Lunes
13
de diciembre

3° de Secundaria
Matemáticas

Comportamiento gráfico de una función cuadrática

Aprendizaje esperado: *Lee y representa, gráfica y algebraicamente, relaciones lineales y cuadráticas.*

Énfasis: *Analizar las diferentes representaciones de una relación cuadrática. Partir de la gráfica.*

¿Qué vamos a aprender?

En esta sesión necesitarás tu cuaderno, lápiz, una regla y lápices de colores.

En especial, pondrás énfasis en analizar las diferentes representaciones de una relación cuadrática.

¿Qué hacemos?

Para iniciar, observa el siguiente video, en donde analizarás diferentes situaciones de la vida cotidiana y conocerás el modelado de una expresión algebraica que permite solucionarlas, primero, con una tabla y después, con una gráfica.

1. **Tablas, expresiones algebraicas y gráficas**
   https://www.youtube.com/watch?v=EBDbs_8b0pU

En la primera situación, en la que se realizó la conversión de los grados Fahrenheit a los grados centígrados, la gráfica resultante es una línea recta que no pasa por el origen del plano cartesiano, es decir, por el punto (0,0).

En el segundo caso, en el que se establece un comparativo, basado en el peso de diferentes objetos en la Luna y en la Tierra, la gráfica resultante es una línea recta que pasa exactamente por el origen.

En el video se hace referencia a kilogramos-fuerza, que son diferentes a los kilogramos con lo que se mide la masa, la cantidad de materia. No son equivalentes. Pero, muy importante, nada cambia del problema matemático. En adelante, cuando se mencione el peso y uses kilogramos, se estará hablando de kilogramos-fuerza.

¿Sabes cuál es tu peso en la Luna?, si observaste, la constante de proporcionalidad entre los pesos de cada uno de los objetos, es de un sexto; esto quiere decir que, si divides tu peso entre seis, obtendrás tu peso en la Luna. Por ejemplo, si pesas 68 kilogramos, si divides entre seis, irán todos a la Luna para bajar de peso sin hacer dieta, aun cuando mantengas la misma masa.

Cabe aclarar que éste es un valor referencial, ya que se involucran más operaciones y más datos necesarios para calcularlo con mayor precisión.

En cuanto al tercer problema, el del autobús, la gráfica resultante fue una línea curva. Esto nos da una idea que, dependiendo de la situación presentada, los datos obtenidos y la relación que tengan entre ellos, dará como resultado un tipo de gráfica diferente.

Analiza el comportamiento de las gráficas, según el tipo de ecuación que las modela, comprobarás que, al ir modificando los valores de la ecuación, éstos se reflejan en el comportamiento de la gráfica.

Utiliza la expresión $y = x$, al graficarla en el programa de cálculo, observa que pasa por el centro del plano cartesiano y la línea que la modela es una recta.

Si ahora inviertes el signo de esta ecuación, es decir, graficas “y” es igual a menos “x”, observa que la línea se inclina hacia el lado contrario.

Observa cómo, al cambiar el signo, cambia la dirección de la línea. Ahora, a la incógnita le sumas uno, observa cómo la línea se desplaza hacia arriba una unidad. Si le sumas dos ¿dónde cortará al eje “y”?

En el dos positivo ¿Y si le sumas 3 a la incógnita? Pues, cortará en el 3 positivo del eje de las ordenadas.

¿Qué pasará si en lugar de sumar restas? Cuando le restas uno a la incógnita, la recta se desplaza hacia abajo en el plano cartesiano, posicionándose en uno negativo, y al restarle dos y al restarle 3.

Observa el comportamiento de la gráfica conforme modificas la expresión algebraica. Parte nuevamente de la primera ecuación: ahora, en lugar de sumar y restar, vas a duplicar la incógnita. Para esto, es necesario que midas primero el ángulo que se forma entre la recta de la ecuación y el eje de las abscisas, que es de 45°. Cuando duplicas el valor de la incógnita, cambia la inclinación.

