

**Lunes
18
de octubre**

3° de Secundaria

Matemáticas

*Triángulo rectángulo
Problemas*

Aprendizaje esperado: *Resuelve problemas que implican el uso del Teorema de Pitágoras.*

Énfasis: *Resolver problemas que impliquen el uso del triángulo rectángulo.*

¿Qué vamos a aprender?

Empezarás analizando al triángulo rectángulo, sus características y problemas, después conocerás las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo, y finalmente, llegarás al Teorema de Pitágoras.

Analizarás los elementos y características de una de las figuras geométricas básicas, pero de múltiples aplicaciones y usos en muchas ramas del conocimiento, no sólo en las matemáticas. Se trata del triángulo rectángulo.

Los materiales que utilizarás son:

- Cuaderno de apuntes
- Libro de texto
- Cartulina

- Hoja de colores o recicladas
- Juego geométrico
- Marcador
- Lápiz
- Goma
- Tijeras
- Pegamento

Si cuentas con una aplicación de geometría dinámica, se te recomienda usarla para practicar la clase.

¿Qué hacemos?

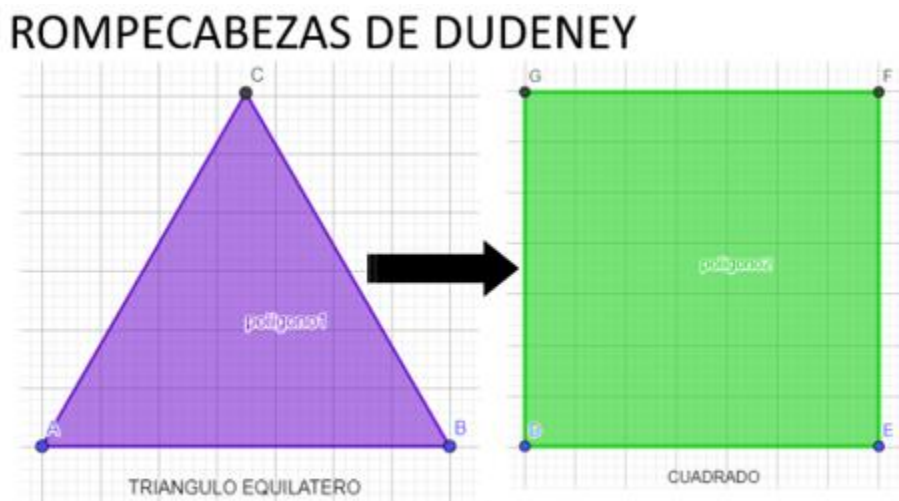
Realiza un experimento geométrico muy atractivo, es el rompecabezas de Dudeney, un acertijo abierto durante 100 años.

Un brillante creador de rompecabezas, llamado Henry Dudeney, en el año 1907, lanzó un acertijo que sería un dolor de cabeza para muchos matemáticos en aquel tiempo, y que permaneció sin resolución en aquella época.

100 años después, en el año 2007, un estudiante del Instituto Tecnológico de Massachusetts de los Estados Unidos lo resolvió de una manera interesante.

Observa:

El acertijo dice ¿Se puede recortar un triángulo equilátero para formar un rompecabezas de manera que, al reordenar sus piezas, se forme un cuadrado?



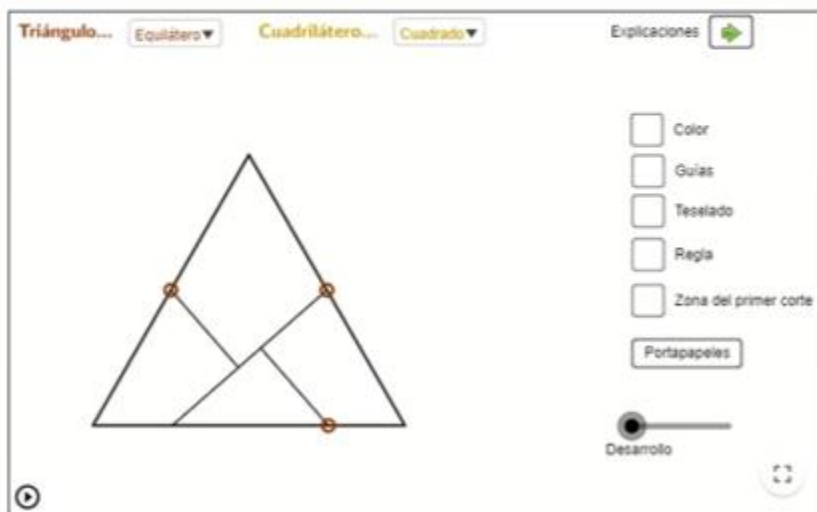
¿Cómo Hacer que el Triángulo entre exactamente en el cuadrado?

Sobre el papel, no se ve muy fácil ni interesante, pero al construirlo puedes notar algo muy singular.

Sucede que, al cortar el triángulo equilátero en piezas, éstas se pueden unir con bisagras, de tal manera que al desdoblarlas y volver a ordenarlas se forma un cuadrado y viceversa: las piezas se vuelven a desdoblar y se ordenan en sentido contrario hasta formar el triángulo.

Tema: Cuadriláteros, Cuadrado, Transformaciones Geométricas, Trapecio, Triángulos

Haciendo únicamente tres cortes, podemos transformar casi cualquier triángulo en un cuadrilátero que elijamos; por ejemplo un cuadrado. Con esta actividad aprenderemos cómo resolverlo, con un método basado en los acertijos de Henry Dudeney.



Se dice que Dudeney se sentía tan bien con su diseño, que se fabricó unos muebles que tenían esa forma, y ahora muchos diseñadores de muebles e interiores lo usan para hacer creaciones propias. Incluso, diseños de casas giratorias se han creado con esas formas.

Desde ese tiempo, muchos matemáticos intentaron llevar dichas características a otras figuras geométricas planas y en prismas con esas bases, con polígonos más complicados. A través del tiempo, se fueron diseñando o creando figuras más sorprendentes con figuras geométricas impresionantes.

¿Podrás encontrar otra forma de resolver este acertijo?

Si investigas en Internet u otras fuentes, sabrás que, así como esta demostración, hay muchas más, incluso más complicadas; "Disecciones de Dudeney" y cómo se utilizan en la cotidianidad.

Ahora, considera una de las figuras geométricas tal vez más simples, pero que tiene un gran significado y múltiples aplicaciones en el entorno, se trata del triángulo rectángulo.

En sus cursos anteriores de matemáticas, estudiaste la clasificación de los triángulos con respecto a sus lados y también, con respecto a sus ángulos.

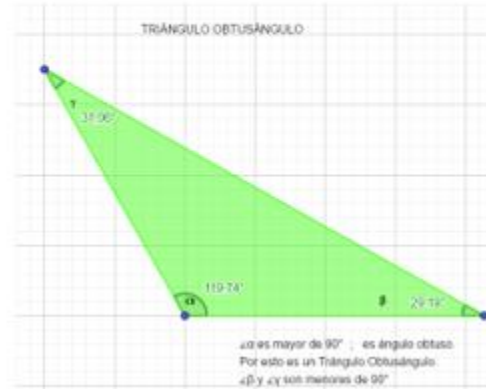
Recuerda cómo se clasifican los triángulos respecto a sus ángulos.

