótalos en tu cuaderno y busca problemas semejantes.

Busca y resuelve en tu libro de texto los problemas relacionados con el tema y fortalece tu proceso de aprendizaje a distancia.

¡Buen trabajo!

Gracias por tu esfuerzo.