Ya sabes que esta recta representa la expresión algebraica $y = x$; observa ahora qué sucede con $y = 2x$.

Observa que el ángulo cambió, se inclinó más con respecto al eje "x" ¿y triplicando la incógnita? la línea se inclina más y más, conforme aumenta el coeficiente del término x.

Estas ecuaciones son conocidas como directamente proporcionales y lineales, porque modelan una recta en el plano cartesiano que pasa por el origen.

Observa cómo se comporta una gráfica que representa una expresión cuadrática.

Considera la expresión algebraica $y = x$; ahora, eleva esta incógnita al cuadrado, la línea se convierte en una línea curva muy peculiar, y el vértice de ésta se encuentra en el origen del plano. Si cambias la ecuación de positiva a negativa, puedes observar que la curva se abre en diferente dirección, ya sea hacia arriba o hacia abajo. Ahora, duplica el término y observa qué pasa con la amplitud de la curva, ésta se reduce, si la triplicas, cuadruplicas, se sigue reduciendo ¿y qué pasa si manejas un valor menor a uno, pero mayor a cero? Se amplía.

Suma a esta expresión cuadrática otro término, agregarás la misma variable y observa qué pasa. Inicialmente, el vértice se encuentra en el origen y, al adicionarle la variable, el vértice cambia de lugar, se desplaza hacia la izquierda y hacia abajo.

Ahora, duplica el segundo término para observar qué pasa con tu vértice. Al hacerlo, éste se desplaza en la misma dirección, observa ahora dónde se encuentra. Si de esta forma sigues incrementando el valor del segundo término, la curva se seguirá desplazando siempre en la misma dirección.

Hasta aquí, has aprendido cómo cambia una gráfica según los valores que tenga la ecuación que la modela.

Trabaja ahora en un problema asociado a una situación de la vida cotidiana.

Una empresa de aerotransportes realiza pruebas con contenedores que soporten las caídas desde cierta altura, de forma que puedan proveer de materiales a su personal en tierra, sin necesidad de aterrizar las aeronaves.

Cuando el helicóptero se encuentra a una altura de 300 metros, debe dejar caer la carga, mientras un experto registra en una tabla el tiempo de caída y la distancia que recorre.

Responde las siguientes preguntas derivadas de la situación anterior.

¿Cuánto tiempo tardó en llegar la carga al suelo?

¿Cuál de las siguientes expresiones permite calcular la distancia de caída en función del tiempo transcurrido?

$a)\ 3t^2 \quad b)\ 3t \quad c) 9t \quad d)\ 3+t^2$

Para contestar auxíliate de la tabla con los datos que el experto registró al momento de la caída del contenedor.

Analiza cada valor para poder descubrir cuánto tiempo tardó en caer la carga al suelo. Los datos de la tabla son los siguientes:

- = 297

- = 288

Tiempo	Distancia	Altura
0	0	**300**
1	**3**	297
2	12	
3	27	273
4	48	252

El tiempo de partida es cero y la altura —según el problema— es de 300 metros, la distancia que ha recorrido a los cero segundos es cero metros.

Al pasar un segundo, el objeto se ha desplazado tres metros hacia la tierra; para obtener la altura a la que se encuentra el objeto después de un segundo, lo que hay que hacer es restar esta distancia de la altura total, esto es: a los 300 metros, restas 3 que ha caído, lo que da un total de doscientos noventa y siete metros, y lo colocas en la tabla.

De esta forma, ya obtuviste tu primer valor; prosigue con las demás cantidades. Al siguiente segundo, el objeto ahora ha recorrido doce metros.

Para obtener la altura del objeto, restas doce a trescientos, ya que ésta era la altura inicial a la que se encontraba la carga; restas los doce metros, y encuentras el resultado, el cual te da una altura de doscientos ochenta y ocho metros de altura.