CLASIFICACIÓN DE LOS TRIÁNGULOS POR SUS ÁNGULOS

A. TRIÁNGULO ACUTÁNGULO



B. TRIÁNGULO OBTUSÁNGULO

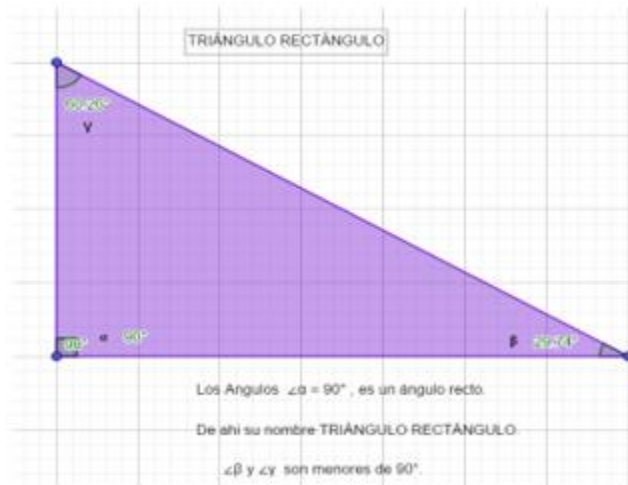


Triángulos acutángulos: son triángulos que tienen los tres ángulos agudos, es decir que miden menos de 90° .

El triángulo que observas en azul tiene sus tres ángulos agudos. Los ángulos alpha(α), beta(β) y gamma(γ), son menores de 90° o sea, son agudos.

Se denomina triángulo obtusángulo, al triángulo que tiene un ángulo mayor de 90 grados, es decir obtuso y está representado en color verde.

C. TRIANGULO RECTÁNGULO



El tercer ejemplo es un triángulo en el que observas un ángulo, el alpha(α), igual a 90° , es decir se trata de un ángulo recto.

De ahí el nombre de este triángulo, es decir, triángulo rectángulo y es la figura geométrica que estudiarás.

Observa la siguiente reseña histórica, en ella conocerás cómo este triángulo rectángulo ha sido utilizado en diversas culturas.

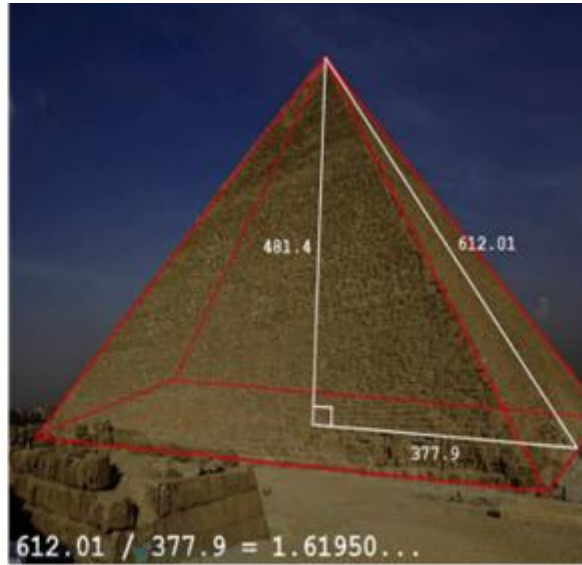
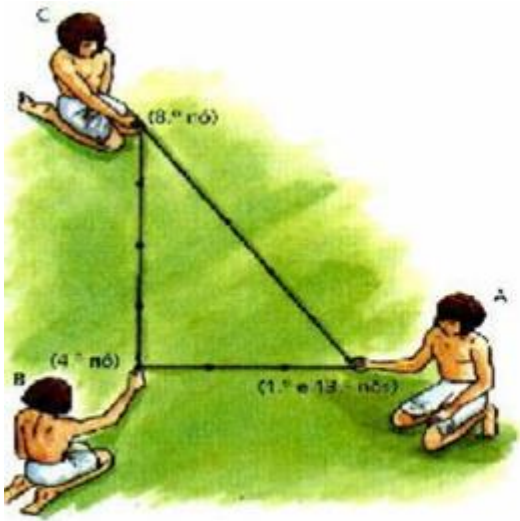
Hay registros en papiros desde mediados del siglo XVI a.C. sobre el uso de triángulos rectángulos. Los antiguos egipcios lo empleaban para fijar límites de las parcelas después de las inundaciones del río Nilo.

TRIÁNGULO RECTÁNGULO EN LA HISTORIA.

Delta del Río Nilo,
Área donde los
geómetras median
las parcelas.



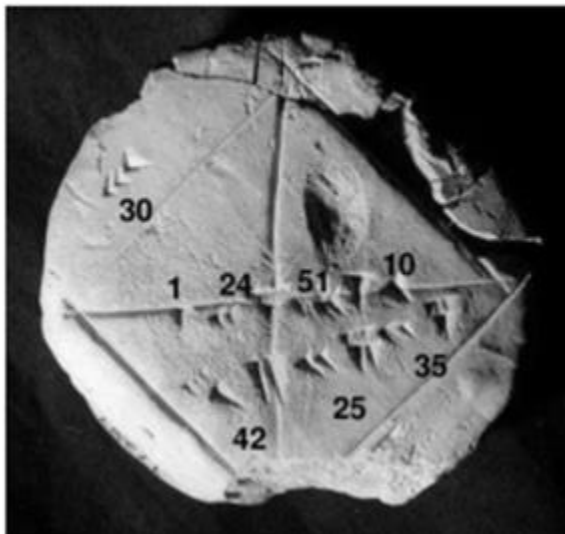
Los egipcios observaron que, uniendo con forma de triángulo una cuerda con 12 nudos separados a la misma longitud, se obtiene un ángulo recto y, por lo tanto, un triángulo rectángulo. Obteniendo así el triángulo sagrado egipcio de proporciones 3, 4 y 5 nudos por lado.



Triángulo de doce nudos

Los babilonios utilizaban el concepto del triángulo rectángulo más general como lo muestra la tablilla YBC7289, que data de aproximadamente de unos 2000 años antes de nuestra era, donde claramente se ve un triángulo rectángulo y la numeración propia.

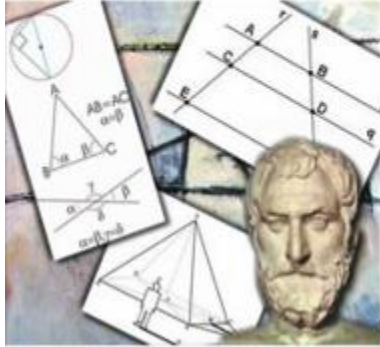
BABILONIOS



Los griegos tomaron elementos de los babilonios y egipcios, estructurando definiciones, axiomas y demostraciones hacia el siglo VI antes de nuestra era, con grandes aportaciones como el Teorema de Tales o el Teorema de Pitágoras.

GRIEGOS

Tales de Mileto

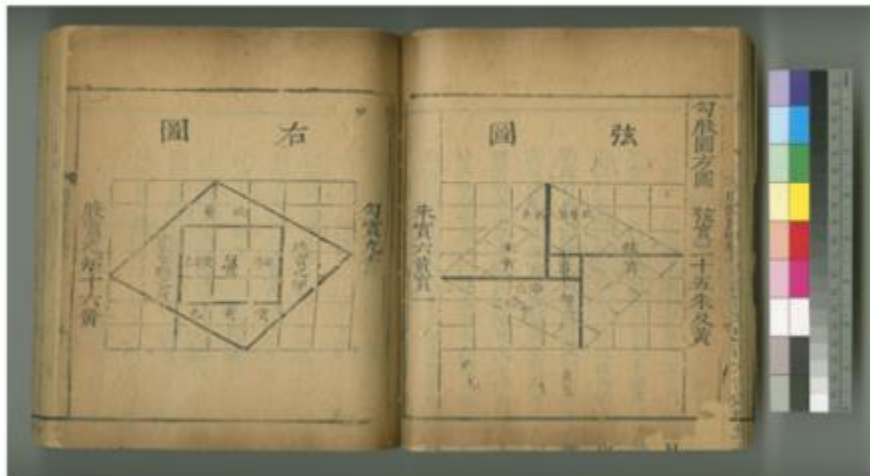


Pitágoras de Samos



En la cultura China antigua, también se encuentra el uso de triángulos rectángulos en los textos del Zhoubi Suanjing, libro que data de 1000 años antes de nuestra era, con una colección de problemas que implican el uso del triángulo rectángulo.

CHINA

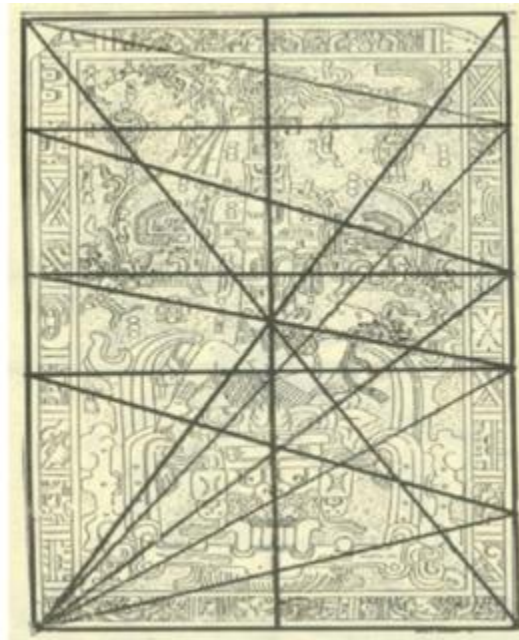


Zhoubi Suanjing

En la cultura Maya es posible observar la composición de los rectángulos áureos o de proporción áurea, empleando triángulos rectángulos como en la lápida del sarcófago del Rey Pakal, encontrado en el templo de las inscripciones en Palenque, Chiapas.

MAYA

Lápida del sarcófago del rey Pakal, encontrado en el Templo de las Inscripciones en Palenque Chiapas.



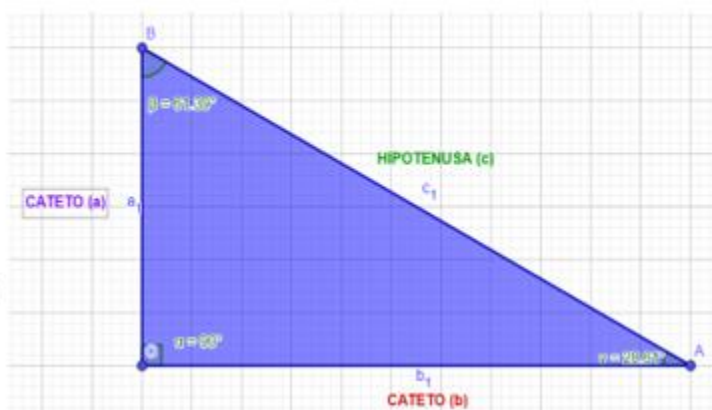
Resulta interesante conocer cómo el triángulo rectángulo fue empleado en diversas culturas y cuáles fueron los usos que tuvo, así como su influencia en la historia.

Continúa con el análisis del triángulo rectángulo. Los elementos del triángulo rectángulo son:

ELEMENTOS DEL TRIÁNGULO RECTÁNGULO

CATETOS (a) y (b).
Del griego "Kathetos",
"Cae en perpendicular".

HIPOTENUSA (c).
Del griego
"Hypotenousa",
"Linea bajo los catetos"



Los lados a y b que se denominan "Catetos", cuyo término proviene del griego "Kathetos", que significa "que cae en perpendicular".

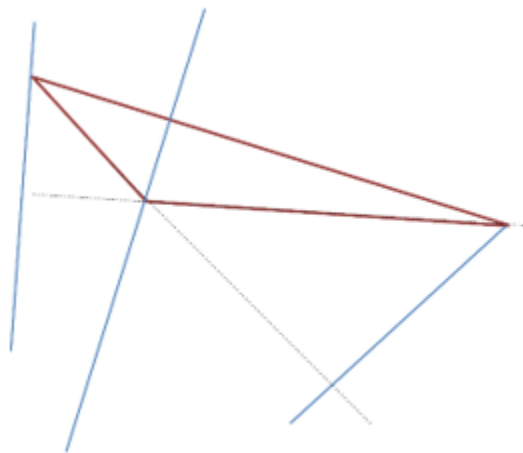
El lado c, denominado Hipotenusa, proviene del griego "Hypotenousa", formada por el prefijo hypo, debajo de; del verbo teino, tuirar; y del ousa, participio femenino. Se puede traducir como 'firmemente sujeta' o 'firmemente tensada'.

Los primeros geómetras griegos eran, como su nombre lo indica, medidores de la tierra y para trazar se ayudaban de estacas y cuerdas. Entonces, para trazar un triángulo rectángulo, tensaban fuertemente una cuerda entre las estacas que formaban los catetos, es decir, entre los vértices.

El triángulo rectángulo tiene un ángulo recto, formado por los catetos y dos ángulos agudos bajo la hipotenusa.

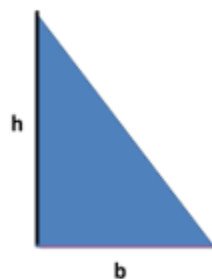
Consulta alguna fuente, como tú libro de texto, para reafirmar estos conceptos y así, tú mismo puedes indagar el origen de estas palabras del triángulo que estas analizando.

Una recta notable de los triángulos es la altura:

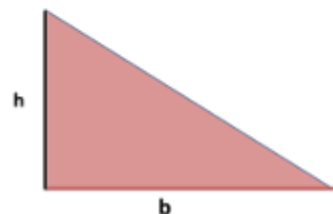
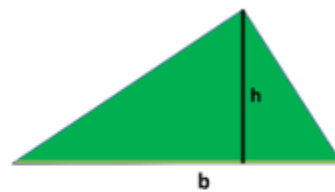


Un triángulo tiene tres alturas.

La altura y el área del triángulo rectángulo



$$A = b * h / 2$$



El área del triángulo se calcula con la expresión:

$$A = (bh)/2$$

Donde b es la base o lado horizontal h es la medida de la altura que va del vértice al segmento opuesto, y por definición, es perpendicular a b .