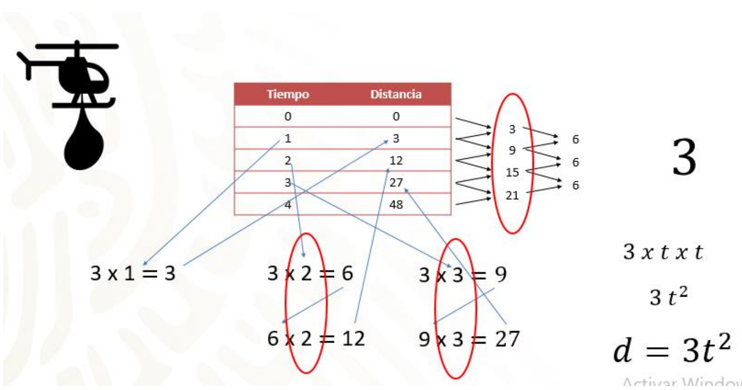
De esta forma, al ir restando la cantidad de metros que ha recorrido el objeto, menos la altura inicial, encuentras la altura actual.

Al tercer segundo, encuentras que el objeto se encuentra a doscientos setenta y tres metros de altura.

Y al cuarto segundo, a doscientos cincuenta y dos metros.

Con los valores proporcionados por el experto, has encontrado una parte de los valores de la tabla; sin embargo, te falta encontrar los metros que se desplaza el objeto con cada segundo. Para esto, toma los valores y analízalos, de forma que puedas obtener la ecuación que te ayudaría a encontrar los valores faltantes, y el tiempo total que el objeto tarda en llegar al suelo.

Para poder encontrar la ecuación, usarás los valores que ya se tienen, en este caso, el tiempo y la distancia de caída, y los organizas como se muestra en la tabla.



Procede a calcular la diferencia entre los dos primeros valores, el tres y el cero, y se obtiene como valor el tres.

Realiza el mismo proceso con el tercer valor, que es doce, menos el segundo valor que es 3, y obtienes como resultado nueve.

Ahora, el cuarto valor, es decir, el veintisiete y el tercer valor que es el doce, al calcular la diferencia, obtienes quince.

Lo mismo entre el quinto valor, que es cuarenta y ocho y el cuarto valor que es veintisiete, al obtener la diferencia tienes como resultado veintiuno.

Ya realizaste la primera parte del proceso, debes tener estos resultados muy presentes, ya que con ellos se obtendrá parte de la ecuación.

Repite el proceso de encontrar las diferencias entre los valores, ahora con los resultados obtenidos.

Así, calcularás la diferencia entre nueve y tres, y tienes como resultado seis; después, calculas la diferencia entre el quince y el nueve, y vuelves a obtener seis.

Por último, obtienes la diferencia entre el veintiuno y el quince y obtienes nuevamente seis.

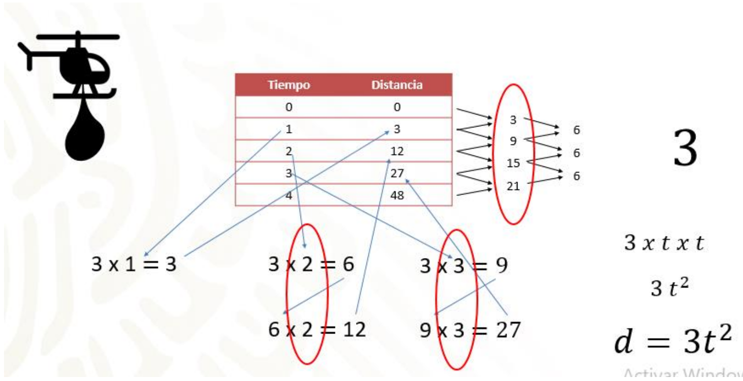
Con este último paso, observa que la serie tiene una regularidad, ya que obtienes el mismo valor, en este caso el seis. Lo que te indica que es una variación cuadrática.