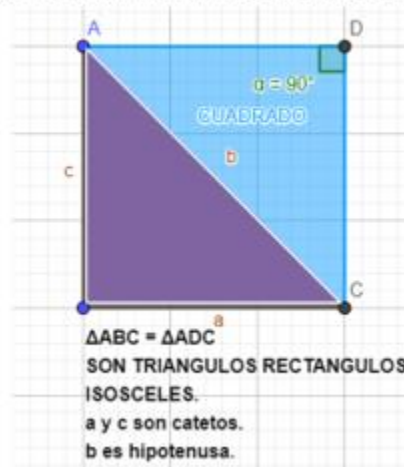
En el triángulo rectángulo, la altura depende de la posición que tiene (3 posiciones) y para las tres, el área se calcula de la misma forma.

Los triángulos rectángulos pueden ser elementos que generen otras figuras geométricas o que representen algún estudio dentro de ellas.

Cuando trazas una diagonal a un cuadrado, obtienes dos triángulos rectángulos isósceles, es decir, triángulos con dos lados iguales. Si observas bien, verás que este triángulo tiene una característica que ya conociste antes.

UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO SE ENCUENTRA EN...

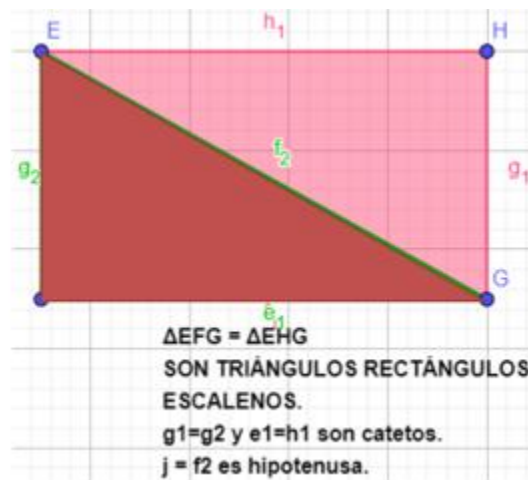
CUADRADO



Son triángulos rectángulos congruentes.

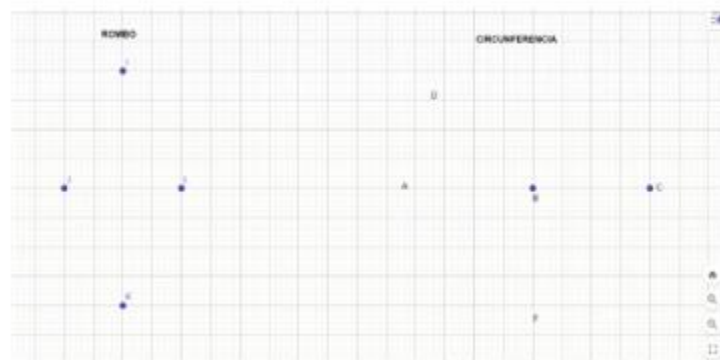
Cuando trazas una diagonal a un rectángulo, obtienes dos triángulos rectángulos escalenos, que también si se dan cuenta son triángulos rectángulos congruentes.

RECTÁNGULO



Observa un breve video de cómo se pueden obtener los triángulos rectángulos, escalenos e isósceles. Utilizando para ellos, las figuras básicas del rombo y una circunferencia.

Triángulos rectángulos en rombo y circunferencia



1. Geogebra

<https://www.geogebra.org/classic/p9pw3n7a>

Así como en estas figuras geométricas se obtienen triángulos rectángulos, también en los trapecios, romboides, polígonos regulares y muchas otras figuras geométricas planas, se pueden obtener triángulos rectángulos.

Los triángulos rectángulos que forman el rombo son congruentes, ¿puedes decir por qué es así? Argumenta.

El triángulo que se forma en la circunferencia es rectángulo. ¿Puedes dar argumentos para justificar esta afirmación?

Observa otras características del triángulo rectángulo.

Otro análisis especial :
La semejanza de triángulos.

Donde se relacionan

$$\frac{BC}{ED} = \frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AE} = k$$

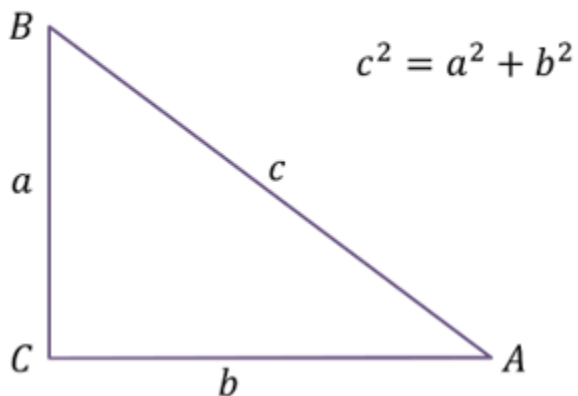
Si K es igual entonces
los triángulos son
semejantes .



Un análisis que involucra al triángulo rectángulo, es usando el “Teorema de Tales”.

Cuando a un triángulo rectángulo le trazas una paralela a cualquier lado, obtienes otro triángulo rectángulo semejante o proporcional al original.

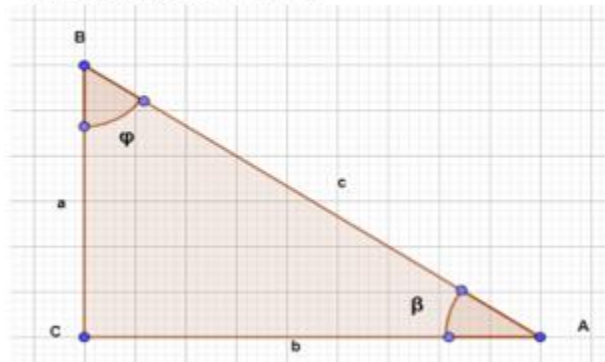
TEOREMA DE PITÁGORAS UN ANÁLISIS ESPECIAL



Un análisis especial sobre la aplicación de un triángulo rectángulo, es el Teorema de Pitágoras, que lo aprenderás con más detalle en las siguientes sesiones.

También conocerás una rama de las matemáticas llamada trigonometría, donde se analizan las relaciones de los ángulos y lados del triángulo rectángulo.

TRIGONOMETRÍA



Relación entre

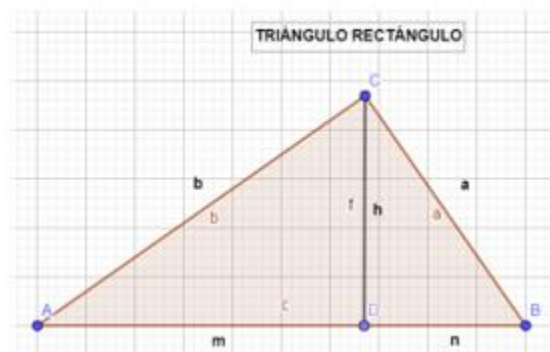
ángulos
 $\angle \beta$ y $\angle \varphi$,

y los lados
 \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} , \overrightarrow{BC}

Así también, un análisis muy parecido a los dos teoremas anteriores es: El Teorema de Euclides, que aprenderás en las siguientes clases, donde estudiarás:

- El teorema de la altura
- El teorema de los catetos

TEOREMAS DE EUCLIDES



TEOREMA DE LA ALTURA

$$h^2 = m \cdot n$$

TEOREMA DEL CATETO

$$a^2 = n \cdot c$$

$$b^2 = m \cdot c$$

En la vida cotidiana, ¿dónde puedes ver, donde se utiliza y para qué sirve un triángulo rectángulo?

La utilización de estos triángulos en la vida cotidiana es muy común y resuelven problemas y situaciones.

Observa algunas de ellas:

Triángulo Rectángulo en nuestro entorno

- 1.- RAMPA DE CARGA.
2. ESCALERAS PEATONALES
3. JUEGOS INFANTILES



Otros triángulos rectángulos en nuestro entorno



Techos de acceso.

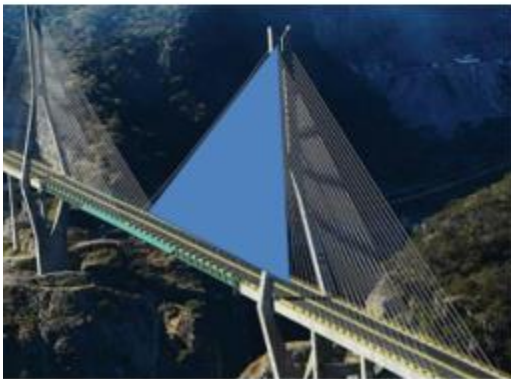


Edificios Corporativos



Casas ecológicas

El triángulo rectángulo en monumentos históricos



Grandes construcciones

Casas Rurales

Otra de las grandes aplicaciones en donde se emplean triángulos rectángulos, es la ingeniería. La triangulación en la medición y división de terrenos y parcelas en el campo y la ciudad.

En la Ingeniería



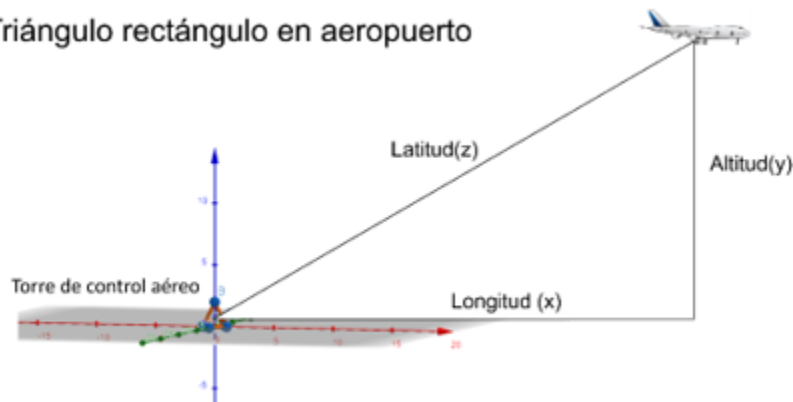
Así como en el diseño, trazado y construcción de puentes, caminos y carreteras en vías de comunicación.

Caminos y puentes



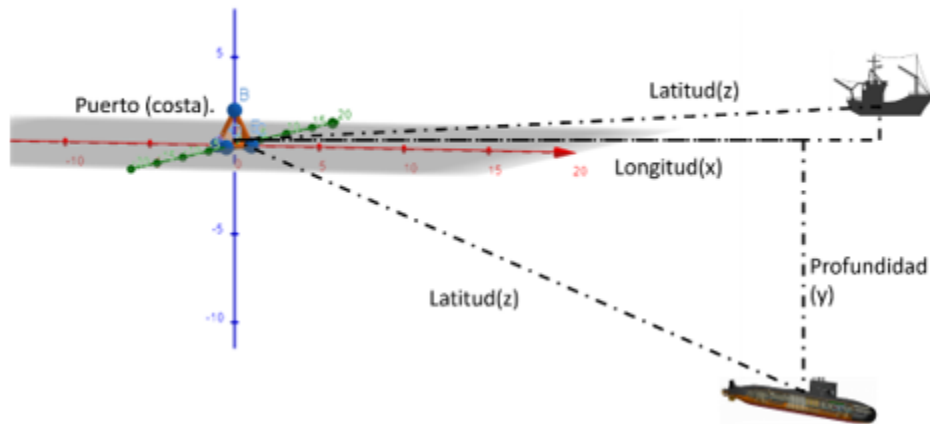
La medición de grandes distancias entre poblaciones o ciudades, que se obtienen utilizando aparatos muy sofisticados que utilizan la señal de satélite.

Triángulo rectángulo en aeropuerto



En un aeropuerto, la torre de control ubica una aeronave en vuelo antes de llegar o al despegar de la pista de aterrizaje. Se utilizan también procesos digitales, cuyas bases de cálculo, tienen al triángulo rectángulo.

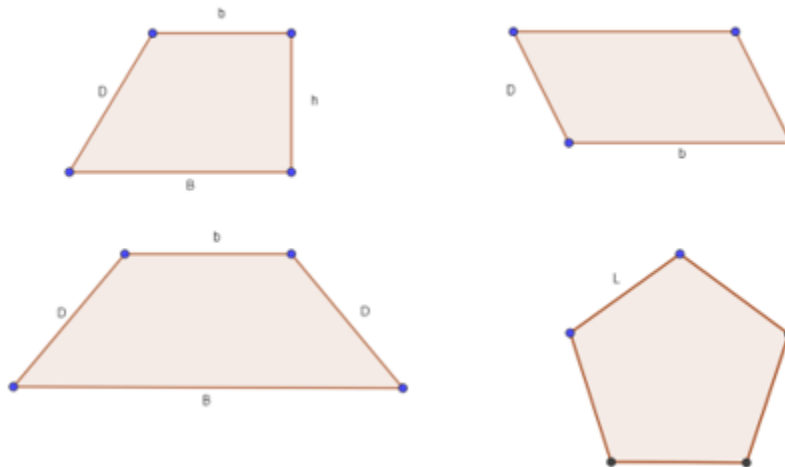
Triángulo rectángulo en un puerto marítimo



En un puerto a la orilla del mar, se puede tener un control de las embarcaciones que se hacen a la mar, ya sea sobre o bajo el nivel del mar, y se puedan ubicar cuando éstas se encuentran en alta mar.

Cómo has visto, son tantas las aplicaciones prácticas y de solución a situaciones reales de la vida cotidiana en donde el triángulo rectángulo se emplea.

ACTIVIDAD



Como primera actividad, y para que tú mismo verifiques estos trazos, se te recomienda trazar en cartulina de colores, un trapecio isósceles, trapecio escaleno, romboide y un polígono regular (pentágono, hexágono, etc.), y traza las diagonales y segmentos correspondientes y verifica los triángulos rectángulos que se obtienen en ellos. Pega tus trazos y recortes en tus cuadernos y reflexiona con ellos, contesta las siguientes preguntas, anotando en tu cuaderno las mismas.

1. ¿Cuántos triángulos rectángulos obtuviste por figura?