Si no hubieras obtenido esta regularidad, podrías enfrentarte a una serie que no tiene características comunes entre sí.

Observa ahora los primeros números obtenidos de las diferencias y tienen una coincidencia entre sí ¿Qué relación tienen estos números que los hace comunes?

Todos son múltiplos de 3. De esta forma, ya encontraste el primer valor de la ecuación.

Ahora, relaciona este valor con el tiempo; cómo se habla de múltiplos, la operación involucrada es una multiplicación, por eso, hay que calcular el producto del tres obtenido por el tiempo, y lo haces con los primeros valores de la tabla, después del cero.



Observa: tres por uno da como resultado tres, que es el que está en la distancia. Hasta este momento ha coincidido.

Ahora, con los siguientes valores: multiplicas tres por dos, da como resultado seis, pero en la columna de distancia tienes un doce ¿Qué falta para obtener este número?

Volver a multiplicarlo por dos, ahora sí tienes ya el doce.

Ahora ve con los siguientes valores: a tres lo multiplicas por tres, da como resultado nueve, ¿Qué operación debes realizar para que dé veintisiete? Multiplicar por tres.

Observa la siguiente característica: como en las dos multiplicaciones, el valor por el cual multiplicas el tres se repite nuevamente —es decir, al tres lo multiplicas dos veces por el tiempo—, puedes deducir que para encontrar la distancia recorrida por el objeto: debes multiplicar el tres por el tiempo y después nuevamente por el tiempo.

Y si multiplicas el tiempo por el tiempo, sabes que te da tiempo al cuadrado.

Por lo tanto, la ecuación que representa este problema es: distancia igual a tres que multiplica el tiempo al cuadrado.

Sólo queda aplicar esta ecuación para determinar los valores faltantes en la tabla inicial.

Tiempo	Distancia	Altura
0	0	300
1	3	297
2	12	288
3	27	273
4	48	252
5	75	225
6	108	192
7	147	153
8	192	108
9	243	157
10	300	0

$$d = 3t^2$$
$$d = 3(5)^2$$
$$d = 3(25)$$
$$d = 75$$

Aplica la ecuación d= 3t^2 y coloca ahora en la columna de tiempo el número cinco, que es el valor que continúa: lo sustituyes en la ecuación en el lugar de la “t” del tiempo, y realizas las operaciones, multiplicas cinco por cinco y obtienes veinticinco, ahora, multiplicas veinticinco por tres y obtienes 75. Esto quiere decir que, a los cinco segundos de haber soltado el objeto, habrá recorrido una distancia de 75 metros.

Calcula la diferencia entre 300 y 75, y obtienes que la altura es igual a doscientos veinticinco metros.

Realiza este mismo procedimiento para obtener todos los valores de la tabla, reemplaza el valor del tiempo en la ecuación, realiza las operaciones para obtener la distancia recorrida, después calcula la diferencia entre trescientos y la distancia, y obtienes la altura a la que se encuentra el objeto del suelo.

Con lo aprendido, ya resolviste ambas preguntas, escribe los resultados.

¿Cuánto tiempo tardó en llegar la carga al suelo?

La carga tarda 10 segundos en llegar al suelo.

¿Cuál de las siguientes expresiones permite calcular la distancia de caída en función del tiempo transcurrido?

$a)\ 3t^2 \quad b)\ 3t \quad c) 9t \quad d)\ 3 + t^2$

Con este ejercicio, has analizado una variación cuadrática; aplicándola encuentras la ecuación que la modela, y los datos faltantes.

El Reto de Hoy:

Revisa tu libro de texto para buscar problemas similares. Las matemáticas requieren estudio, pero forman parte de la vida, ya que las encuentras en todos lados; además, ayudan a desarrollar un punto de vista diferente sobre los problemas de la vida cotidiana.

¡Buen trabajo!

Gracias por tu esfuerzo.

Para saber más:

https://www.conaliteg.sep.gob.mx/