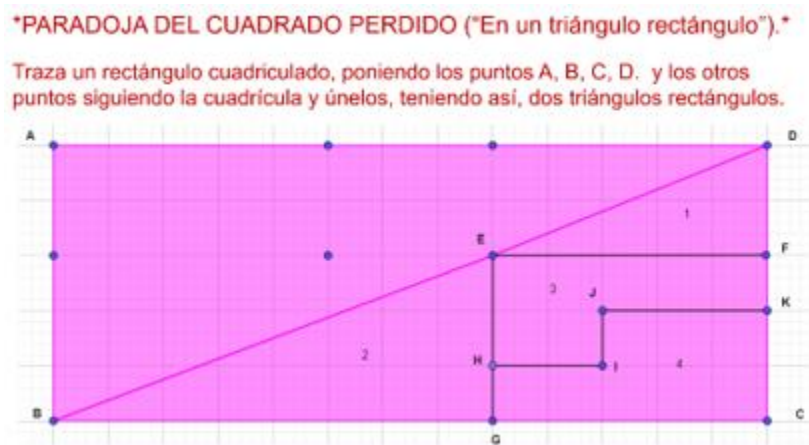
2. ¿Cuántos triángulos rectángulos isósceles y escalenos hay en total?
3. ¿Los triángulos rectángulos de cada figura son congruentes o semejantes?, ¿Cuáles?

Realiza la siguiente actividad que involucra al triángulo rectángulo.

Es importante que sigas bien las instrucciones para que llegues a las conclusiones.

El ejercicio final se llama “La paradoja del cuadrado perdido”.

En una cartulina, traza un rectángulo de 5 x 13 cuadritos (pueden tomar cada cuadrito de 2 cm por lado, así como se muestra).

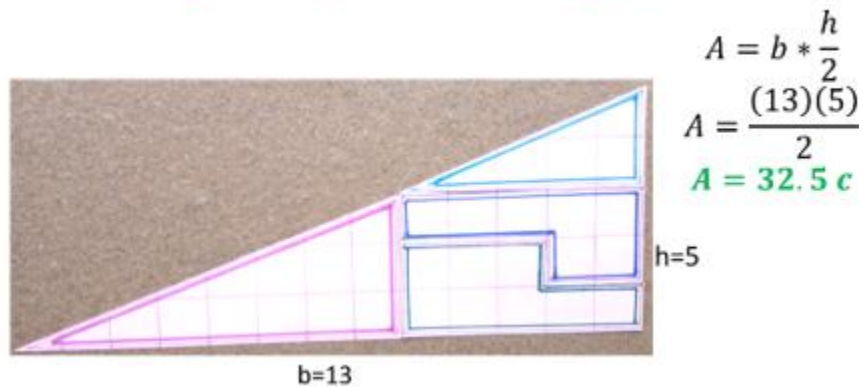


Hecha esta cuadrícula, escribe en cada vértice del rectángulo las letras A, B, C, D, así como se muestra.

Después, escribe los puntos desde la E, G, H, I, J, K, deben colocar bien los puntos, tomando como referencia los cuadritos del rectángulo, verifica dónde se colocan las letras.

Recorta el triángulo B E D C del rectángulo, y no tiren el triángulo resultante.

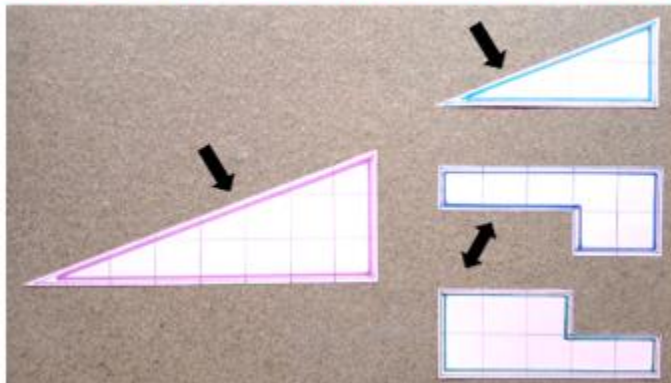
Recorta el triángulo rectángulo inferior del rectángulo, así



Obtienes el área del triángulo inicial B D C que es:

Área = $(5 \times 13) \text{ entre } 2 = 32.5 \text{ cuadritos.}$

Recorta las piezas que marcaste con los puntos, así



Una vez puestos los puntos, recorten los dos triángulos rectángulos.

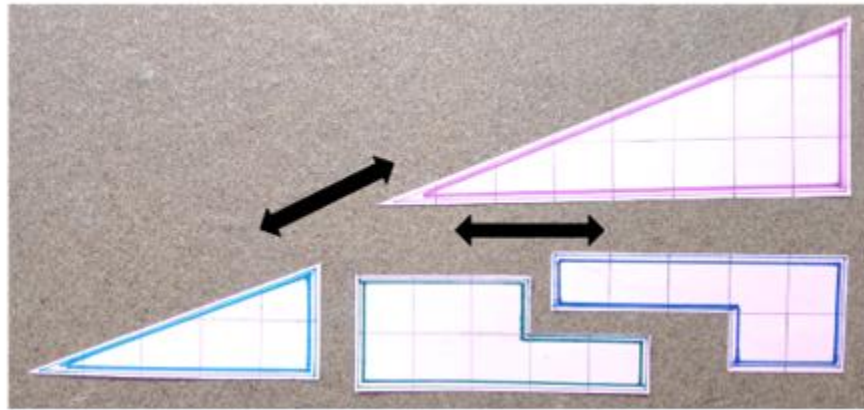
El triángulo D E F de 2 x 5 cuadritos y el triángulo E B G de 3 x 8 cuadritos

Un rectángulo E F C G de 3 x 5 cuadritos, que se divide en dos piezas. Identifícalas bien.

La pieza E F K J I H de 7 cuadritos de área.

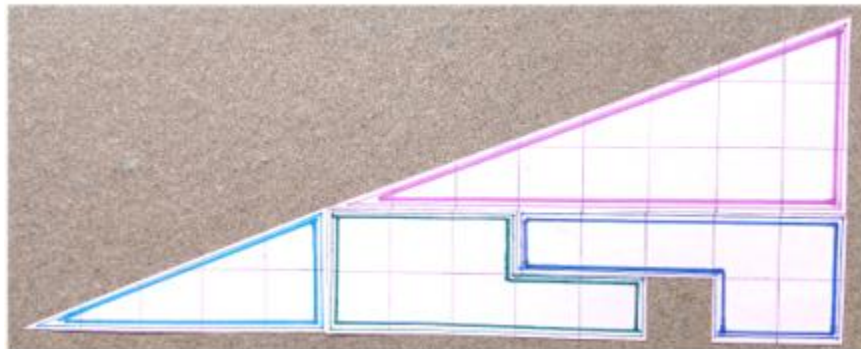
La pieza H I J K C G de 8 cuadritos de área.

Cambia de lugar las piezas de esta forma.



Intercambia los triángulos de lugar, así como las piezas del rectángulo, de tal manera, que ahora quede un rectángulo de 2 x 8 y los triángulos cambian su posición. Tal y como se muestra:

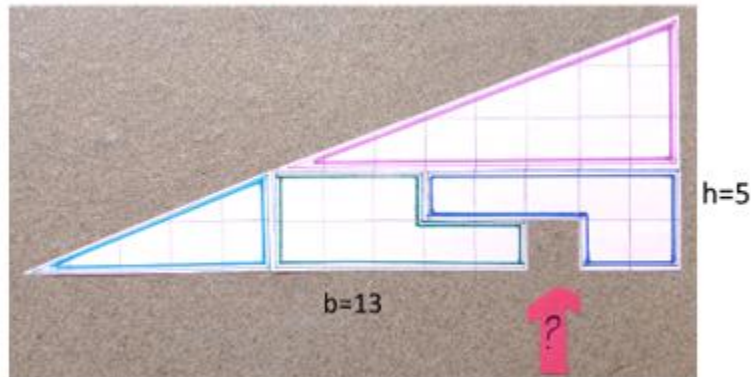
Une las piezas con la nueva posición.



Reagrupa la figura con las piezas ahora en el lugar que corresponde, de tal manera, que se vuelva a formar el mismo triángulo que tenías al principio, sin sobreponer piezas, ni forzar a que entren en otro espacio.

Falta un cuadrado exactamente.

Que pasó aquí?



En el triángulo inicial el área fue de...
32.5 cuadritos.
la base y la altura son las mismas.
Pero ...
Y ahora es de

$32.5 - 1 =$
31.5 cuadritos.

Esto quiere decir que ahora tienes un triángulo cuya área es de:

$$\text{Área} = (5 \times 13) \text{ entre } 2 = 32.5 - 1 = 31.5 \text{ cuadritos}$$

Falta un cuadrito, ya que el área del triángulo inicial era de:

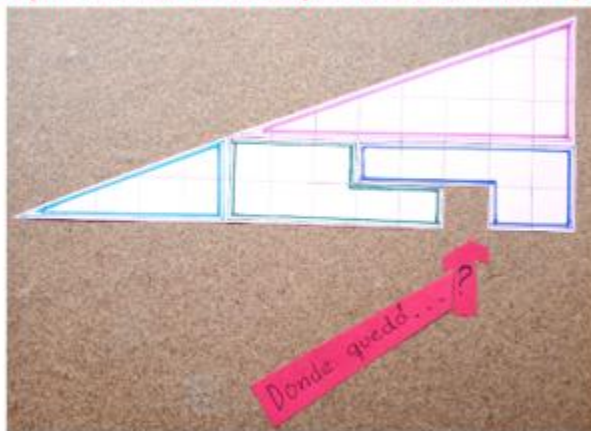
$$\text{Área inicial} = 32.5 \text{ cuadritos}$$

¿Qué pasó aquí?

¿En qué momento se perdió ese cuadrito?

¿Dónde quedó ese cuadrito?

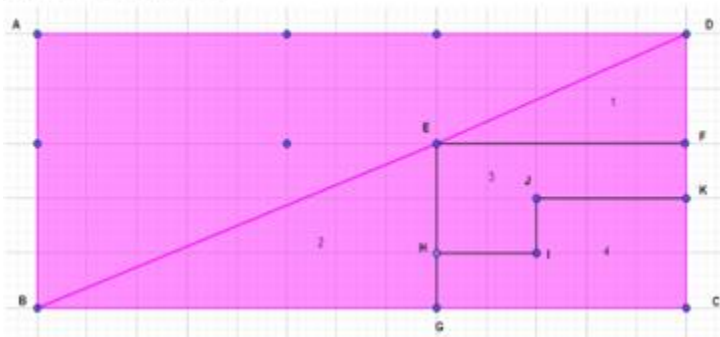
¡Como explicarían, Donde quedó el cuadrito que falta??



Si te regresas al principio.

¿Te acuerdas de dónde sacaste el triángulo rectángulo que recortaste? ¿Aquí estará el cuadrado que falta? ¿Qué importancia tendrá el otro triángulo A B D en este misterioso caso?

Te acuerdas de donde sacamos el triángulo rectángulo que recortamos?

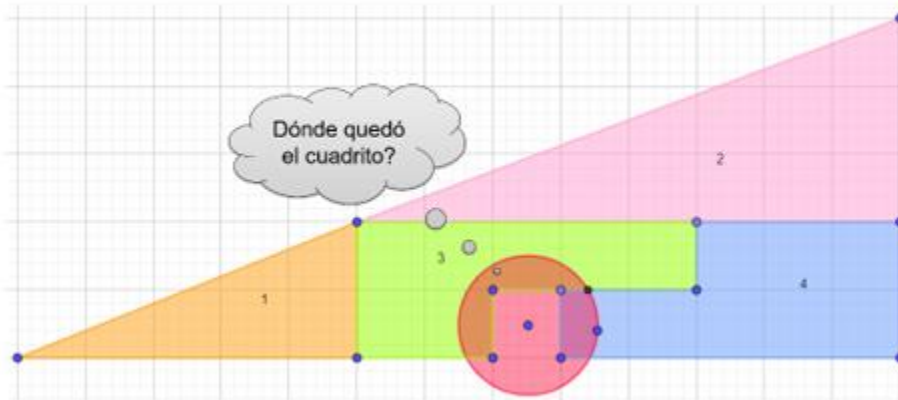


- Estará ahí el otro cuadrado?
- ¿Que importancia tendrá el otro triángulo rectángulo en el misterio?

Retoma el rectángulo original A B C D.

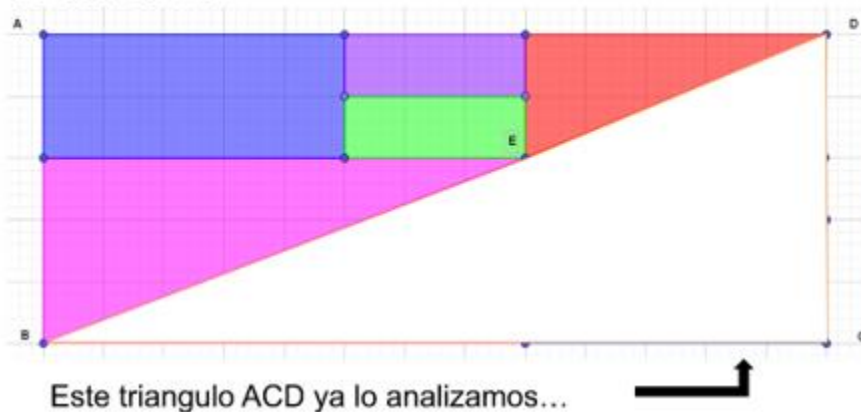
Recuerda el análisis que hiciste con el triángulo B C D, donde al separar las piezas 1, 2, 3, y 4 y volviendo a unir las, queda un triángulo al que le falta un cuadrado.

Recordemos que en este caso, hizo falta un cuadrado



Si ahora tomas el triángulo rectángulo A B D, que es el triángulo que sobró del recorte que hiciste al inicio. Y quitas el triángulo B C D que ya analizaste.

Del rectángulo anterior, dividimos dos triángulos rectángulos de esta forma:

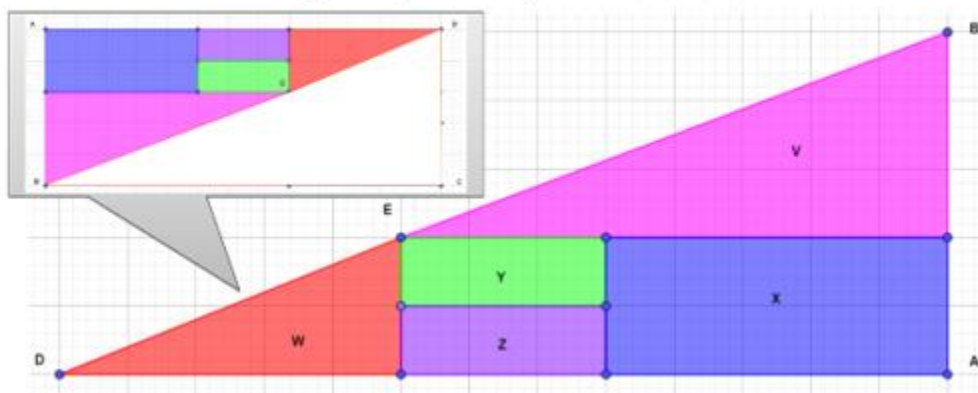


Gira el triángulo rectángulo A B D 180°, quedando la hipotenusa sobre los catetos.

Se trazan los rectángulos y triángulos rectángulos escribiéndole las letras V, W, X, Y, Z. Así como se indican.

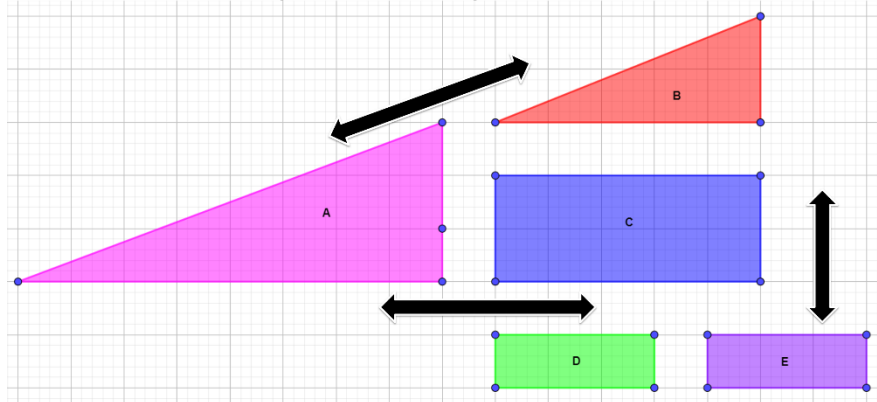
Se obtienen también dos triángulos rectángulos y tres rectángulos.

Tomamos el segundo triangulo BAED, del rectángulo original.
Se trazan los triángulos y rectángulos V,W,X,Y,Z



Una vez numeradas las piezas del rompecabezas con las letras que se indicaron, se separan estas piezas para cambiarlas de posición tal y como se muestra.

Se cambian de posición las piezas...

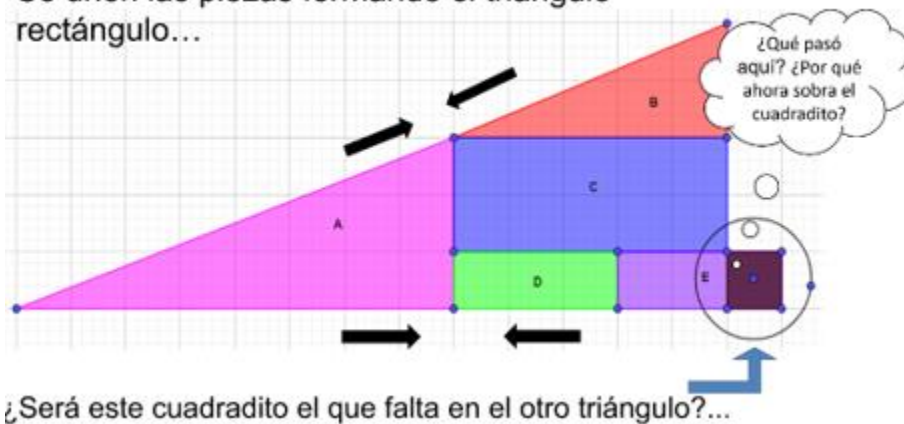


Nota que los triángulos cambian de posición, así como en el ejercicio anterior.

En el siguiente paso, se vuelven a unir las piezas formando otra vez el triángulo rectángulo, sin sobreponer las piezas ni forzar a poner una pieza en un espacio que no corresponde.

¿Ocurre algo raro también en este arreglo?

Se unen las piezas formando el triángulo rectángulo...



Sí, ahora sobra un cuadrado. La pregunta es ¿por qué sobra, si ahora también son las mismas piezas?

¿Por qué en el primer triángulo, el cuadrado se pierde?

Ahora en este segundo triángulo, ¿por qué sobra un cuadrado si en ambos casos el área es la misma?

¿Por qué en el primer triángulo el cuadrado se pierde?

¿porqué en el segundo triángulo sobra un cuadrado?

Recordemos que en este caso, hizo falta un cuadrado.

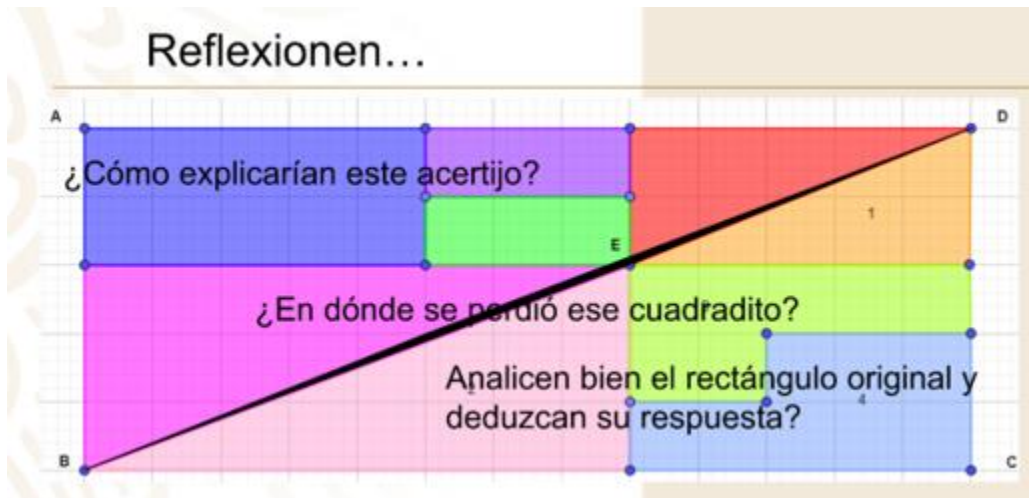


¿Qué relación hay entre el cuadrado que se pierde y el que sobra?

¿Cómo explicarías este acertijo?

¿En dónde se perdió el cuadrado?

Analiza muy bien el rectángulo original y deduce tu respuesta.



Fíjate muy bien cómo se dividió el rectángulo y se obtuvieron los triángulos analizados.

El Reto de Hoy:

Realiza tus propias conclusiones. Anota tus conclusiones en tu cuaderno, si hiciste los recortes, pégalos.

Reflexiona y encuentra la respuesta al misterioso cuadrado perdido.

Más adelante, en otra clase se aclarará el resultado.

¡Buen trabajo!

Gracias por tu esfuerzo.

Para saber más:

<https://www.conaliteg.sep.gob.mx/>